1. 정답 ④	**2.** 정답 ①	**3.** 정답 ④
4. 정답 ③	**5.** 정답 ④	**6.** 정답 ④
7. 정답 7	**8.** 정답 ②	**9.** 정답 ⑤
10. 정답 ③	**11.** 정답 ④	**12.** 정답 ④
13. 정답 ②	**14.** 정답 ④	**15.** 정답 ⑤
16. 정답 ③	**17.** 정답 ③	**18.** 정답 ④
19. 정답 ③	**20.** 정답 ④	**21.** 정답 ③
22. 정답 ①	**23.** 정답 ⑤	**24.** 정답 ⑤
25. 정답 ④	**26.** 정답 ②	**27.** 정답 ③
28. 정답 ①	**29.** 정답 ⑤	**30.** 정답 ②
31. 정답 ⑤	**32.** 정답 70	**33.** 정답 ②
34. 정답 ④	**35.** 정답 ⑤	**36.** 정답 ②
37. 정답 35	**38.** 정답 25	**39.** 정답 ②
40. 정답 ④	**41.** 정답 ②	**42.** 정답 ②
43. 정답 256	**44.** 정답 ⑤	**45.** 정답 ②
46. 정답 ①	**47.** 정답 ④	**48.** 정답 ②
49. 정답 ③	**50.** 정답 6	

1. 정답 ④

[해설]

-3^{10}의 다섯제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[5]{-3^{10}}$ 뿐이다.

$\therefore a=\sqrt[5]{-3^{10}}=-\sqrt[5]{3^{10}}=-3^2$

따라서, $-a=9$의 네제곱근 중에서 실수인 것은 $\pm\sqrt[4]{9}=\pm\sqrt{3}$의 두 개가 존재한다.

이 중에서 음수인 것은 $-\sqrt{3}$이다.

2. 정답 ①

[해설]

$x=\sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{4}}$이므로 $x^n=2^{\frac{n}{4}}$이 세 자리의 자연수이려면

$2^{\frac{n}{4}}=2^7, 2^{\frac{n}{4}}=2^8, 2^{\frac{n}{4}}=2^9$이어야 한다.

따라서 자연수 n의 값은 $4\times7,\ 4\times8,\ 4\times9$이므로 모든 자연수 n의 값의 합은 $4(7+8+9)=96$

3. 정답 ④

[해설] ㄱ. (반례) 8의 세제곱근은 $x^3=8$에서 $x=2,\ -1\pm\sqrt{3}i$의 3개다. (거짓)

ㄴ. $a=-c,\ b=-d\ (c>0,\ d>0)$로 놓으면

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{-c}\sqrt[n]{-d}=(-\sqrt[n]{c})(-\sqrt[n]{d})$

$=\sqrt[n]{c}\sqrt[n]{d}=\sqrt[n]{cd}$

$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{(-c)(-d)}=\sqrt[n]{cd}$

$\therefore \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ (참)

ㄷ. n이 홀수일 때, $-\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{-a}$이므로

$\sqrt[m]{-\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{-a}}=\sqrt[n]{-a}=\sqrt[n]{-a}$

$=\sqrt[n]{\sqrt[m]{-a}}$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

4. 정답 ③

[해설] -6의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-6}$의 한 개이므로 $m=1$

10의 네제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[4]{10},\ \sqrt[4]{10}$의 두 개이므로 $n=2$

$\therefore m+n=3$

5. 정답 ④

[해설] $\sqrt{2}$의 네제곱근 중 음의 실수인 것은 $-\sqrt[4]{\sqrt{2}}$이므로

$a=-\sqrt[4]{\sqrt{2}}=-\sqrt[8]{2}$

$-\sqrt{2}$의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-\sqrt{2}}$이므로

$b=\sqrt[3]{-\sqrt{2}}=-\sqrt[3]{\sqrt{2}}=-\sqrt[6]{2}$

$\therefore ab=(-\sqrt[8]{2})\times(-\sqrt[6]{2})=\sqrt[8]{2}\times\sqrt[6]{2}$

$=\sqrt[24]{2^3}\times\sqrt[24]{2^4}$

$=\sqrt[24]{2^7}$

6. **정답 ④**

임의의 실수 a에 대하여

$a>0$이면 a의 네제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[4]{a},\ -\sqrt[4]{a}$의 두 개 이므로 $f(a)=2$

$a=0$이면 a의 네제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[4]{0}=0$ 의 한 개 이므로 $f(a)=2$

$a<0$이면 a의 네제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로 $f(a)=0$

따라서 $f(a),\ f(b)$의 값은 $0,\ 1,\ 2$ 중 어느 한 값을 취하므로 $f(a)f(b)$의 값은 $0,\ 1,\ 2,\ 4$가 될 수 있다.

즉 $A=\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$이므로 집합 A의 원소의 개수는 4이다.

7. 정답 7

[해설]

$\sqrt{2}>0$, 4는 짝수이므로 $f(\sqrt{2},4)=2$

$\sqrt[5]{-2}<0$, 5는 홀수이므로 $f(\sqrt[5]{-2},5)=1$

$-\sqrt[6]{2}<0$, 6은 짝수이므로 $f(-\sqrt[6]{2},6)=0$

$\therefore 2f(\sqrt{2},4)+3f(\sqrt[5]{-2},5)+4f(-\sqrt[6]{2},6)$

$=2\cdot2+3\cdot1+4\cdot0=7$

[참고]

$a>0$, n이 짝수이면 $f(a,n)=2$

$a<0$, n이 짝수이면 $f(a,n)=0$

a가 실수, n이 홀수이면 $f(a,n)=1$

$a=0$이면 $f(a,n)=1$

8. 정답 ②

[해설] $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$

$\sqrt[3]{(-2)^3}=\sqrt[3]{-8}=-2$

$\sqrt[3]{(-2)^6}=\sqrt[3]{2^6}=2^2=4$

$\therefore$ (주어진 식)$=2\times(-2)\div4=-1$

9. 정답 ⑤

[해설]

$(\sqrt{2\sqrt{6}})^4=\left\{(2\sqrt{6})^{\frac{1}{2}}\right\}^4=(2\sqrt{6})^2=24$

10. 정답 ③

[해설] $9^{-\frac{1}{4}}=(3^2)^{-\frac{1}{4}}=3^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. 정답 ④

[해설] $\sqrt[3]{a}=4$에서 $a=4^3=2^6$

$\sqrt[4]{b}=8$에서 $b=8^4=2^{12}$

따라서 $ab=2^6 2^{12}=2^{18}$이므로

$\sqrt[6]{ab}=\sqrt[6]{2^{18}}=2^3=8$

12. 정답 ④

[해설]

$9^{\frac{3}{2}} \times 27^{-\frac{2}{3}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} \times (3^3)^{-\frac{2}{3}}$

$= 3^3 \times 3^{-2} = 3^{3-2} = 3$

13. 정답 ②

$\left(8^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} = 8^{-\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}} = 8^{-\frac{1}{6}} = (2^3)^{-\frac{1}{6}} = 2^{-\frac{1}{2}}$

$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$

$\sqrt{2\sqrt[3]{2^4}} = \sqrt{2\times 2^{\frac{4}{3}}} = \sqrt{2^{\frac{7}{3}}} = (2^{\frac{7}{3}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{6}}$

∴ (주어진 식) $= 2^{-\frac{1}{2}} + 2^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{7}{6}}$

$= 2^{-\frac{1}{2}} + 2^{\frac{2}{3}-\frac{7}{6}}$

$= 2^{-\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}}$

$= 2 \cdot 2^{-\frac{1}{2}}$

$= 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

14. 정답 ④

[해설]

$8^{\frac{2}{3}} \div 12^{\frac{1}{3}} \times 18^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2^{3\times\frac{2}{3}} \times (2\times 3^2)^{\frac{2}{3}}}{(2^2\times 3)^{\frac{1}{3}}} = 2^{2+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}$

$= 2^2 \times 3 = 12$

15. 정답 ⑤

[해설] $9^{-\frac{3}{2}} = (3^2)^{-\frac{3}{2}} = 3^{-3}$

$8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$

$\sqrt{81^{-3}} = 81^{-\frac{3}{2}} = (3^4)^{-\frac{3}{2}} = 3^{-6}$

∴ (주어진 식) $= 3^{-3} \times 2 \div 3^{-6} = 3^{-3} \times 2 \times 3^6$

$= 2 \times 3^3 = 54$

16. 정답 ③

[해설] $\sqrt{2} \circ 2\sqrt[4]{2} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt[4]{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt[4]{2}}$

∴ $(\sqrt{2} \circ 2\sqrt[4]{2}) * 4\sqrt{2} = (\sqrt{2})^{\sqrt[4]{2}} * 4\sqrt{2}$

$= \{(\sqrt{2})^{\sqrt[4]{2}}\}^{\sqrt{4\sqrt{2}}}$

$= \{(\sqrt{2})^{\sqrt[4]{2}}\}^{2\sqrt[4]{2}}$

$= (\sqrt{2})^{2\sqrt{2}}$

$= \{(\sqrt{2})^2\}^{\sqrt{2}}$

$= 2^{\sqrt{2}}$

17. 정답 ③

[해설] $\frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{b}{a}} = \sqrt[4]{\left(\frac{a}{b}\right)^4 \cdot \frac{b}{a}} = \sqrt[4]{\frac{a^3}{b^3}}$ 이므로

$\sqrt[3]{\frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{b}{a}}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{\left(\frac{a}{b}\right)^3}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^3}}$

$= \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$

∴ $\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{b}{a}}}} = \sqrt{\frac{b}{a}\sqrt[4]{\frac{a}{b}}} = \sqrt{\sqrt[4]{\left(\frac{b}{a}\right)^4 \cdot \frac{a}{b}}}$

$= \sqrt[8]{\left(\frac{b}{a}\right)^3} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{8}}$

18. 정답 ④

[해설]

$\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}} = (a \cdot a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = \left(a^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{12}}$

$\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}} = \left(a \cdot a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{3}}$

∴ $\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}{\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}} = \dfrac{a^{\frac{5}{12}}}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{5}{12}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{12}}$

∴ $k = \frac{1}{12}$

19. 정답 ③

[해설]

$\sqrt[6]{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt[6]{a\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt[6]{a \cdot a^{\frac{3}{4}}} = \sqrt[6]{a^{\frac{7}{4}}} = a^{\frac{7}{24}}$

$\sqrt[n]{\sqrt{a} \cdot \frac{a}{\sqrt[3]{a}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{7}{6}}} = a^{\frac{7}{6n}}$

따라서 $a^{\frac{7}{24}} = a^{\frac{7}{6n}}$ 에서 $6n = 4$

∴ $n = 4$

20. 정답 ④

[해설]

$A = 2^{\frac{1}{2}}, B = 3^{\frac{1}{3}}, C = 6^{\frac{1}{6}}$ 이므로

$A^6 = 2^3 = 8, B^6 = 3^2 = 9, C^6 = 6$

∴ $C < A < B$

21. 정답 ③

[해설]

$A = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$

$B = \sqrt[4]{\frac{8}{27}} = \sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$

$C = \sqrt[3]{\frac{9}{16}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$

이므로 $A^{12} = \left(\frac{2}{3}\right)^8, \ B^{12} = \left(\frac{2}{3}\right)^9, \ C^{12} = \left(\frac{3}{4}\right)^8$

$$\frac{A^{12}}{B^{12}}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^8}{\left(\frac{2}{3}\right)^9}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}>1 \qquad \therefore A>B \ \cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{A^{12}}{C^{12}}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^8}{\left(\frac{3}{4}\right)^8}=\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}\right)^8=\left(\frac{8}{9}\right)^8<1 \qquad \therefore A<C \ \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $B<A<C$

22. 정답 ①

[해설]

$\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}},\ 2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}},\ \sqrt[4]{27}=3^{\frac{3}{4}}$이고

$2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{8}{12}}<3^{\frac{9}{12}}=3^{\frac{3}{4}}$

$3^{\frac{3}{4}}=27^{\frac{1}{4}}<64^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{6}{4}}=2^{\frac{3}{2}}$

$\therefore \sqrt[3]{4}<\sqrt[4]{27}<2\sqrt{2}$

따라서 $A=\{x\,|\,x<1 \text{ 또는 } x>\sqrt[3]{4}\}$,

$B=\{x\,|\,\sqrt[4]{27}<x<2\sqrt{2}\}$이므로

$A\cup B=\{x\,|\,x<1 \text{ 또는 } x>\sqrt[3]{4}\}$

23. 정답 ⑤

[해설] $4^a=(2^2)^a=(2^a)^2=3^2=9$

$8^{-a}=(2^3)^{-a}=(2^a)^{-3}=3^{-3}=\frac{1}{27}$

$\therefore 4^a+9\cdot 8^{-a}=9+9\cdot\frac{1}{27}=9+\frac{1}{3}=\frac{28}{3}$

24. 정답 ⑤

[해설] $5^{x+1}-5^x=(5-1)5^x=4\cdot 5^x$이므로 $4\cdot 5^x=12$에서

$5^x=3$

$2^{x+1}+2^x=(2+1)2^x=3\cdot 2^x$이므로 $3\cdot 2^x=15$에서 $2^x=5$

$\therefore 20^x=(2^x\cdot 5)^x=2^{2x}\cdot 5^x=(2^x)^2\cdot 5^x$

$=5^2\cdot 3=75$

25. 정답 ④

[해설]

$x=\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3^y}$ 의 양변을 제곱하면

$x^2=\sqrt[3]{2^2}\times 3^y \qquad \therefore 3^y=\frac{x^2}{\sqrt[3]{4}}$

이때, $27^y=3^{3y}=(3^y)^3$이므로

$$27^y=\left(\frac{x^2}{\sqrt[3]{4}}\right)^3=\frac{x^6}{4}$$

26. 정답 ②

[해설]

$\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$의 좌변의 분모, 분자에 2^a을 곱하여 정리하면

$\frac{4^a+1}{4^a-1}=-2 \qquad \therefore 4^a=\frac{1}{3}$

$4^a+4^{-a}=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$

27. 정답 ③

$2^{2x}-3\cdot 2^x+1=0$의 양변을 2^x으로 나누면

$2^x-3+2^{-x}=0 \qquad \therefore 2^x+2^{-x}=3$

$(2^x+2^{-x})^2=9$이므로

$2^{2x}+2+2^{-2x}=9 \qquad \therefore 2^{2x}+2^{-2x}=7$

$(2^x+2^{-x})^3=27$이므로

$2^{3x}+3\cdot 2^x+3\cdot 2^{-x}+2^{-3x}=(2^{3x}+2^{-3x})+3(2^x+2^{-x})$

$=(2^{3x}+2^{-3x})+3\cdot 3=27$

$\therefore 2^{3x}+2^{-3x}=18$

$\therefore \frac{2^{3x}+3+2^{-3x}}{2^{2x}+2^{-2x}}=\frac{18+3}{7}=3$

28. 정답 ①

[해설]

$2^{\frac{x}{3}}+2^{-\frac{x}{3}}=t$로 놓으면

$2^x+2^{-x}=(2^{\frac{x}{3}}+2^{-\frac{x}{3}})^3-3(2^{\frac{x}{3}}+2^{-\frac{x}{3}})=t^3-3t$

따라서 $t^3-3t=52$, 즉 $t^3-3t-52=0$

$(t-4)(t^2+4t+13)=0$

$\therefore\ t=4$,즉 $2^{\frac{x}{3}}+2^{-\frac{x}{3}}=4$

$(2^{\frac{x}{3}}-2^{-\frac{x}{3}})^2=(2^{\frac{x}{3}}+2^{-\frac{x}{3}})^2-4=4^2-4=12$

$\therefore\ 2^{\frac{x}{3}}-2^{-\frac{x}{3}}=\pm 2\sqrt{3}$

$\therefore\ 2^{\frac{2}{3}x}-2^{-\frac{2}{3}x}=(2^{\frac{x}{3}}+2^{-\frac{x}{3}})(2^{\frac{x}{3}}-2^{-\frac{x}{3}})$

$=4\times(\pm 2\sqrt{3})$

$=\pm 8\sqrt{3}$

29. 정답 ⑤

[해설]

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $3^x-3^{-x}=2$에서

$t-\frac{1}{t}=2$, 즉 $t^2-2t-1=0$

$\therefore t=\sqrt{2}+1\ (\because t>0) \qquad \therefore 3^x=\sqrt{2}+1$

$3^{2x}-3^{-2x}=(\sqrt{2}+1)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2$

$=(\sqrt{2}+1)^2-(\sqrt{2}-1)^2=4\sqrt{2}$

30. 정답 ②

[해설]

$\frac{a^x+a^{-x}}{2}=p$ 에서 $a^x+a^{-x}=2p \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = q$ 에서 $a^x - a^{-x} = q(a^x + a^{-x}) = 2pq$ …… ㉡

㉠의 양변을 제곱하면 $a^{2x} + a^{-2x} + 2 = 4p^2$

㉡의 양변을 제곱하면 $a^{2x} + a^{-2x} - 2 = 4p^2q^2$

각 변끼리 빼면 $4 = 4p^2 - 4p^2q^2$

$\therefore p^2(1-q^2) = 1$

31. 정답 ⑤

[해설]

$x^2 = \dfrac{1}{4}(5^{\frac{2}{3}} - 2 + 5^{-\frac{2}{3}})$이므로

$1 + x^2 = \dfrac{1}{4}(5^{\frac{2}{3}} + 2 + 5^{-\frac{2}{3}}) = \dfrac{1}{4}(5^{\frac{1}{3}} + 5^{-\frac{1}{3}})^2$

$\therefore \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^6 = \left\{\dfrac{1}{2}(5^{\frac{1}{3}} - 5^{-\frac{1}{3}}) + \dfrac{1}{2}(5^{\frac{1}{3}} + 5^{-\frac{1}{3}})\right\}^6$

$= (5^{\frac{1}{3}})^6 = 25$

32. 정답 70

[해설]

$\{3^{a+b} + 3^{-(a+b)}\}\{3^{a-b} + 3^{-(a-b)}\}$

$= 3^{2a} + 3^{2b} + 3^{-2a} + 3^{-2b}$

$= (3^a + 3^{-a})^2 - 2 + (3^b + 3^{-b}) - 2$

$= 5^2 - 2 + 7^2 - 2 = 70$

33. 정답 ②

[해설] $3^x = a$에서 $3 = a^{\frac{1}{x}}$

$6^y = a$에서 $6 = a^{\frac{1}{y}}$

$7^z = a$에서 $8 = a^{\frac{1}{z}}$

$a^{\frac{1}{x}} \cdot a^{\frac{1}{y}} \cdot a^{\frac{1}{z}} = 3 \cdot 6 \cdot 8 = 144$

$a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = 144$

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 4$이므로

$a^4 = 144,\ a^2 = 12$

$a > 0$이므로 $a = 2\sqrt{3}$

34. 정답 ④

[해설]

조건 (나)에서 $4^x = 6^y = 9^z = k$로 놓으면

$4 = k^{\frac{1}{x}},\ 6 = k^{\frac{1}{y}},\ 9 = k^{\frac{1}{z}}$

$4 \times 9 = 36$ 이므로 $k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{z}} = (k^{\frac{1}{y}})^2$

$\therefore k^{\frac{2}{y}} = k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}} = k^{\frac{x+z}{xz}} = k$ ($\because$ 조건 (다))

따라서 $\dfrac{2}{y} = 1$ 에서 $y = 2$

35. 정답 ⑤

[해설]

$2 * 4 = 2^4 \times 4^{-\frac{2}{2}} = 2^4 \times 2^{-2} = 2^2 = 4$

$4 * x = 4^x \times x^{-\frac{4}{2}} = 4^x x^{-2} = 8x^{-2}$

즉, $4^x = 8$에서 $2^{2x} = 2^3$

$2x = 3 \quad \therefore x = \dfrac{3}{2}$

36. 정답 ②

[해설] $6^x = 2$에서 $6 = 2^{\frac{1}{x}}$

$36^{x+y} = 16$에서 $36^x \cdot 36^y = 16$ …… ㉠

$36^{x+y} = 16$에서 $36^x = (6^2)^x = (6^x)^2 = 2^2 = 4$이므로

㉠에서 $4 \cdot 36^y = 16,\ 36^y = 4 = 2^2$

$\therefore 36 = 2^{\frac{2}{y}}$

$\therefore 2^{\frac{1}{x}-\frac{2}{y}} = 2^{\frac{1}{x}} \div 2^{\frac{2}{y}} = 6 \div 36 = \dfrac{1}{6}$

37. 정답 35

[해설]

$5^x = 7^y = a^z$의 각 변에 상용로그를 취하면

$x\log 5 = y\log 7 = z\log a$

이때, $x = \dfrac{k}{\log 5}, y = \dfrac{k}{\log 7}, z = \dfrac{k}{\log a}$로 놓으면

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$에서 $\dfrac{\log 5}{k} + \dfrac{\log 7}{k} = \dfrac{\log a}{k}$

$\log a = \log 5 + \log 7 = \log 35$

$\therefore a = 35$

38. 정답 25

[해설]

$2^x = 27$ 에서 $2 = 27^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{3}{x}}$ …… ㉠

$18^y = 81$ 에서 $18 = 81^{\frac{1}{y}} = 3^{\frac{4}{y}}$ …… ㉡

$54^z = 243$ 에서 $54 = 243^{\frac{1}{z}} = 3^{\frac{5}{z}}$ …… ㉢

㉡÷㉠을 하면 $3^{\frac{4}{y}-\frac{3}{x}} = 9 \qquad \therefore \dfrac{4}{y} - \dfrac{3}{x} = 2$ …… ㉣

㉢÷㉡을 하면 $3^{\frac{5}{z}-\frac{4}{y}} = 3 \qquad \therefore \dfrac{5}{z} - \dfrac{4}{y} = 1$ …… ㉤

㉣$-2\times$㉤을 하면 $\dfrac{12}{y} - \dfrac{3}{x} - \dfrac{10}{z} = 0$

$\therefore \dfrac{3}{x} - \dfrac{12}{y} + \dfrac{10}{z} = 0$

$\therefore p + q + r = 3 + 12 + 10 = 25$

39. 정답 ②

[해설] $A = \sqrt[12]{32} \times \sqrt[6]{4} = \sqrt[12]{2^5} \times \sqrt[6]{2^2} = 2^{\frac{5}{12}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{4}}$

따라서 $A^n = (2^{\frac{3}{4}})^n = 2^{\frac{3}{4}n}$이고, n은 자연수이므로 n이 4의 배수일 때,

A^n
은 정수가 된다.
따라서 자연수 n의 최솟값은 4이다.

40. 정답 ④

[해설]

$\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{n}}=(2^{-8})^{\frac{1}{n}}=2^{-\frac{8}{n}}$ 에서 $2^{-\frac{8}{n}}$ 이 자연수이려면

$n=-1,\ -2,\ -4,\ -8$ 이어야하고, 이때 $2^{-\frac{8}{n}}$ 의 값은 각각 256, 16, 4, 2이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 4개다.

41. 정답 ②

[해설] $\sqrt[3]{\frac{3^b}{2^{a+1}}}$ 이 유리수이려면 $a+1$, b가 3의 배수이어야 하고,
$\sqrt[5]{\frac{3^{b+1}}{2^a}}$ 이 유리수이려면 a, $b+1$이 5의 배수이어야 한다.
a는 5의 배수, $a+1$은 3의 배수이므로 a의 최솟값은 5이다.
b는 3의 배수, $b+1$은 5의 배수이므로 b의 최솟값은 9이다.
따라서 $a+b$의 최솟값은 $5+9=14$이다.

42. 정답 ②

[해설]

$(\sqrt[3]{2})^{m-1}\cdot(\sqrt[3]{3})^{2n}=2^{\frac{m-1}{3}}\cdot 3^{\frac{2n}{3}}$ 에서 2와 3은 서로소이므로

$\frac{m-1}{3}$ 과 $\frac{2n}{3}$ 은 0또는 자연수 이어야 한다.

$\therefore m=1,\ 4,\ 7,\ 10,\ n=3,\ 6,\ 9$

따라서 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$4\times 3=12$ (개)

43. 정답 256

[해설]

$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=a^{\frac{7}{8}}$

$a^{\frac{7}{8}}$ 의 값이 1보다 큰 자연수가 되게 하는 자연수 a는

k^8(k는 1보다 큰 자연수)꼴이어야 한다.

따라서 구하는 최소의 자연수 a는 $a=2^8=256$

44. 정답 ⑤

[해설]

$\frac{a+a^2+a^3+a^4+a^5}{a^{-3}+a^{-4}+a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}}$ 의 분자, 분모에 각각 a^8 을 곱하면

$$\frac{a^8(a+a^2+a^3+a^4+a^5)}{a^8(a^{-3}+a^{-4}+a^{-5}+a^{-6}+a^{-7})}=\frac{a^8(a+a^2+a^3+a^4+a^5)}{a^5+a^4+a^3+a^2+a}$$
$$=a^8=(\sqrt[40]{5})^8=\sqrt[5]{5}$$

45. 정답 ②

[해설]

$$A+B=\frac{a^2+b^2-(a^{-2}+b^{-2})}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}+\frac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$$
$$=\frac{a^2+b^2-(a^{-2}+b^{-2})}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}+\frac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})(ab-a^{-1}b^{-1})}{(ab+a^{-1}b^{-1})(ab-a^{-1}b^{-1})}$$
$$=\frac{a^2+b^2-(a^{-2}+b^{-2})}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}+\frac{(ab-ab^{-1}-a^{-1}b+a^{-1}b^{-1})(ab-a^{-1}b^{-1})}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}$$
$$=\frac{a^2+b^2-(a^{-2}+b^{-2})}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}+\frac{a^2b^2-1-a^2+b^{-2}-b^2+a^{-2}+1-a^{-2}b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}$$
$$=\frac{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}=1$$

46. 정답 ①

[해설]

$a=\frac{2^{\sqrt{2}}-2^{-\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}+2^{-\sqrt{2}}}=\frac{4^{\sqrt{2}}-1}{4^{\sqrt{2}}+1}$ 이므로 $a(4^{\sqrt{2}}+1)=4^{\sqrt{2}}-1$

$\therefore 4^{\sqrt{2}}=\frac{1+a}{1-a}$

$b=\frac{2^{\sqrt{3}}-2^{-\sqrt{3}}}{2^{\sqrt{3}}+2^{-\sqrt{3}}}=\frac{4^{\sqrt{3}}-1}{4^{\sqrt{3}}+1}$ 이므로 $b(4^{\sqrt{3}}+1)=4^{\sqrt{3}}-1$

$\therefore 4^{\sqrt{3}}=\frac{1+b}{1-b}$

$$\therefore \frac{4^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}-1}{4^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+1}=\frac{4^{\sqrt{2}}\cdot 4^{\sqrt{3}}-1}{4^{\sqrt{2}}\cdot 4^{\sqrt{3}}+1}$$
$$=\frac{\frac{1+a}{a-1}\cdot\frac{1+b}{1-b}-1}{\frac{1+a}{1-a}\cdot\frac{1+b}{1-b}+1}$$
$$=\frac{(1+a)(1+b)-(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)+(1-a)(1-b)}$$
$$=\frac{2(a+b)}{2+2ab}=\frac{a+b}{1+ab}$$

47. 정답 ④

[해설] $\sqrt[3]{3}=a$로 놓으면

$x^2+4=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$ 이므로

$\sqrt{x^2+4}=a+\frac{1}{a}=\sqrt[3]{3}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

$x^3+3x=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3\left(a-\frac{1}{a}\right)$

$=a^3-\frac{1}{a^3}=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$

$\therefore \sqrt[3]{x^3+3x}=\sqrt[3]{\frac{8}{3}}=\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$

$\therefore \sqrt{x^2+4}+\sqrt[3]{x^3+3x}=\sqrt[3]{3}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$

$=\sqrt[3]{3}+\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$

$=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$

48. 정답 ②

[해설]

$$\frac{2^x+2^{2011x}}{2^{-x}+2^{-2011x}}=\frac{2^x+2^{2011x}}{\frac{1}{2^x}+\frac{1}{2^{2011x}}}=\frac{2^x+2^{2011x}}{\frac{2^x+2^{2011x}}{2^{2012x}}}=2^{2012x}=(2^x)^{2012}$$

$$=\left\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{\frac{1}{1006}}\right\}^{2012}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}$$

$\therefore a+b=5+6=11$

49. 정답 ③

[해설]

$2^x=(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}})^{\frac{1}{3}}$의 양변을 세제곱하면

$2^{3x}=\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ …… ㉠

$2^y=(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}})^{\frac{1}{4}}$의 양변을 네제곱하면

$2^{4y}=\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 각 변끼리 곱하면

$2^{3x}\cdot 2^{4y}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

따라서 $2^{3x+4y}=2^{\frac{3}{2}}$에서 $3x+4y=\frac{3}{2}$

50. 정답 6

[해설]

방정식 $x^4-3x^2+1=0$의 한 실근이 α이므로 $\alpha^4-3\alpha^2+1=0$

$\alpha\neq 0$이므로 양변을 α^2으로 나누면

$\alpha^2-3+\frac{1}{\alpha}=0$ $\quad\therefore \alpha^2+\alpha^{-2}=3$ ⋯ ㉠

$(\sqrt[3]{\alpha})^k+(\sqrt[3]{\alpha})^{-k}=3$에서 $\alpha^{\frac{k}{3}}+\alpha^{-\frac{k}{3}}=3$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{k}{3}=2$ $\quad\therefore k=6$

1. 정답 ②	2. 정답 ⑤	3. 정답 ①
4. 정답 ③	5. 정답 ③	6. 정답 ②
7. 정답 ②	8. 정답 ①	9. 정답 ⑤
10. 정답 ③	11. 정답 ①	12. 정답 ①
13. 정답 ③	14. 정답 ③	15. 정답 ②
16. 정답 ②	17. 정답 ⑤	18. 정답 ②
19. 정답 ②	20. 정답 ②	21. 정답 ⑤
22. 정답 ②	23. 정답 ④	24. 정답 ④
25. 정답 ②	26. 정답 ②	27. 정답 ③
28. 정답 ③	29. 정답 ④	30. 정답 ④
31. 정답 ③	32. 정답 ③	33. 정답 ④
34. 정답 ②	35. 정답 ①	36. 정답 125
37. 정답 ④	38. 정답 ④	39. 정답 ③
40. 정답 ③	41. 정답 ①	42. 정답 ③
43. 정답 ③	44. 정답 ④	45. 정답 ⑤
46. 정답 ②	47. 정답 ③	48. 정답 ②
49. 정답 ④	50. 정답 20	51. 정답 ④
52. 정답 ④	53. 정답 ②	54. 정답 ③
55. 정답 ②	56. 정답 ④	57. 정답 ②
58. 정답 35	59. 정답 ②	60. 정답 ②
61. 정답 ④	62. 정답 ②	63. 정답 ⑤
64. 정답 8	65. 정답 ③	66. 정답 ②
67. 정답 ⑤	68. 정답 ①	69. 정답 ③
70. 정답 ③	71. 정답 ③	72. 정답 ④
73. 정답 ⑤	74. 정답 ③	75. 정답 12
76. 정답 30	77. 정답 ③	78. 정답 ④
79. 정답 ②	80. 정답 ④	81. 정답 22
82. 정답 ④	83. 정답 ③	84. 정답 ④
85. 정답 ⑤	86. 정답 ②	87. 정답 ①
88. 정답 ⑤	89. 정답 ③	90. 정답 30
91. 정답 ③	92. 정답 ④	93. 정답 ③
94. 정답 ④	95. 정답 ④	96. 정답 105
97. 정답 ③	98. 정답 ①	99. 정답 ②

1. 정답 ②

$\log_a 2 = \log_b 8 = \log_c 16 = 6$에서

$a^6 = 2,\ b^6 = 8,\ c^6 = 16$

$a,\ b,\ c$를 각각 한 모서리의 길이로 하는 정육면체의 부피의 비는

$a^3 : b^3 : c^3$

이고, $a^3 = \sqrt{2},\ b^3 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},\ c^3 = \sqrt{16} = 4$

이므로 구하는 부피의 비는

$\sqrt{2} : 2\sqrt{2} : 4 = 1 : 2 : 2\sqrt{2}$

2. 정답 ⑤

$a^x = b^y$에서 $a = b^{\frac{y}{x}}$

$\therefore \dfrac{y}{x} = \log_b a$

3. 정답 ①

a^m은 b의 n제곱근이므로 $b = (a^m)^n,\ b = a^{mn}$

$\therefore\ mn = \log_a b$

4. 정답 ③

$\log_2(a+b) = 3,\ \log_{ab} 4 = 1$에서

$a+b = 2^3 = 8,\ \ ab = 4$

$\therefore\ a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 8^2 - 2 \cdot 4 = 56$

5. 정답 ③

$a^x = b$ …… ㉠

$x = \log_c d$ 에서 $c^x = d$ …… ㉡

ㄱ. ㉠과 ㉡에서 $a^x \cdot c^x = b \cdot d$

$(ac)^x = bd$

$\therefore\ x = \log_{ac} bd$ (참)

ㄴ. ㉠과 ㉡에서 $\dfrac{a^x}{c^x} = \dfrac{b}{d}$

$\left(\dfrac{a}{c}\right)^x = \dfrac{b}{d}$

$\therefore x = \log_{\frac{a}{c}} \dfrac{b}{d}$ (참)

ㄷ. ㉠의 양변을 제곱하면 $a^{2x} = b^2$

한편, ㉡에서 $c^x = d$ 이므로

$(a^2c)^x = b^2 d$

$\therefore\ x = \log_{a^2c} b^2 d$ (거짓)

(반례) $a=2,\ b=4,\ c=3,\ d=9,\ x=2$ 라 하면

$a^x = b$ 에서 $2^2 = 4$

$c^x = d$ 에서 $3^2 = 9$ 이지만

$\log_{a^2c} bd^2 = \log_{2^2 \cdot 3} 4 \cdot 9^2 = \log_{12}\left\{\dfrac{9}{4} \times (12)^2\right\} \neq 2$(거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

6. 정답 ②

밑의 조건에서

$x - 4 > 0,\ x - 4 \neq 1$

$\therefore x > 4,\ x \neq 5$ …… ㉠

진수의 조건에서

$-x^2 + 12x - 20 > 0$, 즉 $x^2 - 12x + 20 < 0$

$(x-2)(x-10) < 0$

$\therefore 2 < x < 10$ …… ㉡

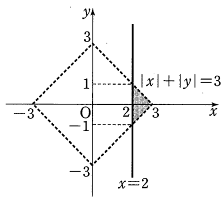
㉠, ㉡에서 x의 값의 범위는

$4 < x < 5$ 또는 $5 < x < 10$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$6 + 7 + 8 + 9 = 30$

7. 정답 ②



(i) 밑의 조건으로부터 $[x] > 0$ 이고 $[x] \neq 1$

한편, $[x]$ 는 정수이므로 $[x] \geq 2$

$\therefore x \geq 2$

(ii) 진수의 조건으로부터 $3 - |x| - |y| > 0$

$\therefore |x| + |y| < 3$

따라서 (i),(ii) 를 만족하는 점 $P(x,\ y)$ 가 나타내는 도형은 오른쪽 그림의 어두운 부분이므로 구하는 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$

8. 정답 ①

$2\log_2 \dfrac{3}{2} + \log_2 \dfrac{2}{3} - \log_2 12$

$= \log_2 \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \log_2 \dfrac{2}{3} - \log_2 12$

$= \log_2 \dfrac{\frac{9}{4} \times \frac{2}{3}}{12}$

$= \log_2 2^{-3}$

$= -3$

9. 정답 ⑤

$\log_4 32 = \log_{2^2} 2^5 = \dfrac{5}{2}$

$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

$\therefore (\log_4 32) \times \sqrt[3]{64} = \dfrac{5}{4} \times 4 = 10$

10. 정답 ③

[해설]

로그의 정의에 의해

$a - 2 = \log_4 3$

$\therefore a = \log_4 3 + 2 = \log_4 3 + \log_4 4^2$

$= \log_4 (4^2 \times 3) = \dfrac{1}{2} \log_2 (4^2 \times 3)$

$= \log_2 4\sqrt{3}$

11. 정답 ①

$\log_2 9 = 2\log_2 3$이므로

$\log_2 12 = a,\ \log_2 3 = b$로 놓으면

$x = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

$= (\log_2 12 - \log_2 3)^2 = (\log_2 4)^2 = 2^2 = 4$

$\therefore \log_2 x = \log_2 4 = 2$

12. 정답 ①

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$\log_2\sin\frac{\pi}{3} + \log_2\cos\frac{\pi}{4} + \log_2\tan\frac{\pi}{6}$

$= \log_2\frac{\sqrt{3}}{2} + \log_2\frac{\sqrt{2}}{2} + \log_2\frac{\sqrt{3}}{3}$

$= \log_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$= \log_2\frac{\sqrt{2}}{4} = \log_2 2^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$

13. 정답 ③

$a \sharp b = \log_{a^2} b = \frac{1}{2} log_a b = \frac{3}{2} (\because \log_a b = 3)$

$\therefore m = \frac{3}{2}$

$b^2 \sharp a^2 = \log_{b^4} a^2 = \frac{2}{4} log_b a = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$\therefore n = \frac{1}{6}$

$\therefore mn = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$

14. 정답 ③

$\log_6 4 = a,\ \log_6 9 = b$라 하면

$\log_6 16 = \log_6 4^2 = 2\log_6 4 = 2a$이므로

$(\log_6 4)^2 + (\log_6 9)^2 + \log_6 16 \cdot \log_6 9$

$= a^2 + b^2 + 2ab$

$= (a+b)^2$

$a + b = \log_6 4 + \log_6 9 = \log_6 36 = 2$이므로 구하는 값은

$2^2 = 4$

15. 정답 ②

$\sqrt{(\log_2 6)^2 - \log_2 81}$

$= \sqrt{(\log_2 2 + \log_2 3)^2 - \log_2 3^4}$

$= \sqrt{(1 + \log_2 3)^2 - 4\log_2 3}$

$= \sqrt{1 + 2\log_2 3 + (\log_2 3)^2 - 4\log_2 3}$

$= \sqrt{1 - 2\log_2 3 + (\log_2 3)^2}$

$= \sqrt{(\log_2 3 - 1)^2}$

$= \log_2 3 - 1 = \log_2\frac{3}{2}$

16. 정답 ②

$a\log_{500}2 + b\log_{500}5 = c$에서

$\log_{500}2^a 5^b = c$

$2^a 5^b = 500^c = (2^2 5^3)^c = 2^{2c} 5^{3c}$

a, b, c는 자연수이므로

$a = 2c,\ \ b = 3c$

이때, a, b, c의 최대공약수가 2이므로 $c = 2$

$\therefore a = 4,\ \ b = 6$

$\therefore a + b + c = 12$

17. 정답 ⑤

$16^{2\log_2 9} = (16^{\log_2 9})^3 = (9^{\log_2 16})^3$

$= (9^4)^3 = 9^{12} = 3^{24}$

$\therefore \log_{\sqrt{3}} 3^{24} = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^{24}$

$= 2 \cdot 24\log_3 3$

$= 48$

18. 정답 ②

$b^a = (2\sqrt{2})^{\log_2 10} = 10^{\log_2 2\sqrt{2}} = 10^{\frac{3}{2}}$

$\therefore a\log b = \log b^a = \log 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

19. 정답 ②

$\log_a b = \log_b a$에서$\log_a b = \frac{1}{\log_a b}$

$(\log_a b)^2 = 1 \qquad \therefore \log_a b = 1$또는$\log_a b = -1$

그런데,$\log_a b = 1$이면$a = b$이므로 모순이다.

따라서, $\log_a b = -1$에서 $b = a^{-1} = \frac{1}{a}$

$\therefore ab = 1$

20. 정답 ②

$(\sqrt{10} * 4) = (\sqrt{10})^{\log 4} = 4^{\log\sqrt{10}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

$\therefore (\sqrt{10} * 4) * 100 = 2 * 100 = 2^{\log 100} = 2^2 = 4$

21. 정답 ⑤

$\log_a x = 4$에서 $\log_x a = \frac{1}{4}$

$\log_b x = 6$에서 $\log_x b = \frac{1}{6}$

$\log_c x = 8$에서 $\log_x c = \frac{1}{8}$

$\log_x a + \log_x b + \log_x c = \log_x abc$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$

$= \frac{13}{24}$

$\therefore \log_{abc}x = \dfrac{1}{\log_x abc} = \dfrac{24}{13}$

22. 정답 ②

$\log_2(\log_3 4) + \log_2(\log_4 5) + \cdots + \log_2(\log_{80} 81)$

$= \log_2(\log_3 4 \times \log_4 5 \times \cdots \times \log_{80} 81)$

$= \log_2\left(\dfrac{\log 4}{\log 3} \times \dfrac{\log 5}{\log 4} \times \cdots \times \dfrac{\log 81}{\log 80}\right)$

$= \log_2\left(\dfrac{\log 81}{\log 3}\right) = \log_2(\log_3 3^4)$

$= \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$

23. 정답 ④

[해설]

(나)에서

$\log_b abc - \log_b a = \log_b \dfrac{abc}{a} = \log_b bc = 1 + \log_b c = 3$

$\therefore \log_b c = 2$

(가)에서 $\log_a b$이므로

$\log_a c = \dfrac{\log c}{\log a} = \dfrac{\log b}{\log a} \times \dfrac{\log c}{\log b}$

$= \log_a b \times \log_b c = 2 \times 2 = 4$

24. 정답 ④

$a^2 = b^3$에서 $b = a^{\frac{2}{3}}$

$b^3 = c^5$에서 $c = b^{\frac{3}{5}}$

$a^2 = c^5$에서 $a = c^{\frac{5}{2}}$

$\therefore \log_a b + \log_b c + \log_c a = \log_a a^{\frac{2}{3}} + \log_b b^{\frac{3}{5}} + \log_c c^{\frac{5}{2}}$

$= \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{5} + \dfrac{5}{2}$

$= \dfrac{113}{30}$

25. 정답 ②

$a = \log_4(7 + 4\sqrt{3})$에서

$4^a = 7 + 4\sqrt{3}$

$4^a = (2^a)^2$이고, $2^a > 0$이므로

$2^a = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{7 + 2\sqrt{12}} = 2 + \sqrt{3}$

$2^{-a} = \dfrac{1}{2^a} = \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$

$\therefore 2^a + 2^{-a} = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$

26. 정답 ②

$x + y = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4,$

$xy = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$이므로

$2x^2 - xy + 2y^2 = 2(x^2 + y^2) - xy$

$= 2\{(x + y)^2 - 2xy\} - xy$

$= 2(x + y)^2 - 5xy$

$= 2 \cdot 4^2 - 5 \cdot 1$

$= 27$

$\therefore \log_{243}(2x^2 - xy + 2y^2) = \log_{243} 27$

$= \log_{3^5} 3^3$

$= \dfrac{3}{5}$

27. 정답 ③

$\log_2 \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \log_2(\sqrt{2} + 1)$

이 때, $2 < \sqrt{2} + 1 < 3$이므로 $1 < \log_2(\sqrt{2} + 1) < 2$

$\alpha = \log_2(\sqrt{2} + 1) - 1 = \log_2 \dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}$이므로 $2^\alpha = \dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}$

$\therefore 2^{-\alpha} + 2^\alpha = \left(\dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}\right)^{-1} + \dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{2} + 1} + \dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}$

$= 2(\sqrt{2} - 1) + \dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}$

$= \dfrac{-3 + 5\sqrt{2}}{2}$

28. 정답 ③

$\log_{a^m} b^n = x$라 하면 $b^n = (a^m)^x = a^{mx}$

$b = a^{\frac{m}{n}x}$ 이므로

로그의 정의에 의해 $\dfrac{m}{n}x = \log_a b$

$\therefore x = \dfrac{n}{m} \log_a b$

29. 정답 ④

$a^{\log_b c} = k$라 하면 로그의 정의에 의하여

$\log_b c = \log_a k$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\log_a k = \dfrac{\log_c k}{\log_c a}$이므로 ㉠에서

$\log_c k = \log_b c \cdot \log_c a = \log_b a$

$\therefore k = c^{\log_b a}$

$\therefore a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

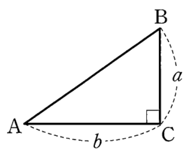
30. 정답 ④

$\log_2(a + b) + \log_2(a - b) = 1 + \log_2(5 - b^2)$에서

$\log_2(a + b)(a - b) = \log_2 2(5 - b^2)$

$a^2 - b^2 = 10 - 2b^2$

$\therefore a^2 + b^2 = 10$



삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}ab = 2$

$\therefore ab = 4$

$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

$=10+2\cdot 4=18$

이고 $a+b>0$이므로

$a+b=3\sqrt{2}$

31. 정답 ③

ㄱ. $5^a=3$이면 $a=\log_5 3$

$\therefore \frac{1}{a}=\frac{1}{\log_5 3}=\log_3 5$ (참)

ㄴ. $4^{\log_2 a}=a^{\log_2 4}=a^2$, $9^{\log_3 b}=b^{\log_3 9}=b^2$이므로

$4^{\log_2 a}\times 9^{\log_3 b}=a^2b^2$ (거짓)

ㄷ. $\log_{a^3} b^2=\frac{2}{3}\log_a b=4$이므로 $\log_a b=4\cdot\frac{3}{2}=6$

$\therefore \log_{a^2} b^3=\frac{3}{2}\log_a b=\frac{3}{2}\cdot 6=9$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

32. 정답 ③

ㄱ. $L(a,\ b)=\log_a b$

$L(a^2,\ b^2)=\log_{a^2} b^2=\frac{2}{2}log_a b=\log_a b$

$\therefore L(a,\ b)=L(a^2,\ b^2)$ (참)

ㄴ. $L(a,\ b)\cdot L(b,\ c)=\log_a b\cdot\log_b c=\frac{\log b}{\log a}\cdot\frac{\log c}{\log b}$

$=\frac{\log c}{\log a}=\log_a c$

$=L(a,\ c)$ (참)

ㄷ. $a^{L(b,\ c)}=a^{\log_b c}=c^{\log_b a}=c^{L(b,\ a)}$이고,

$L(a,\ b)\neq L(b,\ a)$이므로

$a^{L(b,\ c)}=c^{L(b,\ a)}\neq c^{L(a,\ b)}$ (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

33. 정답 ④

$\log_3 3^4=\log_3 81=4$, $\log_3 3^5=\log_3 243=5$이므로

$\log_3 n$의 정수 부분이 4인 자연수 n의 값의 범위는

$81\leq n<243$ …… ㉠

$\log_5 5^2=\log_5 25=2$, $\log_5 5^3=\log_5 125=3$이므로

$\log_5 n$의 정수 부분이 2인 자연수 n의 값의 범위는

$25\leq n<125$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 n의 값의 범위는

$81\leq m<125$

따라서 자연수 n의 최댓값은 124, 최솟값은 81이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $124+81=205$

34. 정답 ②

$5^{f(x)+g(x)}=x$에서 $f(x)+g(x)=\log_5 x$이다.

이때, $f(x)$는 정수이고, $0\leq g(x)<1$이므로

$4=\log_5 5^4<\log_5 2011<\log_5 5^5=5$에서

$\therefore f(2011)=4$

$-5=\log_5 5^{-5}<\log_5\frac{1}{2011}<\log_5 5^{-4}=-4$에서

$\therefore f(\frac{1}{2011})=-5$

$\therefore f(2011)+f\left(\frac{1}{2011}\right)=-1$

35. 정답 ①

ㄱ. $\log_4 16=2$, $\log_4 64=3$이므로

$2\leq\log_4 20<3$

$\therefore f(20)=2$ (참)

ㄴ. (반례) $a=128$이면 $\log_4 128=\log_{2^2} 2^7=\frac{7}{2}$이므로

$f(128)=3$

$\log_4\frac{1}{128}=-\log_4 128=-\frac{7}{2}$이므로

$f(\frac{1}{128})=-4$ (거짓)

ㄷ. (반례) $a=8$이면 $\log_4 8=\frac{3}{2}$이므로 $f(8)=1$이지만

$\log_4 8^2=\log_4 64=3$이므로 $f(8^2)=3$ (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

36. 정답 125

$8<\log_2 500<9$이므로

$f(500)=\log_2 500-[\log_2 500]=\log_2 500-8$

이때, $100<n<200$이므로

$[\log_2 n]=6$ 또는 $[\log_2 n]=7$

(ⅰ) $[\log_2 n]=6$일 때

$f(n)=\log_2 n-6=\log_2 500-8$이므로

$\log_2 n=\log_2 500-2=\log_2\frac{500}{4}=\log_2 125$

$\therefore n=125$

(ⅱ) $[\log_2 n]=7$일 때

$f(n)=\log_2 n-7=\log_2 500-8$이므로

$\log_2 n=\log_2 500-1=\log_2\frac{500}{2}=\log_2 250$

$\therefore n=250$

그런데 $100<n<200$이므로 모순이다.

따라서 구하는 자연수 n의 값은 125이다.

37. 정답 ④

이차방정식 $x^2-8x+4=0$의 두 근이 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이므로

$\log_2\alpha+\log_2\beta=8$, $\log_2\alpha\cdot\log_2\beta=4$

$\log_\alpha 4=2\log_\alpha 2=\frac{2}{\log_2\alpha}$,

$\log_\beta 4=2\log_\beta 2=\frac{2}{\log_2\beta}$이므로

$\frac{2}{\log_2\alpha}+\frac{2}{\log_2\beta}=\frac{2(\log_2\alpha+\log_2\beta)}{\log_2\alpha\cdot\log_2\beta}$

$=\frac{2\cdot 8}{4}=4$

$\frac{2}{\log_2\alpha}\times\frac{2}{\log_2\beta}=\frac{4}{\log_2\alpha\cdot\log_2\beta}$

$=\frac{4}{4}=1$

따라서 $\log_\alpha 4$, $\log_\beta 4$를 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-4x+1=0$이므로

$a=1$, $b=-4$

$\therefore a^2+b^2=1+16=17$

38. 정답 ④

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=5$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=25-20=5$

$\therefore \alpha-\beta=\sqrt{5}\,(\because \alpha>\beta)$

$\therefore \frac{1}{\log_\alpha(\alpha-\beta)}+\frac{1}{\log_\beta(\alpha-\beta)}$

$=\log_{(\alpha-\beta)}\alpha+\log_{(\alpha-\beta)}\beta=\log_{(\alpha-\beta)}\alpha\beta$

$=\log_{\sqrt{5}}5=2$

39. 정답 ③

$1<a<2^{10}$에서 $0<\log_2 a<10$

$\frac{1}{\log_a\sqrt[4]{2}}=4\log_2 a$이므로

$0<4\log_2 a<40$

따라서 주어진 수가 자연수가 되도록 하는 a의 개수는 39개다.

40. 정답 ③

선분 OA를 $\log_2 3:\log_2\frac{5}{3}$로 내분하는 점의 좌표를 x라 하면

$$x=\frac{\log_2 3\times\log_3 4+\log_2\frac{5}{3}\times 0}{\log_2 3+\log_2\frac{5}{3}}=\frac{\log_2 3\times\frac{\log_2 4}{\log_2 3}}{\log_2\left(3\times\frac{5}{3}\right)}$$

$$=\frac{\log_2 4}{\log_2 5}=\log_5 4$$

41. 정답 ①

$x^2-2xy-2y^2=0$의 양변을 y^2으로 나누면

$\left(\frac{x}{y}\right)^2-2\cdot\frac{x}{y}-2=0$

이때, $\frac{x}{y}=t$로 놓으면 $t>0$이고

$t^2-2t-2=0$

$\therefore t=1+\sqrt{3}$

따라서 $\frac{x-y}{y}=\frac{x}{y}-1=t-1=\sqrt{3}$이므로

$\log_3(x-y)-\log_3 y=\log_3\frac{x-y}{y}=\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$

42. 정답 ③

$\log_2 6$이 유리수라고 가정하고

$\log_2 6=\frac{q}{p}$(p, q는 서로소인 양의 정수, $p<q$)로 나타내자.

$6=2^{\frac{q}{p}}$에서 $6^p=2^q$, $3^p=\frac{2^q}{2^p}=\boxed{2^{q-p}}$

이때, 3^p은 $\boxed{\text{홀수}}$ 이지만 $\boxed{2^{q-p}}$은 $\boxed{\text{짝수}}$ 이므로 모순이다.

따라서 $\log_2 6$은 유리수가 아니다.

43. 정답 ③

$\log_{128}n^2=\log_2 n^2=\frac{2}{7}\log_2 n$에서 $\frac{2}{7}$가 유리수이므로 $\log_2 n$이 유리수이어야 한다.

(i) $n=1$일 때, $\log_2 n=0$이므로 유리수이다.

(ii) $n\neq 1$일 때, 서로소인 두 자연수 p, q에 대하여

$\log_2 n=\frac{q}{p}$라 하면 $n=2^{\frac{q}{p}}$, 즉 $n^p=2^q$이므로 자연수 n은 2의 거듭제곱꼴이다.

따라서 128 이하의 자연수 n은 1, 2, 2^2, $\cdots$, 2^7이므로 8개다.

44. 정답 ④

$\log_{\sqrt{2}}\sqrt[3]{a}=\log_{2^{\frac{1}{2}}}a^{\frac{1}{3}}=\log_2 a^{\frac{2}{3}}$

이 값이 자연수이므로 $\log_2 a^{\frac{2}{3}}=k$(k는 자연수)로 놓으면

$2^k=a^{\frac{2}{3}}$ $\quad\therefore a=2^{\frac{3}{2}k}$

자연수 k의 값을 대입하여 a의 값을 순서대로 나열하면

$a=2^{\frac{3}{2}\times 1}$, $a=2^{\frac{3}{2}\times 2}$, $a=2^{\frac{3}{2}\times 3}$, $\cdots$, $a=2^{\frac{3}{2}\times 6}$, $a=2^{\frac{3}{2}\times 7}$, $\cdots$

한편, $1<a<1000$에서 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이고

$2^{\frac{3}{2}\times 6}=2^9$, $2^{\frac{3}{2}\times 7}2^{10.5}$

이므로 k의 값은 1,2,3,4,5,6으로 6개다.

45. 정답 ⑤

$f(n)=\log_{2^n}\sqrt[n+1]{243}=\log_{2^n}243^{\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}\log_2 243$

$\therefore\ f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(9)$

$=\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{9\cdot 10}\right)\log_2 243$

$=\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right\}\log_2 243$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)\log_2 243=\frac{2}{5}\log_2 3^5=\log_2 9$

46. 정답 ②

$\log_a b>0$ 일 때, $\log_a b$ 의 최댓값은 $a=2$ 일 때 갖는다.

이 때, $2^6=64$, $2^7=128$이므로 $\log_a b<7$

그러므로 $[\log_a b]$ 의 최댓값 $\mathrm{M}=6$ 이다.

$\log_a b<0$ 일 때, $\log_a b$ 의 최솟값은 $a=2$ 일 때 갖는다.

이 때, $2^{-2}=0.25$, $2^{-3}=0.125$, $2^{-4}=0.0625$ 이므로 $\log_a b>-4$

그러므로 $[\log_a b]$ 의 최솟값 $m=-4$이다.

$\therefore$ M $+m=6+(-4)=2$

47. 정답 ③

$\log_5 3=\frac{a_1}{5}+\frac{a_2}{5^2}+\frac{a_3}{5^3}+\cdots$ 의 양변에 5를 곱하면

$5\log_5 3=\log_5 3^5=\log_5 243=a_1+\frac{a_2}{5}+\frac{a_3}{5^2}+\cdots$

이때, $5^3<243<5^4$이므로

$3<\log_5 243<4 \qquad \therefore a_1=3$

따라서 $\log_5 243=3+\frac{a_2}{5}+\frac{a_3}{5^2}+\cdots$이므로

$\log_5 243-3=\log_5\frac{243}{125}=\frac{a_2}{5}+\frac{a_3}{5^2}+\cdots$

위 등식의 양변에 다시 5를 곱하면

$5\log_5\frac{243}{125}=\log_5\left(\frac{243}{125}\right)^5=a_2+\frac{a_3}{5}+\cdots$

이때, $5^2<\left(\frac{243}{125}\right)^5<\frac{3^{25}}{5^{15}}<5^3$이므로

$2<\log_5\left(\frac{243}{125}\right)^5<3 \qquad \therefore a_2=2$

48. 정답 ②

자연수 $N=p^m\times q^n$(m, n은 자연수)의 양의 약수의 개수는 $(m+1)(n+1)$이므로 $\log_N a_1$, $\log_N a_2$, $\cdots$,$\log_N a_k$의 평균 M은

$$M=\frac{\log_N a_1+\log_N a_2+\cdots+\log_N a_k}{(m+1)(n+1)}$$
$$=\frac{\log_N(a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_k)}{(m+1)(n+1)}$$

한편 $N=p^m\times q^n$의 양의 약수는

$p^a\times q^b(l\le a\le m,\ 0\le b\le n$이고 a,b는 정수)

이고 이때 q^a이 포함된 양의 약수의 개수는 $(n+1)$개, q^b이 포함된 양의 약수의 개수는 $(m+1)$개이므로 모든 양의 약수의 곱은

$$p^{(n+1)(0+1+2+\cdots+m)}\cdot q^{(m+1)(0+1+2+\cdots+n)}$$
$$=p^{(n+1)\times\frac{m(m+1)}{2}}\cdot q^{(m+1)\times\frac{n(n+1)}{2}}$$
$$=(p^m\times q^n)^{\frac{(m+1)(n+1)}{2}}=N^{\frac{(m+1)(n+1)}{2}}$$
$$\therefore M=\frac{\log_N N^{\frac{(m+1)(n+1)}{2}}}{(m+1)(n+1)}=\frac{\frac{(m+1)(n+1)}{2}\log_N N}{(m+1)(n+1)}=\frac{1}{2}$$

49. 정답 ④

$\log_n a=\log_a b=k$ 로 놓으면 $a=n^k$, $b=a^k$

이때, $a=n^k$ 을 $b=a^k$ 에 대입하면 $b=a^k=(n^k)^k=n^{k^2}$

$\therefore\ a=n^k,\ \ b=n^{k^2}$

n 의 값에 따라 a, b 를 구하면 다음과 같다.

(i) $n=2$ 일 때,

$k=2$ 이면 $a=2^2$, $b=2^4$

$k=3$ 이면 $a=2^3$, $b=2^9$ $\qquad\therefore f(2)=2$

(ii) $n=3$ 일 때,

$k=2$ 이면 $a=3^2$, $b=3^4$ $\qquad\therefore f(3)=1$

(iii) $n=4$ 일 때,

$k=2$ 이면 $a=4^2$, $b=4^4$ $\qquad\therefore f(4)=1$

(iv) $n=5$ 일 때,

$k=2$ 이면 $a=5^2$, $b=5^4$ $\qquad\therefore f(5)=1$

$\therefore\ \sum_{n=2}^{5}f(n)=2+1+1+1=5$

50. 정답 20

$\frac{3a}{\log_a b}=\frac{b}{2\log_b a}=\frac{3a+b}{3}=k$로 놓으면

$3a=k\log_a b$, $b=2k\log_b a$, $3a+b=3k$

이때, $k\log_a b+2k\log_b a=3k$이므로

$\log_a b+2\log_b a=3$

$\log_a b=t$로 놓으면 $\log_b a=\frac{1}{t}$이므로

$t+\frac{2}{t}=3$, $t^2-3t+2=0$, $(t-1)(t-2)=0$

그런데$a\ne b$이므로$t\ne 1$이다

$\therefore t=2 \qquad \therefore 10\log_a b=10\cdot 2=20$

51. 정답 ④

$10^{1.3711}=23.5$에서 $\log 23.5=1.3711$

$\therefore \log 235=\log(10\times 23.5)=1+\log 23.5$

$\therefore =1+1.3711=2.3711$

$10^{-0.4413}=0.362$에서 $\log 0.362=-0.4413$

$\therefore \log 362=\log(1000\times 0.362)=3+\log 0.362$

$=3+(-0.4413)=2.5587$

$\therefore \log(235\times 362)=\log 235+\log 362$

$=2.3711+2.5587$

$=4.9298$

52. 정답 ④

$\log x^2=2\log x=-4+0.2468$이므로

$\log x=-2+0.1234$

$\log x^3=3\log x=-6+0.3702$

$\log\sqrt{x}=\log x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log x=-1+0.0617$

$\therefore \log x^3+\log\sqrt{x}$

$=(-6+0.3702)+(-1+0.0617)$

$=-7+0.4319=\bar{7}.4319$

53. 정답 ②

$\sqrt{5\sqrt[7]{5}}=\sqrt{5\cdot 5^{\frac{1}{7}}}=\sqrt{5^{\frac{8}{7}}}$

$=(5^{\frac{8}{7}})^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{4}{7}}$

$\therefore \log\sqrt{5\sqrt[7]{5}}=\log 5^{\frac{4}{7}}$

$=\frac{4}{7}\log 5$

$= \frac{4}{7}(1-\log 2)$

$= \frac{4}{7}\times 0.70$

$= 0.40$

54. 정답 ③

$\log_3 x = \frac{\log x}{\log 3} = 6.5$에서

$\log x = 6.5\times\log 3 = 6.5\times 0.48 = 3.12$

$\therefore \log x^2 = 2\log x = 6.24$

따라서 $\log x^2$의 가수는 0.24이다.

55. 정답 ②

$\log(2^4\times 5^2) = \log 100 + \log 4 = 2+\log 4$이므로

$n=2,\ \alpha=\log 4$

$\therefore 10^n + 10^\alpha = 10^2 + 10^{\log 4} = 104$

56. 정답 ④

$\log x = \log(a\times 10^m) = \log a + m = 2.3$

이고, $0\leqq \log a < 1$이므로

$\log a = 0.3,\ m=2$

$\log y = \log(b\times 10^n) = \log b + n = 3.7$

이고, $0\leqq \log b < 1$이므로

$\log b = 0.7,\ n=3$

$\log ab = \log a + \log b = 0.3+0.7 = 1$이므로

$ab = 10$

$\therefore ab+mn = 10+2\cdot 3 = 16$

57. 정답 ②

$\log\frac{1}{4} = -\log 4 = -1+(1-\log 4) = -1+\log\frac{5}{2}$이고

$0\leq \log\frac{5}{2} < 1$이므로 $n=-1,\ \alpha=\log\frac{5}{2}$이다.

$\therefore \log_5 10^\alpha - \log_5 10^n = \log_5\frac{10^\alpha}{10^n} = \log_5\frac{10^{\log\frac{5}{2}}}{10^{-1}}$

$= \log_5\left(\frac{5}{2}\times 10\right) = \log_5 5^2 = 2$

58. 정답 35

$5^x = 7^y = a^z$의 각 변에 상용로그를 취하면

$x\log 5 = y\log 7 = z\log a$

이때, $x = \frac{k}{\log 5},\ y=\frac{k}{\log 7},\ z=\frac{k}{\log a}$로 놓으면

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$에서 $\frac{\log 5}{k}+\frac{\log 7}{k}=\frac{\log a}{k}$

$\log a = \log 5 + \log 7 = \log 35$

$\therefore a = 35$

59. 답 ②

a^2이 7자리의 수이므로 $\log a^2$의 지표는 6이다.

즉, $6\leq \log a^2 < 7$에서 $3\leq \log a < \frac{7}{2}$ … ㉠

ab^3이 20자리의 수이므로 $\log ab^3$의 지표는 19이다.

즉 $19\leq \log ab^3 < 20$에서 $19\leq \log a + 3\log b < 20$ … ㉡

㉡ − ㉠을 하면 $\frac{31}{2} < 3\log b < 17,\ \frac{31}{6} < \log b < \frac{17}{3}$

따라서 $\log b$의 지표가 5이므로 b는 6자리의 수이다.

60. 정답 ②

$\log 20^{30} = 20\log 20 = 20(1+\log 2)$

$20(1+0.301) = 26.02$

즉, $\log 20^{20} = \log 5^{50} = 50\log 5 = 50(1-\log 2)$

$= 50(1-0.301) = 34.95$

즉, $\log 25^{25}$의 지표가 34이므로 25^{25}은 35자리의 수이다.

$\therefore f(25) = 35$

$\therefore f(20)+f(25) = 27+35 = 62$

61. 정답 ④

$\log N^5$의 지표가 8이므로 $8\leq \log N^5 < 9$에서

$8\leq 5\log N < 9 \qquad \therefore \frac{8}{5}\leq \log N < \frac{9}{5}$

따라서 $\frac{16}{5}\leq 2\log N < \frac{18}{5}$에서 $3.2\leq \log N^2 < 3.6$이므로

$\log N^2$의 지표는 3이다.

62. 정답 ②

$f(n) = k$, 즉 $k\leq \log n < k+1$(k는 정수) 이라 하자.

$\log 2n = \log n + \log 2$이므로

$k+\log 2\leq \log 2n < k+1+\log 2$

$\therefore f(2n) = k$ 또는 $f(2n) = k+1$

또, $\log 50n = \log n + 1 + \log 5$이므로

$k+1+\log 5\leq \log 50n < k+2+\log 5$

$\therefore f(50n) = k+1$ 또는 $f(50n) = k+2$

따라서 $f(2n)+f(50n)$의 값은 $2k+1$ 또는 $2k+2$ 또는 $2k+3$이다. 그런데 $f(2n)+f(50n) = 6$(짝수) 이므로 다음 두 가지 경우 중의 하나이다.

(ⅰ) $f(2n)=2,\ f(50n)=4$ 일 때

$2+\log 2\leq \log 2n < 3$이고 $4\leq \log 50n < 4+\log 5$이므로

$2\leq \log n < 3-\log 2$ 이고 $3-\log 5\leq \log n < 3$

즉, $\log 100\leq \log n < \log 500$이고 $\log 200\leq \log n < \log 1000$이다.

$\therefore \log 200\leq \log n < \log 500$

$\therefore 200\leq n < 500$

(ⅱ) $f(2n)=3,\ f(50n)=3$ 일 때

$3\leq \log 2n < 3+\log 2$이고 $3+\log 5\leq \log 50n < 4$이므로

$3-\log 2\leq \log n < 3$ 이고 $2\leq \log n < 3-\log 5$

즉, $\log 500\leq \log n < \log 1000$이고 $\log 100\leq \log n < \log 200$이다.

따라서 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

$200\leq n < 500$

이므로 구하는 자연수 n은 $500-200 = 300$(개)

63. 정답 ⑤

상용로그의 자표가 x인 자연수는 $(x+1)$자리의 자연수이고 그 중 가장 큰 수는 $10^{x+1}-1$이다.

$\therefore\ f(x)=10^{x+1}-1$

또, 10^{y-1}의 역수, 즉 10^{-y+1}의 상용로그의 지표는 $-y+1$이고 10^{y}의 역수, 즉 10^{-y}의 상용로그의 지표는 $-y$이므로 $10^{y-1}+1$부터 10^{y}까지의 자연수의 역수의 상용로그의 지표는 $-y$이다.

따라서 역수의 상용로그의 지표가 $-y$인 자연수 중 가장 작은 수는 $10^{y-1}+1$이므로 $g(y)=10^{y-1}+1$이다.

$$\therefore\ \log\{f(x)+1\}\log\{g(y)-1\}=\log 10^{x+1}\log 10^{y-1} =(x+1)(y-1)$$

64. 정답 8

조건 (가)에서 $10^{38}\le a^5b^5<10^{39}$ … ㉠

조건 (나)에서 $10^{20}\le \dfrac{a^5}{b^5}<10^{21}$ … ㉡

㉠×㉡을 하면 $10^{58}\le a^{10}<10^{60}$, $10^{5.8}\le a<10^{6}$

따라서 자연수 a는 6자리의 수이다.

㉡에서 $10^{-21}<\dfrac{b^5}{a^5}\le 10^{-20}$ … ㉢

㉠×㉢을 하면 $10^{17}<b^{10}<10^{19}$, $10^{1.7}<b<10^{1.9}$

따라서 자연수 b는 2자리의 자연수이다.

$\therefore\ m+n=6+2=8$

65. 정답 ③

$$\log\frac{1}{2^{30}}=\log 2^{-30}=-30\log 2=-30\times 0.301$$

$-9.03=\overline{10}.97$

따라서 $\log\dfrac{1}{2^{30}}$의 지표가 -10이므로 $\dfrac{1}{2^{30}}$은 소수 10째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나타난다.

$\therefore n=10$

66. 정답 ②

$\left(\dfrac{n}{10}\right)^{10}$이 소수 여섯째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나타나므로

$$-6\le\log\left(\frac{n}{10}\right)^{10}<-5,\ -6\le 10\log n-10<-5$$

$\therefore 0.4\le \log n<0.5$

이때, $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$, $\log 4=2\times 0.3010=0.6020$ 이므로 자연수 n의 값은 3이다.

67. 정답 ⑤

$$\log\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{40}=\log 3^{-20}=-20\log 3$$

$=-20\times 0.4771=-9.542$

$=\overline{10}.458$

이므로 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{40}$은 소수 10째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나타난다.

$\therefore m=10$

$\log 30^{10}=10\log 30=10(1+\log 3)$

$=10\times 1.4771=14.771$

이므로 30^{20}은 15자리의 수이다.

$\therefore n=15$

$\therefore m+n=25$

68. 정답 ①

$$\log\left(\frac{3}{4}\right)^{20}=20(\log 3-2\log 2)$$

$=20(0.4771-2\times 0.3010)$

$=20\times(-0.1249)$

$=-2.498=-3+0.502$

$\log\left(\dfrac{3}{4}\right)^{20}$의 지표가 -3이므로 소수점 아래 3번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다. $\therefore a=3$

한편, $\log\left(\dfrac{3}{4}\right)^{20}$의 가수가 0.502이고

$\log 3=0.4771$, $\log 4=2\log 2=0.6020$이므로 $b=3$

$\therefore a+b=6$

69. 정답 ③

두 자연수 n, m에 대하여 $\log n$과 $\log m$의 가수가 같기 위해서는 n, m의 소수점의 위치만 다르고 숫자의 배열이 같아야 한다.

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 15$일 때

n과 숫자의 배열이 같은 $16\le m\le 150$인 자연수가 존재한다.

예를 들면, 1과 100, 2와 20, 12와 120 등이다.

한편, $16\le m\le 150$인 자연수 중에서는 숫자의 배열이 같은 자연수가 존재하지 않으므로 $\log m$의 가수는 모두 다르다.

따라서 구하는 집합 A의 원소의 개수는

$150-16+1=135$(개)

다른 풀이

$1\le n\le 9$일 때, $\log n$의 지표는 0이므로 가수 $f(n)$의 값은

$\log 1,\ \log 2,\ \log 3,\ \cdots,\ \log 9$ ……㉠

의 9개이고, 이들은 서로 다른 값이다.

$10\le n\le 99$일 때, $\log n$의 지표는 1이므로 가수 $f(n)$의 값은

$\log\dfrac{10}{10},\ \log\dfrac{11}{10},\ \log\dfrac{12}{10},\ \cdots,\ \log\dfrac{99}{10}$ ……㉡

의 90개이고, 이들은 서로 다른 값이며, 이들 중

$\log\dfrac{10}{10},\ \log\dfrac{20}{10},\ \log\dfrac{30}{10},\ \cdots,\ \log\dfrac{90}{10}$

의 9개는 ㉠의 값과 중복된다.

$100\le n\le 150$일 때, $\log n$의 지표는 2이므로 가수 $f(n)$의 값은

$\log\dfrac{100}{100},\ \log\dfrac{101}{100},\ \log\dfrac{102}{100},\ \cdots,\ \log\dfrac{150}{100}$

의 51개이고, 이들은 서로 다른 값이며, 이들 중

$\log\dfrac{100}{100},\ \log\dfrac{110}{100},\ \log\dfrac{120}{100},\ \cdots,\ \log\dfrac{150}{100}$

의 6개는 ㉠,㉡의 값과 중복된다.

따라서 집합 A의 원소의 개수는

$9+(90-9)+(51-6)=135$ (개)

70. 정답 ③

ㄱ. $\log A-\log B=\log\frac{A}{B}=n$($n$은 자연수)이라 하면

$\frac{A}{B}=10^n$, $A=B\cdot 10^n$

따라서 A는 B로 나누어 떨어진다. (참)

ㄴ. $\log A-\log B$가 자연수이므로 $\log A$, $\log B$의 가수가 같다. 따라서

$\log A=n_1+\alpha$(n_1은 정수, $0\le\alpha<1$),

$\log B=n_2+\alpha$(n_2은 정수, $0\le\alpha<1$)

로 놓으면

$$\log\frac{A^4}{B^3}=4\log A-3\log B$$
$$=4(n_1+\alpha)-3(n_2+\alpha)$$
$$=(4n_1-3n_2)+\alpha$$

이때, $4n_1-3n_2$는 정수이고 $\log\frac{A^4}{B^3}$의 가수는 α이므로

$\frac{A^4}{B^3}$의 숫자의 배열은 A의 숫자의 배열과 같다. (참)

ㄷ. (반례) $A=20$, $B=2$이면

$\log A-\log B=\log\frac{A}{B}=\log 10=1$

이므로 자연수이다.

그런데 $\frac{A^3}{B^4}=\frac{8000}{16}=500$의 숫자의 배열은 B의 숫자의 배열과 다르다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

71. 정답 ③

$\log x$의 지표가 2이므로 $2\le\log x<3$

$\log x^2$의 가수와 $\log\sqrt{x}$의 가수가 서로 같으므로

$\log x^2-\log\sqrt{x}=2\log x-\frac{1}{2}\log x=\frac{3}{2}\log x=$(정수)

㉠에서 $3\le\frac{3}{2}\log x<\frac{9}{2}$이므로 $\frac{3}{2}\log x$의 값은 3 또는 4이다.

$\frac{3}{2}\log x=3$에서 $\log x=2$ $\therefore x=10^2$

$\frac{3}{2}\log x=4$에서 $\log x=\frac{8}{3}$ $\therefore x=10^{\frac{8}{3}}$

따라서 모든 실수 x의 곱은 $10^2\times 10^{\frac{8}{3}}=10^{\frac{14}{3}}$이다.

72. 정답 ④

$\log x=1+\alpha$ $(0\le\alpha<1)$로 놓으면

$\log x^2=2\log x=2+2\alpha$

$\log\frac{1}{x}=-\log x=-1-\alpha=-2+(1-\alpha)$

(i) $\alpha=0$일 때,

($\log x^2$의 가수)=($\log\frac{1}{x}$의 가수)$=0$

이때, $\log x=1$에서 $x=10$

(ii) $0<\alpha<\frac{1}{2}$일 때,

$\log x^2$의 가수는 2α, $\log\frac{1}{x}$의 가수는 $1-\alpha$이므로

$2\alpha=1-\alpha$에서 $\alpha=\frac{1}{3}$

이때, $\log x=1+\frac{1}{3}$에서 $x=10^{\frac{4}{3}}$

(iii) $\frac{1}{2}\le\alpha<1$일 때,

$\log x^2$의 가수는 $2\alpha-1$, $\log\frac{1}{x}$의 가수는 $1-\alpha$이므로

$2\alpha-1=1-\alpha$에서 $\alpha=\frac{2}{3}$

이때, $\log x=1+\frac{2}{3}$에서 $x=10^{\frac{5}{3}}$

따라서 구하는 곱은

$10\times 10^{\frac{4}{3}}\times 10^{\frac{5}{3}}=10^4$

73. 정답 ⑤

ㄱ. $\frac{a^2}{b^2}=100$이면 $a=10b$이므로

$\log a=\log 10b=1+\log b$

따라서 $\log a$와 $\log b$의 가수가 같다.

$\therefore f(a)=f(b)$ (참)

ㄴ. $\log a=n+a$(n은 정수, $0\le\alpha<1$)라 하면 $f(a)=\alpha$이다.

$\log a^3=3\log a=3n+3\alpha$이므로

(ⅰ) $0\le\alpha<\frac{1}{3}$일 때

$0\le 3\alpha<2$이므로 $f(a^3)=3\alpha$

$3\alpha=\alpha$에서 $\alpha=0$

(ⅱ) $\frac{1}{3}\le\alpha<\frac{2}{3}$일 때

$1\le 3\alpha<2$이므로 $f(a^3)=3\alpha-1$

$3\alpha-1=\alpha$에서 $\alpha=\frac{1}{2}$

(ⅲ) $\frac{2}{3}\le\alpha<1$일 때

$2\le 3\alpha<3$이므로 $f(a^3)=3\alpha-2$

$3\alpha-2=\alpha$에서 $\alpha=1$ (모순)

따라서 $f(a^3)=f(a)$이면 $f(a)=0$ 또는 $f(a)=\frac{1}{2}$이다. (참)

ㄷ. $\log a=n+a$(n은 정수, $0\le\alpha<1$)라 하면

$\log a^2=2\log a=2n+2\alpha$이다.

이때, $0\le 2\alpha<2$이므로 $f(a^2)=2\alpha$ 또는 $2\alpha-1$이다.

(ⅰ) $2\alpha=3\alpha$일 때, $\alpha=0$이므로 $\log a=n$

따라서 $a=10^n$(유리수)이다.

(ⅱ) $2\alpha-1=3\alpha$일 때, $\alpha=-1$이므로 모순이다.

따라서 무리수 α는 존재하지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

74. 정답 ③

$0<\log x<1$ ⋯⋯ ㉠

$\log x$의 가수를 α라 하면 $\log x=\alpha$이다.

$\log x$의 가수와 $\log x^3$의 가수의 합이 1이므로

$\log x+\log x^3=\log x+3\log x$

$=4\log x=$(정수)
㉠에서 $0<4\log x<4$이므로 $4\log x$의 값은 1 또는 2 또는 3이다.

$4\log x=1$에서 $\log x=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore x=10^{\frac{1}{4}}$

$4\log x=2$에서 $\log x=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore x=10^{\frac{1}{2}}$

$4\log x=3$에서 $\log x=\frac{3}{4}$ $\quad\therefore x=10^{\frac{3}{4}}$

따라서 모든 x의 값의 곱은
$10^{\frac{1}{4}}\times10^{\frac{1}{2}}\times10^{\frac{3}{4}}=10^{\frac{3}{2}}$

75. 정답 12
$\log3^{20}=20\log3=20\times0.4771=9.542$이므로 $\log3^{20}$의 지표는 9이다.
또, $\log3^{20}$의 가수가 0.542이고 $\log3=0.4771$,
$\log4=2\log2=2\times0.3010=0.6020$이므로 3^{20}의 최고 자리의 숫자는 3이다.

따라서 $3\le\frac{2^{20}}{10^9}<4$이므로 $m+n=3+9=12$

76. 정답 30
2^{10n}의 최고 자리의 숫자가 1이 되려면 $\log2^{10n}$의 가수가
$\log2=0.30103$미만이어야 한다.
따라서 $\log2^{10n}$의 가수가 0.30103 이상이 되도록 하는 자연수
n의 최솟값을 구하면 된다.
$\log2^{10n}=10n\log2=3.0103\times n$이므로
$n\le29$이면 $\log2^{10n}$의 가수는 $0.0103\times n\le0.2987$이고,
$n=30$이면 $\log2^{10n}$의 가수는 $0.0103\times n=0.309>0.30103$
이다.
따라서 $0.0103\times n$의 소수 부분이 $\log2=0.30103$ 이상이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은 30이다.

77. 정답 ③
ㄱ. $\alpha=0.5$이면 $\log x=n+0.5$이므로

$\log\frac{1}{x}=-\log x=-n-0.5=(-n-1)+0.5$

따라서 $\log\frac{1}{x}$의 가수는 0.5이다. (참)

ㄴ. (반례) $x=10$이면 $\log10=1$이므로 $\log x$의 가수는 0이다.

$\log\frac{1}{x}=\log\frac{1}{10}=-1$이므로 $\log\frac{1}{x}$의 가수는 0이다.

따라서 $\log x$의 가수와 $\log\frac{1}{x}$의 가수의 합은 0이다. (거짓)

ㄷ. $\log x^2=2\log x=2n+2\alpha$이므로

$0\le\alpha<\frac{1}{2}$일 때, $\log x^2$의 지표는 $2n$이고,

$\frac{1}{2}\le\alpha<1$일 때, $\log x^2$의 지표는 $2n+1$이다.

$\log x$의 지표와 $\log x^2$의 지표의 합은 $2n$ 또는 $3n+1$이고,

$3n=10$이면 $n=\frac{10}{3}$이므로 모순이다.

$3n+1=10$이면 $n=3$이다.

그러므로 $\log x^2$의 지표는 $2n+1$이므로 $\frac{1}{2}\le\alpha<1$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

78. 정답 ④
$\log2x$의 지표가 2이므로 $2x$는 세 자리의 수이다.
따라서 $100\le2x<1000$에서 $50\le x<500$ …… ㉠
㉠에서 $\log x$의 지표는 1 또는 2이다.

또, $\log x^2=2\log x$의 가수가 0이므로 $\log x$의 가수는 0 또는 $\frac{1}{2}$이다.

$\log x$의 가수가 0일 때,
$\log x=1+0$에서 $x=10$
$\log x=2+0$에서 $x=100$
㉠에서 $x=100$

$\log x$의 가수가 $\frac{1}{2}$일 때,

$\log x=1+\frac{1}{2}$에서 $x=10\sqrt{10}$

$\log x=2+\frac{1}{2}$에서 $x=100\sqrt{10}$

㉠에서 $x=100\sqrt{10}$
따라서 모든 실수 x의 곱은

$100\times100\sqrt{10}=10^2\times10^{\frac{5}{2}}=10^{\frac{9}{2}}$

79. 정답 ②
ㄱ. $\log ab-\log b=\log a$이고 $\log ab$와 $\log b$의 가수가 같으므로 $\log a$는 정수이다. 따라서 가수가 0이므로
$f(a)=0$ (참)
ㄴ. ㄱ에서 $b=a$를 대입하면 $f(a)=0$
$\log a$의 가수가 0인 두 자리 자연수 a는 $a=10$이므로 1개다. (참)
ㄷ. $10\le a<10^2$, $10\le b<10^2$이므로 $10^2\le ab<10^4$
이때, $\log ab$의 가수가 0이기 위해서는 $ab=10^2$, 10^3이어야 한다.
$\therefore(a,b)=(10,10),(20,50),(50,20),(25,40),(40,25)$
따라서 순서쌍 (a,b)는 5개다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

80. 정답 ④
ㄱ. 정의에 의해 $\log a^n=f(a^n)+g(a^n)$
$\log a^n=n\log a=n\{f(a)+g(a)\}$
$\therefore f(a^n)+g(a^n)=n\{f(a)+g(a)\}$ (참)
ㄴ. $\log a=f(a)+g(a)$
$\log a^2=f(a^2)+g(a^2)=2f(a)+2g(a)$
이때, $f(a^2)=2f(a)$이므로 $0\le2g(a)<1$

$\therefore0\le g(a)<\frac{1}{2}$

$\log a^3=3f(a)+3g(a)$에서 $0\le3g(a)<\frac{3}{2}$이므로

$1\le3g(a)<\frac{3}{2}$일 때, $f(a^3)=3f(a)+1$이다. (거짓)

ㄷ. $\log a^2=2f(a)+2g(a)$에서
$0\le g(a)<1$이므로 $0\le2g(a)<2$

(i) $0 \le 2g(a) < 1$일 때

$g(a^2) = 2g(a) = g(a)$ $\therefore g(a) = 0$

(ii) $1 \le 2g(a) < 2$일 때

$g(a^2) = 2g(a) - 1 = g(a)$

즉, $g(a) = 1$이므로 모순이다.

(i),(ii)에 의해 $g(a) = 0$

$\log a^n = n\log a = nf(a) + ng(a)$에서 $ng(a) = 0$이고 $nf(a)$는 정수이므로 $g(a^n) = 0$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

81. 정답 22

$0 \le g(b) < 1$이므로 $\log a = 2 + g(b)$에서 $g(b)$는 $\log a$의 가수와 같다. 즉,

$\log a$의 가수와 $\log b$의 가수가 같다.

$\log a$와 $\log b$의 지표는 각각 2, 1이므로

$\log a - \log b = 2 - 1 = 1$

$\log\frac{a}{b} = 1$, $\frac{a}{b} = 10$ $\cdots\cdots$ $a = 10b$ $\cdots\cdots$ ㉠

(나)에서 $\log ab$의 가수가 $g(a) + g(b)$이므로

$0 \le g(a) + g(b) < 1$

$g(a) = g(b)$이므로 $0 \le 2g(a) < 1$

$\therefore 0 \le g(a) < \frac{1}{2}$

따라서 $1 \le \log b < \frac{3}{2}$, 즉 $10 \le b < 10\sqrt{10}$이므로 자연수 b의 값은 $10, 11, 12, \cdots, 31$의 22개이고 ㉠에 의해 순서쌍 (a, b)의 개수는 22개다.

82. 정답 ④

$10^{f(x)+g(x)} = x$에서 $\log x = f(x) + g(x)$이고,

$f(x)$는 정수, $0 \le g(x) < 1$이므로

$f(x)$는 $\log x$의 지표, $g(x)$는 $\log x$의 가수이다.

즉, $\log a = f(a) + g(a)$, $\log b = f(b) + g(b)$에서

$\log ab = \log a + \log b = f(a) + f(b) + g(a) + g(b)$

$= f(a) + f(b) + 1.3$

이므로 $\log ab$의 지표는 $f(a) + f(b) + 1$이다.

즉, $f(ab) = f(a) + f(b) + 1$이므로

$5 = f(a) + f(b) + 1$

$\therefore f(a) + f(b) = 4$

83. 정답 ③

p, q는 두 자리의 자연수이므로 $f(p) = f(q) = 1$이다.

$\log p = 1 + \alpha\ (0 \le \alpha < 1)$,

$\log q = 1 + \beta\ (0 \le \beta < 1)$

라 하면

$\log pq = \log p + \log q = 2 + (\alpha + \beta)$ (단, $0 \le \alpha + \beta < 2$)

이고, $f(pq) \ne f(p) + f(q) = 2$이므로

$1 \le \alpha + \beta < 2$ $\cdots\cdots$ ㉠

이어야 한다.

ㄱ. $\log pq = 3 + (\alpha + \beta - 1)$에서 $0 \le \alpha + \beta - 1 < 1$이므로

$\log pq$의 지표는 3이다.

$\therefore f(pq) = 3$ (참)

ㄴ. $p < 10\sqrt{10}$, 즉 $\log p < \log 10\sqrt{10} = \log 10^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{1}{2}$이면

$0 \le \alpha < \frac{1}{2}$이므로 ㉠에서 $\frac{1}{2} < \beta$이어야 한다.

따라서 $\log q > 1 + \frac{1}{2}$이어야 하므로 $q > 10\sqrt{10}$이다. (참)

ㄷ. (반례) $p > 10\sqrt{10}$이고 $q > 10\sqrt{10}$일 때에도 ㉠을 만족한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ이다.

84. 정답 ④

A와 B의 상용로그의 지표가 각각 1,2이다.

또, A의 상용로그의 가수가 0이 아니므로 $\frac{1}{B}$과 B의 상용로그의 가수도 0이 아니다.

따라서 $\log A = 1 + \alpha(0 < \alpha < 1)$, $\log B = 2 + \beta(0 < \beta < 1)$라 하면

$\log\frac{1}{B} = -\log B = -2 - \beta = -3 + (1 - \beta)$이고 $0 < 1 - \beta < 1$

이므로 $\frac{1}{B}$의 상용로그의 가수는 $1 - \beta$이다.

이 때, $\alpha = 1 - \beta$에서 $\alpha + \beta = 1$이므로

$\log A^3B^3 = 3\log A + 2\log B = 3(1 + \alpha) + 2(2 + \beta)$

$= 7 + 2(\alpha + \beta) + \alpha = 9 + \alpha$

따라서 $\log A^3B^2$의 지표는 9이다.

85. 정답 ⑤

$[\log x] = 5$에서 $5 \le \log x < 6$이므로 $\log x = 5 + \alpha(0 \le \alpha < 1)$이라하면

$\log x^2 = 2\log x = 10 + 2\alpha$, $\log\frac{1}{x^2} = -2\log x = -10 - 2\alpha$이다.

(i) $\alpha = 0$일 때, $\log x = 5$, $[\log x^2] = 10$, $\left[\log\frac{1}{x^2}\right] = -10$이므로

조건 (나)를 만족시킨다. 이 때 $\log x = 5$에서 $x = 10^5$

(ii) $0 < \alpha < \frac{1}{2}$일 때, $0 < 2\alpha < 1$, $0 < 1 - 2\alpha < 1$이므로

$[\log x^2] = 10$, $\left[\log\frac{1}{x^2}\right] = -11$이다.

따라서 $\log x = 5 + \alpha = \frac{10}{4} - \frac{1}{4}\cdot(-11)$에서 $\alpha = \frac{1}{4}$이고,

이 때 $\log x = \frac{21}{4}$에서 $x = 10^{\frac{21}{4}}$

(iii) $\alpha = \frac{1}{2}$일 때, $\log x = 5 + \frac{1}{2}$, $[\log x^2] = 11$, $\left[\log\frac{1}{x^2}\right] = -11$이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

이 때 $\log x = \frac{11}{2}$에서 $x = 10^{\frac{11}{2}}$

(iv) $\frac{1}{2} < \alpha < 1$일 때 $0 < 2\alpha - 1 < 1$, $0 < 2 - 2\alpha < 1$이므로

$[\log x^2] = 11$, $\left[\log\frac{1}{x^2}\right] = -12$이다.

따라서 $\log x = 5 + \alpha = \frac{11}{4} - \frac{1}{4}\cdot(-12)$에서 $\alpha = \frac{3}{4}$이고,

이 때 $\log x = \frac{23}{4}$에서 $x = 10^{\frac{23}{4}}$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $A=10^5\times10^{\frac{21}{4}}\times10^{\frac{11}{2}}\times10^{\frac{23}{4}}=10^{\frac{43}{2}}$ 이므로

$$\log A=\log10^{\frac{43}{2}}=\frac{43}{2}$$

86. 정답 ②

$\log x_1=n_1+\alpha_1$(n_1은 정수, $0\le\alpha_1<1$)

$\log x_2=n_2+\alpha_2$(n_2은 정수, $0\le\alpha_2<1$)이라 하자.

ㄱ. $\log x_1x_2=\log x_1+\log x_2=(n_1+n_2)+(\alpha_1+\alpha_2)$이고

$f(x_1)=f(x_2)=0$이면 $\alpha_1=\alpha_2=0$이므로 $f(x_1x_2)=0$이다. (참)

ㄴ. $\log x_1^2=2\log x_1=2n_1+2\alpha_1$이다.

(ⅰ) $0\le\alpha_1<\frac{1}{2}$일 때, $f(x_1^2)=2\alpha_1$이므로 $2\alpha_1=\alpha_1$에서 $\alpha_1=0$

$\therefore x_1=1, 10, 100$

(ⅱ) $\frac{1}{2}\le\alpha_1<1$일 때, $f(x_1^2)=2\alpha_1-1$이므로 $2\alpha_1-1=\alpha_1$에서

$\alpha_1=1$이 되어 모순이다.

그러므로 $f(x_1^2)=f(x_1)$을 만족시키는 자연수 x_1의 개수는 3이다. (참)

ㄷ. $x_1<x_2$이고 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_2=10x_1$ 또는 $x_2=100x_1$이므로 $x_1<x_2$이고 $f(x_1)=f(x_2)$를 만족시키는 순서쌍 (x_1, x_2)는 $(1,10)$, $(1,100)$, $(2,20)$, $(3,30)$, $(4,40)$, $(5,50)$, $(6,60)$, $(7,70)$, $(8,80)$, $(9,90)$, $(10,100)$의 11개다. (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ이다.

87. 정답 ①

$[\log N]$은 $\log N$의 지표를 나타낸다.

$[\log N]=2$이므로 $\log N$의 지표는 2이고, N은 세 자리의 수이다.

$\therefore 100\leqq M<10000$ …… ㉠

$[\log 2N]=2$에서 $\log 2N$의 지표가 2이므로 $2N$은 세 자리의 수이다.

즉, $100\leqq 2N<1000$이므로

$50\leqq N<500$ …… ㉡

$[\log 3N]=3$에서 $\log 3N$의 지표가 3이므로 $3N$은 네 자리의 수이다.

즉, $1000\leqq 3N<10000$이므로

$\frac{1000}{3}\leqq N<\frac{10000}{3}$

이때, N은 자연수이므로 $334\leqq N<3334$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족하는 N의 값의 범위는

$334\leqq N<500$

이므로 자연수 N의 개수는 $500-334=166$(개)이다.

88. 정답 ⑤

$\log x$의 지표를 n, 가수를 α라 하면 n은 정수이고, $a\leqq\alpha<1$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$n+\alpha=\frac{7}{4}$, $n\times\alpha=\frac{k}{4}$

$n+\alpha=1+\frac{3}{4}$이고, n은 정수, $0\leqq\alpha<1$이므로

$n=1$, $\alpha=\frac{3}{4}$

$\therefore k=4\times n\times\alpha=4\times1\times\frac{3}{4}=3$

89. 정답 ③

$\log c=n+\alpha$(n은 정수, $0\le\alpha<1$)라 하자.

조건 (가)에서 n, α가 $x^2-ax+b=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$n+\alpha=a$, $n\alpha=b$ …… ㉠

이때, $\alpha=0$이면㉠에서 $b=0$이고

$\log\frac{1}{c}=-\log c=-n+0$이므로 조건 (나)에서

$-n\times0=b-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$ (모순) $\quad\therefore\alpha\neq0$

따라서 $\log\frac{1}{c}=-n-\alpha=(-n-1)+(1-\alpha)$이므로 조건 (나)에서

$-n-1$, $1-\alpha$가 $x^2+ax+b-\frac{3}{2}=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(-n-1)(1-\alpha)=b-\frac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $n-\alpha=\frac{1}{2}$

이때, n은 정수, $0<\alpha<1$이므로 $n=1, \alpha=\frac{1}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면

$a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore a+b=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$

90. 정답 30

$\log p=n+\alpha$(n은 정수, $0\le\alpha<1$)이라 하면 이차방정식 $2x^2+5x+a=0$의 두 근이 n, α이다.

이때, 두 근의 합이 $-\frac{5}{2}$이므로 $n+\alpha=-\frac{5}{2}-3+\frac{1}{2}$에서

$n=3$, $\alpha=\frac{1}{2}$

따라서 (두 근의 곱)$=\frac{a}{2}=-3\times\frac{1}{2}$에서 $a=-3$ …㉠

또, $\log\frac{1}{p}=-\log p=-\left(-3+\frac{1}{2}\right)=3-\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}$이므로

이차방정식 $2x^2+bx+c=0$의 두 근이 2, $\frac{1}{2}$이다.

(두 근의 합)$=-\frac{b}{2}=2+\frac{1}{2}$에서 $b=-5$ …㉡

(두 근의 곱)$=\frac{c}{2}=2\times\frac{1}{2}$에서 $c=2$ …㉢

따라서 ㉠, ㉡, ㉢에서 $abc=(-3)\times(-5)\times2=30$

91. 정답 ③

[해설] $p=-3$일 때, $b=\frac{1}{\sqrt{10}}a$이므로

$-3=k\log\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{1}{2}k$에서 $k=6$

$\therefore p=6\log\frac{b}{a}$

$p=-9$일 때, $-9=6\log\frac{b}{a}$에서

$\log\frac{b}{a}=-\frac{3}{2}$

$\frac{b}{a}=10^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{10\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{100}$

따라서 물체를 통과한 음파의 세기는 통과하기 전 음파의 세기의 $\frac{\sqrt{10}}{100}$배가 된다.

92. 정답 ④

$L=\frac{I\cdot 10^{-kx}}{x^2}$에서

$L=4\times10^{-7}$, $I=4\times10^5$, $x=2000$을 대입하면

$4\times10^{-7}=\frac{4\times10^5\times10^{-2000k}}{2000\times2000}=\frac{10^{-2000k}}{10}$

$4\times10^{-6}=10^{-2000k}$

양변에 상용로그를 취하면

$2\log2+(-6)=-2000k$

$0.6+(-6)=-2000k$, $-5.4=-2000k$

$\therefore k=2.7\times10^{-3}$

93. 정답 ③

음원으로부터 $10r(cm)$ 떨어진 지점에서의 소리의 상대적 세기 $P(I,\ 10r)$는

$$\begin{aligned}P(I,\ 10r)&=10\left\{12+\log\frac{I}{(10r)^2}\right\}\\&=10\left\{12+\log\left(\frac{I}{r^2}\times\frac{1}{10^2}\right)\right\}\\&=10\left(12+\log\frac{I}{r^2}-2\right)\\&=P(I,\ r)-20\end{aligned}$$

따라서 소리의 상대적 세기는 20(데시벨)만큼 감소한다.

94. 정답 ④

$117=10\log\frac{B}{P_0}$ …㉠

$110=10\log\frac{A}{P_0}$ …㉡이라 하면

㉠- ㉡에서

$$7=10\log\frac{B}{P_0}-10\log\frac{A}{P_0}=10\log\frac{B}{A}$$

$$\log\frac{B}{A}=0.7=1-0.3=\log10-\log2=\log5$$

$$\therefore\ \frac{B}{A}=5$$

95. 정답 ④

$5=\frac{1}{\log2}\times\log\frac{2\times100}{W_A}$ ……㉠

$3.5=\frac{1}{\log2}\times\log\frac{2\times100}{W_B}$ ……㉡

㉠- ㉡을 하면

$$1.5=\frac{1}{\log2}\times\log\frac{W_B}{W_A},\ 1.5\log2=\log\frac{W_B}{W_A}$$

$$\log2^{1.5}=\log\frac{W_B}{W_A}\qquad\therefore\ \frac{W_B}{W_A}=2^{1.5}=2\sqrt{2}$$

96. 정답 105

해수면의 기압을 A라 하면 고도가 hkm인 지점의 기압은

$$A\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{4.5}}(kPa)$$

이다. 기압이 $50kPa$, $10kPa$인 두 지점의 높이를 각각 h_1km, h_2km라 하면

$$A\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h_1}{4.5}}=50\qquad\cdots\cdots㉠$$

$$A\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h_2}{4.5}}=10\qquad\cdots\cdots㉡$$

㉠÷㉡을 하면

$$\frac{A\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h_1}{4.5}}}{A\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h_2}{4.5}}}=\frac{50}{10},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h_1}{4.5}-\frac{h_2}{4.5}}=5$$

$$\therefore 2^{\frac{h_1-h_2}{4.5}}=5$$

로그의 정의에 의해

$$\frac{h_1-h_2}{4.5}=\log_2 5=\frac{\log5}{\log2}=\frac{1-\log2}{\log2}=\frac{0.7}{0.3}=\frac{7}{3}$$

이므로

$$a=h_1-h_2=4.5\times\frac{7}{3}=\frac{9}{2}\times\frac{7}{3}=\frac{21}{2}=10.5(km)$$

$$\therefore 10a=105$$

97. 정답 ③

10^a을 3으로 나눈 몫을 Q라 하면

$10^a=3Q+2$ (단, Q는 정수)

양변에 상용로그를 취하면 $a=\log(3Q+2)$

이때, $0<a<1$이므로

$0<\log(3Q+2)<1$, $1<3Q+2<10$

$\therefore Q=0,\ 1,\ 2$

$Q=1$일 때, $a=\log2$

$Q=1$일 때, $a=\log5$

$Q=2$일 때, $a=\log8$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은

$$\begin{aligned}\log2+\log5+\log8&=\log10+\log2^3\\&=1+3\log2\end{aligned}$$

98. 정답 ①

$0<x<1$이므로 $\log x<0$이고

$0\le\alpha<1$이므로 $0\le\alpha^2<1$

이때, $(\log x)^2=8-\alpha^2$이므로

$7<(\log x)^2\le8$

$\therefore -3<\log x<-2$

따라서 $\log x=-3+\alpha$라 하고 $(\log x)^2+\alpha^2=8$에 대입하여 정리하면

$2\alpha^2-6\alpha+9=8$, $2\alpha^2-6\alpha+1=0$

$\therefore \alpha = \dfrac{3-\sqrt{7}}{2} (\because 0 \le \alpha < 1)$

$\therefore \log x = -3 + \alpha = \dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}$

99. 정답 ②

세 수 x, y, z의 상용로그의 지표가 각각 $0,1,3$이므로

$\log x = \alpha (0 \le \alpha < 1)$, $\log y = 1+\beta(0 \le \beta < 1)$

$\log z = 3 + \gamma(0 \le \gamma < 1)$이라 놓으면

$\mathrm{A}(0,\alpha)$, $\mathrm{B}(1,\beta)$, $\mathrm{C}(3,\gamma)$이다.

이 때 세 점 A,B,C가 이순서대로 한 직선 위에 있으므로 점 B는 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점이다.

즉, $\beta = \dfrac{\gamma+2\alpha}{1+2}$에서 $2\beta = 2\alpha + \gamma$이므로

$3(\log y - 1) = 2\log x + (\log z - 3)$

$3\log y = 2\log x + \log z$, $\log y^3 = \log x^2 z$

$\therefore y^3 = x^2 z$

1. 정답 ⑤	2. 정답 ⑤	3. 정답 ②
4. 정답 ④	5. 정답 ①	6. 정답 ③
7. 정답 ④	8. 정답 ④	9. 정답 ②
10. 정답 ⑤	11. 정답 ①	12. 정답 ②
13. 정답 ④	14. 정답 ④	15. 정답 ⑤
16. 정답 9	17. 정답 12	18. 정답 90
19. 정답 10	20. 정답 4	21. 정답 ④
22. 정답 ②	23. 정답 ④	24. 정답 ③
25. 정답 ④	26. 정답 ⑤	27. 정답 ①
28. 정답 21	29. 정답 5	30. 정답 24
31. 정답 98	32. 정답 100	33. 정답 ⑤
34. 정답 ④	35. 정답 ①	36. 정답 325
37. 정답 ②	38. 정답 ②	39. 정답 ②
40. 정답 ②	41. 정답 ④	42. 정답 ③
43. 정답 ③	44. 정답 ③	45. 정답 ①
46. 정답 ④	47. 정답 50	48. 정답 ②
49. 정답 ②	50. 정답 ⑤	51. 정답 ⑤
52. 정답 ④	53. 정답 ⑤	54. 정답 ①
55. 정답 3	56. 정답 ⑤	57. 정답 ③
58. 정답 ⑤	59. 정답 ②	60. 정답 ②
61. 정답 ③	62. 정답 ③	63. 정답 ③
64. 정답 11	65. 정답 11	66. 정답 ③
67. 정답 ①	68. 정답 ③	69. 정답 ②
70. 정답 ⑤	71. 정답 ④	72. 정답 ④
73. 정답 ②	74. 정답 ⑤	75. 정답 ②
76. 정답 11	77. 정답 40	78. 정답 4
79. 정답 ④	80. 정답 10	81. 정답 ④
82. 정답 ③	83. 정답 16	84. 정답 6
85. 정답 11	86. 정답 ②	87. 정답 ②
88. 정답 ⑤	89. 정답 ⑤	90. 정답 ③
91. 정답 ②	92. 정답 ③	93. 정답 ③
94. 정답 ⑤	95. 정답 ⑤	96. 정답 ③
97. 정답 ④	98. 정답 ④	99. 정답 ④
100. 정답 39	101. 정답 ④	102. 정답 ⑤
103. 정답 ⑤	104. 정답 ④	105. 정답 ③
106. 정답 ②	107. 정답 325	108. 정답 12
109. 정답 ④	110. 정답 ②	111. 정답 24
112. 정답 16	113. 정답 ①	114. 정답 ④
115. 정답 ⑤	116. 정답 ②	117. 정답 ③
118. 정답 18	119. 정답 ③	120. 정답 29
121. 정답 ④	122. 정답 ⑤	123. 정답 ③
124. 정답 ②	125. 정답 ④	126. 정답 ②
127. 정답 ④	128. 정답 ①	129. 정답 ④
130. 정답 ⑤	131. 정답 ⑤	132. 정답 ①
133. 정답 ⑤	134. 정답 ④	135. 정답 ①
136. 정답 ④	137. 정답 11	138. 정답 ④

1. 정답 ⑤

[해설]

$a_{11}=f(1)+g(1)=3+2=5$

$a_{12}=f(1)+g(2)=3+1=4$

$a_{21}=f(1)+g(1)=5+2=7$

$a_{22}=f(2)+g(2)=5+1=6$

$\therefore A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 7 & 6\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$5+4+7+6=22$

2. 정답 ⑤

[해설]

$a_{11}=f(1)+g(1)=3+2=5$

$a_{12}=f(1)+g(2)=3+1=4$

$a_{21}=f(1)+g(1)=5+2=7$

$a_{22}=f(2)+g(2)=5+1=6$

$\therefore A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 7 & 6\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$5+4+7+6=22$

3. 정답 ②

[해설]

$a_{11}=(f\circ f)(1)=f(2)=1$
$a_{12}=(f(3)-f(1)=2-2=0$
$a_{21}=f(3)-f(2)=2-1=1$
$a_{22}=(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(1)=2$

$\therefore A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 4이다.

4. 정답 ④

[해설]

$f(f(1))=f(3)=2$

$f(f(2))=f(1)=3$

$f(f(3))=f(2)=1$

이므로

$a_{11}=1\,,\ a_{12}=1\,,\ a_{13}=0$

$a_{21}=1\,,\ a_{22}=1\,,\ a_{23}=1$

$a_{31}=1\,,\ a_{32}=1\,,\ a_{33}=0$

따라서, 모든성분의 합은 6이다.

5. 정답 ①

[해설]

$A=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ \cos\frac{3}{4}\pi & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

$A^4=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E$

$A^6=A^2A^4=A^2(-E)=-A^2$

$A^8=(A^4)^2=(-E)^2=E$

$\therefore A^2+A^4+A^6+A^8=O$

따라서

$A^2+A^4+A^6+A^8+\cdots+A^{100}$

$=(A^2+A^4+A^6+A^8)+A^8(A^2+A^4+A^6+A^8)+\cdots$

$\quad+A^{88}(A^2+A^4+A^6+A^8)+A^{96}(A^2+A^4)$

$=A^2+A^4=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

이므로 모든 성분의 합은 -2이다.

6. 정답 ③

[해설]

(i) A_1에서A_1을 거쳐 A_2로 가는 방법의 수 $a_{11}\times a_{12}$

(ii) A_1에서 A_2를 거쳐 A_2로 가는 방법의 수 $a_{12}\times s_{22}$

따라서, A_1에서 두 개의 회선을 거쳐 A_2로 가는 방법의 수는

$a_{11}\times a_{12}+a_{12}\times a_{22}$

이때, $a_{11}\times a_{12}+a_{12}\times a_{22}$는 행렬$P^2$의 $(1,2)$성분과 같다.

(참고)

일반적으로 n개의 회로를 거쳐 A_i에서 A_j로 가는 방법의 수는 행렬P^n의 (i,j)성분과 같다.

7. 정답 ④

[해설]

$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

에서 $a_{12}=a_{21}=a_{13}=a_{31}=a_{14}=a_{41}=1$ 이므로 점P_1은 점P_2, P_3, P_4와 하나의 선분으로 모두 연결되어 있다.

또, $a_{34}=a_{43}=1$이므로 두 점P_3, P_4는 하나의 선분으로 연결되어 있다. 나머지 성분은 모두 0이므로 다른 점끼리는 선분으로 직접 연결되어 있지 않다.

따라서, 네 점의 연결 상태를 바르게 나타낸 것은④이다.

8. 정답 ④

[해설]

$3A+2B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 5\end{pmatrix}$ ⋯⋯ ㉠

$2\mathrm{A}-\mathrm{B}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 7\end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠$+2\times$㉡을 하면

$7\mathrm{A}=\begin{pmatrix}8 & -1\\ 2 & 19\end{pmatrix}$ $\quad\therefore \mathrm{A}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}8 & -1\\ 2 & 19\end{pmatrix}$

따라서 행렬A의 모든 성분의 합은

$\frac{1}{7}(8-1+2+19)=4$

***9.* 정답 ②**

[해설]

$A+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ …… ㉠

$A-B=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 0 & k\end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠+㉡에서 $2A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2+k\end{pmatrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1+\frac{k}{2}\end{pmatrix}$

㉠에서 $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}-A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1+\frac{k}{2}\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1+\frac{k}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1-\frac{k}{2}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & -1-k\\ 1+\frac{k}{2} & -\frac{k^2}{4}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

따라서 $-1-k=1, 1+\frac{k}{2}=0, -\frac{k^2}{4}=-1$

이므로

$k=-2$

***10.* 정답 ⑤**

[해설]

$\begin{cases}2X+Y=A+3B & \cdots\cdots ㉠\\ X-Y=2A & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠+㉡에서 $3X=3A+3B$

$\therefore X=A+B$

㉡에서 $Y=X-2A=(A+B)-2A=B-A$

$\therefore X+Y=(A+B)+(B-A)=2B$

$=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 6 & 4\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $X+y$의 $(2,\ 2)$의 성분은 4이다.

***11.* 정답 ①**

[해설]

$(\mathrm{A}-\mathrm{B})(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\mathrm{A}^2+\mathrm{AB}-\mathrm{BA}-\mathrm{B}^2$

$=\mathrm{A}^2-\mathrm{BA}-\mathrm{B}^2$

이 성립하려면 $\mathrm{AB}=\mathrm{O}$가 성립해야 한다.

즉, $\mathrm{AB}=\begin{pmatrix}-2+\mathrm{y} & -\mathrm{x}-1\\ 2-\mathrm{y} & \mathrm{x}+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$에서

$x=-1$, $y=2$ $\quad\therefore xy=-2$

다른풀이

영행렬이 아닌 두 행렬 A, B에 대하여

$\mathrm{AB}=\mathrm{O}$ 또는 $\mathrm{BA}=\mathrm{O}$이면 A와B의 역행렬은 모두 존재하지 않는다.

따라서 행렬B의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$2\cdot(-1)-xy=0$ $\quad\therefore xy=-2$

***12.* 정답 ②**

[해설]

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$이므로

$A^3=A$

$\therefore A^3(A+B)=A(A+B)=A^2+AB$

$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 7\\ -4 & -4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4 & 7\\ -1 & -3\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A^3(A+B)$의 $(2,\ 1)$성분은 -1이다.

***13.* 정답 ④**

[해설]

$(A\circ B)+(A\circ C)=2AB+2AC$

$=2A(B+C)$

$=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-6 & -2\\ -4 & -4\end{pmatrix}$

따라서 $(1,1)$성분과 $(2,2)$성분의 곱은

$(-6)\times(-4)=24$

***14.* 정답 ④**

[해설]

이차방정식 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=k$

$AB=\begin{pmatrix}2 & \alpha\\ \beta & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta & 2\\ 2 & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\alpha+2\beta & 4+\alpha^2\\ 4+\alpha^2 & 2\alpha+2\beta\end{pmatrix}$

따라서 행렬 AB의 모든 성분의 합은

$4(\alpha+\beta)+8+\alpha^2+\beta^2$
$=16+8+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=24+4^2-2k$
$=40-2k$

이므로 $40-2k=36$에서 $k=2$

***15.* 정답 ⑤**

[해설]

ㄱ. $(ac)◎(bc)=\begin{pmatrix}ac & bc\\ bc & ac\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}=c(a◎b)$(참)

ㄴ. $(a◎b)+(c◎d)=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c & d\\ d & c\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ b+d & a+c\end{pmatrix}$

$=(a+c)◎(b+d)$(참)

ㄷ. $(a◎b)(c◎d)=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & d\\ d & c\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ ab+bc & ac+bd \end{pmatrix}$

$= (ac+bd) ◎ (ad+bc)$(참)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

16. 정답 *9*

[해설]

A는 3×2행렬이고, 덧셈A + B가 정의되므로 B도 3×2행렬이다.

$\therefore p=3$, $q=2$

이때, A + B도 3×2행렬이고, (A + B) + AC가 정의되므로 AC도 3×2행렬이므로 C는 2×2행렬이다.

$\therefore r=s=2$

$\therefore p+q+r+s=9$

(참고)

(1) $p\times q$행렬A와 $r\times s$행렬B에 대하여 A ± B가 정의되려면 $p=r$, $q=s$이어야 한다.

(2) $p\times q$행렬 A와 $r\times s$행렬B에 대하여 AB가 정의되려면 $q=r$이어야 한다. 이때, AB는 $p\times s$행렬이다.

17. 정답 *12*

[해설]

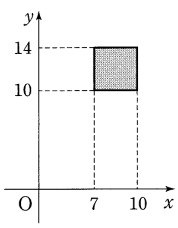
$\mathrm{R}=\mathrm{PQ}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}7&10\\10&14\end{pmatrix}$

이므로 오른쪽 그림에서

$S_R=(10-7)(14-10)$

$=3\times4=12$



18. 정답 *90*

[해설]

$\mathrm{A}_{10}=\begin{pmatrix}11&10\\-10&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{k}+1&\mathrm{k}\\-\mathrm{k}&-\mathrm{k}+1\end{pmatrix}$이므로

$\mathrm{A}_{10}\mathrm{A}_{\mathrm{k}}=\begin{pmatrix}11&10\\-10&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{k}+1&\mathrm{k}\\-\mathrm{k}&-\mathrm{k}+1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}k+11&k+10\\-k-10&-k-9\end{pmatrix}$

그런데 $\mathrm{A}_{100}=\begin{pmatrix}101&100\\-100&-99\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}k+11&k+10\\-k-10&-k-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}101&100\\-100&-99\end{pmatrix}$

$\therefore k=90$

19. 정답 10

[해설] X는 이차정사각행렬이므로 $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$라 하면

$AX=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-c&b-d\\0&0\end{pmatrix}$

$XA=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-a\\c&-c\end{pmatrix}$

이므로 $\begin{pmatrix}a-c&b-d\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-a\\c&-c\end{pmatrix}$에서

$c=0,\ a+b=d$

따라서 행렬 X는 a, b의 값에 따라 정해지고 조건 (나)를 만족시키는 (a, b)는

$(0,0),\ (0,1),\ (0,2),\ (0,3),\ (1,0),\ (1,1),\ (1,2),\ (2,0),$
$(2,1),\ (3,0)$

의 10개이므로 행렬 X의 개수는 10이다.

20. 정답 *4*

[해설]

$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2\\-2&-2\end{pmatrix}$

$A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0\\-0&-4\end{pmatrix}=-4E$

$2^{16}E=4^8E=(-4)^8E$

$(A^4)^8=A^{32}=(-4E)^8=4^8E=2^{16}E$

$\therefore n=32$

21. 정답 ④

[해설]

$\mathrm{A}^2=\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}$, $\mathrm{A}^3=\mathrm{A}^2\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-\mathrm{E}$

이므로 $\mathrm{A}^6=\mathrm{A}^{12}=\mathrm{A}^{18}=\cdots=\mathrm{A}^{2010}=\mathrm{E}$

$\therefore \mathrm{A}^{2011}=A^{6m+1}$(단, m은0이상의 정수)

세 자리의 자연수 중에서 $6m+1$꼴인 자연수의 최댓값은 $m+166$일 때 이므로 자연수 k의 최댓값은

$6\times166+1=997$

다른풀이

케일리- 해밀턴의 정리에 의해

$\mathrm{A}^2-(-1+2)\mathrm{A}+(-2+3)\mathrm{E}=\mathrm{O}$

$\therefore \mathrm{A}^2-\mathrm{A}+\mathrm{E}=\mathrm{O}$

양변에 A + E를 곱하여 정리하면

$(\mathrm{A}+\mathrm{E})(\mathrm{A}^2-\mathrm{A}+\mathrm{E})=\mathrm{A}^3+\mathrm{E}^3=\mathrm{A}^3+\mathrm{E}=\mathrm{O}$

$\therefore \mathrm{A}^3=-\mathrm{E}$ $\qquad$ $\therefore \mathrm{A}^6=\mathrm{E}$

22. 정답 ②

[해설]

$A^{24}=A^{15}\cdot A^9=E\cdot A^9=E$

$\therefore A^9=E$

$A^{15}=A^9\cdot A^6=E\cdot A^6=A^6$

$\therefore A^6=E$

$A^9=A^6\cdot A^3=E\cdot A^3=E$

$\therefore A^3=E$

$A^{12}=A^9\cdot A^3=E\cdot E=E$

$\therefore A^3+A^6+A^9+A^{12}=E+E+E+E=4E$

$\therefore k=4$

23. 정답 ④

[해설]

$A=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ x+1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ x+1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^3 & 0 \\ x^2+x+1 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore f(x)=g(x)=x^3+x^2+x+1$

따라서 $f(x)+g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 $f(1)+g(1)=4$이다.

24. 정답 ③

[해설]

$A^2=\begin{pmatrix} a^2+1 & 0 \\ 0 & a^2+1 \end{pmatrix}=(a^2+1)E$ 이므로

$A^3=(a^2+1)A,\ A^4=(A^2)^2=(a^2+1)E$

$\therefore A+A^2+A^3+A^4$

$=A+(a^2+1)E+(a^2+1)A+(a^2+1)^2E$

$=(a^2+2)A+\{(a^2+1)+(a^2+1)^2\}E$

$=6A+pE$

따라서 $a^2+2=6$이므로 $a=2 \quad (\because a>0)$

$\therefore p=a^2+1+(a^2+1)^2=5+5^2=30$

$\therefore a+p=2+30=32$

25. 정답 ④

[해설]

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$

$A^2=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ \alpha+\beta & \beta^2 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ \alpha+\beta & \beta^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 \\ \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 & \beta^3 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^3의 모든 성분의 합은

$\alpha^3+\beta^3+\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$
$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$
$=2^3-3\cdot(-1)\cdot 2+2^2-(-1)$
$=8+6+4+1=19$

26. 정답 ⑤

[해설]

$A^{n+3}+A^n=O \quad \cdots㉠$

의 양변에 A^3을 곱하면

$A^{n+6}+A^{n+3}=O \quad \cdots㉡$

㉡-㉠을 하면 $A^{n+6}-A^n=O$

$\therefore A^{n+6}=A^n(n=1,2,3,\cdots)$

이 때, $2010=6\times 334+6$이므로 $A^{2010}=A^6$

27. 정답 ①

[해설]

$(A+E)^{10}=\{(A+E)^2\}^5=(A^2+2A+E)^5$

$=(3A)^5(\because A^2+E=A)=3^5A^5$

또, $A^3=A^2A=(A-E)A=A^2-A=-E$이므로

$A^5=A^3A^2=-E(A-E)=-A+E$

$\therefore (A+E)^{10}=3^5A^5=3^5(-A+E)=-3^5A+3^5E$

$\therefore mn=-3^5\times 3^5=-3^{10}$

28. 정답 21

[해설]

$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$이므로

$A^2=A^4=A^6=\cdots=A^{20}=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^1=A^3=A^5=\cdots=A^{19}=A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore\ a_0E+a_1A+a_2A^2+a_3A^3+\cdots+a_{20}A^{20}$

$=a_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+a_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\cdots$

$+a_{20}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}+\cdots\begin{pmatrix} a_{20} & 0 \\ 0 & a_{20} \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a_0+a_2+\cdots+a_{20} & a_1+a_3+\cdots+a_{19} \\ a_1+a_3+\cdots+a_{19} & a_0+a_2+\cdots+a_{20} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$

$\therefore a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=11+10=21$

29. 정답 5

[해설]

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에서 $\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$이고, $\alpha^2-3\alpha+1=0,\ \beta-3\beta+1=0$이다.

따라서

$A^2=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2+1 & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta & \beta^2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\alpha & 3 \\ 3 & 3\beta \end{pmatrix}=3A$

이므로 $A^{10}=3^9A$

또, 행렬 A의 모든 성분의 합은 $\alpha+\beta+1+1=3+2=5$이므로 행렬 A^{10}의 모든 성분의 합은 $3^9\times 5$

$\therefore k=5$

30. 정답 24

[해설]

$A^2=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$A^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^n의 모든 성분의 합은

$$a^n + a^n = 2a^n = 2^{33}$$

이므로 $a^n = 2^{32}$

$2^{32} = (2^2)^{16} = (2^4)^8 = (2^8)^4 = (2^{16})^2$이고,

$10 \leq a \leq 20$이므로

$$a^n = (2^4)^8 = 16^8$$

따라서 $a = 16, n = 8$이므로

$$a + n = 24$$

31. 정답 *98*

[해설]

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2 = (\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)+(\mathrm{AB}+\mathrm{BA})$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (\mathrm{A}+\mathrm{B})^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^6 = (\mathrm{A}+\mathrm{B})^2(\mathrm{A}+\mathrm{B})^4$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\cdots$

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

따라서, 행렬$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{2n}$의 모든 성분의 합은 $n+2$이므로

$n + 2 = 100$에서 $n = 98$

(참고)

두 행렬$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$은 주어진 조건을 만족시킨다.

32. 정답 *100*

[해설]

$S_1 = 1+2+2+1 = 6$

$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$이라 하면

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + 2b_n & 2a_n + b_n \\ c_n + 2d_n & 2c_n + d_n \end{pmatrix}$$

이므로

$S_{n+1} = 3(a_n + b_n + c_n + d_n) = 3S_n$

$\therefore S_n = 6 \times 3^{n-1} = 2 \times 3^n \qquad \therefore S_{100} = 2 \times 3^{100}$

이때, $\log_3 S_{100} = \log_3(2 \times 3^{100}) = 100 + \log_3 2$이고

$0 < \log_3 2 < 1$이므로 $[\log_3 S_{100}] = 100$

(참고)

수열 $\{a_n\}$이 등비수열 $\Leftrightarrow a_{n+1} = ra_n$(단,$r$는 상수)

$$\Leftrightarrow a_n = a_1 r^{n-1}$$

33. 정답 ⑤

[해설]

$QP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_3 & \frac{1}{3}b_3 & \frac{1}{3}c_3 \end{pmatrix}$이므로

$$QPR = \begin{pmatrix} \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3} \end{pmatrix}$$

따라서, QPR의 계산결과는 C의 $1, 2, 3$회의 수학 성적의 평균을 나타낸다.

34. 정답 ④

[해설]

올해의 A, B부서의 인원을 각각 p명, q명이라 하면

$$\begin{cases} 0.8a + 0.3b = p \\ 0.2a + 0.7b = q \end{cases}$$

이므로 이것을 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ㉠$$

마찬가지로 내년도의 A, B부서의 인원인 x명, y명은

$$\begin{cases} 0.8p + 0.3q = x \\ 0.2p + 0.7q = y \end{cases}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.7 & 0.45 \\ 0.3 & 0.55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$\therefore \alpha - \beta = 0.45 - 0.55 = -0.1$

(참고)

일반적으로 n년 후의 A, B부서의 인원을 각각 a_n , a_n 이라하면

$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 가 성립한다.

35. 정답 ①

[해설]

월요일에 출근할 때와 퇴근할 때의 자동차의 평균 속력은 출근길과 퇴근길 전체 거리를 출근 시간과 퇴근 시간의 합으로 나눈 것과 같으므로

$$(\text{평균 속력}) = \frac{(30 \times 0.8) + (40 \times 0.6)}{0.8 + 0.6} = \frac{AB(1,\ 1)}{CB(1,\ 1)}$$

36. 정답 325

[해설]

1일 후에 이 바이러스에 감염된 오리와 닭의 수가 각각 a', b'이라 하면

$\begin{cases} a' = 3a + b \\ b' = a + 2b \end{cases}$ 이므로

이를 행렬을 이용하여 나타내면

$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$이다.

따라서 $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$이므로 $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^4$이다.

이때, $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^4 = 25\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = 25\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 25\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$25(5+3+3+2) = 325$

37. 정답 ②

[해설]

$\mathrm{B}=\mathrm{E}-\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{A}^2\mathrm{B}+\mathrm{AB}^2&=\mathrm{A}(\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{B}=\mathrm{AEB}=\mathrm{AB}\\&=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

38. 정답 ②

[해설]

$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -6 & 7\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2&=(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2-(\mathrm{AB}+\mathrm{BA})\\&=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -6 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ -3 & 8\end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 11이다.

39. 정답 ②

[해설]

$$\begin{aligned}(A-B)^2&=(A-B)(A-B)\\&=A^2-AB-BA+B^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore A^2+B^2&=(A-B)^2+AB+BA\\&=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

40. 정답 ②

[해설]

$$\begin{aligned}2X&=A-AB\\&=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore A&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

41. 정답 ④

[해설]

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}-\mathrm{B})^2&=\mathrm{A}^2-\mathrm{AB}-\mathrm{BA}+\mathrm{B}^2\\&=A^2-2AB+B^2\end{aligned}$$

이므로 $\mathrm{AB}=\mathrm{BA}$

$\mathrm{AB}=\begin{pmatrix}a & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2 & ab-1\\ 7 & 3b-2\end{pmatrix}$

$\mathrm{BA}=\begin{pmatrix}1 & b\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+3b & 1+2b\\ 2a-3 & 0\end{pmatrix}$

$2a-3=7$, $3b-2=0$에서

$a=5$, $b=\frac{2}{3}$ $\qquad \therefore a+b=\frac{17}{3}$

42. 정답 ③

[해설]

집합 S의 임의의 두 원소 A, B에 대하여

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 2a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}c & d\\ 0 & 2c\end{pmatrix}$ (a, b, c, d는 자연수)라 하자.

ㄱ. $A+B=\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ 0 & 2(a+c)\end{pmatrix}$이고,

$a+c, b+d$는 자연수이므로 $A+B\in S$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$이면

$AB=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$이므로 $AB\not\in S$ (거짓)

ㄷ. $A=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 2c\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은 $3a+b$이고 a, b는 자연수이므로

$3a+b=7$에서

$a=1, b=4$ 또는 $a=2, b=1$

그러므로 행렬 A는 $\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$의 2개이다. (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ,ㄷ이다.

43. 정답 ③

[해설]

$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (a, b는 자연수)라 하자.

ㄱ. $AB=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore AB=BA$ (참)

ㄴ. $A^2=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$A^n=\begin{pmatrix}1 & na\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (n은 자연수)

ㄷ. ㄱ에서 행렬 AB의 모든 성분의 합은

$1+a+b+1=a+b+2$이다.

$a+b+2=6$에서 $a+b=4$

자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 3), (2, 2), (3, 1)$의 3개이고, 순서쌍 (a, b)의 개수도 3개이다.

(거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ 이다.

44. 정답 ③

[해설]

$$\begin{aligned}A\begin{pmatrix}2a-3c\\ 2b-3d\end{pmatrix}&=A\left\{\begin{pmatrix}2a\\ 2b\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3c\\ 3d\end{pmatrix}\right\}\\&=2A\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}-3A\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}\end{aligned}$$

이고, $2A\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 6\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}4\\ 6\end{pmatrix}-3A\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 9\end{pmatrix}$

$3A\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\ 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ -3\end{pmatrix}$

$\therefore A(c\ \ d)=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은 $2+(-1)=1$이다.

45. 정답 ①

[해설]

$A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=(2A-E)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$=2A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=A\left\{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}-2A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

46. 정답 ④

[해설]

$AB=3E$에서

$A^{-1}=\frac{1}{3}B$ ...... ㉠

$A(A+E)=2E$에서

$A^{-2}=\frac{1}{2}(A+E)$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{3}B=\frac{1}{2}(A+E)$

$\therefore B=\frac{3}{2}(A+E)$

$B^2=\frac{9}{4}(A+E)^2$

$=\frac{9}{4}(A^2+2A+E)$

$=\frac{9}{4}(A^2+A+A+E)$

$=\frac{9}{4}(2E+A+E)$

$=\frac{9}{4}(A+3E)$

$=\frac{9}{4}A+\frac{27}{4}E$

따라서 $p=\frac{9}{4}$, $q=\frac{27}{4}$이므로

$p+q=\frac{36}{4}=9$

47. 정답 50

[해설]

$A+B=5E$이면 $B=5E-A$이므로

$AB=A(5E-A)=5A-A^2=(5E-A)A=BA$

$\therefore AB=BA$

$\therefore A^3+B^3=(A+B)^3-2AB(A+B)$

$=(5E)^3-3(5E)(5E)$

$=125E-75E=50E$

$\therefore k=50$

48. 정답 ②

[해설]

ㄱ. (반례) $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$이면

$AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$이지만

$BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq O$ (거짓)

ㄴ. $A+B=O$이면 $B=-A$이므로

$A^3+B^3=A^3+(-A)^3=A^3-A^3=O$ (참)

ㄷ. (반례) $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$이면

$A\neq O$이고 $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $AC=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

이지만 $B\neq C$(거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

49. 정답 ②

[해설]

ㄱ. (반례)$A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$이면

$AB\neq O$이지만 $BA=O$이다.(거짓)

ㄴ. $A=O$라고 가정하면 $AB=O$이고 $BA=O$이므로 가정에 모순이다. 따라서 주어진 명제는 참이다.(참)

ㄷ. (반례)$A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-2\\2&-2\end{pmatrix}$이면

$AB=O$이고, $BA=O$이지만 $A\neq O$, $B\neq O$이다.(거짓)

따라서, 옳은 것은 ㄴ 이다.

50. 정답 ⑤

[해설]

ㄱ. (반례)$X-A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$이면

$(X-A)^2=O$이지만 $X-A\neq O$(거짓)

ㄴ. $(X-A)^2=(X-A)(X-A)$

$=X^2-XA-AX+A^2=O$

에서 $X^2-XA=AX-A^2$

$X(X-A)=A(X-A)$(참)

ㄷ. $(X-A)^3=(X-A)^2(X-A)$

$=O(X-A)=O$

$(A-X)^3=-(X-A)^3$ 이므로 $(A-X)^3=O$(참)

따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

51. 정답 ⑤

[해설]

ㄱ. (반례)$A=\begin{pmatrix}2&1\\-2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-4\end{pmatrix}$이면

$AB=O$이지만 $BA\neq O$이다.(거짓)

ㄴ. $AB=O$이면 $A^2B^2=A(AB)B=AOB=O$(참)

ㄷ. $A+B=E$에서 $A(A+B)A=EA$이므로

$A^2+AB=A$ ...... ㉠

또, $A+B=E$에서 $(A+B)A=EA$이므로

$A^2+BA=A$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $AB=BA=A-A^2$(참)

따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄷ 이다.

52. 정답 ④

[해설]

ㄱ. $(AB)^2=(-BA)^2=(-1)^2(BA)^2=(BA)^2$(참)

ㄴ. $A^2B^2=AABB=A(AB)B=A(-BA)B$

$=ABAB=-(AB)(AB)$

$=-(AB)^2$(거짓)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에 의하여

$A^2B^2=-(AB)^2=-(BA)^2=-(BA)(BA)$

$=-B(AB)A=-B(-BA)A$

$=BBAA=B^2A^2$(참)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

(참고)

$AB=-BA$를 만족하는 행렬의 예는 다음과 같다.

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

53. 정답 ⑤

[해설]

ㄱ. $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$

$=A^2+B^2$(참)

ㄴ. $A^2B^2=AABB=(-1)ABAB=(-1)^2BAAB$

$=(-1)^3BABA=(-1)^4BBAA=B^2A^2$(참)

ㄷ. $A^nB^n=(-1)BA^nB^{n-1}$

$=(-1)^{2n}B^2A^nB^{n-2}$

$\vdots$

$=(-1)^{n^2}B^nA^n$

$\therefore A^{2n}B^{2n}=(-1)^{4n^2}B^{2n}A^{2n}=B^{2n}A^{2n}$(참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ이다.

54. 정답 ①

[해설]

만약 A의 역행렬이 존재한다면 $A^6(A^{-1})^5=A=O$가 되어 모순이다.

따라서 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면 $ad-bc=0$이므로

$$A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a^2+ad & b(a+d) \\ c(a+d) & ad+d^2 \end{pmatrix}$$

$$=(a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=(a+d)A$$

$$\therefore A^6=(A^2)^3=\{(a+d)A\}^3=(a+d)^3A^3$$

$$=(a+d)^4A^2=(a+d)A=O$$

이 때, $A\neq O$이므로 $a+d=0$

따라서 $A^2=0A=O$이므로 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $A^n=O$이다.

그러므로 k의 최솟값은 2이다.

55. 정답 3

[해설]

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=2A$$

$$A^3=A^2A=2A^2=4A$$

이므로 $A^3=xA+yA^2$에서 $4A=xA+2yA$이다.

이 때, $A\neq O$이므로 $4=x+2y$ …㉠

따라서 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 해 (x, y)는 $(0,2)$, $(2,1)$, $(4,0)$이므로 집합 X의 원소의 개수는 3이다.

56. 정답 ⑤

[해설]

주어진 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=2$이므로 역함수의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=-1$이다.

따라서, $f^{-1}(x)=\dfrac{k}{x-2}-1$($k$는 상수)로 놓을 수 있다.

또, $y=f(x)$의 그래프가 원점$(0,0)$을 지나므로 역함수의 그래프도 원점을 지난다.

따라서, $0=\dfrac{k}{-2}-1$에서 $k=-2$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-2}{x-2}-1=\dfrac{-2-(x-2)}{x-2}=\dfrac{-x}{x-2}$

따라서, 함수$f^{-1}(x)$에 대응하는 행렬은 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$이므로 $(1,1)$성분과

$(2,2)$성분의 합은 $-1-2=-3$

57. 정답 ③

[해설]

$A-2B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

이때, 두 점 $(-3, 4)$, $(3, -2)$사이의 거리는

$\sqrt{(3+3)^2+(-2-4)^2}=6\sqrt{2}$

$\therefore d(A-2B)=6\sqrt{2}$

58. 정답 ⑤

[해설]

$A_1=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$A_2=A_1P=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$A_3=PA_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$A_4=A_3P=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

따라서 행렬 A_n은 A_1, A_2, A_3, A_4가 차례로 반복된다.

$2011-4\times 502+3$, $2012-4\times 503$이므로

$$A_{2011}+A_{2012}=A_3+A_4=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

따라서 $(2, 1)$의 성분은 5이다.

59. 정답 ②

[해설]

$A_2 = BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A_3 = A_2B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A_4 = BA_3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$A_5 = A_4B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

따라서, 모든 자연수n에 대하여 $A_{n+4} = A_n$이 성립하므로

$S(A_{4n-3}) = S(A_1) = 1+2 = 3$

$S(A_{4n-2}) = S(A_2) = -1-2 = -3$

$S(A_{4n-1}) = S(A_3) = -2-1 = -3$

$S(A_{4n}) = S(A_4) = 2+1 = 3$

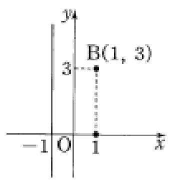
이때, $S(A_{4n-3}) + S(A_{4n-2}) + S(A_{4n-1}) + S(A_{4n}) = 0$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2011} S(A_k) = 0+0+\cdots+0+S(A_{2009})+S(A_{2010})+S(A_{2011})$

$= 3-3-3 = -3$

60. 정답 ②

[해설]



$A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ xy+y & 1 \end{pmatrix}$

이므로 $A^2 = E$에서 $x^2 = 1, xy+y = 0$

$x^2 = 1$에서 $x = 1$ 또는 $x = -1$

$x = 1$ 일 때, $xy+y = 2y = 0$에서 $y = 0$

$x = -1$일 때, $xy+y = -y+y = 0$이므로 y는 임의의 실수이다.

따라서 점 P의 자취는 점 $(1, 0)$ 또는 직선 $x = -1$이다. 점 $B(1, 3)$에서 직선 $x = -1$에 이르는 거리는 2이고, 점 $B(1,\ 3)$과 $(1,\ 0)$사이의 거리는 3이므로 구하는 최솟값은 2 이다.

61. 정답 ③

[해설]

자연수 n에 대하여 $B^{2n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이다.

ㄱ. $A_3 = A_2B^2 = A_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_2$(참)

ㄴ. $A_{2n+1} = A_{2n}B^{2n} = A_{2n}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{2n}$이므로

$A_{2n+2} = A_{2n+1}B^{2n+1} = A_{2n}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq A_{2n}$(거짓)

ㄷ. $A_2 = A_1B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A_3 = A_2B^2 = A_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_2$

$A_4 = A_3B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_1$

$A_5 = A_4B^4 = A_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_1$이므로

$A_{2n+2} = A_{2n}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$(참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

62. 정답 ③

[해설]

직선 l은 두 점 $(1, 2)$, $(3, 4)$를 지나는 직선이므로 직선 l의 방정식은

$y-2 = \dfrac{4-2}{3-1}(x-1)$, 즉, $y = x+1$이다.

ㄱ. $X = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$이므로 직선 m의 방정식은

$y-2 = \dfrac{8-4}{6-2}(x-2)$, 즉 $y = x+2$이다.

$\therefore l \,/\!/\, m$

ㄴ. $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$이므로 직선 m의 방정식은

$y-3 = \dfrac{5-3}{4-2}(x-2)$, 즉 $y = x+1$이다.

그러므로 l과 m은 일치한다.

ㄷ. $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$이므로 직선 m의 방정식은

$y+4 = \dfrac{-2+4}{-1+3}(x+3)$, 즉, $y = x-1$이다.

$\therefore l \,/\!/\, m$

따라서 두 직선 l, m이 공유점을 갖지 않는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

63. 정답 ③

[해설]

$(x^2+y^2)A - (x-y)E = B$

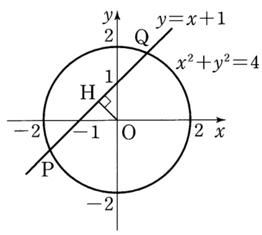
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4(x^2+y^2)-(x-y) & x^2+y^2 \\ x^2+y^2 & -(x-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ x-y = -1 \end{cases}$

따라서, 두 점P, Q는 원

$x^2+y^2 = 4$와 직선$x-y = -1$

의 두 교점이므로 오른쪽 그림에서



$\overline{OH} = \dfrac{|0-0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{OP} = 2$

$\therefore \overline{PH} = \sqrt{4-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$

$\therefore \overline{PQ} = 2\overline{PH} = \sqrt{14}$

64. 정답 11

[해설]

$A_nP = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_na_{n+1} \\ a_{n+2} & a_{n+1}+a_{n+2} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{pmatrix} = A_{n+1}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

따라서 $A_1P^{10} = (A_1P)P^9 = A_2P^9 = \cdots = A_{10}P = A_{11}$

$k = 11$

65. 정답 11

[해설]

$A^2 - A + E = O$의 양변에 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E) = (A+E)O$

이므로 $A^3 + E^3 = O$, 즉 $A^3 = -E$이다.

따라서, $A^{6n+k}=A^k(n, k$는 자연수) 이므로
$A^7=A^{13}=A^{19}=\cdots=A$
$A^8=A^{14}=A^{20}=\cdots=A^2$
$A^3=A^9=A^{15}=\cdots=-E$
$A^4=A^{10}=A^{16}=\cdots=-A$
$A^5=A^{11}=A^{17}=\cdots=-A^2$
$A^6=A^{12}=A^{18}=\cdots=E$
한편, $A^2-A+E=O$이므로
$A\neq E$, $A\neq -E$, $A\neq -A$, $A\neq A^2$, $A\neq -A^2$
따라서, $X=\{A^3, A^6, A^9, A^{12}, \cdots\}=\{-E, E\}$ 이므로
$n(X)=2$
$Y=\{A^4, A^8, A^{12}, A^{16}, \cdots\}=\{-A, A^2, E\}$이므로
$n(Y)=3$
$Z=\{A^5, A^{10}, A^{15}, A^{20}, A^{25}, A^{30}, \cdots\}$
$=\{-A^2, -A, -E, A^2, A, E\}$ 이므로
$n(Z)=6$
$\therefore n(X)+n(Y)+n(Z)=2+3+6=11$

66. 정답 ③

[해설]
$A^2+B^2=E$에서
$A(A^2+B^2)=A^3+AB^2=A$
이때, $AB^2=(AB)B=OB=\boxed{O}$이므로 $A^3=\boxed{A}$
마찬가지로 $A^2+B^2=E$에서
$(A^2+B^2)B=A^2B+B^3=B$
이때, $A^2B=A(AB)=AO=O$이므로 $B^3=\boxed{B}$
또한, $A^2=E-B^2$에서
$A^3=(E-B^2)A=A-B^2A=BO=O$ $(\because B^3=B)$
따라서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것은 차례로 O, A, B, O이므로 영행렬의 개수는 2개다.

67. 정답 ①

[해설]
$A^2-3A+2E=O$에서 $A^2-A=2(A-E)$이므로
$A^{101}-A^{100}=2^{100}(A-E)=2^{100}A-2^{100}E$ …㉠
또, $A^2-3A+2E=O$에서 $A^2-2A=A-2E$이므로
$A^{101}-2A^{100}=A-2E$ …㉡
㉠-㉡에서 $A^{100}=(2^{100}-1)A+(-2^{100}+2)E$이므로 (다), (라)에 알맞은 수의 합은
$(2^{100}-1)+(-2^{100}+2)=1$

68. 정답 ③

[해설]
$A^2-A-4E=A(A+E)-2A-4E=0$
$A(A+E)-2(A+E)=2E$
$(A-2E)(A+E)=2E$
$\frac{1}{2}(A-2E)\cdot(A+E)=E$
$\therefore (A+E)^{-1}=\frac{1}{2}(A-2E)=\frac{1}{2}A-E$

69. 정답 ②

[해설]
$A^2-2A+E=O$에서
$A^2-2A-3E=-4E$
$(A+E)(A-3E)=-4E$
$\therefore (A+E)\left\{-\frac{1}{4}(A-3E)\right\}=E$
따라서 $A+E$의 역행렬은 $\left\{-\frac{1}{4}(A-3E)\right\}$이다.

70. 정답 ⑤

[해설]
ㄱ. $ABC=A(BC)=E$이므로
$A^{-1}=BC$ (참)
ㄴ. ㄱ에서 $A^{-1}=BC$이므로
$(BC)A=B(CA)=E$ (참)
ㄷ. ㄴ에서 $B^{-1}=CA$이므로
$(CB)A=CAB=E$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

71. 정답 ④

[해설] ㄱ. $A^2+2A=3E$ 에서 $A\left\{\frac{1}{3}(A+2E)\right\}=E$ 이므로
$A^{-1}=\frac{1}{3}(A+2E)$
ㄴ. (반례) $A=E$ 이면 $A^2+2A=3E$ 이지만 $A-E=O$ 이므로 역행렬이 존재하지 않는다.
ㄷ. $A^2+2A=3E$에서 $(A+E)\left\{\frac{1}{4}(A+E)\right\}=E$ 이므로
$(A+E)^{-1}=\frac{1}{4}(A+E)$
따라서 역행렬이 항상 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

72. 정답 ④

[해설]
$A^2+E=O$에서 $-A^2=E$, $A(-A)=E$이므로 $-A$는 A의 역행렬이다.
또, $(-A^2)^2=A^4=AA^3=E$, $(A^4)^2=A^8=AA^7=E$이므로
A^3, A^7은 모두 A의 역행렬이다.
그리고 $(-A^2)A^4=-A^6=A(-A^5)=E$이므로 $-A^5$은 A의 역행렬이지만 A^5은 A의 역행렬이 아니다.

73. 정답 ②

[해설]
ㄱ. $A^2+A=6E$에서 $A(A+E)=6E$, $\left(\frac{1}{6}A\right)(A+E)=E$이므로
$A+E$는 역행렬을 갖고 $(A+E)^{-1}=\frac{1}{6}A$이다.

ㄴ. $(A-E)(A+2E)=A^2+A-2E=6E-2E=4E$이므로

$(A-E)\left(\frac{1}{4}A+\frac{1}{2}E\right)=E$

따라서 $A-E$는 역행렬을 갖고 $(A-E)^{-1}=\frac{1}{4}A+\frac{1}{2}E$이다.

ㄷ. $A=-3E$이면 $A^2+A=6E$를 만족시키지만 $A+3E=O$가 되어 역행렬이 존재하지 않는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

74. 정답 ⑤

[해설] 역행렬을 갖지 않기 위해서는

$(t-6)(t^2+t)-(t+1)(t-10)=0$

$t^3-6t^2+3t+10=0$

이때, $(-1)^3-6(-1)^2+3(-1)+10=0$이므로 조립제법에 의해 다음과 같이 인수분해된다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -6 & 3 & 10 \\ & & -1 & 7 & -10 \\ \hline & 1 & -7 & 10 & \boxed{0} \end{array}$$

$(t+1)(t^2-7t+10)=0$

$(t+1)(t-2)(t-5)=0$

$\therefore\ t=-1$또는 $t=2$또는 $t=5$

따라서 모든 자연수의 t의 값의 합은 7이다.

75. 정답 ②

[해설]

$\begin{pmatrix} 8 & a \\ b & c \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$8c-ab=0$, 즉 $8c=ab$ …… ㉠

㉠을 만족하는 서로 다른 세 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)는 다음과 같다.

(i) $c=1$일 때, $ab=8$이므로

$a=2,\ b=4$ 또는 $a=4,\ b=2$

$\therefore (2,\ 4, 1), (4,\ 2, 1)$

(ii) $c=2$일 때, $ab=16$이므로

서로 다른 a, b, c는 존재하지 않는다.

(iii) $c=3$일 때, $ab=24$이므로

$a=4,\ b=6$ 또는 $a=6,\ b=4$

$\therefore (4, 6, 3),\ (6, 4, 3)$

(iv) $c=4$일 때, $ab=32$이므로

서로 다른 a, b, c는 존재하지 않는다.

(v) $c=5$일 때, $ab=40$이므로

서로 다른 a, b, c는 존재하지 않는다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 4 이다.

76. 정답 11

[해설] 행렬 A가 역행렬을 갖지 않으므로

$(a-2)(a+2)-a(a+4)=0 \quad \therefore\ a=-1$

따라서 $A=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로

$A^2=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}=-2A$

$A^3=A^2A=(-2A)A=-2A^2=4A$

$A464=A^3A=(4A)A=4A^2=-8A$

$A^5=A^4A=(-8A)A=-8A^2=16A$

$\therefore\ \ A+A^2+A^3+A^4+A^5=(1-2+4-8+16)A=11A$

$\therefore\ \ k=11$

77. 정답 40

[해설]

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면 $A-E=\begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix}$이다.

이 때, A와 $A-E$가 역행렬을 갖지 않으므로 $ad-bc=0$,

$(a-1)(d-1)-bc=0$에서$ad=bc,\ a+d=1$

$\therefore\ A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=A$

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $A^n=A$이므로

$A+A^2+A^3+A^4+\ldots+A^{10}=10A$

따라서 $A+A^2+A^3+A^4+\ldots+A^{10}$의 모든 성분의 합은

$10\times 4=40$

78. 정답 4

[해설]

$AB=E$를 만족시키는 행렬 B는 A의 역행렬이므로 임의의 실수 a에 대하여 행렬 A의 역행렬이 존재한다.

즉, 모든 실수 a에 대하여

$a(a+2b)-(b-6)=a^2+2ba-b+6\neq 0$

이 성립해야 하므로 판별식 D는

$\frac{D}{4}=b^2+b-6=(b+3)(b-2)<0$이어야 한다.

$\therefore\ -3<b<2$

따라서 정수 b는 $-2, -1, 0, 1$의 4개다.

참고

임의의 실수 x에 대하여 이차부등식이 항상 성립할 조건은 다음과 같다.(단 $a\neq 0$이고, a, b, c는실수)

① $ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow a>0, D<0$

② $ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow a\geqq 0, D\leqq 0$

③ $ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow a<0, D<0$

④ $ax^2+bx+c\leqq 0 \Leftrightarrow a<0, D\leqq 0$

79. **정답 ④**

[해설] $B^{-1}A=(A^{-1}B)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore\ \ (B^{-1}+C^{-1})A=B^{-1}A+C^{-1}A$

$=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

따라서 $(B^{-1}+C^{-1})A$ 의 $(1,\ 2)$성분은 -4이다.

80. 정답 10

[해설]

$A=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}B$의 양변의 오른쪽에 B^{-1}을 곱하면

$$AB^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}BB^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$$

또, $A=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}B$에서 $B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}^{-1}A$이므로

$$BA^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}^{-1}AA^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$$

따라서 $AB^{-1}+BA^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은 10이다.

81. 정답 ④

[해설] $A-A^{-1}=E$ 의 양변 제곱하면

$(A-A^{-1})^2=A^2-AA^{-1}-A^{-1}A+(A^{-1})^2=E^2$

$A^2-2E+(A^{-1})^2=E$

$\therefore\ A^2+(A^{-1})^2=3E$

위 등식의 양변에 $A+A^{-1}$ 를 곱하면

$(A+A^{-1})\{A^2+(A^{-1})^2\}=(A+A^{-1})(3E)$

$A^3+A(A^{-1})^2+A^{-1}A^2+(A^{-1})^3=3A+3A^{-1}$

$A^3+A^{-1}A+(A^{-1})^3=3A+3A^{-1}$

$\therefore\ A^3+(A^{-1})^3=2A+2A^{-1}$

이때, $(A^{-1})^3=(A^3)^{-1}$ 이므로

$A^3+(A^3)^{-1}=2A+2A^{-1}$

다른풀이

$A-A^{-1}=E$ 의 양변에 A를 곱하면

$A(A-A^{-1})=AE$

$\therefore\ A^2-A-E=O$ …… ㉠

㉠의 양변에 A를 곱하면

$A^3-A^2-A=O$

$\therefore\ A^3=A^2+A=2A+E$ ($\because\ A^2=A+E$)

한편, $A^{-1}=A-E$ 이므로

$(A^{-1})^3=(A-E)^3=A^3-3A^2+3A-E$

$=(2A+E)-3(A^2-A)-E$

$=2A+E-3E-E$

$=2A-3E$

$\therefore\ A^3+(A^3)^{-1}=A^3+(A^{-1})^3$

$=(2A+E)+(2A-3E)$

$=2A+2(A-E)$

$=2A+2A^{-1}$

82. 정답 ③

[해설]

$XB=AB^{-1}$에서 $X=AB^{-1}B^{-1}=A(B^{-1})^2=A(B^2)^{-1}$이고

$B^2=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}$에서

$(B^2)^{-1}=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}$이므로

$$X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&7\\-6&11\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은 8이다.

83. 정답 16

[해설] $A^3+E=O$ 에서 $A^3=-E$ 이므로

$(A^3)^2=(-E)^2 \quad \therefore\ A^6=E$

$\therefore\ A^{-1}=A^5=A^{11}=A^{17}=\cdots=A^{95}$

그런데 $(A^n)^{-1}=A \Leftrightarrow A^{-1}=A^n$ 이므로

자연수 n은 5, 11, …, 95 의 16개다.

84. 정답 6

[해설]

$A^{-1}=E-A$의 양변에 A를 곱하면

$E=A-A^2$에서 $A^2-A+E=O$ ……㉠

㉠의 양변에 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E)=O$

$A^3+E=O$ $\quad\therefore A^3=-E$, $A^6=E$

또, $A(-A^2)=E$에서 $A^{-1}=-A^2$이고

$(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n=(-A^2)^n$이므로

$S=\{-A^2, A^4, -A^6, A^8, -A^{10}, \ldots, A^{40}\}$

이 때, $A^4=A^{16}=A^{28}=A^{40}=-A$

$-A^6=-A^{18}=-A^{30}=-E$

$A^8=A^{20}=A^{32}=A^2$

$-A^{10}=-A^{22}=-A^{34}=A$

$A^{12}=A^{24}=A^{36}=E$

$-A^2=-A^{14}=-A^{26}=-A^{38}=-A^2$

따라서 $S=\{-A^2, -A, -E, A^2, A, E\}$이므로 S의 원소의 개수는 6이다.

85. 정답 11

[해설]

$(A+aE)^{-1}=A+bE$의 양변에 $A+aE$를 곱하면

$E=(A+aE)(A+bE)=A^2+(a+b)A+abE$

$=-3A+2E+(a+b)A+abE$

$\therefore (a+b-3)A+(ab+1)E=O$

이때, $A\neq kE$이므로 $a+b-3=0$, $ab+1=0$에서

$a+b=3$, $ab=-1$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\times(-1)=11$

86. 정답 ②

[해설]

$A^{-1}(A+E)A^{-1}=A^{-1}AA^{-1}+A^{-1}EA^{-1}$

$A^{-1}+(A^{-1})^2$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$

$(A^{-1})^2=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-4\\0&1\end{pmatrix}$

$$\therefore A^{-1}+(A^{-1})^2=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-4\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&-6\\0&2\end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은
$2+(-6)+2=-2$

87. 정답 ②

[해설] $A+A^{-1}=\begin{pmatrix}4&a\\0&4\end{pmatrix}$ …… ㉠

$A-A^{-1}=\begin{pmatrix}b&4\\2&-2\end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2A=\begin{pmatrix}4&a\\0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b&4\\2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+b&a+4\\2&-2\end{pmatrix}$

㉠−㉡을 하면

$2A^{-1}=\begin{pmatrix}4&a\\0&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b&4\\2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-b&a-4\\-2&6\end{pmatrix}$

$(2A)(2A^{-1})=4E$ 이므로

$\begin{pmatrix}4+b&a+4\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4-b&a-4\\-2&6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}16-b^2-2a-8&ab+10a-4b+8\\8-2b-4&2a-8+12\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의해

$8-2b-4=0,\ 2a-8+12=4$

$\therefore\ a=0,\ b=2\quad\therefore\ a+b=2$

다른풀이

$(A+A^{-1})=\begin{pmatrix}4&a\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&a\\0&4\end{pmatrix}$ 에서

$A^2+(A^{-1})^2+2E=\begin{pmatrix}16&8a\\0&16\end{pmatrix}$ …… ㉠

$(A-A^{-1})=\begin{pmatrix}b&4\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&4\\2&-2\end{pmatrix}$ 에서

$A^2+(A^{-1})^2-2E=\begin{pmatrix}b^2+8&4b-8\\2b-4&4\end{pmatrix}$

$8-2b-4=0,\ 2a-8+12=4$

$\therefore\ a=0,\ b=2\quad\therefore\ a+b=2$

88. 정답 ⑤

[해설]

ㄱ. $B=E-A$이므로

$AB=A(E-A)=A-A^2=A-A=O$

$BA=(E-A)A=A-A^2=A-A=O$

$\therefore AB=BA$ (참)

ㄴ. $A=E-A$이므로

$A^2=A$에서 $(E-B)^2=E-B$

$E-2B+B^2=E-B$

$\therefore B^2=B$ (참)

ㄷ. ㄱ에서 $AB=O$이고 B의 역행렬이 존재하므로

$ABB^{-1}=OB^{-1}\quad \therefore A=O$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ이다.

89. 정답 ⑤

[해설] ㄱ. $(2A)\left(\frac{1}{2}A^{-1}\right)=2\times\frac{1}{2}(AA^{-1})=E$ 이므로

$(2A)^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}$ (참)

ㄴ. $A^{-1}(A+B)B^{-1}=(A^{-1}A+A^{-1}B)B^{-1}$

$=A^{-1}AB^{-1}+A^{-1}BB^{-1}$

$=EB^{-1}+A^{-1}E$

$=B^{-1}+A^{-1}$

$=A^{-1}+B^{-1}$ (참)

ㄷ. $(A^{-1}BA)^2=(A^{-1}BA)(A^{-1}BA)$

$=A^{-1}B(AA^{-1})BA$

$=A^{-1}BEBA$

$=A^{-1}B^2A$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

90. 정답 ③

[해설]

ㄱ. $A\in S$이므로 $A^{-1}=A$

$(A^{-1})^{-1}=A=A^{-1}$

$\therefore A^{-1}\in S$ (참)

ㄴ. $(A^3)^{-1}=(A^{-1})^3=A^3$이므로

$A^3\in S$ (참)

ㄷ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$이면

$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}=A$

$B^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}=B$

$AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$

이고 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=BA\neq AB$

$\therefore AB\notin S$ (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ 이다.

91. 정답 ②

[해설]

ㄱ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$이면 $A^2=O$이다. (거짓)

ㄴ. A^{-1}가 존재한다고 가정하면 $AB=O$에서

$A^{-1}AB=A^{-1}O$이므로 $B=O$ (모순)

따라서 A의 역행렬은 존재하지 않는다.(참)

ㄷ.(반례) $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$이면 B의 역행렬이 존재하지만

$AB=A$ 의 역행렬은 존재하지 않는다.(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

92. 정답 ③

[해설] ㄱ. $A \in M$ 이면 $A^2 = -E$ 이다.

이때, $(-A)^2 = A^2 = -E$ 이므로 $-A \in M$이다. (참)

ㄴ. $(A^7)^2 = (A^2)7 = (-E)^7 = -E$ 이므로 $A^7 \in M$ 이다.

ㄷ. (반례) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 이면

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -E$,

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -E$

이므로 $A \in M$, $B \in M$이다.

그런데 $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

이므로 $(AB)^2 \neq -E$

$\therefore$ $AB \notin M$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다

다른풀이

ㄴ. $A \in M$이면 $A^2 = -E$이므로

$A^7 = (A^2)^3 A = (-E)^3 A = -A$ 이다.

따라서 ㄱ에서 $-A \in M$ 이므로 $A^7 \in M$ (참)

93. 정답 ③

[해설]

$AB = 3E$에서 $A\left(\frac{1}{3}B\right) = \left(\frac{1}{3}A\right)B = E$이므로

$A^{-1} = \frac{1}{3}B$, $B^{-1} = \frac{1}{3}A$이고 $A\left(\frac{1}{3}B\right) = E$이므로

$\left(\frac{1}{3}B\right)A = E$에서 $BA = 3E$이다. 또,

$E = (A+B)(A+B)^{-1} = (A+B)(A^{-1}+B^{-1})$

$= E + AB^{-1} + BA^{-1} + E = 2E + \frac{1}{3}A^2 + \frac{1}{3}B^2$

이므로

$A^2 + B^2 = -3E$

$\therefore (A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA$

$= -3E + 3E + 3E = 3E$

$\therefore k = 3$

94. 정답 ⑤

[해설]

ㄱ. A의 역행렬이 존재하면 $ad - bc \neq 0$

$\overline{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$에서

$da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0$

그러므로 $\overline{A}$의 역행렬이 존재한다. (참)

ㄴ. $ad - bc = 1$이면

$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \overline{A}$ (참)

ㄷ. $ae - bc = 2$이면

$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\overline{A^{-1}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{A}$

$\therefore A^{-1}\overline{A^{-1}}A^{-1} \cdot \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}E$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ 이다.

95. 정답 ⑤

[해설] ㄱ. (반례) $X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ 이면 $AX = O$ 이지만

$XA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \neq O$ (거짓)

ㄴ. 임의의 실수 k, m에 대하여 행렬 $X = \begin{pmatrix} 2k & 2m \\ -k & -m \end{pmatrix}$ 은 $AX = O$ 를 만족시킨다. 따라서 집합 T의 원소는 무수히 많다. (참)

ㄷ. $X \in T$이면 $AX = O$이고 $X \neq O$이다.

이때, 행렬 X의 역행렬이 존재한다고 가정하면 $AXX^{-1} = OX^{-1}$

$\therefore$ $A = O$

그런데 $A \neq O$이므로 모순이다.

따라서 행렬 X의 역행렬은 존재하지 않는다.

즉, $X \in T$ 이면 X는 역행렬이 존재하지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ 이다.

참고

영행렬이 아닌 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $AB = O$가 성립하면 두 행렬 A, B를 영인자라고 한다.

96. 정답 ③

[해설] $AB = BX$ 에서 양변의 왼쪽에 B^{-1} 를 곱하여 정리하면

$X = B^{-1}AB$

$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 $(2, 1)$ 성분은 3이다.

97. 정답 ④

[해설]

$C^2 = (ABA^{-1})(ABA^{-1})$

$= AB^2A^{-1} = AEA^{-1}$

$= AA^{-1} = E$

이때, $C^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$에서

$x = \alpha = 5, y = \beta = 3$

$\alpha + \beta = 5 + 3 = 8$

참고

자연수 n에 대하여

① $A = PBP^{-1}$ 이면 $A^n = PB^nP^{-1}$

② $A = P^{-1}BP$ 이면 $A^n = P^{-1}B^nP$

98. 정답 ④

[해설]

$A^{-1}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$에서 $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

따라서 $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}$$

따라서 A의 $(2,1)$성분은 -1이다.

참고

① 역행렬이 존재하는 이차정사각행렬 A에 대하여

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

② $ad-bc\neq0$이면

$$A\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\r\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q\\s\end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow A\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow A=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}$

99. 정답 ④

[해설]

$A+A^{-1}=E$에서 $A^2+E=A$ $\quad\therefore A^2=A-E$

또, $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$에서 $A^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$이므로

$$A\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=(A-E)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

따라서 $A\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\5&3\end{pmatrix}$에서

$$A=\begin{pmatrix}3&2\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&2\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11&7\\-19&12\end{pmatrix}$$

이므로 행렬 A의 모든 성분의 합은 -11이다.

100. 정답 39

[해설]

$BPA^{-1}=B^{-1}P$에서 $BP=B^{-1}A$

$P=B^{-1}B^{-1}A$

$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$이므로

$$P=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\5&2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\5&2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}23&9\\5&2\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 P의 모든 성분의 합은

$23+9+5+2=39$

101. 정답 ④

[해설]

처음 두 용액의 합이 100ml이므로

$x+y=100$ ⋯⋯ ㉠

1시간 후의 A용액의 양은 1.2ml, B용액의 양은 0.9ml이고,

$(1.2x+0.9y)-(x+y)=5$이므로

$0.2x-0.1y=5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix}1&1\\0.2&-0.1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\\5\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0.2&-0.1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}100\\5\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{-0.3}\begin{pmatrix}-0.1&-1\\0.2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\5\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{10}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{10}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\5\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&10\\2&-10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\5\end{pmatrix}$$

따라서 $a=10, b=2$이므로

$a+b=12$

102. 정답 ⑤

[해설]

등산코스의 길이가 4km이므로

$x+y=4$ ⋯⋯ ㉠

갑이 산을 오르는데 소요되는 시간은

$\frac{x}{2.5}+\frac{y}{2}$(시간)

갑이 산을 내려오는데 소요되는 시간은

$\frac{y}{2.5}+\frac{x}{3}$ (시간)

산을 오르는 시간이 내려오는 시간보다 21분 더 소요되므로

$$\frac{x}{2.5}+\frac{y}{2}=\frac{y}{2.5}+\frac{x}{3}+\frac{21}{60}$$

$24x+30y=24y+20x+21$

$4x+6y=21$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix}1&1\\4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\21\end{pmatrix}$$

따라서 $a=1,\ b=6$이므로

$a+b=7$

103. **정답 ⑤**

[해설] 언덕의 총길이가 10km 이므로

$x+y=10$ ⋯⋯ ㉠

소모된 열량의 양이 총 240kcal 이므로

$30x+10y=240$

$\therefore\ 3x+y=24$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\begin{pmatrix}1&1\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\24\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \end{pmatrix}$

$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 24 \end{pmatrix}$

$\therefore \ ab = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-3) = \frac{3}{2}$

104. 정답 ④

[해설]

비누 90개와 치약 110개를 모두 이용하여 상품 A, B를 각각 m개, n개 만들었다고 하면

$\begin{cases} 2m+5n=90 \\ 4m+3n=110 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2m+5n=90 \\ 4m+3n=110 \end{cases}$에서 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 110 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 90 \\ 110 \end{pmatrix}$

이때, 상품 A, B를 각각 m개, n개 만들어 팔았을 때의 이익은 $800m+900n$이므로 이익을 나타내는 행렬 P는

$P = (800\ 900)\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$

$= (800\ 900)\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 90 \\ 110 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{cases} 2m+5n=90 \\ 4m+3n=110 \end{cases}$에서 $(m\ n)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = (90\ 110)$이므로

$(m\ n) = (90\ 110)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$

이때, 상품 A, B를 각각 m개, n개 만들어 팔았을 때의 이익은 $800m+900n$ 이므로 이익을 나타내는 행렬 P는

$P = (m\ n)\begin{pmatrix} 800 \\ 900 \end{pmatrix}$

$= (90\ 110)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 800 \\ 900 \end{pmatrix}$

i), ii)에서

$a=d=5,\ b=c=4$

$\therefore\ a-c=5-4=1$

105. 정답 ③

[해설]

갑이 을에게 전송하고자 했던 단어에 대응하는 행렬을 차례로 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$라 하면

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 36 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 28 \\ 18 & 36 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 17 & 28 \\ 18 & 36 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & 28 \\ 18 & 36 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 16 & 20 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

따라서 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \end{pmatrix}$이므로 갑이 을에게 보낸 단어는 $path$이다.

106. 정답 ②

[해설]

원료 57kg과 전력 27kwh를 모두 사용하여 만든 제품 P, Q의 개수를 각각 x, y라 하면 $\begin{cases} 6x+9y=57 \\ 3x+4y=27 \end{cases}$ 이므로 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C$

$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}C$

이때, $S=5x+6y$이므로 S는 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$의 $(2, 1)$성분, 즉 $BA^{-1}C$의 $(2, 1)$성분과 같다.

107. 정답 325

[해설]

1일 후에 이 바이러스에 감염된 오리와 닭의 수가 각각 a', b'이라 하면

$\begin{cases} a'=3a+b \\ b'=a+2b \end{cases}$ 이므로

이를 행렬을 이용하여 나타내면

$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$이다.

따라서 $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^4\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$이므로 $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^4$이다.

이때, $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^4 = 25\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = 25\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 25\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$25(5+3+3+2)=325$

108. 정답 12

[해설]

기계 A 3대와 기계 B 2대가 하루에 만드는 제품의 개수는 18이고 기계 A 4대와 기계 B 3대가 하루에 만드는 제품의 개수는 24이므로

$\begin{cases} 3x+2y=18 \\ 4x+3y=24 \end{cases}$

가 성립한다. 이를 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \end{pmatrix}$

따라서 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 18 \\ 24 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 18 & -12 \\ -24 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

이므로 $a-b=-12+24=12$

109. 정답 ④

[해설]

연립방정식 $\begin{cases} ax+by=2 \\ cx+dy=4 \end{cases}$

즉 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ …… ㉠

의 해가 $x=\alpha$, $y=\beta$이고,

$A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = E$이므로

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

따라서 ㉠에서

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 \\ 26 \end{pmatrix}$$

따라서 $\alpha=16, \beta=26$이므로

$\alpha+\beta=42$

110. **정답 ②**

[해설] $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

이므로 $\begin{cases} ax+by+p=0 \\ cx+dy+q=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=-p \\ cx+dy=-q \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -p \\ -q \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -p \\ -q \end{pmatrix}$

$=-\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

$=-\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

따라서 $\alpha=-2,\ \beta=1$ 이므로

$\alpha+\beta=1$

***111.* 정답 24**

[해설]

두 직선 $ax+by=p$, $cx+dy=q$가 점 $(2,3)$에서 만나므로 연립방정식 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$의 해는 $x=2, y=3$이고 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$는 역행렬을 갖는다.

즉, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

또, $\begin{pmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\alpha \\ \beta \end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix} 2\alpha \\ \beta \end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

따라서 $2\alpha=12, \beta=18$이므로 $\alpha+\beta=6+18=24$

***112.* 정답 16**

[해설]

$\begin{cases} a\log x+b\log y=-t+5 \\ c\log x+d\log y=t^2 \end{cases}$의 해가 $x=\alpha,\ y=\beta$이므로

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \log\alpha \\ \log\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -t+5 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

에서 $\begin{pmatrix} \log\alpha \\ \log\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -t+5 \\ t^2 \end{pmatrix}$이다.

이때, $A\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에서

$A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix} \log\alpha \\ \log\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -t+5 \\ t^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -t+5-3t^2 \\ -3t+15+4t^2 \end{pmatrix}$$

따라서 $\log\alpha\beta=\log\alpha+\log\beta$

$=(-t+5-3t^2)+(-3t+15+4t^2)$

$=t^2-4t+20$

$=(t-2)^2+16$

이므로 $\log\alpha\beta$의 최솟값은 16이다.

***113.* 정답 ①**

[해설]

연립방정식 $\begin{pmatrix} 3 & a \\ -2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ -b \end{pmatrix}$의 해가 무수히 많을 조건은

$\frac{3}{-2}=\frac{a}{b}=\frac{12}{-b}$

$\therefore a=-12, b=8$

$\therefore a+b=-4$

***114.* 정답 ④**

[해설]

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ……㉠

㉠이 무수히 많은 해를 가지므로 행렬 $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는다.

따라서, $ab-4=0$에서 $ab=4$이므로

$a+b \geq 2\sqrt{ab}=2\sqrt{4}=4$

따라서 $a+b$의 최솟값은 4이다.

***115.* 정답 ⑤**

[해설]

연립방정식 $(A-E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 $x=y=0$이외의 근을 가지므로 행렬 $A-E$는 역행렬을 갖지 않는다.

만약 행렬 A^4-E가 역행렬을 갖고 그 역행렬을 X라 하면 $(A^4-E)X=E$이므로 $(A-E)(A+E)(A^2+E)X=E$가 되어 행렬 $A-E$가 역행렬을 갖지 않는다는 것과 모순이다.

따라서 행렬 A^4-E는 역행렬을 갖지 않는다.

이때, $x=y=0$은 연립방정식 $(A^4-E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$의 근이므로 연립방정식 $(A^4-E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$은 무수히 많은 근을 갖는다.

다른 풀이

$x=1,\ y=2$가 $(A-E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$의 근이므로

$(A-E)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

따라서 임의의 실수 k에 대하여 $kA\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix}$

이때, $A^2\begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix}=AA\begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix}$이므로

$A^4\begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix}$

따라서 $(A^4-E)\begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이므로 연립방정식

$(A^4-E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$의 근은 무수히 많다.

116. 정답 ②

[해설]

주어진 연립일차방정식이 $x=0, y=0$이외의 해를 가질 조건은

$3(a+2)-a^2=0$

$\therefore\ a^2-3a-6=0\ \ldots$㉠

이때, 판별식 $D>0$이므로 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수와의 관계에서 모든 실수 a의 값은 합은 3이다.

$\begin{pmatrix}3 & a\\ a & a+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이 $x=0, y=0$

117. 정답 ③

[해설]

$$\begin{pmatrix}2&4\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{pmatrix}2&4\\5&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2-k&4\\5&3-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

따라서 주어진 연립방정식이 $x=0, y=0$ 이외의 해를 가지려면

$\begin{pmatrix}2-k&4\\5&3-k\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$(2-k)(3-k)-20=0$

$k^2-5k-14=0,\quad (k+2)(k-7)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=7$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 5이다.

118. **정답 18**

[해설] $\begin{pmatrix}5&7\\11&13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 에서

$\begin{cases}5x+7y=ky\\11x+13y=kx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x+(7-k)y=0\\(11-k)x+13y=0\end{cases}$ …… ㉠

따라서 연립방정식 ㉠이 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 갖기 위해서는 행렬

$\begin{pmatrix}5&7-k\\11-k&13\end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

따라서 $5\cdot 13-(7-k)(11-k)=0$ 에서

$k^2-18k+12=0$

이때, 위의 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가지므로 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 이 이차방정식의 두 실근의 합과 같다.

따라서 근과 계수의 관계에서 모든 실수 k의 값의 합은 18이다.

119. **정답 ③**

[해설] $\alpha\beta\neq 00$ 이므로 주어진 연립일차방정식이 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가져야 한다.

따라서 행렬 $\begin{pmatrix}3&a-1\\a&4\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$12-(a-1)a=0,\ a^2-a-12=0$

$(a+3)(a-4)=0$

$\therefore\quad a=-3$ 또는 $a=4$

(i) $a=-3$일 때

$\begin{pmatrix}3&a-1\\a&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 이므로 $3x-4y=0$ 이다.

따라서 $3\alpha-4\beta=0$ 이므로 $\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{3}{4}$

(ii) $a=4$ 일 때 $\begin{pmatrix}3&a-1\\a&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

이므로 $3x+3y=0$ 이다.

따라서 $\alpha+\beta=0$ 이므로 $\dfrac{\beta}{\alpha}=-1$

따라서 모든 $\dfrac{\beta}{\alpha}$의 값의 합은 $\dfrac{3}{4}-1=-\dfrac{1}{4}$

120. 정답 29

[해설]

$\begin{pmatrix}1&2\\5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}1&2\\5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\therefore\begin{pmatrix}1-k&2\\5&4-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ……㉠

㉠이 $x=y=0$ 이외의 해를 가지므로

행렬 $\begin{pmatrix}1-k&2\\5&4-k\end{pmatrix}$에서 $(1-k)(4-k)-10=0$

즉, $k^2-5k-6=0,\ (k+1)(k-6)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=6$

(i) $k=-1$일 때,

㉠에서 $\begin{pmatrix}2&2\\5&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이므로 $y=-x\ (0\leq x\leq 2)$

(ii) $k=6$일 때,

㉠에서 $\begin{pmatrix}-5&2\\5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이므로 $y=\dfrac{5}{2}x\ \ (0\leq x\leq 2)$

따라서 구하는 도형의 길이는 $\overline{OA}+\overline{OB}=2\sqrt{2}+\sqrt{29}$이므로

$a=29$

121. 정답 ④

[해설]

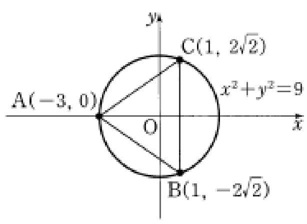
행렬 $\begin{pmatrix}x+3&y\\0&x-1\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$(x+3)(x-1)=0\quad \therefore x=-3$ 또는 $x=1$

점 (x,y)는 원 $x^2+y^2=9$위의 점이므로

$x=-3$일 때, $y^2=0$에서 $y=0$

$x=1$일 때, $y^2=8$에서 $y=\pm2\sqrt{2}$



따라서 구하는 다각형 S는 세 점

$A(-3,0), B(1,\ -2\sqrt{2}), C(1,\ 2\sqrt{2})$를 꼭짓점으로 하는 삼각형이므로 S의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot4=8\sqrt{2}$

122. 정답 ⑤

[해설]

ㄱ. $P=\begin{pmatrix}2^a & 0\\ 0 & 3^b\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}2^c & 0\\ 0 & 3^d\end{pmatrix}$ (a, b, c, d는 정수)이라 하면

$PQ=\begin{pmatrix}2^a & 0\\ 0 & 3^b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^c & 0\\ 0 & 3^d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{a+c} & 0\\ 0 & 3^{b+d}\end{pmatrix}$

이때, $a+c$, $b+d$는 정수이므로

$PQ\in X$ (참)

ㄴ. $P=\begin{pmatrix}2^a & 0\\ 0 & 3^b\end{pmatrix}$($a,b$는 정수)이라 하면

$P^2=\begin{pmatrix}2^a & 0\\ 0 & 3^b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^a & 0\\ 0 & 3^b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{2a} & 0\\ 0 & 3^{2b}\end{pmatrix}$

$P^3=P^2P=\begin{pmatrix}2^{2a} & 0\\ 0 & 3^{2b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^a & 0\\ 0 & 3^b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{3a} & 0\\ 0 & 3^{3b}\end{pmatrix}$

$\cdots$

$P^n=\begin{pmatrix}2^{na} & 0\\ 0 & 3^{nb}\end{pmatrix}$

이때, na,nb는 정수이므로 $P^n\in X$ (참)

ㄷ. $P=\begin{pmatrix}2^a & 0\\ 0 & 3^b\end{pmatrix}$($a,b$는 정수)이라 하면

$P^{-1}=\dfrac{1}{2^a3^b}\begin{pmatrix}3^b & 0\\ 0 & 2^a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{-a} & 0\\ 0 & 3^{-b}\end{pmatrix}$

이때, $-a,-b$는 정수이므로 $P^{-1}\in X$(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ 이다.

123. 정답 ③

[해설]

ㄱ. $M(a,\ a)M(b,\ b)=\begin{pmatrix}a & a\\ a & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & b\\ b & b\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2ab & 2ab\\ 2ab & 2ab\end{pmatrix}$

$=M(2ab,2ab)$ (참)

ㄴ. a와 b가 서로소이면 $M(a,b)=\begin{pmatrix}a & 1\\ ab & b\end{pmatrix}\neq M(b,a)=\begin{pmatrix}b & 1\\ ab & 1\end{pmatrix}$ (거짓)

ㄷ. $a=a_1$, $b=b_1d$ (a_1, b_1은 서로소)라 하면

$ab=md$이므로$ab-md=0$

즉, $M(a,b)$는 역행렬을 갖지 않는다 .(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

124. 정답 ②

[해설]

직선l의 방정식을 $y=ax+b$라 하면

$P=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$

이때, 직선 l'은 직선 l과 x축에 대칭이므로 l'의 방정식은

$-y=ax+b$,즉, $y=-ax-b$

$Q=\begin{pmatrix}-a & 0\\ 0 & -b\end{pmatrix}$

이때, $P^{-1}=-\dfrac{1}{4}Q$이므로

$PP^{-1}=-\dfrac{1}{4}PQ=E$

$PQ=\begin{pmatrix}-a^2 & 0\\ 0 & -b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$

$\therefore\ a=\pm 2,\ b=\pm 2$

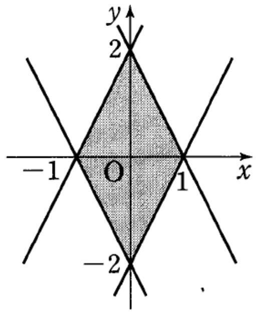
따라서 직선 l이 될수 있는 직선은

$y=2x+2$, $y=2x-2$

$y=-2x+2$, $y=-2x-2$

이므로 이 4개의 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$4\times\dfrac{1}{2}\times 1\times 2=4$



125. 정답 ④

[해설]

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$이므로 $p=2$이다.

이때

$A^2\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=A\left\{A\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\right\}=A\left\{-\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\right\}$

$=(-1)A\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=(-1)^2A\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

마찬가지 방법으로 임의의 자연수 n에 대하여

$A^n\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=(-1)^n\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)^n\\ (-1)^{n+1}\end{pmatrix}$ …㉠

$A^n\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1}\\ 2^n\end{pmatrix}$ …㉡

㉠, ㉡에 의하여

$A^n\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)^n & 2^{n+1}\\ -(-1)^{n+1} & 2^n\end{pmatrix}$

$A^n=\begin{pmatrix}(-1)^n & 2^{n+1}\\ -(-1)^{n+1} & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$

$A^n=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^n & 2^{n+1}\\ -(-1)^{n+1} & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

따라서 A^n의 $(2,\ 1)$성분은 $\dfrac{1}{3}\{(-1)^{n+1}+2^n\}$이므로

$q=3$, $r=2$

$p+q+r=2+3+2=7$

126. **정답 ②**

[해설] 점 $(p,\ q)$ 가 원 $x^2+y^2=100$ 위의 점이므로 $p^2+q^2=100$

따라서 p, q에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ 이 $p=0$, $q=0$ 이외의

해를 가져야 하므로

$b-2a=0$ …… ㉠

또, 점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=100$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=100$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a^2+(2a)^2=5a^2=100$

$\therefore\ \ a^2=20,\ b^2=80\quad\therefore\ \ a^2-b^2=-60$

127. 정답 ④

[해설]

정사각형 $ABCD$의 한 변의 길이가 1이므로

$a+d=b+c=1$ ……㉠

행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 역행렬이 존재하지 않으므로

$ad-bc=0$ ……㉡

㉠에서 $d=1-a,\ c=1-b$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$a(1-a)-b(1-b)=0,\ (a-b)(1-a-b)=0$

$\therefore a=b$ 또는 $a+b=1$

$a=b$일 때 점 P는 대각선 AC 위의 점이고,

$a+b=1$, 즉 $a=c$일 때 점 P는 대각선 BD위의 점이다.

따라서 점 P의 자취의 길이는 $\overline{AC}+\overline{BD}=2\sqrt{2}$

128. 정답 ①

[해설]

$\begin{pmatrix} 2\cos\theta+1 & 2\sin\theta+1 \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} 2\cos\theta+1 & 2\sin\theta+1 \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2\cos\theta & 2\sin\theta+2 \\ -\sin\theta-1 & \cos\theta-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

위 연립방정식이 $x=0, y=0$이외의 해를 가지므로

$\begin{pmatrix} 2\cos\theta & 2\sin\theta+2 \\ -\sin\theta-1 & \cos\theta-1 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는다.

$2\cos\theta(\cos\theta-1)+(2\sin\theta+2)(\sin\theta+1)=0$

$2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-2\cos\theta+4\sin\theta+2=0$

$\cos\theta=2\sin\theta+2$

위 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$1-\sin^2\theta=4\sin^2\theta+8\sin\theta+4$

$(\sin\theta+1)(5\sin\theta+3)=0$

$\therefore\ \sin\theta=-1$또는 $\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$

따라서 모든 $\sin\theta$의 값의 합은 $-\dfrac{8}{5}$이다.

129. 정답 ④

[해설]

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$A_n=\begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_n & a_n+d \\ a_n+2d & a_n+3d \end{pmatrix}$

이 때, $a_n(a_n+3d)-(a_n+d)(a_n+2d)=-2d^2$이므로 $d=0$일 때

행렬 A_n은 역행렬을 갖지 않는다. (거짓)

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$A_n=\begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_n & a_nr \\ a_nr^2 & a_nr^3 \end{pmatrix}$

이 때, $a_n(a_nr^3)-(a_nr)(a_nr^2)=0$이므로 행렬 A_n은 역행렬을 갖지

않는다.(참)

ㄷ .

$A_n=\begin{pmatrix} a_n & a_nr \\ a_nr^2 & a_nr^3 \end{pmatrix},\ A_{n+1}=\begin{pmatrix} a_nr & a_nr^2 \\ a_nr^3 & a_nr^4 \end{pmatrix},\ A_{n+2}=\begin{pmatrix} a_nr^2 & a_nr^3 \\ a_nr^4 & a_nr^5 \end{pmatrix}$

라 하면

$A_nA_{n+2}=\begin{pmatrix} a_n & a_nr \\ a_nr^2 & a_nr^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_nr^2 & a_nr^3 \\ a_nr^4 & a_nr^5 \end{pmatrix}=(a_n)^2\begin{pmatrix} r^2+r^5 & r^3+r^6 \\ r^4+r^7 & r^5+r^8 \end{pmatrix}$

$(A_{n+1})^2=\begin{pmatrix} a_nr & a_nr^2 \\ a_nr^3 & a_nr^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_nr & a_nr^2 \\ a_nr^3 & a_nr^4 \end{pmatrix}=(a_n)^2\begin{pmatrix} r^2+r^5 & r^3+r^6 \\ r^4+r^7 & r^5+r^8 \end{pmatrix}$

이므로 $A_nA_{n+2}=(A_{n+1})^2$이 성립한다.(참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

130. 정답 ⑤

[해설]

$\alpha=a+bi(a,\ b$는 실수), $\beta=c+di(c,\ d$는 실수)라 하면

$A(\alpha)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ A(\beta)=\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$이다.

ㄱ. $\alpha+\beta=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$이므로

$A(\alpha+\beta)=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}$

또, $A(\alpha)+A(\beta)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}$

이므로 $A(\alpha+\beta)=A(\alpha)+A(\beta)$이다.(참)

ㄴ. $\alpha\beta=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$이므로

$A(\alpha\beta)=\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}$

또, $A(\alpha)A(\beta)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}$

이므로 $A(\alpha\beta)=A(\alpha)A(\beta)$이다.(참)

ㄷ. $\overline{\alpha}=a-bi$이므로 $A(\overline{\alpha})=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

또, $\{A(\alpha)\}^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

이므로 $A(\overline{\alpha})=\{A(\alpha)\}^{-1}$이다.(참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

131. 정답 ⑤

[해설]

ㄱ. $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$이므로

$A^kA^2=A^2A^k=A^k$(k는 자연수)

따라서 $\overline{A}=A^2$이다. (참)

ㄴ. 자연수 m을 k로 나눈 나머지를 l이라 하면 $0\le l<k$이고,

$A^m=A^l$ 이므로 집합 $\{A^n \mid n$은 자연수$\}$의 원소의 개수는

k 이하이다. (참)

ㄷ. $(A^{-1})^k(A^{-1})^p=(A^{-1})^{k+p}=(A^{k+p})^{-1}$

$=(A^kA^p)^{-1}=(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$ (k는 자연수)

이므로 $\overline{A^{-1}}=(A^{-1})^p$이다. (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

132. 정답 ①

[해설]

ㄱ. (ⅰ) $x_1=x_2=0$일 때, $x_1y_2-y_1x_2=0$이므로
행렬 A는 역행렬을 갖지 않는다.
(ⅱ) $x_1 \neq x_2$일 때, 직선 AB, 즉 $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$이 원점을 지나면
$-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\times(-x_1)$,
$y_1(x_2-x_1)=x_1(y_2-y_1)$,
$x_1y_2-y_1x_2=0$이므로 행렬 A는 역행렬을 갖지 않는다.
그러므로 행렬 A가 역행렬을 갖지 않기 위한 충분조건이다.
ㄴ. (반례) $A(1,1), B(2,1)$일 때, 직선 AB는 x축에 평행하지만 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$은 역행렬을 갖지 않으므로 행렬 A가 역행렬을 갖지 않기 위한 충분조건이 아니다.
ㄷ. (반례) $A(1,1), B(-1,1)$일 때, $\overline{OA} \perp \overline{OB}$이지만 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$은 역행렬을 갖지 않으므로 행렬 A가 역행렬을 갖지 않기 위한 충분조건이 아니다.
따라서 보기에서 행렬 A가 역행렬을 갖지 않을 충분조건은 ㄱ 이다.

133. 정답 ⑤

[해설]
ㄱ. $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로 $f_E(x)=\frac{1\cdot x+0}{0\cdot x+1}=x$
따라서 $f_E(x)$는 항등함수이다. (참)
ㄴ. $A=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라 하면 $f_A(x)=\frac{px+q}{rx+s}$이므로
${f^{-1}}_A(x)=\frac{sx-q}{-rx+p}$이다.
또, $A^{-1}=\frac{1}{ps-qr}\begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}$이므로
$$f_{A^{-1}}(x)=\frac{\frac{1}{ps-qr}(sx-q)}{\frac{1}{ps-qr}(-rx+p)}=\frac{sx-q}{-rx+p}\text{에서}$$
${f^{-1}}_A(x)=f_{A^{-1}}(x)$이다. (참)
ㄷ. $A=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라 하면 $f_A(x)=\frac{px+q}{rx+s}$이므로
$$(f_A\circ f_A)(x)=\frac{p\left(\frac{px+q}{rx+s}\right)+q}{r\left(\frac{px+q}{rx+s}\right)+s}=\frac{(p^2+qr)x+pq+qs}{(pr+rs)x+qr+s^2}$$
또, $A^2=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p^2+qr & pq+qs \\ pr+rs & qr+s^2 \end{pmatrix}$이므로
$(f_A\circ f_A)(x)=f_{A^2}(x)$이다. (참)
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

134. **정답** ④

[해설] ㄱ. $f(A)=2$ 이고, $2A=\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$ 이므로
$f(2A)=\frac{(2b)(2c)}{(2a)(2d)}=\frac{bc}{ad}=f(A)=2$ (거짓)
ㄴ. $f(A)=1$, 즉 $ad=bc$ 일 필요충분조건은 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않는 것이다. 이때, A^2 의 역행렬도 존재하지 않으므로 $f(A^2)=1$ (참)
ㄷ. $f(A)\neq 1$ 이면 행렬 A의 역행렬이 존재한다.
이때, $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ 이므로
$f(A^{-1})=\frac{(-b)(-c)}{ad}=\frac{bc}{ad}=f(A)$ (참)

135. 정답 ①

[해설]
$A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$라 하고 $A\in S$라 하면 $xw-yz=0$이다.
ㄱ. $A+E=\begin{pmatrix} x+1 & y \\ z & w+1 \end{pmatrix}\in S$ 이므로
$(x+1)(w+1)-yz=0$
$(xw-yz)+(x+w+1)=0$ $\therefore x+w=-1$
이 때, $A-E=\begin{pmatrix} x-1 & y \\ z & w-1 \end{pmatrix}$에서
$(x-1)(w-1)-yz=xw-yz-(x+w)+1=2\neq 0$
이므로 $(A-E)\in S^C$이다. (참)
ㄴ. $A+E=\begin{pmatrix} x+1 & y \\ z & w+1 \end{pmatrix}\in S^C$이므로 $x+w\neq -1$
이 때, $A-E=\begin{pmatrix} x-1 & y \\ z & w-1 \end{pmatrix}$에서
$(x-1)(w-1)-yz=xw-yz-(x+w)+1$
$=-(x+w)+1$
이므로 $x+w=1$일 때에만 $(A-E)\in S$이다. (거짓)
ㄷ. (반례) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이면 $A+E=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$이므로
$A\in S^C$이고 $(A+E)\in S^C$이지만
$A-E=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이므로 $(A-E)\in S$이다. (거짓)
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

136. 정답 ④

[해설]
행렬 A에 대하여 이차방정식
$x^2-(1+4)x+\{1\times 4-(-1)\times 2\}=0$
즉, $x^2-5x+6=0$의 두 근이 $x=2, x=3$이므로 등식
$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} p-r & q-s \\ 2p+4r & 2q+4s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2p & 3q \\ 2r & 3s \end{pmatrix}$
를 만족시키는 행렬 $P=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$에 대하여 $r=-p, s=-2q$이다.
이 때, $p=1, q=2$로 놓으면 $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$이다.
따라서, $A=P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$이므로 자연수 n에 대하여
$A^n=P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n P^{-1}=P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1}$이다.
∴ ㉮× ㉯× ㉰× ㉱$=(-1)\times(-4)\times 2^n\times 3^n=4\times 6^n$

137. 정답 11

[해설]

$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 5 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p+q \\ p-q \end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 5 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 5 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ 4 & a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ …… ㉠

㉠이 $p=q=0$ 이외의 해를 가지므로

행렬 $\begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ 4 & a+1 \end{pmatrix}$에서 $(a-1)(a+1)-8=0$

즉, $a^2=9$ $\therefore a=3\ (\because a>0)$

또, $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$에서

$p+q=0$ …… ㉡

이때, 점$(p,\ q)$가 곡선 $y=-\dfrac{1}{x}$ 위의 점이므로

$pq=-1$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=2$이므로

$a^2+p^2+q^2=11$

138. 정답 ④

[해설]

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

$A^6=E$

$\therefore A^6=A^{12}=A^{18}=\cdots=A^{96}=A^{102}=E$

$A^4A^2=A^{10}A^2=A^{16}A^2=\cdots=A^{94}A^2=A^{100}A^2=E$

따라서 A^2을 역행렬로 갖는 행렬의 개수는 17개다

1. 정답 ④	2. 정답 ⑤	3. 정답 ③
4. 정답 12	5. 정답 ⑤	6. 정답 ③
7. 정답 ④	8. 정답 ②	9. 정답 ②
10. 정답 ④	11. 정답 ③	12. 정답 ③
13. 정답 98	14. 정답 ②	15. 정답 ⑤
16. 정답 ②	17. 정답 130	18. 정답 ⑤
19. 정답 ②	20. 정답 ③	21. 정답 ①
22. 정답 ③	23. 정답 ④	24. 정답 ④
25. 정답 ⑤	26. 정답 ②	27. 정답 ②
28. 정답 ③	29. 정답 ③	30. 정답 ④
31. 정답 ④	32. 정답 ③	33. 정답 ④
34. 정답 ③	35. 정답 ②	36. 정답 ④
37. 정답 150	38. 정답 ④	39. 정답 375
40. 정답 100	41. 정답 13	42. 정답 72
43. 정답 312	44. 정답 ③	45. 정답 ⑤
46. 정답 ③	47. 정답 312	48. 정답 ①
49. 정답 ④	50. 정답 16	51. 정답 16
52. 정답 19	53. 정답 72	54. 정답 43

1. 정답 ②

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_7+a_{19}=(a_8-d)+(a_{18}+d)$

$=a_8+a_{18}=9$

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을a, 공차를 d라고 하면

$a_8+a_{18}=a+7d+a+17d=2a+24d=9$

이때,

$a_7+a_{19}=a+6d+a+18d$

$=2a+24d=9$

2. 정답 ⑤

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$a_{10}-a_4=6d=6$에서 $d=1$

$a_2+a_6=a_1+d+a_1+5d=2a_1+6d=24$

$\therefore\ a_1=9$

$\therefore a_7=a_1+6d=9+6=15$

다른 풀이

$a_2+a_6=2a_4=24$에서 $a_4=12$

$a_{10}-a_4=6$에서 $a_{10}=18$

$a_4+a_{10}=2a_7$에서 $2a_7=30$

$\therefore\ a_7=15$

3. 정답 ③

[해설] 등차수열$\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3+a_4+a_5=18$에서

$(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)=18$

$a+3d=6$ …… ㉠

$a_6+a_7=27$에서

$(a+5d)+(a+6d)=27$

$2a+11d=27$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $d=3$

$\therefore a_{10}=a+9d=-3+9\cdot 3=24$

4. 정답 12

[해설] 수열$\{a_n\}$이 등차수열이므로 공차를 d라 하면

$a_2+a_4=8$에서 $(a_1+d)+(a_1+3d)=8$

즉, $2a_1+4d=8$

$\therefore a_1+2d=4$ … ㉠

$a_7=52$에서 $a_1+6d=52$ … ㉡

㉠, ㉡에서

$4d=48$

$\therefore d=12$

5. 정답 ⑤

[해설]

(a_1+a_2) : $(a_2+a_3)=1:2$에서

$a_2+a_3=2(a_1+a_2)$

$a_3=2a_1+a_2$

$a_1+2d=2a_1+a_1+d$

$\therefore d=2a_1$

$\therefore\ a_2:a_3=(a_1+2a_1):(a_1+2\cdot 2a_1)$

$=3a_1:5a_1=3:5$

6. 정답 ③

[해설] 첫째항이a인 두 등차수열$\{a_n\},\{b_n\}$의 공차를 각각 d_1, d_2 라 하면

$a_3:b_3=1:2$에서

$(a+2d_1):(a+2d_2)=1:2$

$2(a+2d_1):a+2d_2$

$\therefore a+4d_1-2d_2=0$ …… ㉠

$a_5:b_5=3:5$에서

$(a+4d_1):(a+4d_2)=3:5$

$5(a+4d_1)=3(a+4d_2)$

$\therefore a+10d_1-6d_2=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 a를 소거하면

$d_2=\dfrac{3}{2}d_1$

㉠에 대입하면

$a=-d_1$

$\therefore a_9:b_9=(a+8d_1):(a+8d_2)$

$=(-d_1+8d_1):(-d_1+12d_1)$

$=7d_1:11d_1$

$=7:11$

7. 정답 ④

공차를 d라 하면

$a_1-a_3=-(a_3-a_1)=-2d,\ -a_7+a_9=a_9-a_7=2d$

$a_1-a_3+a_5-a_7+a_9=-2d+a_5+2d=22$

$a_5=a_1+4d=2+4d=22$에서 $d=5$

마찬가지로 하면

$a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=a_3=a_1+2d=2+2\cdot 5=12$

8. 정답 ②

[해설]

수열 $\{a_n\}$은 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=a_1+(n-1)\cdot 3$

$$\therefore \frac{2^{a_5}-2^{a_2}}{2^{a_1}+2^{a_2}+2^{a_3}}=\frac{2^{a_1+12}-2^{a_1+3}}{2^{a_1}+2^{a_1+3}+2^{a_1+6}}$$

$$=\frac{2^{a_1+3}(2^9-1)}{2^{a_1}(1+2^3+2^6)}$$

$= \dfrac{2^3(2^3-1)(2^6+2^3+1)}{1+2^3+2^6}$

$=8\times7=56$

9. 정답 ②

[해설] 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_m=n+1$에서

$a+(m-1)d=n+1$ …… ㉠

$a_n=m+1$에서

$a+(n-1)d=m+1$ …… ㉡

㉠-㉡을 하면

$(m-n)d=n-m$

$\therefore d=-1$

이것을 ㉠에 대입하면

$a=m+n$

$\therefore a_{m+n}=a+(m+n-1)d$

$=m+n+(m+n-1)\times(-1)$

$=1$

10. 정답 ④

[해설] $a_n=4+(n-1)\times(-2)=-2n+6$

$b_n=7+(n-1)\times(-1)=-n+8$

이므로 $a_k=3b_k$에서 $-2k+6=3(-k+8)$

$\therefore k=18$

11. 정답 ③

[해설] $b_{2k-1}=2^{-(a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1})}$

$b_{2k}=2^{a_2+a_4+\cdots+a_{2k}}$

등차수열$\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$b_1\times b_2=2^{-a_1+a_2}=2^d$

$b_3\times b_4=2^{-a_1-a_3+a_2+a_4}=a^{2d}$

⋮

$b_9\times b_{10}=2^{5d}$

$\therefore b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_{10}=2^{d+2d+\cdots+5d}$

$=2^{15d}=8$

$15d=3$이므로 $d=\dfrac{1}{5}$

12. 정답 ③

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=78$에서 $a+2d=78$ …… ㉠

$a_7=72$에서 $a+6d=72$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=81$, $d=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore a_n=81+(n-1)\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{165-3n}{2}$

$2^{a_n}>1$에서 $2^{a_n}>2^0$

즉, $a_n>0$이므로

$\dfrac{165-3n}{2}>0$, $n<55$

따라서 구하는 자연수 n의 개수는 54이다.

13. 정답 98

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2+a_6=28$에서 $a+d+a+5d=28$

$\therefore a+3d=14$ …… ㉠

$({a_1}^2+{a_4}^2):({a_2}^2+{a_6}^2)=1:2$에서

$2({a_1}^2+{a_4}^2)={a_2}^2+{a_6}^2$

$2\{a^2+(a+3d)^2\}=(a+d)^2+(a+5d)^2$

$2a^2-8d^2=0$, $2(a+2d)(a-2d)=0$

$\therefore a=-2d$ 또는 $a=2d$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

(i) $a+3d=14$, $a=-2d$이면

$a=-28$, $d=14$

$\therefore a_{10}=-28+(10-1)\cdot14=98$

(ii) $a+3d=14$, $a=2d$이면

$a=\dfrac{28}{5}$, $d=\dfrac{14}{5}$

$\therefore a_{10}=\dfrac{28}{5}+(10-1)\cdot\dfrac{14}{5}=\dfrac{154}{5}$

이때, a_n은 정수이므로

$a_{10}=98$

14. 정답 ②

[해설]

다항식 $f(x)=x^2+px+p^2$을 $x-1$, $x+1, x+2$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여 각각

$f(1)=1+p+p^2$

$f(-1)=1-p+p^2$

$f(-2)=4-2p+p^2$

이다. $1+p+p^2$, $1-p+p^2$, $4-2p+p^2$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(1-p+p^2)=1+p+p^2+4-2p+p^2$

$\therefore\ p=-3$

15. 정답 ⑤

[해설]

a, b, c와 a^2, b^2, $-c^2$이 각각 이 순서로 등차수열을 이루므로

$2b=a+c$ …… ㉠

$2b^2=a^2-c^2$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$b=a-c$ …… ㉢

㉠, ㉢에서

$a=3c=3\times2010=6030$

16. 정답 ②

[해설] $x^2+ax-3=0$의 두 근이 α, γ이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\gamma=-a$, $\alpha\gamma=-3$ …… ㉠

$x^2-6x+b=0$의 두 근이 β, δ이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\beta+\delta=6$, $\beta\delta=b$

한편, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\frac{\beta+\delta}{2}=\gamma$

$\therefore \gamma=\frac{6}{2}=3$

이것을 ㉠에 대입하면 $\alpha=-1$

$\therefore \beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{-1+3}{2}=1$

$\therefore \delta=6-\beta=6-1=5$

따라서, $a=-(\alpha+\gamma)=-2$, $b=\beta\delta=5$ 이므로

$ab=-10$

17. 정답 130

[해설]

C가 받은 상금을 a, 공차를 d라 하면 A, B, C, D, E가 받은 상금은 각각 $a-2d$, $a-d$, a, $a+d$, $a+2d$이다.

상금의 총액이 450만 원이므로

$(a-2d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+2d)$

$=5a=450$(만 원)

$\therefore a=90$(만 원)

또한, 주어진 조건에 의하여

$(a+d)+(a+2d)=2\{(a-2d)+(a-d)+a\}$

$\therefore d=\frac{4}{9}a=40$(만 원)

따라서 D가 받은 상금은 $90+40=130$(만 원)이다.

$\therefore k=130$

18. 정답 ⑤

[해설]

이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

ㄱ. a^2, b^2, c^2이 이 순서로 등차수열을 이루므로 $2b^2=a^2+c^2$, 즉

$b^2=\frac{a^2+c^2}{2}$

$\frac{D}{4}=b^2-ac=\frac{a^2+c^2}{2}-ac=\frac{(a-c)^2}{2}>0$ ($\because a\neq c$)

그러므로 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는

다. (참)

ㄴ. $\log a$, $\log b$, $\log c$가 이 순서대로 등차수열을 이루면

$2\log b=\log a+\log c$, $\log b^2=\log ac$ $\therefore b^2=ac$

$\frac{D}{4}=b^2-ac=0$이므로 $ax^2+2bx+c=0$은 중근을 갖는다. (참)

ㄷ. $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$이 이 순서대로 등차수열을 이루면

$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{a+c}{ac}$ $\therefore b=\frac{2ac}{a+c}$

$\frac{D}{4}=b^2-ac=\frac{4a^2c^2}{(a+c)^2}-ac$

$=\frac{4a^2c^2-ac(a+c)^2}{(a+c)^2}=\frac{-ac(a-c)^2}{(a+c)^2}<0$ ($\because a\neq c$)

그러므로 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$은 허근을 갖는다. (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

19. 정답 ②

[해설] $r_1=a, r_2=a+d$, $r_3=a+2d$라 하면

$\overline{AB}=2a+d$, $\overline{BC}=2a+3d$, $\overline{AC}=2a+2d$

삼각형 ABC가 $\angle A=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

$(2a+3d)^2=(2a+d)^2+(2a+2d)^2$

$4a^2+12ad+9d^2=4a^2+4ad+d^2+4a^2+8ad+4d^2$

$4a^2-4d^2=0$

$4(a+d)(a-d)=0$

$a>0$, $d>0$이므로

$a=d$

따라서, r_1, r_2, r_3의 값으로 적당한 것을 순서쌍 (r_1, r_2, r_3)으로 나타내면 $(1,2,3), (2,4,6), (3,6,9)$의 3개 이다.

20. 정답 ③

[해설]

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$이라 하면 수열

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$: $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}$, …

은 등차수열이고 첫째항은 $\frac{1}{12}$, 공차는 $\frac{1}{8}-\frac{1}{12}=\frac{1}{24}$

$\therefore \frac{1}{a_n}=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}(n-1)=\frac{n+1}{24}$

즉, $a_n=\frac{24}{n+1}$이고, $a_{95}=\frac{24}{96}=\frac{1}{4}$

21. 정답 ①

[해설]

주어진 수열은 공차가 $\frac{1}{5}$인 등차수열이므로 전체 항의 개수를 n이라 하면

$20+(n-1)\frac{1}{5}=24$ $\therefore n=21$

따라서 이 수열의 합은 $\frac{21(20+24)}{2}=462$

22. 정답 ③

[해설] 첫째항이 2, 끝항이 40, 항의 개수가 $n+2$인 등차수열의 합이 420이므로

$\frac{(n+2)(2+40)}{2}=420$, $n+2=20$

$\therefore n=18$

이 등차수열의 공차를 d라 하면

$2+(20-1)\times d=40$

$\therefore d=2$

따라서, $a_n=2+2(n-1)=2n$이므로

$a_3+a_5=6+10=16$

23. 정답 ④

[해설]

전체 항의 수는 71이므로 공차를 d라고 하면

$8+70d=68$에서 $d=\frac{6}{7}$

따라서 $8+\frac{6}{7}=a_1$, $8+2\times\frac{6}{7}=a_2$, $\cdots$, $8+69\times\frac{6}{7}=a_{69}$이므로

$a_n=8+\frac{6}{7}n$에서 n이 7의 배수일 때 자연수가 된다.

1에서 69까지의 자연수 중에서 7의 배수는 7, 14, $\cdots$, 63으로 9개이므로 구하는 수의 합은

$$(8+a_1+a_2+\cdots+a_{69}+68)-(8+a_7+a_{14}+\cdots+a_{63}+68)$$
$$=\frac{71(8+68)}{2}-\frac{11(8+68)}{2}=76\times30=2280$$

24. 정답 ④

[해설] 등차수열$\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_6=5+5d=-5$

$\therefore d=-2$

$\therefore a_n=5+(n-1)\times(-2)$

$=-2n+7$

$\therefore a_n+a_{n+1}=(-2n+7)+(-2n+5)$

$=-4n+12$

$\therefore |a_1+a_2|+|a_2+a_3|+|a_3+a_4|+\cdots+|a_{10}+a_{11}|$

$=|8|+|4|+|0|+|-4|+\cdots+|-28|$

$=12+\frac{7(4+28)}{2}$

$=12+112$

$=124$

25. 정답 ⑤

[해설] 등차수열$\{a_n\}$의 첫째항을, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=10$

$a_{10}=a+9d=31$

두 식을 연립하여 풀면

$a=4$, $d=3$

$\therefore a_n=4+(n-1)\cdot3=3n+1$

따라서, 수열$\{a_n\}$의 항 중 100보다 작은 쪽수는

$a_1=4$, $a_3=10$, $a_5=16$, $\cdots$, $a_{31}=94$

이므로 구하는 합은

$\frac{16(4+94)}{2}=784$

26. 정답 ②

[해설] $A_m-B_m=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{2m}-a_{2m-1})$

$=d+d+\cdots+d=md$

$A_m-B_m=385-330=55$이므로

$md=55$

m은 2이상의 정수이고, d는 한 자리의 소수이므로

$d=5$, $m=11$

$B_m=\frac{m\{2a_1+(m-1)2d\}}{2}$

$=m\{a_1+(m-1)d\}$

$=11(a_1+10.5)$

$=330$

$\therefore a_1=-20$

$\therefore a_m=a_1+(m-1)d$

$=-20+(11-1)\cdot5$

$=30$

27. 정답 ②

[해설]

(가)를 시행한 후에 남은 수는

$1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,\cdots$

(나)를 시행한 후에 남은 수는

$4,10,16,\cdots$

(다)까지 시행한 후에 남은 수를 수열$\{a_n\}$이라 하자.

수열$\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공차가6인 등차수열 이므로

$a_n=4+6(n-1)=6n-2$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\frac{10(2\cdot4+9\cdot6)}{2}=310$

28. 정답 ③

[해설]

ㄱ. $S_4=S_{12}$이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots+a_{12}$

$\therefore a_5+a_6+\cdots+a_{12}=0$ (참)

ㄴ. 수열$\{a_n\}$은 등차수열이므로

$a_5+a_{12}=a_6+a_{11}=a_7+a_{10}=a_8+a_9$

$a_5+a_6+\cdots+a_{12}=4(a_8+a_9)=0$

$\therefore a_8+a_9=0$ (참)

ㄷ. $a_1<0$이고 ㄴ에서 $a_8+a_9=0$이므로 등차수열$\{a_n\}$의 공차d는 $d>0$이다. 즉, $a_1<a_2<\cdots<a_8<0$, $\cdots$이 성립한다.

따라서, $n=8$일 때, S_n은 최솟값을 갖는다. (거짓)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

29. 정답 ③

[해설] 곡선 $y=x^2$과 직선$y=-x+n$의 교점을 $A_n(\alpha_n, -\alpha_n+n)$, $B_n(\beta_n, -\beta_n+n)$이라 하자.

이때, $x^2=-x+n$이므로 $x^2+x-n=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha_n+\beta_n=-1$, $\alpha_n\beta_n=-n$

$\therefore l_n^2=\overline{A_nB_n}^2$

$=(\beta_n-\alpha_n)^2+\{(-\beta_n+n)-(-\alpha_n+n)\}^2$

$=2(\alpha_n-\beta_n)^2$

$=2\{(\alpha_n+\beta_n)^2-4\alpha_n\beta_n\}$

$=2(1+4n)$

$=8n+2$

$\therefore l_1^2+l_2^2+l_3^2+\cdots+l_{10}^2=\dfrac{10\{2\times10+(10-1)8\}}{2}=460$

30. 정답 ④

[해설]

$S_m=\dfrac{m\{-90+(m-1)\cdot3\}}{2}=\dfrac{m(3m-93)}{2}$

$S_n=\dfrac{n(3n-93)}{2}$

$S_m=S_n$이므로

$m(3m-93)=n(3n-93)$

$m^2-31m=n^2-31n$

$(m-n)(m+n-31)=0$

$\therefore\ m+n=31\ (\because m<n)$

따라서 자연수 m, n의 순서쌍 $(m,\ n)$은 $(1,\ 30)$, $(2,\ 29)$, $\cdots$ $(15,\ 16)$으로 15개이고 S_m의 최솟값은 S_{15}이므로

$S_{15}=\dfrac{15\{2\cdot(-45)+(15-1)\cdot3\}}{2}=-360$

즉, $a=15$, $b=-360$이므로 $a+b=-345$

31. 정답 ④

[해설] 등차수열$\{a_n\}$의 첫째항을a, 공차를 d라 하면

$a_2=3a_4$에서

$a+d=3(a+3d)$

$\therefore a+4d=0$ …… ㉠

$a_5-a_{10}=15$에서

$a+4d-(a+9d)=15$

$\therefore d=-3$

이것을 ㉠에 대입하면

$a=12$

$\therefore S_n=\dfrac{n\{2\times2+(n-1)\times(-3)\}}{2}$

$=\dfrac{n(27-3n)}{2}$

이때, $S_n+135<0$이므로

$\dfrac{n(27-3n)}{2}+135<0$

$3n^2-27n-270>0$

$n^2-9n-90>0$

$(n+6)(n-15)>0$

n은 자연수이므로

$n>15$

따라서 구하는 n의 최솟값은 16이다.

32. 정답 ③

[해설] $a_i+a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+{}_{i+26}=m^4$에서

$a_i+a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3}+\cdots+a_{i+26}$

$=a_i+(a_i+3)+(a_i+6)+(a_i+9)+\cdots+(a_i+78)$

$=\dfrac{27}{2}(2a_i+78)$

$=3^3(a_i+39)=m^4$

이때, m^4의 값이 최소가 되려면 $a_i+39=3\cdot2^4$이어야 하므로

$a_i=9$

33. 정답 ④

[해설]

ㄱ. A_n의 원소 중에서 최솟값은

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$ (참)

ㄴ. A_n의 원소 중에서 최댓값은

$(4n+1)+(4n-1)+(4n-3)+\cdots+(2n+3)$

$=\dfrac{n\{(4n+1)+(2n+3)\}}{2}$

$=3n^2+2n$ (거짓)

ㄷ. A_n의 원소는 첫째항이 n^2, 끝항이 $3n^2+2n$이고 공차가 2인 등차수열을 이루므로 $n^2+2(k-1)=3n^2+2n$에서

$k=n^2+n+1$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

34. 정답 ③

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(1,\ 0)$, $(2,\ 0)$에서 만나므로 $f(x)=a(x-1)(x-2)$로 놓을 수 있다.

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$2a=4\qquad\therefore\ a=2$

$\therefore\ f(x)=2(x-1)(x-2)$

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 32만큼 평행이동시키면 $y=g(x)$의 그래프가 되므로

$g(x)=2(x-3)(x-4)+32$

$a_n=f(n)-g(n)=2(n-1)(n-2)-2(n-3)(n-4)-32$

$=8n-52$

$8n-52<0$에서 $n<6.5$

이때, n은 자연수이므로 $n\le6$

따라서 구하는 S_n의 최솟값은 S_6이므로

$S_6=\dfrac{6(-44-4)}{2}=-144$

35. 정답 ②

[해설]

주어진 직선의 방정식은 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{-40}=1$, 즉 $y=\dfrac{40}{a}x-40$이므로

$a_n=\dfrac{40}{a}n-40$

수열 $\{a_n\}$이 공차가 3인 등차수열이므로 $\dfrac{40}{a}=3$에서

$a=\dfrac{40}{3}$

$\therefore\ a_n=3n-40$

이때, $a_n=3n-40<0$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은 13이다.

$b=S_{13}=\dfrac{13\{2\times(-37)+12\times3\}}{2}=-247$

$\therefore\ 3a-b=40-(-247)=287$

36. 정답 ④

[해설] $A(x_1, 4x_1)$, $B\left(x_2, \frac{1}{2}x\right)$로 놓으면

$4x_1 = \frac{1}{2}x_2$

$\therefore x_2 = 8x_1$ …… ㉠

$\overline{AB} = 21$ 이므로

$x_2 - x_1 = 21$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x_1 = 3$, $x_2 = 24$

$\therefore A(3, 12), B(24, 12)$

$C(x_3, 4x_3)$, $D\left(x_4, \frac{1}{2}x_4\right)$ 로 놓으면

$4x_3 = \frac{1}{2}x_4$

$\therefore x_4 = 8x_3$ …… ㉢

$\overline{CD} = 7$이므로

$x_4 - x_3 = 7$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$x_3 = 1, x_4 = 8$

$\therefore C(1, 4), D(8, 4)$

8개의 점$P_1(a_1, b_1)$, $P_2(a_2, b_2)$, $\cdots$, $P_8(a_8, b_8)$은 선분BD를 9등분 하는 점이므로 두 수열

$8, a_1, a_2, \cdots, a_8, 24$

$4, b_1, b_2, \cdots, b_8, 12$

는 각각 등차수열을 이룬다.

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{8}(a_k + b_k) &= (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_8+a_8)\\ &= (a_1+a_2+\cdots+a_8)+(b_1+b_2+\cdots+b_8)\\ &= 4\times(8+24)+4\times(4+12)\\ &= 192\end{aligned}$$

37. 정답 150

[해설] 꼭짓점C에서 변AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AB} = 25$이므로

$\overline{CH} = \frac{15\times 20}{25} = 12$

$\overline{AH} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ 이고, 두 점 P_9, Q_9가 각각 두 점 H, C와 일치하므로 $\overline{P_9Q_9} = \overline{CH} = 12$

삼각형 AHC에서

$\overline{P_1Q_1} + \overline{P_2Q_2} + \overline{P_3Q_3} + \cdots + \overline{P_9Q_9}$

$= (1+2+3+\cdots+9)\tan A$

$= \frac{9\times 10}{2} \times \frac{4}{3}$

$= 60$

또, 삼각형 BHC에서

$\overline{P_{10}Q_{10}} + \overline{P_{11}Q_{11}} + \cdots + \overline{P_{24}Q_{24}}$

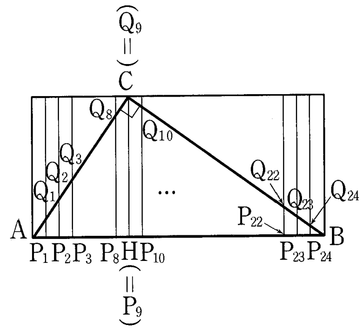
$= (15+14+13+\cdots+2+1)\tan B$

$= \frac{15\times 16}{2} \times \frac{3}{4}$

$= 90$

$\therefore \overline{P_1Q_1} + \overline{P_2Q_2} + \overline{P_3Q_3} + \cdots + \overline{P_{24}Q_{24}} = 60 + 90 = 150$

다른풀이



위의 그림에서

$(\overline{P_1Q_1} + \cdots + \overline{P_8Q_8}) + \overline{P_9Q_9} + (\overline{P_{10}Q_{10}} + \cdots + \overline{P_{24}Q_{24}})$

$= \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times 12 \times 15$

$= 150$

38. 정답 ④

[해설]

$S_1 = \frac{m\{2a+(m-1)d\}}{2}$

$S_2 = \frac{m\{2(a+md)+(m-1)d\}}{2} = \frac{m\{2a+(3m-1)d\}}{2}$

$S_3 = \frac{m\{2(a+2md)+(m-1)d\}}{2} = \frac{m\{2a+(5m-1)d\}}{2}$

$$\begin{aligned}S_1 + S_3 &= \frac{m\{2a+(m-1)d\}}{2} + \frac{m\{2a+(5m-1)d\}}{2}\\ &= \frac{m\{4a+(6m-2)d\}}{2}\\ &= 2\cdot\frac{m\{2a+(3m-1)d\}}{2} = 2S_2\end{aligned}$$

$\therefore S_1 + S_3 = 2S_2$

39. 정답 375

[해설]

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_{20} = a + 19d = 17$

$S_{20} = \frac{20(2a+19d)}{2} = 150$

즉, $\begin{cases} a+19d = 17 \\ 2a+19d = 15 \end{cases}$ $\therefore a = -2,\ d = 1$

$\therefore S_{30} = \frac{30\{2\times(-2)+29\times 1\}}{2} = 375$

40. 정답 100

[해설]

$a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 16$에서

$a_6 + a_{20} = a_{11} + a_{15} = 2a_{13}$이므로 $4a_{13} = 16$

$\therefore a_{13} = 4$

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$에서

$a_1 + a_{25} = a_2 + a_{24} = \cdots = a_{12} + a_{14} = 2a_{13}$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{25}=25a_{13}=25\times4$
$=100$

41. 정답 13

[해설] (가)와(나)에서

$a_1+a_2+a_3+a_4=26,$

$a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=134$

이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=160$

$4(a_1+a_n)=160$

$\therefore a_1+a_n=40$

한편, (다)에서 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=260$이므로

$\dfrac{40n}{2}=260$

$\therefore n=13$

42. 정답 72

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1+a_5=2a_3,\ a_2+a_6=2a_4$이므로

$a_1+a_3+a_5=3a_3=33$

$\therefore\ a_3=a+2d=11$ …… ㉠

$a_2+a_4+a_6=3a_4=27$

$\therefore\ a_4=a+3d=9$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a=15,\ d=-2$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 15, 공차가 -2이므로

$a_n=15+(n-1)\cdot(-2)=-2n+17$

등차수열의 합 S_n이 최대가 되려면 $a_n>0$인 모든 항의 합을 구하면 되므로

$-2n+17>0$에서 $n<\dfrac{17}{2}=8.5$, 즉 제 8항까지의 합이 최대가 된다.

$\therefore\ M=S_8=\dfrac{8\times(15+1)}{2}=64$

$\therefore M+k=64+8=72$

43. 정답 312

[해설]

$a_n=\overline{P_nQ_n}$이라 하면

$a_n=|(n+1)-(-n+7)|=|2n-6|$

$\therefore\ a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$

$=|-4|+|-2|+0+|2|+|4|+\cdots+|34|$

$=6+\dfrac{17\times(2+34)}{2}=312$

44. 정답 ③

[해설]

$S_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\dfrac{n(n-1)(n+1)}{3}$

$S_{n-1}=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=\dfrac{(n-1)(n-2)n}{3}$

$n=1$일 때, $1\cdot a_1=S_1=0$

$n\geq2$일 때,

$na_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n(n-1)}{3}\{(n+1)-(n-2)\}=n(n-1)$

$\therefore\ a_n=n-1\ (n\geq1)$

$\therefore\ a_{2010}=2010-1=2009$

45. 정답 ⑤

[해설]

$n=1$일 때, $S_1=a_1=3$

$n\geq2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+n+1)-\{(n-1)^2+(n-1)+1\}$

$=2n$

$\therefore a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots-a_{24}+a_{25}$

$=3+(-4+6)+(-8+10)+\cdots+(-48+50)$

$=3+2\times12=27$

46. 정답 ③

$\{a_n\},\ \{b_n\}$이 등차수열이므로

$A_{20}+B_{20}=\dfrac{20(a_1+a_{20})}{2}+\dfrac{20(b_1+b_{20})}{2}$

$=10\{(a_1+b_1)+(a_{20}+b_{20})\}=700$

$\therefore (a_1+b_1)+(a_{20}+b_{20})=a_1+b_1+55=70$

$\therefore\ a_1+b_1=15$

47. 정답 312

[해설]

$\dfrac{S_{2n}}{S_n}=\dfrac{\dfrac{2n\{2a+(2n-1)d\}}{2}}{\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}}=p$(상수)라 하면

$2\{2a+(2n-1)d\}=p\{2a+(n-1)d\}$

$4dn+4a-2d=dpn+2ap-dp$

$4d=dp,\ \ 4a-2d=2ap-dp$

이때, $d\neq0$이므로 $p=4,\ d=2a$

$a_4=56$이므로

$a+3d=a+6a=56$ $\therefore\ a=8,\ d=16$

$\therefore\ a_{20}=8+19\times16=312$

48. 정답 ①

[해설]

$a_1=b_1$에서 $S_1=T_1$이므로 $1+2p=2-q$

$\therefore\ 2p+q=1$ …… ㉠

$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq2),\ b_n=T_n-T_{n-1}(n\geq2)$이므로

$a_n=n^2+2pn-\{(n-1)^2+2p(n-1)\}$

$=2n+2p-1\ (n\geq2)$

$b_n=2n^2-qn-\{2(n-1)^2-q(n-1)\}$

$=4n-2-q\ (n\geq2)$

$\therefore\ a_{10}=2p+19,\ b_{10}=38-q$

$a_{10}+b_{10}=72$

$2p+19+38-q=72$

$2p-q=15$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $p=4$, $q=-7$

$\therefore p-q=11$

49. 정답 ④

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_{10}=10$에서 $a+9d=10$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{9} k(a_k-a_{k+1})=90$에서

$(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+3(a_3-a_4)+\cdots+9(a_9-a_{10})=90$

$-d-2d-3d-\cdots-9d=90$

$-45d=90$ $\therefore d=-2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=28$

$\therefore a_{20}=28+(20-1)\times(-2)=-10$

50. 정답 16

[해설]

$a_{10}=S_{10}-S_9$

$=(10^2-3\cdot10)-(9^2-3\cdot9)$

$=16$

51. 정답 16

[해설] 수열$\{S_{2n-1}\}$이 공차가 -3인 등차수열이므로

$S_{2n-1}=S_1+(n+1)\times(-3)=-3n+3+S_1$

또, 수열$\{S_{2n}\}$이 공차가 2인 등차수열이므로

$S_{2n}=S_2+(n-1)\times2=2n-2+S_2$

$a_8=S_8-S_7=(6+S_2)-(-9+S_1)$

$=15+S_2-S_1$

이고, $S_2-S_1=a_2=1$이므로

$a_8=16$

52. 정답 19

[해설] S_n이 다항식$2x^2+x+1$을 $x-n$으로 나눈 나머지이므로 나머지 정리에 의해

$S_n=2n^2+n+1$

$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq2)$, $a_1=S_1$ 이므로

$$a_n=\begin{cases}4n-1 & (n\geq2)\\ 4 & (n=1)\end{cases}$$

$\therefore a_5=19$

다른풀이

$S_n=2n^2+n+1$이므로

$a_5=S_5-S_4$

$=2\cdot5^2+5+1-(2\cdot4^2+4+1)$

$=19$

53. 정답 72

[해설]

$n\geq2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}=(\sqrt{S_n})^2-(\sqrt{S_{n-1}})^2$

$=(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}})(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})$

$=2(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}})$

$\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}>0$이므로

$\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=2$

수열 $\{\sqrt{S_n}\}$은 첫째항이 $\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}=1$, 공차가 2인 등차수열이므로

$\sqrt{S_n}=1+(n-1)\cdot2=2n-1$

$\therefore S_n=(2n-1)^2$

$\therefore a_{10}=S_{10}-S_9=19^2-17^2=72$

54. 정답 43

[해설]

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,

$A_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}=(n+1)^2$이라 하면

$n=1$일 때,

$A_1=\frac{S_1}{1}=(1+1)^2=4$

$\therefore a_1=S_1=4$

$n\geq2$일 때,

$A_n-A_{n-1}=\frac{S_n}{n}=(n+1)^2-n^2$

$=2n+1$

$\therefore S_n=n(2n+1)$ $(n\geq2)$

$\therefore a_1+a_{10}=S_1+(S_{10}-S_9)$

$=4+(10\times21-9\times19)$

$=4+39=43$

1. 정답 ③	2. 정답 ⑤	3. 정답 ⑤
4. 정답 ③	5. 정답 128	6. 정답 40
7. 정답 ①	8. 정답 ①	9. 정답 ④
10. 정답 24	11. 정답 108	12. 정답 ③
13. 정답 ④	14. 정답 ④	15. 정답 ②
16. 정답 ⑤	17. 정답 ③	18. 정답 ④
19. 정답 ④	20. 정답 ④	21. 정답 ③
22. 정답 ③	23. 정답 ③	24. 정답 33
25. 정답 21	26. 정답 ③	27. 정답 ①
28. 정답 ②	29. 정답 54	30. 정답 ⑤
31. 정답 ⑤	32. 정답 ④	33. 정답 ④
34. 정답 ④	35. 정답 ①	36. 정답 ④
37. 정답 800만 원		38. 정답 150
39. 정답 ③	40. 정답 ②	41. 정답 ①
42. 정답 ③	43. 정답 ③	44. 정답 ③
45. 정답 ③	46. 정답 ⑤	47. 정답 ⑤
48. 정답 ③	49. 정답 ③	50. 정답 ②
51. 정답 ④	52. 정답 ③	53. 정답 ②
54. 정답 24		

1. 정답 ③

[해설]

$a_n = 2^{n-1} > 1000$에서 $2^9 = 512,\ 2^{10} = 1024$이므로

$n-1 \geq 10$일 때, 즉 $n \geq 11$일 때 1000보다 크게 된다.

2. 정답 ⑤

[해설] $a = r\ ,\ b = r^2\ ,\ c = r^3$ 이므로

$\log_8 c = \log_{2^3} r^3 = \log_2 r$

$\log_a b = \log_r r^2 = 2$

$\log_8 c = \log_a b$ 에서 $\log_2 r = 2$

$\therefore r = 2^2 = 4$

3. 정답 ⑤

[해설]

$\log_2 \sqrt{a_n} + \log_4 a_{n+2} = \log_2 a_{n+1}$에서

$\frac{1}{2}(\log_2 a_n + \log_2 a_{n+2}) = \log_2 a_{n+1}$

$\log_2 a_n a_{n+2} = \log_2 {a_{n+1}}^2$

즉, ${a_{n+1}}^2 = a_n a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $a_9 = 8a_6$에서

$ar^8 = 8 \cdot ar^5,\quad r^3 = 8$

$\therefore\ r = 2$

$\therefore\ \log_2 a_{12} - \log_2 a_3 = \log_2 \frac{a_{12}}{a_3} = \log_2 \frac{ar^{11}}{ar^2} = \log_2 r^9$

$= \log_2 2^9 = 9$

4. 정답 ③

$\frac{a_{10}}{a_1} + \frac{a_{11}}{a_2} + \frac{a_{12}}{a_3} + \frac{a_{13}}{a_4} = 36$ 에서

$\frac{ar^9}{a} + \frac{ar^{10}}{ar} + \frac{ar^{11}}{ar^2} + \frac{ar^{12}}{ar^3} = 4r^9 = 36 \qquad \therefore\ r^9 = 9$

$\therefore\ \frac{a_{30}}{a_{12}} = \frac{ar^{29}}{ar^{11}} = r^{18} = (r^9)^2 = 9^2 = 81$

5. 정답 *128*

[해설] 등비수열$\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$ar^2 = 2 \quad \cdots$ ㉠

$ar^5 = 16 \quad \cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3 = 8 \qquad \therefore r = 2$

$r = 2$를 ㉠에 대입하면 $a \cdot 2^2 = 2$

$\therefore a = \frac{1}{2}$

$\therefore a_9 = ar^8 = \frac{1}{2} \cdot 2^8 = 128$

6. 정답 40

[해설]

$a_1 a_3 = 25$이므로 ${a_2}^2 = 25$

$\therefore\ a_2 = 5\ (\because\ a_2 > 0)$

$a_2 a_4 = 100$이므로 ${a_3}^2 = 100$

$\therefore\ a_3 = 10\ (\because\ a_3 > 0)$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{10}{5} = 2$

$a_2 = a_1 \times 2 = 5$에서 $a_1 = \frac{5}{2}$

$\therefore a_5 = a_1 r^4 = \frac{5}{2} \cdot 2^4 = 40$

7. 정답 ①

[해설]

이 등비수열의 공비를 r라 하면 세 수 a, b, c는 각각 $a,\ ar,\ ar^2$이다.

$a + b + c = a(1 + r + r^2) = -5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$ab + bc + ca = a^2 r(1 + r + r^2) = 10 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠에서 $ar = -2$

$\therefore\ abc = (ar)^3 = (-2)^3 = -8$

8. 정답 ①

[해설]

$x^2 - x + k = 0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = 1,\ \alpha\beta = k$

$\frac{\alpha}{\beta},\ \alpha + \beta,\ \alpha\beta$가 이 순서로 등비수열을 이루므로

$(\alpha + \beta)^2 = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \alpha\beta = \alpha^2 \qquad \therefore \alpha^2 = 1$

따라서 $\begin{cases}\alpha = 1 \\ \beta = 0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha = -1 \\ \beta = 2\end{cases}$

$\alpha\beta \neq 0$이므로 $\alpha = -1,\ \beta = 2 \qquad \therefore\ k = \alpha\beta = -2$

9. 정답 ④

[해설]

$[x] = n,\ x - [x] = \alpha$라 하면 $x = n + \alpha$

(n은 음이 아닌 정수, $0 \leq \alpha < 1$)

$\alpha,\ n,\ n + \alpha$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$n^2 = \alpha(n + \alpha)$

$\alpha^2 + n\alpha - n^2 = 0$

$\therefore \alpha = \frac{(-1 \pm \sqrt{5})n}{2}$

n은 음이 아닌 정수, $0 \leq \alpha < 1$이므로

$n = 1,\ \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

$(\because\ n = \alpha = 0$이면 $x = 0)$

10. 정답 24

[해설]

세 수 2, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2 = 2b$ …… ㉠

또, a, b, 30이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b = a + 30$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a^2 = a + 30$에서

$a^2 - a - 30 = 0 \quad (a-6)(a+5) = 0$

$a > 0$이므로 $a = 6$

$a = 6$을 ㉠에 대입하면 $b = 18$

$\therefore a + b = 24$

11. 정답 108

[해설] 세 수 a^n , $2^4 \times 3^6$, b^n이 순서대로 등비수열을 이루고 n이 자연수 이므로

$(ab)^n = a^n b^n = (2^4 \times 3^6)^2 = (2^2 \times 3^3)^4 = 2^8 \times 3^{12}$

따라서 ab의 최솟값은 $n = 4$일 때,

$2^2 \times 3^3 = 4 \times 27 = 108$

12. 정답 ③

[해설]

$S_6 = \dfrac{a(2^6 - 1)}{2 - 1} = 21 \qquad \therefore a = \dfrac{1}{3}$

13. **정답 ④**

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \dfrac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$

$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} = \dfrac{2(4^n - 1)}{4 - 1}$

$= \dfrac{2}{3}(2^n - 1)(2^n + 1)$

$\therefore \dfrac{a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n}}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n} = \dfrac{2}{3}(2^n + 1) = 86$

$2^n = 128 = 2^7$

$\therefore n = 7$

14. 정답 ④

[해설] $a_n = \dfrac{3^n + (-1)^n}{2}$에서

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$

$= \dfrac{1}{2}[(3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{10})$

$\underbrace{+\{(-1+1) + (-1+1) + \cdots + (-1+1)\}]}_{5개}$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3(3^{10} - 1)}{3 - 1}$

$= \dfrac{3}{4}(3^{10} - 1)$

참고

수열$\{a_n\}$을

$a_n = \dfrac{3^n + (-1)^n}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot 3^n + \dfrac{1}{2} \cdot (-1)^n$

으로 분리하면 일반항이 $\dfrac{1}{2} \cdot (-1)^n$인 수열의 첫째항부터 짝수 번째 항까지의 합은 항상 0임을 쉽게 파악할 수 있다.

15. 정답 ②

[해설] $f(x) = (x-2)^2 + (x-2^2)^2 + \cdots + (x - 2^{10})^2$

$= 10x^2 - 2(2 + 2^2 + \cdots + 2^{10})x + (2^2 + 2^4 + 2^6 + \cdots + 2^{20})$

$= 10\left(x - \dfrac{2 + 2^2 + \cdots + 2^{10}}{10}\right)^2$

$+ (2^2 + 2^4 + 2^6 + \cdots + 2^{20}) - \dfrac{(2 + 2^2 + \cdots + 2^{10})^2}{10}$

따라서, $f(x)$는 $x = \dfrac{2 + 2^2 + \cdots + 2^{10}}{10}$일 때, 최솟값을 갖는다.

$\therefore a = \dfrac{2 + 2^2 + \cdots + 2^{10}}{10}$

$= \dfrac{2(2^{10} - 1)}{10(2-1)}$

$= \dfrac{2^{10} - 1}{5}$

16. 정답 ⑤

[해설]

수열 $\{a_n\}$의 공비가 r이므로 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 공비가 $\dfrac{1}{r}$인 등비수열을 이룬다.

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \dfrac{r^n - 1}{r - 1} = 20$ …… ㉠

$\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{r^n}}{1 - \dfrac{1}{r}}$

$= \dfrac{r(r^n - 1)}{r^n(r-1)} = 5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $r^{n-1} = 4$

$\therefore \dfrac{a_2 \times a_4 \times \cdots \times a_{2n}}{a_1 \times a_3 \times \cdots \times a_{2n-1}} = \dfrac{r \times r^3 \times r^5 \times \cdots \times r^{2n-1}}{1 \times r^2 \times r^4 \times \cdots \times r^{2n-2}}$

$= r^n = r^{n-1} \times r = 4r$

17. 정답 ③

[해설]

ㄱ. $B = S_{2n} - S_n = q - p$ (참)

ㄴ. 등비수열$\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$A = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$, $B = \dfrac{a_1 r^n (r^n - 1)}{r - 1}$, $C = \dfrac{a_1 r^{2n}(r^n - 1)}{r - 1}$

이므로 A, B, C는 이 순서대로 공비가 r^n인 등비수열을 이룬다.

$\therefore B^2 = AC$ (참)

ㄷ. $C = S_{3n} - S_{2n} = S_{3n} - q$ 이므로 ㄱ, ㄴ에서

$(q-p)^2 = p(S_{3n} - q) \ (\because A = S_n = p)$

$\therefore S_{3n} = \dfrac{p^2 - pq + q^2}{p} = p - q + \dfrac{q^2}{p}$ (거짓)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

18. 정답 ④

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을1, 공비를 r이므로

$S_{20} = 3S_{10}$에서

$$\frac{1-r^{20}}{1-r} = 3 \cdot \frac{1-r^{10}}{1-r}$$

$(1-r^{10})(1+r^{10}) = 3(1-r^{10})$

$1 + r^{10} = 3 \qquad \therefore r^{10} = 2$

$S_{40} = \dfrac{1-r^{40}}{1-r} = \dfrac{(1-r^{10})(1+r^{10})(1+r^{20})}{1-r}$

$= S_{10}(1+2)(1+4) = 15S_{10}$

$\therefore\ k = 15$

19. 정답 ④

[해설] 등비수열$\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_{20} = 4S_{10}$에서

$\dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1} = 4 \cdot \dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}$

$r^{20} - 1 = (r^{10}+1)(r^{10}-1) = 4(r^{10}-1)$에서

$r^{10} + 1 = 4$

$\therefore r^{10} = 3$

$S_{30} = \dfrac{a(r^{30}-1)}{r-1} = \dfrac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1}$

$= (3^2+3+1)S_{10} = 13S_{10}$

$\therefore a = 13$

$S_{40} = \dfrac{a(r^{40}-1)}{r-1} = \dfrac{a(r^{20}-1)(r^{20}+1)}{r-1}$

$= (3^2+1)S_{20} = 10S_{20}$

$\therefore b = 10$

$\therefore a + b = 23$

20. 정답 ④

[해설] 등비수열$\{a_n\}$의 첫째항을a_1, 공비를 r라 하면

$\log_2 a_2 = 1$, $\log_2 a_4 = 2$에서

$a_2 = a_1 r = 2$

$a_4 = a_1 r^3 = 2^2$

$\dfrac{a_4}{a_2} = r^2 = 2$

$\therefore r \sqrt{2}\ (\because r > 0)$, $a_1 = \sqrt{2}$

$\therefore a_n = (\sqrt{2})^n = 2^{\frac{n}{2}}$

ㄱ. $a_5 = 2^{\frac{5}{2}} = 4\sqrt{2}$ (거짓)

ㄴ. $\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \log_2 a_3 + \cdots + \log_2 a_{10}$

$= \log_2 2^{\frac{1}{2}} + \log_2 2^{\frac{2}{2}} + \log_2 2^{\frac{3}{2}} + \cdots + \log_2 2^{\frac{10}{2}}$

$= \dfrac{1+2+3+\cdots+10}{2}\log_2 2$

$= \dfrac{55}{2}$ (참)

21. 정답 ③

[해설]

공비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을a, 공비를 r라 하면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_k = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^9$

$= \dfrac{a(1-r^{10})}{1-r} = 10\sqrt{10}$

$\therefore \dfrac{1-r^{10}}{1-r} = \dfrac{10\sqrt{10}}{a} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a} + \frac{1}{ar} + \frac{1}{ar^2} + \cdots + \frac{1}{ar^9}$

$= \dfrac{1}{ar^9} \times \dfrac{1-r^{10}}{1-r} = \sqrt{10} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$\dfrac{1}{ar^9} \times \dfrac{10\sqrt{10}}{a} = \sqrt{10}$, $a^2 r^2 = 10$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{10} \log a_k = \log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_{10}$

$= \log(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{10})$

$= \log(a^{10} r^{1+2+\cdots+9})$

$= \log a^{10} r^{45}$

$= \log(a^2 r^9)^5 = \log 10^5 = 5$

22. 정답 ③

[해설]

S 중 가장 작은 수는 $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 2^6$이고 가장 큰 수는 $2^8 \cdot 2^9 \cdot 2^{10} = 2^{27}$이므로 구하는 수열은 첫째항이 2^6, 끝항이 2^{27}이고, 공비가 2인 등비수열을 이룬다.

따라서 구하는 수열의 합은

$\dfrac{2^6(2^{22}-1)}{2-1} = 64(2^{22}-1)$

$\therefore p = 64,\ q = 22$

$\therefore p + q = 86$

23. 정답 ③

[해설]

원 C_0의 반지름의 길이를 $r_0 = 9$라 하면

$\overline{OQ_1} = \dfrac{2}{3}r_0$, $\overline{OQ_2} = \dfrac{2}{3^2}r_0$, $\overline{OQ_3} = \dfrac{2}{3^3}r_0$, $\cdots$

$\overline{OP_1} = \dfrac{1}{3}r_0$, $\overline{OP_2} = \dfrac{1}{3^2}r_0$, $\overline{OP_3} = \dfrac{1}{3^3}r_0$, $\cdots$

$S_1 = \pi\left(\dfrac{4}{3^2} - \dfrac{1}{3^2}\right)r_0^2 = \dfrac{1}{3}\pi r_0^2$

$S_2 = \pi\left(\dfrac{4}{3^4} - \dfrac{1}{3^4}\right)r_0^2 = \dfrac{1}{3^3}\pi r_0^2$

$S_3 = \pi\left(\frac{4}{3^6} - \frac{1}{3^6}\right)r_0^2 = \frac{1}{3^5}\pi r_0^2$

$\vdots$

$S_n = \pi\left(\frac{4}{3^{2n}} - \frac{1}{3^{2n}}\right)r_0^2 = \frac{1}{3^{2n-1}}\pi r_0^2$

$\therefore S_5 = \frac{1}{3^9}\pi r_0^2 = \frac{1}{3^9}\pi \times 3^4 = \frac{1}{3^5}\pi$

24. 정답 33

[해설]

$\sqrt{6-4\sqrt{2}}$, $\sqrt{12-8\sqrt{2}}$, $\sqrt{24-16\sqrt{2}}$, $\cdots$ 에서

$\sqrt{6-2\sqrt{8}}$, $\sqrt{12-2\sqrt{32}}$, $\sqrt{24-2\sqrt{128}}$, $\cdots$

즉, $\sqrt{4}-\sqrt{2}$, $\sqrt{8}-\sqrt{4}$, $\sqrt{16}-\sqrt{8}$, $\cdots$

따라서 첫째항이 $2-\sqrt{2}$, 공비가 $\sqrt{2}$ 이므로 구하는 수열의 합은

$\frac{(2-\sqrt{2})\{(\sqrt{2})^{10}-1\}}{\sqrt{2}-1} = 31\sqrt{2}$

$\therefore p+m = 31+2 = 33$

25. 정답 21

[해설]

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 이므로

$S_{2n} = \frac{a(1-r^{2n})}{1-r} = \frac{a(1-r^n)(1+r^n)}{1-r}$

$= (1+r^n)S_n$

$S_{3n} = \frac{a(1-r^{3n})}{1-r} = \frac{a(1-r^n)(1+r^n+r^{2n})}{1-r}$

$= (1+r^n)S_n$

$\frac{S_{2n}}{S_n} = 5$ 에서 $1+r^n = 5$ $\quad\therefore\ r^n = 4$

$\therefore \frac{S_{3n}}{S_n} = 1+r^n+r^{2n} = 1+4+4^2 = 21$

26. 정답 ③

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r\neq 1)$라 하면

$b_n = 1+\sum_{k=1}^{n} a_k = 1+\frac{49(r^n-1)}{r-1}$

$= \frac{49r^n+r-50}{r-1}$

수열 $\{b_n\}$이 등비수열이 되려면 $r-50=0$이어야 한다.

이때, $b_n = \frac{49 \cdot 50^n}{50-1} = 50^n$ 이므로 $b_2 = 50^2$

27. 정답 ①

[해설] 등비수열$\{a_n\}$의 첫째항을a, 공비를 r라 하면

수열$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a}$, 공비가 $\frac{1}{r}$인 등비수열을 이루므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10} = \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 12$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{10}}$

$= \frac{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{r^{10}}-1\right)}{\frac{1}{r}-1}$

$= \frac{1}{ar^9} \times \frac{r^{10}-1}{r-1} = 3$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠ ÷ ㉡을 하면 $a^2r^9 = 4$

$\therefore a_4a_7 = ar^3 \cdot ar^6 = a^2r^9 = 4$

28. 정답 ②

[해설] 등비수열$\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_n = ar^{n-1}$

이때, $a_n+a_{n+1} = ar^{n-1}+ar^n = (a+ar)r^{n-1}$

이므로 수열$\{a_n+a_{n+1}\}$은 첫째항이 $a+ar$, 공비가 r인 등비수열이다.

그런데 $a+ar=4$, $r=3$이므로

$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$\therefore a_1a_2a_3\cdots a_{10} = 1 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdots 3^9$

$= 3^{1+2+3+\cdots+9} = 3^{45}$

29. 정답 54

[해설]

$a_n = a \cdot 2^{n-1} = 400$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{a(2^n-1)}{2-1} = a \cdot 2^n - a = 750$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $a \cdot 2^n = 800$을 ㉡에 대입하면 $a = 50$

$50 \cdot 2^{n-1} = 400$에서 $2^{n-1} = 8$ $\quad\therefore\ n = 4$

$\therefore\ a+n = 50+4 = 54$

30. 정답 ⑤

2011년 1월 초의 노트북의 가격은

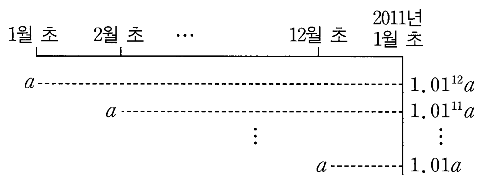
$130(1-0.01)^{12} = 130 \times 0.99^{12} = 130 \times 0.89$ $\cdots\cdots$ ㉠

노트북을 구입하기 위하여 매달 적립하여야 할 금액을 a원이라 하면 아래 그림에서 12개월 후의 원리합계는

$1.01a+1.01^2a+1.01^3a+\cdots$

$+1.01^{12}a = \frac{1.01a(1.01^{12}-1)}{1.01-1} = 13 \times 1.01a$

$\cdots\cdots$ ㉡



㉠과 ㉡이 같아야 하므로 $130 \times 0.89 = 1.01 \times 13a$

$\therefore a = \frac{890}{101} = 8.81\cdots ≒ 8.8$(만 원)$= 88000$(원)

31. 정답 ⑤

[해설] 월초에 100만 원을 12개월 동안 예금한 원리합계와 매월 말에 a만 원씩 12번 적립한 원리합계가 같아야 한다.

월초에 100만 원을 12개월 동안 예금한 원리합계는 $100(1.01)^{12}$

매월 말에 a만 원씩 12번 적립한 원리합계는

$a+a(1.01)+a(1.01)^2+\cdots+a(1.01)^{11}$

$=\dfrac{a(1.01^{12}-1)}{1.01-1}$

따라서 $100(1.01)^{12}=\dfrac{a(1.01^{12}-1)}{1.01-1}$에서

$a=\dfrac{1.01^{12}}{1.01^{12}-1}$ (만 원)

32. 정답 ④

[해설] 1200만원에 대한 36개월 후의 원리합계는

1200×1.01^{36} ...... ㉠

1개월 마다 a만원씩 적립했을 때, 36개월 후의 원리합계는

$a+a\times1.01+a\times1.01^2+\cdots+a\times1.01^{35}$

$=\dfrac{a(1.01^{36}-1)}{1.01-1}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$1200\times1.01^{36}=\dfrac{a(1.01^{36}-1)}{1.01-1}$

$1200\times1.4=40a$

$\therefore a=42$(만원)

33. 정답 ④

[해설] n회($n=1,2,3,\cdots,24$)입금액의 원리 합계는

$10\times1.008^{n-1}\times1.011^{24}\times1.008^{25-n}=10\times1.011^{24}\times1.008^{24}$

이므로 구하는 원리합계는

$10\times1.011^{24}\times1.008^{24}\times24=10\times1.3\times1.2\times24$

$=374.4$(만원)

34. 정답 ④

[해설] 첫째 해의 연봉: a원

2년째 해의 연봉 : $a(1+0.08)$원

3년째 해의 연봉 : $a(1+0.08)^2$원

⋮

19년째 해의 연봉 : $a(1+0.08)^{18}$원

20년째 해의 연봉 : $\dfrac{2}{3}a(1+0.08)^{18}$원

따라서 이 회사에 입사한 사람이 28년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합은

$a+a\times1.08+a\times1.08^2+a\times1.08^3+\cdots$

$+a\times1.08^{17}+a\times1.08^{18}+\dfrac{2}{3}a\times1.08^{18}\times9$

$=a+\dfrac{a\times1.08(1.08^{18}-1)}{1.08-1}+6a\times1.08^{18}$

$=a+\dfrac{a\times1.08(4-1)}{0.08}+6a\times4$

$=25a+\dfrac{81}{2}a$

$=\dfrac{131}{2}a$

35. 정답 ①

[해설]

내년 초에 일시불로 받는 금액으로 환산하면

(가) : $\dfrac{200}{1.004}+\dfrac{200}{1.004^2}+\dfrac{200}{1.004^3}+\cdots+\dfrac{200}{1.004^{60}}$

$=\dfrac{\dfrac{2000}{1.004}\left(1-\dfrac{1}{1.004^{60}}\right)}{1-\dfrac{1}{1.004}}=\dfrac{200(1-0.791)}{0.004}=10450$(만 원)

(나) : $\dfrac{100}{1.004}+\dfrac{100}{1.004^2}+\dfrac{100}{1.004^3}+\cdots+\dfrac{100}{1.004^{120}}$

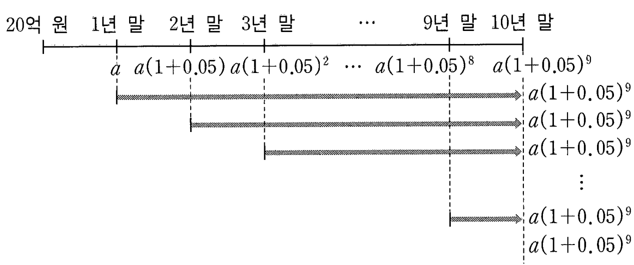
$=\dfrac{\dfrac{100}{1.004}\left(1-\dfrac{1}{1.004^{120}}\right)}{1-\dfrac{1}{1.004}}=\dfrac{100(1-0.618)}{0.004}=9550$ (만 원)

따라서 A씨에게 유리한 조건은 (가)이고 그 때 900만 원의 연금을 더 받을 수 있다.

36. 정답 ④

[해설] 20억원에 대한 10년 말의 원리합계는

$20(1+0.05)^{10}$(억 원) ...... ㉠



첫 해에 갚아야 할 돈은 a억 원 이라 하면 다음 해부터 매년 말에 갚아야 할 금액은 순서대로

$a(1+0.05),a(1+0.05)^2,\cdots,a(1+0.05)^9$

$=10a(1+0.05)^9$(억원) ...... ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$20(1+0.05)^{10}=10a(1+0.05)^9$

$\therefore a=2.1$(억 원)

37. 정답 800만 원

[해설]

$\dfrac{50\times(1.1^{10}-1)}{1.1-1}=\dfrac{50\times1.6}{0.1}=800$(만 원)

38. 정답 150

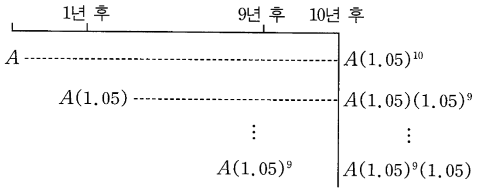
[해설]

2019년 12월 말의 전원주택의 가격은

$2000\times(1.02)^{10}=2000\times1.2=2400$(만 원) ...... ㉠

전원주택을 구입하기 위하여 처음 적립하여야 할 금액을 A만 원이라 하면 아래 그림에서 10년 후의 적립금액은

$10 \times A(1.05)^{10} = 16A$ …… ㉡



㉠과 ㉡이 같아야 하므로 $16A = 2400$

$\therefore\ A = 150$(만 원)

39. 정답 ③

[해설]

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이a, 공비가 r인 등비수열이면 $a_n = ar^{n-1}$

이때, 수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 양수이고 서로 다르므로

$a > 0,\ r \neq 1,\ r > 0$

$b_n = a_{n+1} - a_n = ar^n - ar^{n-1} = a(r-1)r^{n-1}$

그러므로 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $a(r-1)$이고 공비가 r인 등비수열이다. (참)

ㄴ. 수열 $\{3^{b_n}\}$이 공비가 r인 등비수열이면

$3^{b_{n+1}} = r \cdot 3^{b_n} = 3^{\log_3 r} \cdot 3^{b_n} = 3^{b_n + \log_3 r}$

$\therefore\ b_{n+1} = b_n + \log_3 r$

그러므로 수열 $\{b_n\}$이 등차수열이다. (거짓)

ㄷ. 수열 $\{\log_3 a_n\}$이 공차가 d인 등차수열이면

$\log_3 a_{n+1} = \log_3 a_n + d = \log_3 a_n + \log_3 3^d$

$= \log_3 (3^d \cdot a_n)$

$\therefore\ a_{n+1} = 3^d \cdot a_n$

그러므로 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 ㄱ에 의해 수열 $\{b_n\}$은 등비수열이다. (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

40. 정답 ②

[해설]

(가)에서

$a^2 = 4b$ …… ㉠

(나)에서

$2b = a + c$ …… ㉡

(다)에서

$c^2 = 36b$ …… ㉢

㉠, ㉢에서

$c^2 = 9a^2$

$\therefore c = \pm 3a$

(i) $x = 3a$일 때,

㉡에서 $b = 2a$

이것을 ㉠에 대입하면

$a^2 = 8a$

$a(a-8) = 0$

$\therefore a = 0$또는 $a = 8$

이때, $a < 0$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

(ii) $c = -3a$일 때,

㉡에서 $b = -a$

이것을 ㉠에 대입하면

$a^2 = -4a$

$a(a+4) = 0$

$\therefore a = 0$ 또는 $a = -4$

이때, $a < 0$이므로 $a = -4$

(i), (ii)에 의해

$a = -4$, $b = 4$, $c = 12$

$\therefore a + b + c = 12$

41. 정답 ①

[해설]

ㄱ. $S_{n+1} - S_n = \{-(n+1)^2 + 6(n+1) + 7\} - (-n^2 + 6n + 7)$

$= -2n + 5$

그러므로 수열 $\{S_{n+1} - S_n\}$은 공차가 -2인 등차수열이다. (참)

ㄴ. $a_1 = S_1 = 12$

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (-n^2 + 6n + 7) - \{-(n-1)^2 + 6(n-1) + 7\}$

$= -2n + 7$

그러므로 수열 $\{a_n\}$은 $12,\ 3,\ 1,\ -1,\ -3,\ \cdots$이므로 등차수열이 아니다. (거짓)

ㄷ. $a_n < 0$에서 $-2n + 7 < 0$

$\therefore n > 3.5$ ($\because$ $a_1 = 12 > 0$) …… ㉠

$S_n > 0$에서 $-n^2 + 6n + 7 > 0$

$n^2 - 6n - 7 < 0$ $(n+1)(n-7) < 0$

$\therefore\ -1 < n < 7$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $3.5 < n < 7$

그러므로 자연수 n의 값은 $4,\ 5,\ 6$의 3개이다. (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

42. 정답 ③

[해설]

ㄱ. $\{a_n\}$이 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이면

$a_n = ar^{n-1}$이고, $a_n + a_{n+1} = ar^{n-1} + ar^n = a(r+1)r^{n-1}$이다.

그러므로 수열 $\{a_n + a_{n+1}\}$은 첫째항이 $a(r+1)$, 공비가 r인 등비

수열이다. (참)

ㄴ. $\{a_n\}$이 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이면

$a_n = ar^{n-1}$이고, $a_n a_{n+1} = ar^{n-1} \cdot ar^n = a^2 r^{2n-1}$이다.

그러므로 수열 $\{a_n a_{n+1}\}$은 첫째항이 $a^2 r$, 공비가 r^2인 등비수열이

다. (참)

ㄷ. $\{S_n\}$이 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이면

$S_n = ar^{n-1}$

$a_n = S_n - S_{n-1} = ar^{n-1} - ar^{n-2}$

$= a(r-1)r^{n-2}$ $(n \geq 2)$ …… ㉠

$a_1 = S_1 = a$ …… ㉡

㉠에 $n=1$을 대입하면 $\dfrac{a(r-1)}{r}$이므로

$$a_n=\begin{cases} a(r-1)r^{n-2} & (n\geq 2) \\ a & (n=1) \end{cases}$$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제2항부터 등비수열이다. (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

43. 정답 ③

[해설] 수열$\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 일반항 a_n은

$a_n=ar^{n-1}$

ㄱ. $\log a_n^2=\log(ar^{n-1})^2=2\log a+(n-1)2\log r$이므로

수열$\{\log a_n^2\}$은 공차가 $2\log r$인 등차수열이다. (참)

ㄴ. $\log a_{2n}$

$=\log ar^{2n-1}=\log a+(2n-1)\log r$

$=\log a+\log r+(n-1)2\log r$

이므로 수열$\{\log a_{2n}\}$은 공차가 $2\log r$인 등차수열이다. (참)

ㄷ. $\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}=\dfrac{ar^{2n}}{ar^{2n-2}}=r^2$ 이므로 수열 $\left\{\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}\right\}$은 공차가 0인 등차수열이다. (거짓)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

44. 정답 ③

[해설]

ㄱ. a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+c$

$\therefore f(1)=a+2b+c=2b+2b=4b$ (참)

ㄴ. 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2b)^2-4ac=(a+c)^2-4ac=(a-c)^2>0 \quad (\because a\neq c)$

이므로 함수$y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)

ㄷ. a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$b^2=ac$

이차방정식$ax^2+2bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=b^2-ac=0$

이므로 함수$y=f(x)$의 그래프는 x축에 접한다.(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

45. 정답 ③

[해설] 첫째항이 2, 공비가3인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항a_n은

$a_n=2\cdot 3^{n-1}$

$b_n=a_{2n-1}+a_{2n}$

$=2\cdot 3^{(2n-1)}+2\cdot 3^{2n-1}$

$=2\cdot 3^{2n-2}(1+3)$

$=8\cdot 9^{n-1}$

ㄱ. $b_2=8\cdot 9=72$ (참)

ㄴ. 수열$\{b_n\}$은 첫째항이8, 공비가 9인 등비수열이다. (참)

ㄷ. $b_{10}=8\cdot 9^9$에서

$\log_{10}(8\cdot 9^9)=\log_{10}(2^3\cdot 3^{18})$

$=3\log_{10}2+18\log_{10}3$

$=3\times 0.3010+18\times 0.4771$

$=9.4908$

따라서, $\log_{10}b_{10}$의 지표가 9이므로 b_{10}은 10자리의 정수이다. (거짓)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

46. 정답 ⑤

[해설]

$a,\ b,\ c$가 이 순서로 등차수열을 이루므로 $2b=a+c$

ㄱ, $(3^b)^2=3^{2b}=3^{a+c}=3^a\cdot 3^c$이므로 등비수열을 이룬다.

ㄴ. $\left(\sqrt{3^{(a+b)^2}}\right)^2=3^{(a+b)^2}=3^{(a-b)^2+4ab}=3^{(a-b)^2}\cdot 3^{4ab}$이므로 등비수열을 이룬다.

ㄷ. $a+c=2b,\ a+b+c=3b$이므로

$(a+c)^2=4b^2$이고 $\dfrac{b}{3}\cdot 4(a+b+c)=\dfrac{b}{3}\cdot 4\cdot 3b=4b^2$

$\therefore (a+c)^2=\dfrac{b}{3}\cdot 4(a+b+c)$

그러므로 등비수열을 이룬다.

따라서 보기에서 등비수열을 이루는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

47. 정답 ⑤

[해설] $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=2n+1$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

$a_1=S_1=3$

이므로 ㉠은 $n=1$일 때도 성립한다.

$a_n=2n+1 (n=1, 2, 3, \cdots)$

$\therefore 2^{a_n}=2^{2n+1}$

따라서, 수열$\{2^{a_n}\}$은 첫째항이 8이고, 공비가 $2^2=4$인 등비수열이다.

$2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_{10}}=\dfrac{8(4^{10}-1)}{4-1}=\dfrac{8}{3}(4^{10}-1)$

$\therefore p=3\ ,\ q=8\ ,\ a=4$

$\therefore p+q+a=15$

48. 정답 ③

[해설] 등차수열의 공차를 d라 하면

$a+b=a+(a+3d)=(a+d)+(a+2d)$

$=x+y=5$

$\therefore a+b=5$

등비수열의 공비를 r라 하면

$ab=a(ar^3)=ar\cdot ar^2=pq=4$

$\therefore ab=4$

$|a-b|^2=(a+b)^2-4ab=5^2-4\cdot 4=9$에서

$\therefore |a-b|=3 \quad (\because |a-b|>0)$

49. 정답 ③

[해설]

(가)에서 $\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}$ …… ㉠

(나)에서 공비를 r라 하면 $x=ar$, $b=ar^2$이므로 ㉠에 대입하면

$$\frac{2}{ar^2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{ar}$$

$r^2+r-2=0$

$(r+2)(r-1)=0$

$r\neq 1$이므로 $r=-2$

$\therefore c=-2a$, $b=4a$

$\therefore f(x)=ax^2+4ax-2a$

(다)에서 $f(1)=3$이므로

$a+4a-2a=3a=3$

$\therefore a=1$

따라서, $f(x)=x^2+4x-2$이므로

$f(2)=10$

50. **정답 ②**

[해설] 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{k-1}a_k}$$

$$=\left\{\frac{1}{a_2-a_1}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\frac{1}{a_3-a_2}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\frac{1}{a_k-a_{k-1}}\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_k}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{a_k-a_1}{a_1a_k}\right)$$

따라서, $\dfrac{a_k-a_1}{d\cdot a_1a_k}=\dfrac{15}{a_1a_k}$에서

$a_k-a_1=(k-1)d=15d$

$\therefore k=16$

51. **정답 ④**

[해설] m행은 첫째항이 $a_{m1}=2^{m-1}$이고, 공차가 2^m인 등차수열이므로 n번째 항은

$a_{mn}=2^{m-1}+(n-1)2^m=2^{m-1}(2n-1)$

$2020=4\times505$이고 $2n-1$은 홀수이므로

$2^{m-1}(2n-1)=2^2\times505$에서

$m-1=2$, $2n-1=505$

$\therefore m=3$, $n=253$

$\therefore m+n=256$

52. **정답 ③**

[해설]

S_n, S_{2n}, S_{4n}이 이 순서로 등차수열을 이루므로

$2S_{2n}=S_n+S_{4n}$

$$2\cdot\frac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}+\frac{a(r^{4n}-1)}{r-1}$$

$$2\cdot\frac{a(r^n-1)(r^n+1)}{r-1}$$

$$=\frac{a(r^n-1)}{r-1}+\frac{a(r^n-1)(r^n+1)(r^{2n}+1)}{r-1}$$

$2(r^n+1)=1+(r^n+1)(r^{2n}+1)$

$r^{3n}+r^{2n}-r^n=0$, $r^n(r^{2n}+r^n-1)=0$

이때, $r^n>0$이므로 $r^n=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$\therefore \frac{S_{2n}}{s_n}=\frac{\frac{a(r^{2n}-1)}{r-1}}{\frac{a(r^n-1)}{r-1}}=r^n+1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

53. **정답 ②**

[해설] $\log a_1=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$이므로 $a_1=10^{\frac{5}{4}}$

$a_n=a_1\times(\sqrt[4]{10})^{n-1}=10^{\frac{5}{4}}\times10^{\frac{n-1}{4}}=10^{\frac{n+4}{4}}$

$\therefore \log a_n=\dfrac{n}{4}+1$

따라서 음이 아닌 정수k에 대하여

$n=4k$일 때, $f(n)=0$

$n=4k+1$일 때, $f(n)=\dfrac{1}{4}$

$n=4k+2$일 때, $f(n)=\dfrac{2}{4}$

$n=4k+3$일 때, $f(n)=\dfrac{3}{4}$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$

$=25\times\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{4}+0\right)$

$=\dfrac{75}{2}$

54. **정답 24**

[해설]

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_4 & a_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$$에서

$$\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ a_4+a_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

즉, $a_1+a_2=-3$, $a_4+a_5=6$이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a(1+r)=-3$, $ar^3(1+r)=6$

$\therefore r^3=-2$

$\therefore a_{10}+a_{11}=ar^9(1+r)=a(1+r)\cdot(r^3)^3$

$=(-3)\cdot(-2)^3=24$

1. 정답 ③	2. 정답 ③	3. 정답 ⑤
3. 정답 ⑤	5. 정답 -45	6. 정답 36
7. 정답 5	8. 정답 345	9. 정답 76
10. 정답 13	11. 정답 ②	12. 정답 ④
13. 정답 ③	14. 정답 ③	15. 정답 ⑤
16. 정답 ②	17. 정답 ①	18. 정답 ②
19. 정답 151	19. 정답 151	21. 정답 ④
22. 정답 ③	23. 정답 ②	24. 정답 68
25. 정답 ②	26. 정답 ⑤	27. 정답 ④
28. 정답 ②	29. 정답 ③	30. 정답 ⑤
31. 정답 350	32. 정답 36	33. 정답 ④
34. 정답 ④	35. 정답 ③	36. 정답 ⑤
37. 정답 ③	38. 정답 ④	39. 정답 837
40. 정답 ⑤	41. 정답 19	42. 정답 ③
43. 정답 ③	44. 정답 ④	45. 정답 ⑤
46. 정답 ⑤	47. 정답 ⑤	48. 정답 ①
49. 정답 ⑤	50. 정답 ②	51. 정답 ③
52. 정답 ②	53. 정답 ④	54. 정답 ⑤
55. 정답 ④	56. 정답 ②	57. 정답 ④
58. 정답 25	59. 정답 ⑤	60. 정답 ①
61. 정답 ②	62. 정답 ③	63. 정답 ③
64. 정답 ⑤	65. 정답 ⑤	66. 정답 32
67. 정답 11	68. 정답 ③	69. 정답 5
70. 정답 21	71. 정답 890	72. 정답 ④
73. 정답 ④	74. 정답 ①	75. 정답 ⑤
76. 정답 ④	77. 정답 ⑤	78. 정답 ①
79. 정답 ⑤	80. 정답 ②	81. 정답 ④
82. 정답 205	83. 정답 ③	84. 정답 ④
84. 정답 ④	86. 정답 298	87. 정답 16
88. 정답 ⑤	89. 정답 ②	90. 정답 ③
91. 정답 ③	92. 정답 ③	93. 정답 ③
94. 정답 ③	95.정답 55	96. 정답 ④
97. 정답 ⑤	98. 정답 21	99. 정답 ④
100. 정답 ③	101. 정답 ③	102. 정답 ③
103. 정답 ⑤	104. 정답 18	105. 정답 ④
106. 정답 ②	107. 정답 54	108. 정답 ②
109. 정답 ①	110. 정답 ④	111. 정답 ②
112. 정답 ①	113. 정답 ②	114. 정답 191
115. 정답 ③	116. 정답 ②	117. 정답 ③
118. 정답 ③	119. 정답 ⑤	120. 정답 ⑤
121. 정답 ⑤	122. 정답 ②	123. 정답 ③
124. 정답 ④	125. 정답 ④	126. 정답 ③
127. 정답 ①	128. 정답 ②	129. 정답 ④
130. 정답 ④	131. 정답 ⑤	131. 정답 ⑤
133. 정답 ③	134. 정답 ③	135. 정답 ③
136. 정답 ②	137. 정답 ⑤	138. 정답 256
139. 정답 32	140. 정답 4	141. 정답 ③
142. 정답 ③	143. 정답 ⑤	144. 정답 ④
145. 정답 ①		

1. 정답 ③

[해설] 주어진 수열은

$1,\ \sqrt{2}-1,\ \sqrt{3}-\sqrt{2},\ \sqrt{4}-\sqrt{3},\ \cdots$

이므로 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$

$S_{100}=\sum_{k=1}^{100}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$

$=(\sqrt{1}-0)+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$

$=10$

2. 정답 ③

[해설]

$\sum_{k=1}^{10}(k+4)(k-2)-\sum_{k=1}^{10}(k-4)(k+2)$

$=\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k-8)-\sum_{k=1}^{10}(k^2-2k-8)$

$=\sum_{k=1}^{10}\{(k^2+2k-8)-(k^2-2k-8)\}$

$=\sum_{k=1}^{10}4k$

$=4\times\frac{10\times11}{2}=220$

3. 정답 ⑤

$\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}=a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-a_1$

$\sum_{k=2}^{n}a_{k-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=\sum_{k=1}^{n}a_k-a_n$

$\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}-\sum_{k=2}^{n}a_{k-1}=(\sum_{k=1}^{n}a_k-a_1)-(\sum_{k=1}^{n}a_k-a_n)$

$=a_n-a_1=10$

한편, $a_1=2$이므로 $a_n=12$

4. 정답 ①

[해설] $\sum_{k=1}^{14}[\log_2\{\log_{k+1}(k+2)\}]$

$=\log_2(\log_2 3)+\log_2(\log_3 4)+\cdots+\log_2(\log_{15}16)$

$=\log_2\left(\frac{\log 3}{\log 2}\cdot\frac{\log 4}{\log 3}\cdot\cdots\cdot\frac{\log 16}{\log 15}\right)$

$=\log_2(\log_2 2^4)=\log_2 4=2$

5. 정답 −45

[해설]

$\sum_{n=1}^{15}(2a_n-3b_n+5)=\sum_{n=1}^{15}2a_n-\sum_{n=1}^{15}3b_n+\sum_{n=1}^{15}5$

$=2\sum_{n=1}^{15}a_n-3\sum_{n=1}^{15}b_n+\sum_{n=1}^{15}5$

$=2\times45-3\times70+15\times5$

$=-45$

6. 정답 36

[해설]

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k+3)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k+3\times10$

$=2\times8-10+30$

$=36$

7. 정답 5

[해설]

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^3-\sum_{k=1}^{10}(a_k-2)^2=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k+2)^3-(a_k-2)^3\}$

$=320-100=220$

$\sum_{k=1}^{10}(12a_k^2+16)=220$

$12\sum_{k=1}^{10}a_k^2+160=220$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}a_k^2=5$

8. 정답 345

[해설]

$\sum_{k=1}^{10}(k+2)(k-2)=\sum_{k=1}^{10}(k^2-4)$

$=\frac{10\times11\times21}{6}-4\times10$

$=345$

9. 정답 76

[해설] 이 수열의 일반항을 구하면 $a_k=\frac{1+2+3+\cdots+k}{k}$이고 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+2+\cdots+k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2}$

$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k+n\right)=\frac{1}{4}n(n+3)$

$\therefore\ S_{16}=76$

10. 정답 13

[해설]

$a_n=d(n-1)$

$a_{n+1}b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ 에서

$nd\cdot b_n=\sum_{k=1}^{n}(k-1)d$

$nd \cdot b_n = \frac{dn(n+1)}{2} - dn$

$nd \cdot b_n = \frac{dn(n-1)}{2}$

$\therefore b_n = \frac{n-1}{2}$

$\therefore b_{27} = 13$

11. 정답 ②

[해설]

$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$

$= \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

$\therefore \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$= \sum_{k=1}^{99}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$= (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$

$= \sqrt{100}-1$

$= 9$

12. 정답 ④

[해설]

$\log_{(n+1)}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2) = 2$에서

$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 = (n+1)^2$

$a_n^2 = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \ (n \geq 2)$

$a_n > 0$이므로 $a_n = \sqrt{2n+1}$ ……㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_1 = \sqrt{3}$ 이므로

$a_1 = 2,\ a_n = \sqrt{2n+1} \quad (n \geq 2)$

$\therefore \sum_{k=1}^{11} \frac{1}{a_k+a_{k+1}} = \frac{1}{2+\sqrt{5}} + \sum_{k=2}^{11} \frac{1}{a_k+a_{k+1}}$

$= (-2+\sqrt{5}) + \sum_{k=2}^{11} \frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k+3}}$

$= (-2+\sqrt{5}) - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{11}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k+3})$

$= (-2+\sqrt{5}) - \frac{1}{2}\{(\sqrt{5}-\sqrt{7})+(\sqrt{7}-\sqrt{9})$

$+\cdots+(\sqrt{23}-\sqrt{25})\}$

$= (-2+\sqrt{5}) - \frac{1}{2}(\sqrt{5}-5) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

13. 정답 ③

[해설]

$\sum_{k=2}^{15} \frac{\log_2(k+1)-\log_2 k}{\log_2 k \log_2(k+1)}$

$= \sum_{k=2}^{15}(\frac{1}{\log_2 k} - \frac{1}{\log_2(k+1)})$

$= (\frac{1}{\log_2 2} - \frac{1}{\log_2 3}) + (\frac{1}{\log_2 3} - \frac{1}{\log_2 4}) + \cdots + (\frac{1}{\log_2 15} - \frac{1}{\log_2 16})$

$= \frac{1}{\log_2 2} - \frac{1}{\log_2 16}$

$= 1 - \frac{1}{4}$

$= \frac{3}{4}$

14. 정답 ③

[해설] $h(n) = (f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(2n+1)$

$= 2n(2n+2) = 4n(n+1)$

$\therefore \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{h(n)} = \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{4n(n+1)}$

$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)\right\}$

$= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{21}\right) = \frac{5}{21}$

15. 정답 ⑤

[해설]

$a_n = 3+(n-1)2 = 2n+1$,

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이므로

$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{1^2+2^2} + \frac{a_3}{1^2+2^2+3^2} + \cdots + \frac{a_{20}}{1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2}$

$= \sum_{k=1}^{20} \frac{6(2k+1)}{k(k+1)(2k+1)}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k(k+1)}$

$= 6\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$

$= 6(1-\frac{1}{21})$

$= \frac{40}{7}$

16. 정답 ② 부분수의 합 - 계산능력

[해설] (주어진 식)$= \sum_{n=1}^{10} \frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n \cdot \beta_n} = \sum_{n=1}^{10} \frac{-2}{-(2n-1)(2n+1)}$

$= 2\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

$= 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$

17. 정답 ①

[해설]

$a_{n+1} = (f \circ f \circ f)(a_n) = f(f(f(a_n))) = f(f(2a_n+1))$

$= f(4a_n+3) = 8a_n+7$

$a_{n+1}=8a_n+7$을 변형하면

$$a_{n+1}+1=8(a_n+1)$$

수열 $\{a_n+1\}$이 공비가 8인 등비수열이므로

$$a_n+1=(a_1+1)\cdot 8^{n-1}$$
$$=2\cdot 8^{n-1}=2^{3n-2}$$

$\therefore a_n=2^{3n-2}-1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{13}\frac{1}{\log_2(a_k+1)\log_2(a_{k+1}+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{13}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{13}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{37}-\frac{1}{40}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{40}\right)=\frac{13}{40}$$

18. 정답 ②

[해설] 원의 중심 $(4,\ 0)$에서 직선 $ax-y=0$에 이르는 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|4a|}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{2}{n}$에서 $4n^2a^2=a^2+1$

$$\therefore\ a^2=\{f(n)\}^2=\frac{1}{4n^2-1}$$
$$=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}\{f(n)\}^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{21}$$

19. 정답 151

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1\ \ (n\ge 2)$

$a_1=S_1=1$이므로 $a_n=2n-1\ \ (n\ge 1)$

$$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{101}\right)=\frac{50}{101}$$

따라서 $m=101,\ n=50$이므로

$$m+n=151$$

20. 정답 ④

[해설] $n\ge 2$일 때

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=(n^2+n)-\{(n-1)^2+(n-1)\}=2n$$

$n=1$일 때

$a_1=1+1=2$

$\therefore\ a_n=2n\ (n\ge 1)$

$\therefore\ a_{2n}=4n$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{2n}a_{2k}=\sum_{k=1}^{2n}4k=4\times\frac{2n(2n+1)}{2}$$
$$=4n(2n+1)$$

21. 정답 ④

[해설]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=2n^2$에서 $S_n=2n^2$이므로

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=2n^2-2(n-1)^2$$
$$=4n-2\,(n\ge 2)\qquad\cdots\cdots ㉠$$

$a_1=S_1=2$이므로 ㉠은 $n=1$일 때도 성립한다.

$\therefore a_n=4n-2\,(n\ge 1)$

이때, $a_{2n}=8n-2$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_{2k}=\sum_{k=1}^{10}(8k-2)$$
$$=8\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-20$$
$$=420$$

22. 정답 ③

[해설]

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\log_3\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}=\log_3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\log_3\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$\therefore S_n=\log_3\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)+\log_3\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)+\cdots+\log_3\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=\log_3\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdots\cdots\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\log_3\frac{n+2}{2(n+1)}$$

$S_n+S_{n+1}<-1$에서

$$\log_3\frac{n+2}{2(n+1)}+\log_3\frac{n+3}{2(n+2)}<-1$$
$$\log_3\frac{n+3}{4(n+1)}<\log_3\frac{1}{3}$$
$$\frac{n+3}{4(n+1)}<\frac{1}{3},\ 3n+9<4n+4\quad\therefore n>5$$

따라서 자연수 n의 최솟값은 6이다.

23. 정답 ②

[해설]

$a_{n+1}-a_n=2n$ 에서 수열 $\{a_n\}$의 계차수열의 일반항이 $2n$이므로

$$a_{10}=a_1+\sum_{k=1}^{9}2k=a_1+90=94$$

$\therefore\ a_1=4$

[다른 풀이]

$a_{n+1}-a_n=2n$ 에서

$a_2-a_1=2\cdot1$

$a_3-a_2=2\cdot2$

$a_4-a_3=2\cdot3$

$\vdots$

$a_{10}-a_9=2\cdot9$이므로 9개의 식을 모두 더하면

$a_{10}-a_1=2(1+2+3+\cdots+9)=2\times45=90$

$a_{10}=94$이므로 $a_1=4$

24.정답 68

x원씩 20일간 저금한 액수 $a=20x$

1원, 2원, 4원, 7원, 11원, $\cdots$씩 20일간 저금한 액수

$b=1+2+4+7+11+\cdots+($제 20항$)$

수열 1, 2, 4, 7, 11, $\cdots$을 $\{a_n\}$이라 하고 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면 $b_n=n$

$$\therefore a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$$

$$b=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}(k^2-k+2)=1350$$

$a>b$이므로 $20x>1350$, $x>67.5$

x는 자연수이므로 x의 최솟값은 68이다.

25. 정답 ②

[해설] 각 다각형의 꼭짓점에 쓰여진 최대의 수를 나타내는 수열을 a_n이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 3, 5, 8, 12, 17, $\cdots$이므로 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 2, 3, 4, 5, $\cdots$이다.

$a_{n+1}-a_n=n+1$이므로

$$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=\frac{n^2+n+4}{2}$$

정20각형은 18번째 다각형이므로 $a_{18}=173$

26. 정답 ⑤

[해설]

주어진 그림에서

$a_1=1,\ a_2=5,\ a_3=12,\ a_4=22,\ \cdots$이므로

$\{a_n\}$: 1, 5, 12, 22, $\cdots$

$\{b_n\}$: 4 7 10 $\cdots$

$\therefore\ b_n=3n+1$

$$\therefore\ a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k+1)$$

$$=1+3\times\frac{n(n-1)}{2}+n-1$$

$$=\frac{3n^2-n}{2}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}\frac{3k^2-k}{2}$$

$$=\frac{3}{2}\times\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-\frac{1}{2}\times\frac{10\cdot11}{2}$$

$$=\frac{1155}{2}-\frac{55}{2}$$

$$=550$$

27. 정답 ④

[해설]

원점에서부터 x축의 양의 방향에 놓인 점 $P_1,\ P_2,\ P_{11},\ P_{28},\ \cdots$에 대하여 수열 $\{a_n\}$을

$\{a_n\}$: 1, 2, 11, 28, $\cdots$이라 하자.

수열 $\{a_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$은

$\{b_n\}$: 1, 9, 17, $\cdots$이므로

$b_n=8n-7$

$$\therefore\ a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(8k-7)$$

$$=1+8\cdot\frac{n(n-1)}{2}-7(n-1)$$

$$=4n^2-11n+8$$

$a_{20}=4\cdot20^2-11\cdot20+8=1388$이므로 점 P_{1388}의 좌표는 (19, 0)이다.

따라서 점 P_{1400}의 좌표는 (19, 12)이므로

$a=19,\ b=12$

$\therefore a+b=31$

28. 정답 ②

[해설]

$a_{(9,\ 1)}+a_{(9,\ 2)}+a_{(10,\ 1)}+a_{(10,\ 2)}+a_{(10,\ 3)}=a_{(10,\ 2)}+a_{(11,\ 3)}$

각 행의 두 번째 수들로 이루어진 수열을 $\{a_{(n,\ 2)}\}$라 하면

$\{a_{(n,\ 2)}\}$: 1, 2, 3, 4, $\cdots$이므로 $a_{(10,\ 2)}=10$

각 행의 세 번째 수들로 이루어진 수열을 $\{a_{(n,\ 3)}\}$이라 하고, 수열 $\{a_{(n,\ 3)}\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{a_{(n,\ 3)}\}$: 1, 3, 6, 10, 15, $\cdots$

$\{b_n\}$: 2 3 4 5 $\cdots$

$$\therefore\ a_{(n,\ 3)}=a_{(1,\ 3)}+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$$

$$=1+\frac{n(n-1)}{2}+n-1=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore\ a_{(11,\ 3)}=\frac{11\times12}{2}=66$$

$\therefore\ a_{(10,\ 2)}+a_{(11,\ 3)}=10+66=76$

29. 정답 ③

[해설]
주어진 그림에서

$a_2 = a_1 + 4$

$a_3 = a_2 + 5$

$a_4 = a_3 + 6$

$\cdots$

$a_{n+1} = a_n + (n+3)$이므로

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+3) = 4 + \frac{(n-1)n}{2} + 3(n-1) = \frac{n^2+5n+2}{2}$

ㄱ. $a_7 = \frac{49+35+2}{2} = 43$

ㄴ. $a_{n+1} = 4 + \sum_{k=1}^{n}(k+3)$(거짓)

ㄷ. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+5k+2}{2}$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 2n\right\}$

$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 15n(n+1) + 12n}{12}$

$= \frac{n(2n^2+18n+28)}{12} = \frac{n(n+2)(n+7)}{6}$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

30. 정답 ⑤

[해설]
각 정사각형의 왼쪽 위의 수들로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$, 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{a_n\}$: 2, 3, 5, 9, 17, $\cdots$

$\{b_n\}$: 1, 2, 4, 8, $\cdots$

$b_n = 2^{n-1}$이므로

$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2 + \frac{2^{n-1}-1}{2-1} = 2^{n-1}+1$

여덟 번째 정사각형의 대각선의 어두운 부분에 있는 수들의 합은 첫째항이 $2^7+1 = 129$이고 공차가 $7\times9 = 63$, 항수가 8개인 등차수열의 합이므로

$a_8 = \frac{8\{2\times129 + (8-1)\times63\}}{2} = 2796$

31. 정답 350

[해설]

$\{a_n\}$: 2, 4, 8, 14, 22, $\cdots$

$\{b_n\}$: 2, 4, 6, 8, $\cdots$

$\therefore\ b_n = 2n$

$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k$

$= 2 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - n + 2$

$\therefore\ S_{10} = \sum_{k=1}^{10}(k^2 - k + 2)$

$= \frac{10\times11\times21}{6} - \frac{10\times11}{2} + 2\times10$

$= 350$

32. 정답 36

[해설] 수열의 각 항을 차례로 구해보면

1, 2, 3, $\frac{9}{2}$, 6, 8, 10, $\cdots$

여기서 a_{2n-1} $(n = 1, 2, 3, \cdots)$을 구해보면

1, 3, 6, 10, $\cdots$ ← a_{2n-1}

2 3 4 ← b_n

$a_{2n-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ $(n \geq 2)$

$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore\ a_{15} = a_{2\cdot8-1} = \frac{8\cdot9}{2} = 36$

33. 정답 ④

[해설]
(1), $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right)$, $\cdots$과 같이 제 n군에 속한 항들의 분모가 n이 되도록 군으로 나누면 $\frac{7}{12}$은 제 12군의 7번째 항에서 처음으로 나타난다.
한편, 제 n군의 항의 수는 n개이므로
$(1+2+3+\cdots+11)+7 = 73$
즉, $\frac{7}{12}$은 제 73항에서 처음으로 나타난다.

34. 정답 ④

[해설]
주어진 수열을 다음과 같이 8개씩 묶으면
(4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5), (6, 5, 4, 3, 4, 5, 6, 7),
(8, 7, 6, 5, 6, 7, 8, 9), $\cdots$이고 각 군의 마지막 수를 나열하면 다음과 같다.
5, 7, 9, 11, 13, $\cdots$
이 수열을 $\{b_m\}$이라 하면
$b_m = 2m+3$
$2m+3 = 31$에서 $m = 14$이므로
31이 처음으로 나타나는 항은 14군의 마지막항이다.
따라서 구하는 n의 최솟값은
$14\times8 = 112$

35. 정답 ③

[해설] 다음과 같이 군으로 묶어 보자.
$\left(\frac{1}{1}\right)$, $\left(\frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{7}{7}, \frac{6}{7}, \cdots\right)$
제n군의 분모는 $2n-1$이므로
$2n-1 = 27$에서 $n = 14$
$\frac{10}{27}$은 분모가 27이므로 제14군에서 처음으로 나타난다.
제14군의 분자는 첫째항이 27이고 공차가 -1인 등차수열이므로

$27+(m-1)\cdot(-1)=10$에서 $m=18$

따라서 $\frac{10}{27}$은 제14군의 18번째 항이다.

제n군의 항의 개수는 $2n-1$이므로 $\frac{10}{27}$은

$\sum_{k=1}^{13}(2k-1)+18=169+18=187$

에서 제187항이다.

36. 정답 ⑤

[해설]

제 k단을 쌓는 데 필요한 구슬의 개수는

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

따라서 제 1단부터 제 20단까지 쌓는 데 필요한 구슬의 개수는

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}\frac{k(k+1)}{2}&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}(k^2+k)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{20\cdot21\cdot41}{6}+\frac{20\cdot21}{2}\right)\\&=1540\end{aligned}$$

37. 정답 ③

[해설]

수열 $\{a_n\}$을 $(1, 2, 3, 4)$, $(11, 12, \cdots, 43, 44)$, $(111, 112, \cdots, 444)$, $(1111, 1112, \cdots, 4444)$, $\cdots$과 같이 괄호로 묶고, n자리 수롤 이루어진 수열을 제n군이라 하면 제n군의 항의 개수는 4^n이다.

a_{400}이 제n군에 속한다고 하면

$$4+4^2+4^3+\cdots+4^{n-1}<400$$

이어야 하므로 $n=5$이고,

$$400-(4+4^2+4^3+4^4)=60$$

이므로 a_{400}은 제5군의 제60항이다.

$11\times\times\times$의 개수는 $4^3=64$이므로 제5군의 제60항은 $11\times\times\times$의 끝에서부터 5번째에 있는 수 11434이다.

$\therefore\ a_{400}=11434$

38. 정답 ④

[해설]

주어진 수열을 순서쌍의 두 수의 곱이 같은 것끼리 군으로 묶으면

$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right), \left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right), \mid \left(\frac{1}{4}, \frac{4}{4}\right), \left(\frac{2}{4}, \frac{2}{4}\right), \left(\frac{4}{4}, \frac{1}{4}\right), \mid$

$\left(\frac{1}{8}, \frac{8}{8}\right), \left(\frac{2}{8}, \frac{4}{8}\right), \left(\frac{4}{8}, \frac{2}{8}\right), \left(\frac{8}{8}, \frac{1}{8}\right), \mid \left(\frac{1}{16}, \frac{16}{16}\right), \cdots$

즉, 제 n군의 곱이 $\frac{1}{2^n}$이다.

제 n군의 순서쌍의 개수는 $n+1$개이므로 제 1군부터 제 n군까지의 순서쌍의 개수는

$2+3+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$

$n=18$일 때, $\frac{19\cdot20}{2}-1=190-1=189$이므로

제 200항은 제 19군의 11번째 순서쌍이다.

즉, $\left(\frac{2^{10}}{2^{19}}, \frac{2^9}{2^{19}}\right)$

$\therefore a=\frac{2^{10}}{2^{19}},\ b=\frac{2^9}{2^{19}}$

$\therefore \frac{a}{b}=2$

39. 정답 837

[해설]

제 n행의 수의 개수는 n개이므로 제 1행부터 제 n행까지의 수의 개수는 $\frac{n(n+1)}{2}$(개)이고, 이때 제 n행의 수는 $2n+1$이다.

따라서 제 1행부터 제 11행까지의 수는 66개이고, 12행까지의 수는 78이므로

$k=70, 71, \cdots 78$일 때, $a_k=25$

$k=79, 80, \cdots 91$일 때, $a_k=27$

$k=92, 93, \cdots 100$일 때, $a_k=29$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=70}^{100}a_k&=25\times9+27\times13+29\times9\\&=225+351+261=837\end{aligned}$$

40. 정답 ⑤

[해설]

제 1열의 수 $16, 32, 48, \cdots$은 $16n\,(n=1, 2, 3, \cdots)$의 수이고

제 5열의 수 $8, 24, 40, \cdots$은 $16n-8\,(n=1, 2, 3, \cdots)$의 수이다.

$2008=8\times251$이므로 제 251행의 수이고,

$2008=16\times126-8$이므로 제5열의 수이다.

$\therefore\ a+b=251+5=256$

41. 정답 19

[해설] 대각선의 수로 이루어진 수열 $1, 3, 7, 13, 21, \cdots$을 $\{a_n\}$이라 하고 그 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면 $b_n=2n$

$\therefore\ a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2k=n^2-n+1$

제14행 제14열의 수는 $a_{14}=14^2-14+1=183$이므로

제14행의 가장 왼쪽의 수는 $183-13=170$

제14열의 가장 위쪽의 수는 $183+13=196$

제15열의 수를 가장 위에서부터 차례로 나열하면

$197, 198, 199, 200, \cdots$

따라서 200은 제4행 제15열의 수이다.

$\therefore\ m=4,\ n=15 \qquad \therefore\ m+n=19$

[다른 풀이]

제n행 제n열의 수를 a_n이라 하면 $a_n=n^{2-n}+1$

제15행 제15열의 수는 $a_{15}=211$

a_{15}를 기준으로 위쪽으로 갈수록 1만큼 작아진다.

따라서 200은 제4행 제15열의 수이다.

42. 정답 ③

[해설] $B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$이고 이를 거듭제곱하면

$B^n = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$이다.

따라서 $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 10 - \frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}} = 9 + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 9 + \frac{1}{2^{10}}$$

[참고] $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1+2+2^2+\cdots+2^n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$

43. 정답 ③

[해설]

$a_n + a_{n+1} = 6n + 3$에서

$n=1$일 때, $a_1 + a_2 = 6\cdot 1 + 3$

$n=3$일 때, $a_3 + a_4 = 6\cdot 3 + 3$

$n=5$일 때, $a_5 + a_6 = 6\cdot 5 + 3$

⋮

$n=19$일 때, $a_{19} + a_{20} = 6\cdot 19 + 3$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{20} a_k &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{19} + a_{20}) \\ &= (6\cdot 1 + 3) + (6\cdot 3 + 3) + \cdots + (6\cdot 19 + 3) \\ &= 6(1+3+5+\cdots+19) + 3\times 10 \\ &= 6\times\frac{10(1+19)}{2} + 30 \\ &= 630 \end{aligned}$$

44. 정답 ④

[해설]

$f(1) = f(f(4)) = f(2) = f(f(5)) = f(3) = f(f(6)) = f(4) = 2$

에서 $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 2$이고

$k \geq 5$일 때, $f(k) = k - 2$

$$\therefore \sum_{k=1}^{12} f(k) = 2\times 4(3+4+\cdots+10)$$

$$= 8 + \frac{8\times(3+10)}{2} = 60$$

45. 정답 ⑤

[해설]

$\sum_{k=1}^{10}(k+1) = (1+2+3+\cdots+10) + 1\cdot 10$

$\sum_{k=2}^{10}(k+2) = (2+3+\cdots+10) + 2\cdot 9$

$\sum_{k=3}^{10}(k+3) = (3+\cdots+10) + 3\cdot 8$

⋮ ⋮

$\sum_{k=9}^{10}(k+9) = (9+10) + 9\cdot 2$

$\sum_{k=10}^{10}(k+10) = 10 + 10\cdot 1$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(k+1) + \sum_{k=2}^{10}(k+2) + \sum_{k=3}^{10}(k+3) + \cdots + \sum_{k=9}^{10}(k+9) + \sum_{k=10}^{10}(k+10)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k(11-k) = \sum_{k=1}^{10} 11k$$

$$= 11\times\frac{10\times 11}{2} = 605$$

46. 정답 ⑤

[해설] $\frac{n(n+1)}{2} = 1+2+3+\cdots+n$이고

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$를 3으로 나눈 나머지는 $1,\ 2,\ 0$이 반복되므로 $1+2+3+\cdots+n$을 3으로 나눈 나머지 a_n은 나머지를 계속 더하여 3으로 나누면 $1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \cdots$과 같이 $1,\ 0,\ 0$이 계속 반복된다.

$2010 = 3\times 670$이므로

$$\sum_{n=1}^{2010} a_n = 670\cdot(a_1 + a_2 + a_3) = 670$$

47. 정답 ⑤

[해설]

$n \leq 10$일 때,

$a_1 = 1$

$a_2 = 2$

$a_3 = 1 + 3 = 4$

$a_4 = 2 + 4 = 6$

$a_5 = 1 + 3 + 5 = 9$

$a_6 = 2 + 4 + 6 = 12$

$a_7 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$

$a_8 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$

$a_9 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

$a_{10} = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$

$n > 10$일 때

$a_{11} = a_{13} = \cdots = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

$a_{12} = a_{14} = \cdots = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$

$$\therefore \sum_{n=1}^{14} a_n = 235$$

48. 정답 ①

[해설]

100까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 수를 택하여 만든 1보다 작은 분수들의 합은

$$\frac{1}{2} + \frac{1+2}{3} + \frac{1+2+3}{4} + \cdots + \frac{1+2+3+\cdots+99}{100}$$

$$= \sum_{k=2}^{100}\frac{\frac{(k-1)k}{2}}{k} = \sum_{k=2}^{100}\frac{k-1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{99} k$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{99\times 100}{2} = 2475$$

49. 정답 ⑤

[해설]

12와 서로소인 자연수는 1, 2, 3, ⋯에서 2의 배수, 3의 배수를 지우고 남은 수이다.

100이하의 수 중 2의 배수인 것은 50개, 3의 배수인 것은 33개, 6의 배수인 것은 16개다.

100이하의 수 중 2의 배수 또는 3의 배수인 수의 개수는

$$50+33-16=67$$

그러므로 지우고 남은 100이하인 수의 개수는

$$100-67=33$$

따라서 처음으로 100보다 큰 수가 나오는 것은 34번째항이다.

50. 정답 ②

[해설]

$n=1,\ 2,\ 3,\cdots$일 때, 2^n의 일의 자리 수를 차례로 나열하면

$$2,\ 4,\ 8,\ 6,\ 2,\ 4,\ 8,\ 6,\ \cdots$$

3^n의 일의 자리 수를 차례로 나열하면

$$3,\ 9,\ 7,\ 1,\ 3,\ 9,\ 7,\ 1,\ \cdots$$

즉, 2^n+3^n의 일의 자리 수를 차례로 나열하면

$$0,\ 3,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0,\ 2,\ \cdots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 2, 6, 10, ⋯이므로

$$\sum_{n=1}^{10} a_n=\frac{10\{2\cdot 2+(10-1)\cdot 4\}}{2}=200$$

51. 정답 ③

[해설]

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 나열해 보면 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	⋯
a_n	1	1	1	−1	−1	1	1	1	1	−1	−1	1	1	1	1	−1	⋯

ㄱ. $100=6\times 16+4$이므로 $a_{100}=a_4=-1$ (참)

ㄴ. (반례) $a_3\times a_6=1\times 1=1$ (거짓)

ㄷ. $a_n=a_{n+6}$이므로

$$\sum_{k=1}^{100} a_k=16(a_1+a_2+\cdots+a_6)+a_1+a_2+a_3+a_4$$
$$=16(1+1+1+(-1)+(-1)+1)+1+1+1+(-1)$$
$$=34\ (\text{참})$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

52. 정답 ②

[해설]

수열 $\{a_n\}$의 홀수 번째 항으로 이루어진 수열

27, 2727, 272727, ⋯

의 일반항 a_{2k-1}은

$$a_{2k-1}=27(1+10^2+10^4+\cdots+10^{2(k-1)})$$
$$=27\cdot\frac{10^{2k}-1}{10^2-1}$$
$$=\boxed{\frac{3}{11}(10^{2k}-1)}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

수열 $\{a_n\}$의 짝수 번째 항으로 이루어진 수열

272, 27272, 2727272, ⋯의 일반항 a_{2k}은

$$a_{2k}=\boxed{10a_{2k-1}+2}$$
$$=\frac{30}{11}(10^{2k}-1)+2\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

$$\therefore\ S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{33}{11}(10^{2k}-1)+2\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(3\cdot 10^{2k}-1)$$
$$=3\cdot\frac{10^2(10^{2n}-1)}{10^2-1}-n$$
$$=\boxed{\frac{100}{33}(10^{2n}-1)-n}$$

53. 정답 ④

[해설]

ㄱ. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$b_n=\frac{\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}}{n}=a+\frac{d}{2}(n-1)\text{이므로}$$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 a, 공차가 $\frac{d}{2}$인 등차수열이다.

ㄴ. 등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b, 공차를 t라 하면

$b_n=b+(n-1)t$

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=nb_n$ ⋯⋯㉠

$n=1$일 때, $a_1=b_1$ ⋯⋯㉡

$n\geq 2$일 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=(n-1)b_{n-1}$ ⋯⋯㉢

㉠-㉢을 하면

$a_n=n(b_n-b_{n-1})+b_{n-1}=nt+b+(n-2)t$

$=b+2(n-1)t\,(n\geq 2)$ ⋯⋯㉣

㉡, ㉣에서

$a_n=b+(n-1)2t\,(n\geq 1)$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 b이고, 공차가 $2t$인 등차수열이다.(참)

ㄷ. 등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b, 공차를 t라 하면

$b_n=b+(n-1)t$

$b_{2k-1}=b+2(k-1)t,\ b_{2k}=b+(2k-1)t$

$$\sum_{k=1}^{10} b_{2k-1}=\sum_{k=1}^{10}\{b+2(k-1)t\}=10b+2\cdot\frac{9\cdot 10}{2}t=20$$

$\therefore b+9t=2$ ⋯⋯㉠

$$\sum_{k=1}^{10} b_{2k}=\sum_{k=1}^{10}\{b+(2k-1)t\}=10b+\left(2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-10\right)t$$
$$=10b+100t=10$$

$\therefore b+10t=1$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$b=11,\ t=-1$

따라서 ㄴ에서

$a_n=11-2(n-1)=13-2n\,(n\geq 1)$

$\therefore a_{10}=-7$(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

54. 정답 ⑤

[해설]

$S=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{99}$라고 하면

$S-a_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 99)$가 어떤 수의 2배이므로 $S-a_k$는 짝수이

다.

ㄱ. $a_1=1$(홀수)이므로 $S-1=$(짝수)에서 S는 홀수이다.

ㄴ. a_k를 짝수라고 하면 $S-a_k=$(홀수)-(짝수)=(홀수)가 되어

$S-a_k$는 짝수가 아니다.

따라서 이 수열의 모든 항은 홀수이고 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{99}$는 홀수를 50개 더한 값으로 짝수이다.

ㄷ. $a_2+a_4+\cdots+a_{98}$

$=S-(a_1+a_3+\cdots+a_{99})$

=(홀수)-(짝수)=(홀수)

따라서 홀수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

55. 정답 ④

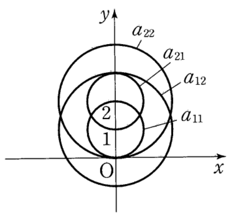
[해설]

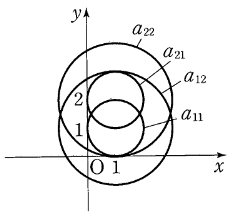
중심이 $(n,\ j)$이고 반지름의 길이가 j인 원의 방정식은

$(x-n)^2+(y-i)^2=j^2$

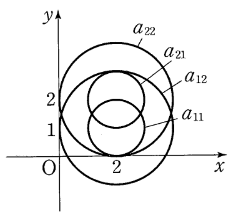
$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots$을 추론하면 다음과 같다.

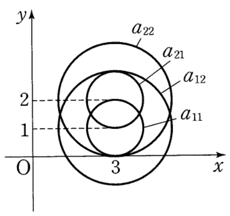
$A_0=\begin{pmatrix}2&4\\2&2\end{pmatrix}$ $A_1=\begin{pmatrix}2&4\\1&3\end{pmatrix}$





$A_2=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}$ $A_3=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$





$n\geq 4$이면 $A_n=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$이다.

ㄱ. $A_n=\begin{pmatrix}2&4\\2&2\end{pmatrix}$(참)

ㄴ. (반례) $S(3)=S(4)=4$(거짓)

ㄷ. $\sum_{k=0}^{12}S(k)=S(0)+S(1)+S(2)+S(3)+S(4)+\cdots+S(12)$

$=10+10+6+4+4+\cdots+4$

$=26+4\times10=66$(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

56. 정답 ②

[해설]

ㄱ. $b_n=5,\ a_2=4,\ a_3=3$이면 $b_1=\frac{5}{2},\ b_2=3,\ b_3=3$이다. (거짓)

ㄴ. $b_n=n$이면 $\sum_{i=1}^{n}a_i=n^2+n$, 즉 $S_n=n^2+n$이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+n)-\{(n-1)^2+(n-1)\}$

$=2n\ (n\geq 2)$

$a_1=S_1=2$

$\therefore a_n=2n$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2k(2k+2)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{22}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{22}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{22}=\frac{5}{22}$ (참)

ㄷ. $b_n=n-1$이면 $\sum_{i=1}^{n}a_i=n^2-1$, 즉 $S_n=n^2-1$이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-1-\{(n-1)^2-1\}=2n-1\ (n\geq 2)$

$a_1=S_1=0$

$\therefore a_n=\begin{cases}2n-1 & (n\geq 2)\\ 0 & (n=1)\end{cases}$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제2항부터 등차수열이다. (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

57. 정답 ④

[해설]

ㄱ. $S_n=n^2$이면

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1\ \ (n\geq 2)$ ……㉠

$a_1=S_1=1$

이때, ㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_1=1$이므로

$a_n=2n-1$ (참)

ㄴ. (반례) $\begin{cases}a_{2n}=16n\\ a_{2n-1}=16n-16\end{cases}$이라 하면

$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{n}(32k-16)$

$=32\cdot\frac{n(n+1)}{2}-16n=16n^2$

이지만 $a_n\neq 8n-4$이다. (거짓)

ㄷ. $S_n=3^n-1$이면

$a_n=S_n-S_{n-1}=3^n-1-(3^{n-1}-1)=2\cdot3^{n-1}(n\geq 2)$

……㉠

$a_1=S_1=3-1=2$

이때, ㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_1=2$이므로

$a_n=2\cdot3^{n-1}$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

58. 정답 25

[해설] **여러 가지수열 - 추론능력**

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서

ω는 허근이므로 $x^2+x+1=0$의 근이다.

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$이면 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\omega^3=1$이고

$\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$이면 $\omega^2=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\omega^3=1$이다.

한편, $\omega^{3k+1}=\omega$, $\omega^{3k+2}=\omega^2$, $\omega^{3k}=1$ (k는 자연수)이므로

ω^n의 실수 부분을 a_n이라 하면 수열 $\{a_n\}$은

$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \cdots$

따라서 연속된 세 항의 곱은

$\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 1=\frac{1}{4}$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{100}(a_k a_{k+1} a_{k+2})=100\times\frac{1}{4}=25$

59. 정답 ⑤

[해설] $f(1)=2$, $f(f(1))=f(2)=3$이므로 $f_k(2)=3$

$f(3)$, $f(4)$의 값은 각각 1, 2, 3, 4 중 하나를 선택하면 되므로 조건을 만족하는 함수의 개수는 $n=4\times4=16$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(2)f_k(3)f_k(4)=3(1+2+3+4)(1+2+3+4)=300$

60. 정답 ①

[해설]

$\dfrac{n(n+1)}{2}=1+2+3+4+5+6+\cdots+n$

$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}=-1,-1,1,1,-1,-1,\cdots$

임의의 자연수 k에 대하여

$(-k)+(k+1)+(k+2)-(k+3)=0$

$2010=4\times502+2$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{2010} na_n=-1+(-2+3+4-5)+(-6+7+8-9)+$

$\cdots+(-2006+2007+2008-2009)-2010$

$=-1-2010=-2011$

61. 정답 ②

[해설]

$\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k(a_k-a_{k+1})$

$=(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+3(a_3-a_4)+\cdots+100(a_{100}-a_{101})$

$=a_1+(-a_2+2a_2)+(-2a_3+3a_3)+\cdots$

$+(-99a_{100}+100a_{100})-100a_{101}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100})-100a_{101}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{100} a_k-25=30$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{100} a_k=30+25=55$

62. 정답 ③

[해설]

$m=2k(k=1, 2, 3, \cdots, 10)$일 때, m^2도 짝수이므로

$f(m^2)=m^2=4k^2$

$m=2k-1(k=1, 2, 3, \cdots, 10)$일 때, m^2은 홀수이므로

$f(m^2)=1$

$\therefore \displaystyle\sum_{m=1}^{20} f(m^2)=\sum_{k=1}^{10}4k^2+\sum_{k=1}^{10}1$

$=4\times\dfrac{10\times11\times21}{6}+1\times10$

$=1540+10$

1550

63. 정답 ③

[해설]

x가 자연수일 때, $f(x)=3^x-10\left[\dfrac{3^x}{10}\right]$는 3^x의 일의 자리의 수를 나타내는 함수이다.

따라서 $f(2k)$는 $3^{2k}=9^k$의 일의 자리의 수를 나타내는 함수이다.

즉, $f(2k)$는 $k=1, 2, 3, \cdots$에 따라 $9, 1, 9, 1, 9, 1, \cdots$이 계속 반복된다.

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{100} f(2k)$

$=\{f(2)+f(4)\}+\{f(6)+f(8)\}+\cdots+\{f(198)+f(200)\}$

$=10\times50$

$=500$

64. 정답 ⑤

[해설]

(ⅰ) $[\sqrt{n}]=1$, 즉 $n=1, 2, 3$일 때

$[\sqrt{k}]=1$이므로 $1\le\sqrt{k}<2$ $\therefore 1\le k<4$

$\therefore a_1=a_2=a_3=3$

(ⅱ) $[\sqrt{n}]=2$, 즉 $n=4, 5, 6, 7, 8$일 때

$[\sqrt{k}]=2$이므로 $2\le\sqrt{k}<3$ $\therefore 4\le k<9$

$\therefore a_4=a_5=a_6=a_7=a_8=5$

(ⅲ) $[\sqrt{n}]=3$, 즉 $n=9, 10$일 때

$[\sqrt{k}]=3$이므로 $3\le\sqrt{k}<4$

$\therefore 9\le k<16$ $\therefore a_9=a_{10}=7$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_k=3\times3+5\times5+2\times7=48$

65. 정답 ⑤

[해설]

자연수 n의 양의 약수의 개수를 p라 하면 p가 짝수이면 $a_n=\dfrac{p}{2}$, p가 홀수이면 $a_n=\dfrac{p+1}{2}$가 된다.

ㄱ. $72=2^3\times3^2$, $81=3^4$이므로

$a_{72}n+a_{81}=\dfrac{1}{2}(4\times3)+\dfrac{1}{2}(5+1)=9$ (참)

ㄴ. (반례) $12=1\times12=2\times6=3\times4$이므로 $a_{12}=3$

즉, $a_n=3$인 자연수 n의 최솟값은 12이다.(거짓)

ㄷ. m, n이 소수이면

$m=m\times1$, $n=n\times1$, $mn=mn\times1=m\times n$이므로

$a_m=1$, $a_n=1$, $a_{mn}=2$

$\therefore a_m+a_n=a_{mn}$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

***66.* 정답 32**

[해설]

(i) a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{20}중 1인 것의 개수를 m개, -1인 것의 개수는 n개라 하면

$\sum_{k=1}^{20}a_k=4$, $\sum_{k=1}^{20}|a_k|=12$에서

$m-n=4$, $m+n=12$

$\therefore m=8$, $n=4$

따라서 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{40}중 0인 것의 개수는 8개다.

(ii) $\sum_{k=1}^{40}a_k=0$이므로 a_{21}, a_{22}, a_{23}, $\cdots$, a_{40}중 -1인 것은 적어도 4개가 있고, 아머지 16개의 항에서 -1과 1이 항상 쌍으로 있어야 한다.

즉, a_{21}, a_{22}, a_{23}, $\cdots$, a_{40}중 0은 최대 16이고, 최소 0개이다.

(i), (ii)에 의해 a의 최댓값은 $8+16=24$, 최솟값은 $8+0=8$이므로 이들의 합은 $24+8=32$이다.

***67.* 정답 11**

[해설]

n으로 나누었을 때 몫과 나머지가 같아지는 자연수는

$n+1,\ 2n+2,\ 3n+3,\ 4n+4,\ \cdots,\ (n-1)n+(n-1)$

의 $n-1$개다.

$$\therefore\ a_n=\sum_{k=1}^{n-1}(kn+k)$$

$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=(n+1)\cdot\frac{(n-1)n}{2}$$

$a_n>500$ 에서

$\dfrac{(n-1)n(n+1)}{2}>500$

$(n-1)n(n+1)>1000$

$9\cdot10\cdot11=990<1000$

$10\cdot11\cdot12=1320>1000$

이므로 구하는 자연수 n의 최솟값은 11이다.

***68.* 정답 ③**

[해설]

ㄱ. 점 P_{6n-5}, P_{6n} $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$은 x축 위의 점이고

$25=6\times5-5$이므로 점 P_{25}는 x축 위의 점이다. (참)

ㄴ. 점 P_{6n-2} $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 좌표는 $(0,\ 2n)$이고

$52=6\times9-2$이므로 점 P_{52}의 좌표는 $(0,\ 18)$이다. (참)

ㄷ. 점 P_{3n-1} $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 좌표는 $(n,\ n)$이고

$101=3\times34-1$이므로 점 P_{101}의 좌표는 $(34,\ 34)$이다. (거짓)

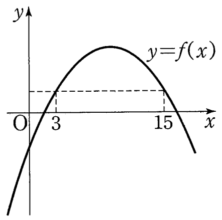
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

***69.* 정답 5**

[해설]

$a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{15}=f(15)-f(m-1)<0$

$\therefore\ f(15)<f(m-1)$



그림에서 $4\leq m-1\leq14$ 즉, $5\leq m<15(\because m<15)$

따라서 m의 최솟값은 5이다.

***70.* 정답 21**

[해설]

$\mathrm{A}_n(x_n,\ 0)$이므로

$\mathrm{P}_n\left(x_n,\ \dfrac{1}{x_n}\right)$, $\mathrm{Q}_n\left(\dfrac{1}{x_n},\ x_n\right)$, $\mathrm{R}_n\left(\dfrac{1}{x_n},\ 0\right)$, $\mathrm{A}_n\left(\dfrac{1}{x_{n+1}}+1,\ 0\right)$이다.

$\therefore\ x_{n+1}=\dfrac{1}{x_n}+1$, $x_1=2$이므로

$x_2=\dfrac{1}{x_1}+1=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$

$x_3=\dfrac{1}{x_2}+1=\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{5}{3}$

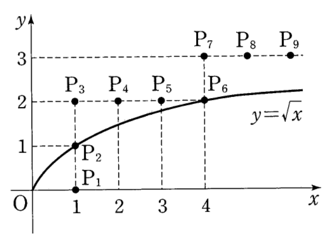
$x_4=\dfrac{1}{x_3}+1=\dfrac{3}{5}+1=\dfrac{8}{5}$

$x_5=\dfrac{1}{x_4}+1=\dfrac{5}{8}+1=\dfrac{13}{8}$

$\therefore\ p+q=8+13=21$

***71.* 정답 890**

[해설]



그림에서 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점을 나열하면

$P_2(1,\ 1)$, $P_6(4,\ 2)$, $P_{12}(9,\ 3)$, $P_{20}(16,\ 4)$, $\cdots$이고

점 P_n의 좌표가 $(k^2,\ k)$이면 $n=k^2+k$이다.

따라서 $9^2+9=90$이므로 $P_{90}(9^2,\ 9)$이고, $10^2+10=110$이므로 $P_{110}(10^2,\ 10)$이다.

따라서 점 P_{100}의 좌표는 $P_{100}(90,\ 10)$이다.

$\therefore a=90,\ b=10$

$\therefore 10a-b=890$

72. 정답 ④

[해설]

(ⅰ) n이 홀수일 때, $\dfrac{n+1}{2}$이 정수이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+2)=\frac{n(n+1)}{2}+2n$

$\therefore f(n)=0$

(ⅱ) n이 짝수일 때, $\dfrac{n}{2}$이 정수이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+2)=\frac{n(n+1)}{2}+2n=n\cdot\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+2n$

$\therefore f(n)=\dfrac{n}{2}$

ㄱ. 3은 홀수이므로 (ⅰ)에서 $f(3)=0$(참)

ㄴ. m이 홀수일 때, $f(m)=0$, m이 짝수일 때, $f(m)=\dfrac{m}{2}$이므로

$f(m)=\dfrac{m}{2}+1$을 만족하는 자연수 m이 존재하지 않는다.(거짓)

ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots$

$\qquad +f(2n-1)+f(2n)$

$=0+1+0+2+0+\cdots+(n-1)+0+n$

$=1+2+3+\cdots+n$

$=\dfrac{n(n+1)}{2}$(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄱ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}(k+2)=3+4+5=12$

12는 3으로 나누어 떨어지므로 $f(3)=0$

73. 정답 ④

[해설]

$f(n)=\dfrac{n+1}{3}-\left[\dfrac{n+1}{3}\right]$에서

(i) $n=3k\,(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때,

$f(3k)=k+\dfrac{1}{3}-\left[k+\dfrac{1}{3}\right]=\dfrac{1}{3}$ $\qquad\therefore\ f(n)=\dfrac{1}{3}$

(ii) $n=3k-1\,(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때,

$f(3k-1)=k-[k]=0$ $\qquad\therefore\ f(n)=0$

(iii) $n=3k-2\,(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때,

$f(3k-2)=k-\dfrac{1}{3}-\left[k-\dfrac{1}{3}\right]=k-\dfrac{1}{3}-(k-1)=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ f(n)=\dfrac{2}{3}$

ㄱ. $f(30)=\dfrac{1}{3}$(참)

ㄴ. (반례) $n_1=1,\ n_2=2$이면 $n_1<n_2$이지만

$f(1)=\dfrac{2}{3},\ f(2)=0$이므로 $f(n_1)>f(n_2)$ (거짓)

ㄷ. $f(3k)+f(3k-1)+f(3k-2)=1$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{k=1}^{100}f(k)=33\times1+\frac{2}{3}=\frac{101}{3}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

74. 정답 ①

[해설]

ㄱ. $a_{10}=10-[\log_2 10]=10-3=7$(참)

$(\because 3=\log_2 2^3<\log_2 10<\log_2 2^4=4)$

ㄴ. (반례) $a_7=7-[\log_2 7]=7-2=5$

$a_8=8-[\log_2 8]=8-3=5$

$\therefore a_7=a_8$(거짓)

ㄷ. $k=1$일 때, $a_1=1$

$2\leqq k\leqq 3$일 때, $a_k=k-1$

$4\leqq k\leqq 7$일 때, $a_k=k-2$

$8\leqq k\leqq 15$일 때, $a_k=k-3$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=1+(1+2)+(2+3+4+5)+(5+6+7)$

$=1+2+5+(1+2+\cdots+7)$

$=8+\dfrac{7(1+7)}{2}=36$(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

75. 정답 ⑤

[해설]

ㄱ. $<n\,,1>\ +\ <n\,,n>\ =\ 2$ 이므로

$<10\,,1>\ +\ <10\,,10>\ =\ 2$ (참)

ㄴ. $<n+1,\,2>\ +\ <n+1\,,n>\ =\ 2n$ 이므로

$<11\,,2>\ +\ <11\,,10>\ =\ 20$ (참)

ㄷ. 제 n행의 수의 합을 S_n 라 하면 $S_{n+1}=2S_n$ 이므로 $S_n=2^{n-1}$

$\therefore\ <12\,,3>\ +\ <12\,,4>\ +\cdots+\ <12\,,10>$

$=2^{11}-2-22=2024$ (참)

76. 정답 ④

[해설]

$n\,!$ 을 소인수분해하면

$n\,!\ =2^p3^q5^r\cdots\ (p,q,r,\cdots$는 음이 아닌 정수)으로 나타낼 수 있다.

$p>r$이고 $2\times5=10$이므로 $a_n=r$임을 알 수 있다.

즉, a_n은 $n\,!$ 을 소인수분해했을 때 포함되어 있는 5의 개수와 같다.

$\therefore r=\left[\dfrac{n}{5}\right]+\left[\dfrac{n}{5^2}\right]+\left[\dfrac{n}{5^3}\right]+\cdots+\left[\dfrac{n}{5^k}\right]$(단, $5^k\leqq n<5^{k+1}$)

ㄱ. $a_5=\left[\dfrac{5}{5}\right]=1,\ a_{25}=\left[\dfrac{25}{5}\right]+\left[\dfrac{25}{5^2}\right]=5+1=6$

$\therefore a_5+a_{25}=7$(참)

ㄴ. (반례) $2\,!\ =2,\ 3\,!\ =3\times2\times1=6$

$a_2=0,\ a_3=0$(거짓)

ㄷ. $n=5^k$(k는 음이 아닌 정수)일 때,

$$a_n = \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{5^k}{5^i}\right] = \sum_{i=1}^{k}[5^{k-i}]$$
$$= 5^{k-1} + 5^{k-2} + 5^{k-3} + \cdots + 5 + 1$$
$$= \frac{5^k - 1}{5-1} = \frac{5^k-1}{4} \text{(참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

77. 정답 ⑤

[해설]

$6^n = 2^n \times 3^n$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{a_k} = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)$$
$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$$
$$= 3\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$$
$$= 3\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{6^{n+1}}\right)$$

78. 정답 ①

[해설]

이차방정식 $\sqrt{2}x^2 - 2(\sqrt{3})^{n-1}x + 1 = 0$의 두 근의 합은

$a_n = \dfrac{2(\sqrt{3})^{n-1}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(\sqrt{3})^{n-1}$이므로

$${a_n}^2 - 1 = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{n}({a_k}^2 - 1) = \sum_{k=1}^{n}(2\cdot 3^{k-1} - 1) = \frac{2(3^n-1)}{3-1} - n$$
$$= 3^n - n - 1$$

79. 정답 ⑤

[해설]

$m+n=14$, $m^2+n^2=106$이므로

$m^2+n^2=(m+n)^2-2mn$에서

$$106 = 14^2 - 2mn$$
$$\therefore mn = 45$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{m}\left\{\sum_{l=1}^{n}(k+l+1)\right\} = \sum_{k=1}^{m}\left\{kn + \frac{n(n+1)}{2} + n\right\}$$
$$= \frac{nm(m+1)}{2} + \frac{mn(n+1)}{2} + mn$$
$$= \frac{mn(m+n+4)}{2}$$
$$= \frac{45\times 18}{2} = 405$$

80. 정답 ②

[해설] $S_n = 2n^2+3n+1$이므로

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= 2n^2+3n+1-\{2(n-1)^2+3(n-1)+1\}$$
$$= 4n+1 \ (n \geq 2)$$
$$a_1 = S_1 = 2+3+1 = 6$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = a_1 + \sum_{k=2}^{10}(8k-3) = 6 + \sum_{k=1}^{10}(8k-3) - 5$$
$$= 1 + 8\cdot\frac{10\cdot 11}{2} - 3\cdot 10$$
$$= 1 + 440 - 30 = 411$$

81. 정답 ④

자연수의 거듭제곱의 합 - 내적문제 해결능력

[해설] m행 n열에 있는 수는 항상 $10(m-1)+n$의 꼴로 나타낼 수 있다. 이 때, 각각의 행 또는 열에 중복되거나 빠지지 않게 각 행마다 하나의 수를 택하면 m과 n은 1, 2, 3, $\cdots$, 10의 값 들을 중복되지 않게 모두 한 번씩 취하게 된다. 따라서 선택된 10개의 수 들의 합은

$$\sum_{m=1}^{10}10(m-1) + \sum_{n=1}^{10}n = \sum_{m=1}^{10}10m + \sum_{n=1}^{10}n - 100$$
$$= 10\times\frac{10\times 11}{2} + \frac{10\times 11}{2} - 100 = 505$$

82. 정답 205

[해설]

점 $P_n(2n,\ 0)$이고 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{n}$이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{P_nQ_n}^2 = \overline{OP_n}^2 - \overline{OQ_n}^2 = (2n)^2 - (\sqrt{n})^2 = 4n^2 - n$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{5}\overline{P_nQ_n}^2 = \sum_{n=1}^{5}(4n^2-n) = 4\cdot\frac{5\cdot 6\cdot 11}{6} - \frac{5\cdot 6}{2}$$
$$= 205$$

83. 정답 ③

등차중항 - 이해능력

[해설] 8개의 수 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_8을 오른쪽 표와 같이 넣고, 등차중항을 이용하여 각각의 수를 구할 수 있다.

a_1	a_2	a_3
a_4	5	a_5
a_6	a_7	a_8

$$\therefore \quad a_1 + a_8 = 10,\ a_2 + a_7 = 10$$
$$a_3 + a_6 = 10,\ a_4 + a_5 = 10$$
$$\therefore \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_8 = 4\times 10 = 40$$

84. 정답 ④

[해설]

$a_{2n+2} - a_{2n+1} = a_{2n+1} - a_{2n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$에서

$a_{2n+1} = \dfrac{a_{2n}+a_{2n+2}}{2}$이므로

a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$a_{2n} = \sqrt{a_{2n-1}\cdot a_{2n+1}}$ $(n=1,2,3,\cdots)$에서

a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

따라서

$a_1=1, a_2=2, a_3=4, a_4=6, a_5=9, a_6=12, a_7=16, \cdots$

이고 n이 홀수이면 $a_n=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$임을 알 수 있다.

따라서 $a_{29}=\left(\frac{29+1}{2}\right)^2=15^2$, $a_{31}=\left(\frac{31+1}{2}\right)^2=16^2$이므로

$$a_{30}=\sqrt{a_{29}\cdot a_{31}}=15\times16$$
$$=240$$

85. 정답 162

[해설] $a_{n+1}{}^2=a_n\cdot a_{n+2}$에서 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$

즉, $\{a_n\}$은 등비수열이다. 이 때, $a_1=2$이고 공비 r는

$r=\frac{a_2}{a_1}=3$이므로

$a_n=2\cdot3^{n-1}$ $\therefore$ $a_5=2\cdot3^4=162$

86. 정답 298

[해설] $3a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}$의 양변을 a_na_{n+1}로 나누면

$$3=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}$$

즉, 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a_1}=1$, 공차가 3인 등차수열이다.

$\therefore$ $\frac{1}{a_n}=1+(n-1)\cdot3=3n-2$

$\therefore$ $\frac{1}{a_{100}}=298$

87. 정답 16

일반항과 합과의 관계 - 이해능력

[해설] $a_1=3$, $a_2=8$, $a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$에서

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공차가 5인 등차수열이다.

$\therefore$ $a_n=3+(n-1)\cdot5=5n-2$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=(4n-1)\cdot2^n+1$이라 하면

$a_5b_5=S_5-S_4$, $a_5=5\cdot5-2=23$

$\therefore$ $23b_5=(19\times2^5+1)-(15\times2^4+1)=(38-15)\times2^4=23\cdot16$

$\therefore$ $b_5=16$

88. 정답 ⑤

[해설] $a_{10}=a_1+\sum_{k=1}^{9}2k=2+\frac{9\times10}{2}=92$

89. 정답 ②

[해설] $2a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$에서

$a_{n+1}-a_{n+1}=-\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

$b_n=a_{n+1}-a_n$으로 놓으면 수열 $\{b_n\}$은 첫째항 $b_1=a_2-a_1=2$, 공비 $r=-\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

따라서 $n\geq2$일 때,

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\frac{2\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{7}{3}-\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\therefore$ $a_{20}=\frac{1}{3}\left(7+\frac{1}{2^{17}}\right)$

90. 정답 ③

[해설]

$a_1=\frac{2}{3}$, $a_{n+1}-a_n=2n-\frac{16}{3}$이므로

$$a_n=\frac{2}{3}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(2k-\frac{16}{3}\right)$$
$$=\frac{2}{3}+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}-\frac{16}{3}(n-1)$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}(n-1)(3n-16)$$
$$n^2-\frac{19}{3}n+6$$
$$=\left(n-\frac{19}{6}\right)^2-\frac{145}{36}$$

$n=1,2$일 때, $a_{n+1}<a_n$

$n\geq3$일 때, $a_{n+1}>a_n$

따라서 $n=3$일 때, a_n은 최솟값을 가진다.

$$a_3=\left(3-\frac{19}{6}\right)^2-\frac{145}{36}=-4$$

$\therefore k=3$, $m=-4$

$\therefore km=-12$

91. 정답 ③

[해설]

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 6, 공차가 2인 등차수열이므로

$\frac{1}{a_n}=6+(n-1)\cdot2=2n+4$

$\therefore a_n=\frac{1}{2n+4}$

$a_2=\frac{1}{8}$, $b_1=8a_1\cdot a_2=\frac{1}{6}$

$$b_{n+1}-b_n=8\cdot\frac{1}{2n+6}\cdot\frac{1}{2n+8}$$
$$=2\cdot\frac{1}{n+3}\cdot\frac{1}{n+4}$$
$$=2\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)$$

$$b_n=\frac{1}{6}+\sum_{k=1}^{n-1}2\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right)$$
$$=\frac{1}{6}+2\left\{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{6}+2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$= \dfrac{2n}{3(n+3)}$

$\therefore b_{15} = \dfrac{2\times 15}{3(15+3)} = \dfrac{5}{9}$

92. 정답 ③

계차수열 - 추론능력

[해설] $c_1 = 3,\ c_{n+1} = c_n + 2$이므로

$c_n = 3 + (n-1)\cdot 2 = 2n+1 \quad \cdots$ ㉠

$b_1 = 2,\ b_{n+1} - b_n = 2n+1$이므로

$b_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1) = n^2 + 1 \quad \cdots$ ㉡

$a_1 = 1,\ a_{n+1} - a_n = n^2 + 1$이므로

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k^2+1)$

$a_5 = 1 + \sum_{k=1}^{4}(k^2+1) = 1 + \dfrac{4\cdot 5\cdot 9}{6} + 4 = 35$

㉡에서 $b_5 = 5^2 + 1 = 26$

㉠에서 $c_5 = 2\cdot 5 + 1 = 11$

$\therefore \quad a_5 + b_5 + c_5 = 35 + 26 + 11 = 72$

93. 정답 ③

[해설]

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$b_n = a_{n+1} - a_n = \tan\left(\dfrac{n}{2}\pi + \dfrac{\pi}{4}\right)$

즉, $b_1 = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\cot\dfrac{\pi}{4} = -1$

$b_2 = \tan\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$

$b_3 = \tan\left(\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\cot\dfrac{\pi}{4} = -1$

$b_4 = \tan\left(2\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$

$\cdots$

이므로 수열 $\{b_n\}$은 $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \ (n \geq 2)$에서

수열 $\{a_n\}$은 3, 2, 3, 2, 3, 2, $\cdots$이므로

$\sum_{k=1}^{10} a_k = 5(3+2) = 25$

94. 정답 ③

[해설]

ㄱ. $n=1, \qquad a_2 - a_1 = p + q$

$n = 2 \qquad a_3 - a_2 = 2p + q$

$\vdots$

$n = n-1 \qquad a_n - a_{n-1} = (n-1)p + q$

양변을 변끼리 모두 더하면

$a_n - a_1 = p\{1+2+\cdots+(n-1)\} + (n-1)q$

$\therefore a_n = \dfrac{pn(n-1)}{2} + (n-1)q + 40$

$\therefore a_5 = 10p + 4q + 40$(참)

ㄴ. ㄱ에서 $a_6 = 15p + 5q + 40$이므로

$a_5 > 0, a_6 < 0$인 p, q의 값을 구하면

$10p + 4a + 40 > 0,\ q > -\dfrac{5}{2}p - 10 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$15p + 5q + 40 < 0,\ q < -3p - 8 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-\dfrac{5}{2}p - 10 < q < 3p - 8$

$-\dfrac{5}{2}p - 10 < -3p - 8$이므로 $p < 4$

p는 양의 정수이므로 $p = 1, 2, 3$

(i) $p = 1$일 때, $-12.5 < q < 11$

(ii) $p = 2$일 때, $-15 < q < -14$

(iii) $p = 3$일 때, $-17.5 < q < -17$

이 때, q는 정수이므로 $p = 1$일 때, $q = -12$

$\therefore pq = -12$ (참)

ㄷ. $a_n = \dfrac{n(n-1)}{2} - 12(n-1) + 40$

$= \dfrac{1}{2}(n^2 - 25n + 104) < 0$

에서 $\dfrac{25-\sqrt{209}}{2} < n < \dfrac{25+\sqrt{209}}{2}$

$\therefore 5.\times\times < n < 19.\times\times \ (\because 14 < \sqrt{209} < 15)$

따라서 정수 $n = 6, 7, \cdots, 19$이므로 정수 n의 최댓값은 19이다 (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

95.정답 55

[해설] $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 10^k = 1 + \dfrac{10(10^{n-1}-1)}{10-1}$

$= \dfrac{1}{9}(10^n - 1)$

$a_1 = 1,\ a_2 = 11,\ a_3 = 111,\ \cdots,\ a_n = \underbrace{111\cdots 1}_{n\text{개}}$이므로

$c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ \cdots,\ c_n = n$

$\therefore \quad \sum_{n=1}^{10} c_n = \sum_{n=1}^{10} n = \dfrac{10\times 11}{2} = 55$

96. 정답 ④

[해설]

$(3n-2)a_{n+1} = (3n+1)a_n$ 에서

$a_{n+1} = \dfrac{3n+1}{3n-2}a_n$

n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하면

$a_2 = \dfrac{4}{1}a_1$

$a_3 = \dfrac{7}{4}a_2$

$a_4 = \dfrac{10}{7}a_3$

$\vdots$

$a_n = \dfrac{3n-2}{3n-5}a_{n-1}$

위 식의 양변을 변끼리 곱하면

$$a_n = \frac{4}{1}\times\frac{7}{4}\times\frac{10}{7}\times\cdots\times\frac{3n-2}{3n-5}a_1$$
$$= (3n-2)a_1$$
$$= 6n-4 (\because a_1 = 2)$$

ㄱ. $a_3 = 6\times3-4 = 14$(참)

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고, 공차가 6인 등차수열이다.(참)

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10}(6k-4) = 6\times\frac{10\cdot11}{2}-40 = 290$(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ 이다.

97. 정답 ⑤

[해설]

$a_n = (n+1)b_n$ 에서

$a_{n+1} = (n+2)b_{n+1}$

$b_{n+1} = \frac{a_n}{n}$ 이므로 $a_{n+1} = \frac{n+2}{n}a_n$

n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{3}{1}a_1$$
$$a_3 = \frac{4}{2}a_2$$
$$a_4 = \frac{5}{3}a_3$$
$$\vdots$$
$$a_n = \frac{n+1}{n-1}a_{n-1}$$

위 식의 양변을 변끼리 곱하면

$$a_n = \frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}a_1$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}a_1$$
$$= n^2+n \ (\because a_1 = 2)$$
$$\therefore b_n = \frac{a_n}{n+1} = \frac{n^2+n}{n+1} = n$$

ㄱ. $a_2+b_2 = (2^2+2)+2 = 8$(참)

ㄴ. $\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10}(k^2+k) = \frac{10\cdot11\cdot21}{6}+\frac{10\cdot11}{2} = 440$(참)

ㄷ. 수열 $\{b_n\}$은 공차가 1인 등차수열이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ 이다.

98. 정답 21

[해설]

$$[\log_5 6] = [\log_5 7] = \cdots = [\log_5 24] = 1$$
$$[\log_5 25] = [\log_5 26] = \cdots = [\log_5 124] = 2$$
$$[\log_5 125] = [\log_5 126] = \cdots = [\log_5 204] = 3$$

이므로 $a_{n+1} = [\log_5(n+5)]\times a_n$에 n 대신 1, 2, $\cdots$, 199를 차례로 대입하면

$$a_2 = [\log_5 6]\times a_1$$
$$a_3 = [\log_5 7]\times a_2$$
$$a_4 = [\log_5 8]\times a_3$$
$$\cdots$$
$$a_{200} = [\log_5 204]\times a_{199}$$

이 식들을 변끼리 곱하여 정리하면

$$a_{200} = [\log_5 6]\times[\log_5 7]\times\cdots\times[\log_5 204]\times a_1$$
$$= 1\times1\times\cdots\times1\times2\times2\times\cdots\times3\times3\times\cdots\times3\times2$$
$$= 2^{100}\times3^{80}\times2 = 2^{100}\times3^{80}$$
$$\therefore p = 101,\ q = 80$$
$$\therefore p-q = 21$$

99. 정답 ④

[해설]

$a_{n+1} = 2a_n+2$에서

$a_{n+1}-\alpha = 2(a_n-\alpha)$

$\therefore a = -2$

따라서 $a_{n+1}+2 = 2(a_n+2)$이므로

$$a_n+2 = (a_1+2)2^{n-1} = 4\cdot2^{n-1} = 2^{n+1}$$
$$\therefore a_n = 2^{n+1}-2$$
$$\therefore a_{10} = 2^{11}-2 = 2048-2 = 2046$$

100. 정답 ③

[해설]

$a_{n+1} = 3a_n-5$에서

$a_{n+1}-\frac{5}{2} = 3\left(a_n-\frac{5}{2}\right)$

따라서 수열 $\left\{a_n-\frac{5}{2}\right\}$는 첫째항이 $a_1-\frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$, 공비가 3인 등비수열을 이룬다.

$$\therefore a_n-\frac{5}{2} = -\frac{3}{2}\cdot3^{n-1}$$
$$\therefore a_n = \frac{5}{2}-\frac{3}{2}\cdot3^{n-1}$$
$$\therefore a_{20}-a_{19} = \frac{5}{2}-\frac{3}{2}\cdot3^{19}-\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\cdot3^{18}\right)$$
$$= -\frac{3}{2}\cdot3^{18}(3-1) = -3^{19}$$

101. 정답 ③

$\tan(2a_{n+1}) = -\tan(a_n) = \tan(\pi-a_n)$에서

$$2a_{n+1} = \pi-a_n\left(\because\ 0 < a_n < \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\therefore\ 2\left(a_{n+1}-\frac{\pi}{3}\right) = -\left(a_n-\frac{\pi}{3}\right)$$

$a_n-\frac{\pi}{3} = \left(a_1-\frac{\pi}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$에서 $a_n = \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\therefore\ a_{10} = \frac{\pi}{3}\left(1-\frac{1}{2^9}\right)$$

102. 정답 ③

[해설] n년 후의 장학기금을 a_n억 원이라 하면 매 회 전년도 기금의 10%를 사용하고 90%는 남기고 5억 원의 기금을 추가로 적립하므로

$a_{n+1}=0.9a_n+5,\ a_{n+1}-50=0.9(a_n-50)$

$\therefore\ \ a=(a_1-50)\cdot 0.9^{n-1}+50$

$a_1=0.9\times100+5=95$이므로

$a_{10}=45\cdot0.9^9+50=45\times0.4+50=68$(억원)

103. 정답 ⑤

[해설]

10^{n+1}보다 작은 짝수 중 각 자라의 수에 적어도 한 개의 2가 포함된 수의 개수를 a_{n+1}이라 하면 10^n보다 작은 짝수 중 조건을 만족하는 수의 10^n자리에 $1,2,3,4,\cdots,9$를 추가하면 주어진 조건을 만족한다.

10^n 자리의 수가 2인 수 중에서 짝수인 것의 개수는 $5\cdot10^{n-1}$이므로

$$a_{n+1}=9a_n+5\cdot10^{n-1}$$

104. 정답 18

[해설]

$a_{n+1}=2a_n-1$을 변형하면

$$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$$

수열 $\{a_n-1\}$은 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n-1=(a_1-1)\cdot2^{n-1}=\frac{1}{32}\cdot2^{n-1}=2^{n-6}$$

$$\therefore a_n=2^{n-6}+1$$

$n=18$이면 $a_{18}=2^{12}+1=4097<5000$,

$n=19$이면 $a_{19}=2^{13}+1=8193>5000$이므로 $n\le18$

따라서 구하는 자연수 n의 개수는 18이다.

105. 정답 ④

[해설]

$a_1=p,\ a_2=q$라 하면

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$에서

$$\begin{aligned}a_6&=a_5+a_4=a_3+a_3+a_2\\&=a_3+a_2+2(a_2+a_1)+a_2\\&=a_2+a_1+4a_2+2a_1\\&=5a_2+3a_1\\&=5q+3p\end{aligned}$$

$5q+3p=60$에서 $5q=3(20-p)$

3과 5는 서로소이므로 q는 3의 배수이고 $20-p$는 5의 배수이다.

이 조건을 만족하는 자연수 p,q는

$p=5,q=9$ 또는 $p=10,q=6$ 또는 $p=15,q=3$ 이지만

조건 (가)에 의해 $a_2>a_1$이므로 $p=5,q=9$

$$a_1\times a_2=5\times9=45$$

106. 정답 ②

[해설]

(ⅰ) $n=2$일 때, $a_3=a_2+a_1=2$이므로 ㉠에서

(좌변)$=a_1^2+a_2^2=$ 【 2 】,

(우변)$=a_2a_3=$ 【 2 】

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 하면

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2=a_ka_{k+1}$$

이 식의 좌변에 【 $a_{k+1}{}^2$ 】 을 더하면

$$\begin{aligned}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)+\text{【 } a_{k+1}{}^2 \text{ 】}&=a_ka_{k+1}+a_{k+1}{}^2\\&=a_{k+1}(\text{【 } a_k \text{ 】}+a_{k+1})\\&=a_{k+1}a_{k+2}\end{aligned}$$

이므로 주어진 등식은 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 주어진 등식은 성립한다.

107. 정답 54

[해설]

순서도의 흐름에 따라 $A,\ B,\ C,\ S$의 값을 구하면 다음과 같다.

A	0	1	1	2	3	5	8	
B	1	1	2	3	5	8	13	
C	0	1	2	3	5	8	13	21
S	1	2	4	7	12	20	33	54

따라서 인쇄되는 S의 값은 54이다.

참고

주어진 순서도는 피보나치 수열

$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21$

의 합을 구하는 것이다.

108. 정답 ②

[해설] $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12&\frac12\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$에서

$a_{n+1}=\frac12a_n+\frac12b_n,\ b_{n+1}=a_n$

$a_{n+1}=\frac12a_n+\frac12b_n$에서

$a_{n+2}=\frac12a_{n+1}+\frac12b_{n+1}$ $\cdots$ ㉠

㉠에 $b_{n+1}=a_n$을 대입하면

$a_{n+2}=\frac12a_{n+1}+\frac12a_n$

양변에 $\frac12a_{n+1}$을 더하면

$a_{n+2}+\frac12a_{n+1}=a_{n+1}+\frac12a_n$

$\therefore\ \ a_{n+1}+\frac12a_n=a_n+\frac12a_{n-1}=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-2}}=\cdots$

$\cdots=a_1+\frac12a_1=\frac12+\frac12\cdot2=\frac32$

$\left(\because\ \ a_2=\frac12a_1+\frac12b_1=\frac12\right)$

즉, $a_{n+1}+\frac12a_n=\frac32$이므로

$a_{n+1}-a=-\frac12(a_n-1)$

$\therefore\ \ a_n-1=(a_1-1)\left(-\frac12\right)^{n-1}=\left(-\frac12\right)^{n-1}$

따라서 $a_n=1+\left(-\frac12\right)^{n-1}$이므로 $a_{10}=1-\frac{1}{2^9}$

109. 정답 ①

[해설]

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+1}=\frac{\frac{a_n-2}{a_n+1}-2}{\frac{a_n-2}{a_n+1}+1}$$

$$=\frac{-a_n+2}{2a_n+2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n-2}{a_n+1}=-\frac{1}{2}b_n$$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $-\frac{1}{2}$, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$b_n=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

즉, $b_{2n}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}=2^{-2n}$이므로

$$\log_2 b_2+\log_2 b_4+\log_2 b_6+\cdots+\log_2 b_{20}$$
$$=\log_2 2^{-2}+\log_2 2^{-4}+\log_2 2^{-6}+\cdots+\log_2 2^{-20}$$
$$=-(2+4+6+\cdots+20)$$
$$=-110$$

110. 정답 ④

[해설]

ㄱ. (반례) $p=2$이면

$a_2=a_1+1=1\neq 2a_1=0$(거짓)

ㄴ. (가), (나)에서

$a_1=0$

$a_2=a_1+1=1$

$a_3=a_2+1=2$

$\vdots$

$a_p=a_{p-1}+1=p-1$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_p$

$=0+1+2+\cdots+(p-1)$

$=\frac{p(p-1)}{2}$(참)

ㄷ. $a_p=p-1$이므로 (다)에서

$a_{2p}=a_{p+p}=a_p=p-1$

$a_{3p}=a_{2p+p}=a_{2p}=a_p=p-1$

$\vdots$

$a_{kp}=a_p=p-1$

$\therefore a_p+a_{2p}+\cdots+a_{kp}=k(p-1)$(참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ 이다.

참고

$p=5$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, ⋯

111. 정답 ②

[해설]

$2a_1-S_1=3$, $S_1=a_1$이므로 $a_1=3$

$$2a_{n+1}-S_{n+1}=3^{n+1}$$
$$-\;)\quad a_n\quad -S_n\quad=3^n$$
$$2a_{n+1}-2a_n-a_{n+1}=2\cdot 3^n$$
$$a_{n+1}=2a_n+2\cdot 3^n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

양변을 3^{n+1}로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a_n}{3^n}+\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-2=\frac{2}{3}\left(\frac{a_n}{3^n}-2\right)$$

따라서 수열 $\left\{\frac{a_n}{3^n}-2\right\}$는 첫째항이 -1, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열 이므로

$$\frac{a_n}{3^n}-2=-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \frac{a_n}{3^n}=2-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n=2\cdot 3^n-3\cdot 2^{n-1}$$

112. 정답 ①

[해설]

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n$으로 놓으면

$\frac{S_n}{n+1}=\frac{a_n}{2}$에서

$$S_n=\frac{n+1}{2}a_n\qquad\cdots\cdots ㉠$$

$\frac{s_{n-1}}{n}=\frac{a_{n-1}}{2}$에서

$$S_{n-1}=\frac{n}{2}a_{n-1}\qquad\cdots\cdots ㉡$$

㉠-㉡을 하면

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=\frac{n+1}{2}a_n-\frac{n}{2}a_{n-1}\quad(n=2,\ 3,\ 4,\cdots)$$

$$\frac{n-1}{2}a_n=\frac{n}{2}a_{n-1}$$

$$\therefore\ \frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{n-1}$$

n에 $2,3,4,\cdots,n$을 차례로 대입하면

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{1}$$
$$\frac{a_3}{a_2}=\frac{3}{2}$$
$$\vdots$$
$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{n-1}$$

위 식의 양변을 변끼리 곱하면

$$\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}$$
$$=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}$$

$$\therefore a_n=a_1\cdot n=\frac{n}{4}(\ n\geq 1)$$

$$\therefore a_{100}=25$$

113. 정답 ②

일반항 a_n과 합 S_n의 관계 - 내적문제해결능력

[해설]

$na_1+(n-1)a_2+\cdots+2a_{n-1}+a_n=\dfrac{n(n+1)(n+5)}{6}$ … ㉠

$(n-1)a_1+(n-1)a_2+\cdots+a_{n-1}=\dfrac{(n-1)n(n+4)}{6}$ $(n\geq 2)$

두 식을 변끼리 빼면

$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=\dfrac{n(n+1)(n+5)}{6}-\dfrac{(n-1)n(n+4)}{6}$

$=\dfrac{n}{6}\{(n+1)(n+5)-(n-1)(n+4)\}=\dfrac{n(n+3)}{2}$ $(n\geq 2)$ … ㉡

㉠에서 $a_1=2$

이것은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$S_n a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=\dfrac{n(n+3)}{2}$ $(n\geq 1)$

$\therefore$ $a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=S_{10}-S_5$

$=\dfrac{10\times 13}{2}-\dfrac{5\times 8}{2}=45$

114. 정답 191

[해설]

$a_{n+1}+a_n=n^2+5$에서

$a_2+a_1=1^2+5$

$a_3+a_2=2^2+5$

$a_4+a_3=3^2+5$

$\vdots$

$a_{19}+a_{18}=18^2+5$

$a_{20}+a_{19}=19^2+5$

이 때,

$(a_{20}+a_{19})+(a_{18}+a_{17})+\cdots+(a_2+a_1)$

$=19^2+17^2+15^2+\cdots+1^2+10\times 5$

$=\sum_{k=1}^{10}\{(2k-1)^2+5\}$

$=\sum_{k=1}^{10}(4k^2-4k+6)$ …… ㉠

$(a_{19}+a_{18})+(a_{17}+a_{16})+\cdots+(a_3+a_2)$

$=18^2+16^2+\cdots+2^2+9\times 5$

$=\sum_{k=1}^{9}\{(2k)^2+5\}$

$=\sum_{k=1}^{9}(4k^2+5)$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$a_{20}+a_1$

$=\sum_{k=1}^{10}(4k^2-4k+6)-\sum_{k=1}^{9}(4k^2+5)$

$=(400-40+6)+\sum_{k=1}^{9}\{(4k^2-4k+6)-(4k^2+5)\}$

$=366+\sum_{k=1}^{9}(-4k+1)$

$=366+\left(-4\cdot\dfrac{9\cdot 10}{2}+9\right)$

$=195$

$\therefore a_{20}=195-a_1=195-4=191$

115. 정답 ③

[해설] $a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=5$로부터

$a_4=a_3+a_2-a_1=7$

$a_5=a_4+a_3-a_2=9,\ \cdots$

$\therefore$ $a_n=2n-1$

$S_{10}=\sum_{k=1}^{10}(2k-1)=10\cdot 11-10=100$

$\therefore$ $\dfrac{S_{10}}{10}=\dfrac{100}{10}=10$

116. 정답 ②

[해설] $\alpha,\ \beta$는 방정식 $x^2-x-1=0$의 두 실근이므로

$\alpha^2-\alpha-1=0,\ \beta^2-\beta-1=0$

따라서 $\alpha^{n+2}-\alpha^{n+1}-\alpha^n=\alpha^n(\alpha^2-\alpha-1)=0$,

$\beta^{n+2}-\beta^{n+1}-\beta^n=\beta^n(\beta^2-\beta-1)=0$

이므로 두 식을 변끼리 빼면

$(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2})-(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})-(\alpha^n-\beta^n)=0$

이 때, $\alpha^n-\beta^n=\sqrt{5}\,a_n$이므로

$\sqrt{5}\,a_{n+2}-\sqrt{5}\,a_{n+1}-\sqrt{5}\,a_n=0$

$\therefore$ $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

117. 정답 ③

[해설]

${a_{n+1}}^2-6{a_n}^2=a_na_{n+1}$에서 $(a_{n+1}-3a_n)(a_{n+1}+2a_n)=0$

수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 양의 실수이므로

$a_{n+1}=3a_n$ …… ㉠

$(b_n-\log_9 a_n)^2+(a_1-3)^2=0$에서 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모든 항이 양의 실수이므로

$b_n=\log_9 a_n,\ a_1=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고, 공비가 3인 등비수열이므로

$a_n=3^n$

$\therefore b_n=\log_9 a_n=\log_9 3^n=\dfrac{n}{2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{m}b_k=\sum_{k=1}^{m}\dfrac{k}{2}=\dfrac{m(m+1)}{4}=105$

$\therefore m=20$

118. 정답 ③

특수한 수열의 합 - 이해능력

[해설] $a_n=2+(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$

$\left[\dfrac{n}{2}\right]$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \cdots$을 대입하여 그 값을 구하면 각각 $0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ \cdots$이므로

$(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$의 값은 $1,\ -1,\ 1, -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots$에서

주기가 4인 수열이고, $2010=4\times502+2$이므로

$$\sum_{n=1}^{2010}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}=502(1-1-1+1)+(1-1)=0$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{2010}a_n=\sum_{n=1}^{2010}\left\{2+(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right\}=2\times2010+0=4020$$

119. 정답 ⑤

[해설]

$a_1=m$ (m은 정수), $a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2} & (a_n : 짝수)\\ 3a_n+1 & (a_n : 홀수)\end{cases}$ …… ㉠

$a_6=1$이므로 $\dfrac{a_5}{2}=1$ 또는 $3a_5+1=1$

$\therefore a_5=2$ 또는 $a_5=0$

따라서 ㉠을 만족하는 것은 $a_5=2$

$\dfrac{a_4}{2}=2$ 또는 $3a_4+1=2$

$\therefore a_4=4$ 또는 $a_4=\dfrac{1}{3}$

따라서 ㉠을 만족하는 것은 $a_4=4$

$\dfrac{a_3}{2}=4$ 또는 $3a_3+1=4$

$\therefore a_3=8$ 또는 $a_3=1$

(i) $a_3=8$일 때, $\dfrac{a_2}{2}=8$ 또는 $3a_2+1=8$

$\therefore a_2=16$ 또는 $a_2=\dfrac{7}{3}$

따라서 ㉠을 만족하는 것은 $a_2=16$

$\dfrac{a_1}{2}=16$ 또는 $3a_1+1=16$

$\therefore a_1=32$ 또는 $a_1=5$ …… ㉡

(ii) $a_3=1$일 때, 위의 방법에 의해 $a_1=4$ …… ㉢

㉡, ㉢에 의해 m의 값으로 가능한 것은 $32,\ 5,\ 4$이고 이들의 합은 41이다.

120. 정답 ⑤

[해설]

$a_{n+2}-pa_{n+1}=q(a_{n+1}-pa_n)$에서

$p+q=6,\ pq=8$

$\therefore\ p=2,\ q=4$ 또는 $p=4,\ q=2$

(i) $p=2,\ q=4$일 때,

$a_{n+2}-2a_{n+1}=4(a_{n+1}-2a_n)$에서

$a_{n+1}-2a_n=$ 【4^{n-1}】 $(\because a_2-2a_1=1)$ … ㉠

(ii) $p=4,\ 1=2$일 때,

$a_{n+2}-4a_{n+1}=2(a_{n+1}-4a_n)$에서

$a_{n+1}-4a_n=$ 【2^{n-1}】 $(\because a_2-4a_1=1)$ … ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서

$2a_n=4^{n-1}-2^{n-1}=2^{2n-2}-2^{n-1}$

$\therefore a_n=$ 【$2^{2n-3}-2^{n-2}$】

121. 정답 ⑤

[해설]

$(i)\, f(n+2)=n+2$인 경우

집합 A_{n+2}의 원소 중 $n+2$를 제외한 나머지 원소 $1, 2, 3, \cdots, n+1$에 대해서만 $(f\circ f)(x)=x$가 성립하도록 f를 결정하면 되므로 f의 개수는 $\boxed{a_{n+1}}$(개)이다.

$(ii)\, f(n+2)=p$ $(p\in A_{n+2}, p\neq n+2)$인 경우

$f(n+2)=p$이면

$f(p)=f(f(n+2))=n+2$

이므로 함수 f의 개수는 a_n(개)이다.

이 때, p는 $1, 2, 3, \cdots, n+1$중 어느 하나가 될 수 있으므로

$(f\circ f)(x)=x$이고 $p\neq n+2$인 함수 f의 개수는

$\boxed{(n+1)a_n}$(개)이다.

(i), (ii)에 의해 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 사이에는

$\boxed{a_{n+2}=a_{n+1}+(n+1)a_n}$의 관계가 성립한다.

122. 정답 ②

(i) $n=\boxed{4}$일 때,

(좌변)$=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$,

(우변)$=2^4=16$이므로 성립한다.

(ii) $n=k$ $(k\geq4)$일 때, 이 명제가 성립한다고 가정하면

$1\cdot2\cdot3\cdots k>2^k$ … ㉠

㉠의 양변에 $(\boxed{k+1})$을 곱하면

$1\cdot2\cdot3\cdots k(\boxed{k+1})>2^k\cdot(\boxed{k+1})$ … ㉡

㉡의 우변에 $2^k\cdot(\boxed{k+1})>(\boxed{2^{k+1}})$이므로

$1\cdot2\cdot3\cdots k(\boxed{k+1})>(\boxed{2^{k+1}})$

그러므로 $n=k+1$일 때에도 성립한다.

따라서 4이상인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

123. 정답 ③

[해설]

(i) $n=2$일 때, $x^2-2x+2-1=(x-1)^2$이므로 성립한다.

(ii) $n=k$ $(k\geq2)$일 때, $x^k-kx+k-1=(x-1)^2\cdot Q(x)$가 성립한다고 가정하면

$x^{k+1}-(k+1)x+(k+1)-1=x^{k+1}-(k+1)x+\boxed{k}$

$=\{x^{k+1}-kx^2+(k-1)x\}+(kx^2-2kx+k)$

$=x(x^k-kx+k-1)+k(x-1)^2=(x-1)^2\cdot(\boxed{xQ(x)+k})$이므로

$n=k+1$일 때에도 성립한다.

따라서 (i), (ii)에서 2이상의 자연수 n에 대하여 다항식 $x^n-nx+n-1$은 항상 $(x-1)^2$으로 나누어 떨어진다.

124. 정답 ④

[해설]

$a_n=x^n+\dfrac{1}{x^n}$ $(n=2,\ 3, 4,\ \cdots)$이라 하고

$x+\dfrac{1}{x}=m$ (m은 정수)이라 하면

$a_2=x^2+\dfrac{1}{x^2}=(x+\dfrac{1}{x})^2-2=m^2+\boxed{-2}$에서는 a_2는 정수 2이상의 임의의 자연수 k에 대하여 $\boxed{a_k,\ a_{k+1}\text{이 정수}}$라면

$$a_{k+2}=x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}$$
$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}\right)-\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)$$
$$=\boxed{ma_{k+1}}-a_k$$

m,a_{k+1},a_k가 정수이므로 $ma_{k+1}-a_k$도 정수이다.

따라서 $n=2,3,4,\ \cdots$에 대하여 $x+\dfrac{1}{x}$이 정수이면 $x^n+\dfrac{1}{x^n}$도 정수이다.

125. 정답 ④

[해설]

$a_n=4^{n+1}+5^{2n-1}$이라 하자.

(ⅰ) $a_1=4^2+5^1=21$이므로 a_1은 21의 배수이다.

(ⅱ) a_k $(k\geq 1)$가 21의 배수라고 가정하면 정수 M에 대하여

$$a_k=4^{k+1}+5^{2k-1}=21M$$
$$a_{k+1}=\boxed{4^{k+2}+5^{2k+1}}$$
$$=4\cdot 4^{k+1}+5^2\cdot\boxed{5^{2k-1}}$$
$$=4(21M-5^{2k-1})+25\cdot 5^{2k-1}$$
$$=21M\left(\boxed{4M+5^{2k-1}}\right)$$

이때, $\boxed{4M+5^{2k-1}}$은 정수이므로 a_{k+1}은 21의 배수이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해서 모든 자연수 n에 대하여 a_n은 21의 배수이다.

126. 정답 ③

[해설]

(ⅰ) $f(n)=3^{n+1}+4^{2n-1}$으로 놓으면 $f(1)=3^2+4=13$이므로 $f(1)$은 13으로 나누어떨어진다.

(ⅱ) $f(k)$가 13으로 나누어떨어진다고 가정하면

$$f(k+1)=3^{(k+1)+1}+4^{2(k+1)-1}=3^{k+2}+4^{2k+1}$$
$$3\cdot 3^{k+1}+16\cdot 4^{2k-1}=3(3^{k+1}+4^{2k-1})+13\cdot 4^{2k-1}$$
$$=\boxed{3}f(k)+\boxed{13}\cdot 4^{2k-1}$$

이므로 $f(k+1)$도 13으로 나누어떨어진다.

따라서 (가), (나)에 들어갈 두 수의 합은 16이다.

127. 정답 ①

[해설]

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)=(우변)$=0$이므로 등식은 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}(k-1)k(k+1)=\frac{(m-1)m(m+1)(m+2)}{4}$$

등식의 양변에 $\boxed{m(m+1)(m+2)}$를 더하면

$$(\text{좌변})=\sum_{k=1}^{m}(k-1)k(k+1)+\boxed{m(m+1)(m+2)}$$
$$=\boxed{\sum_{k=1}^{m+1}(k-1)k(k+1)}$$
$$(\text{우변})=\frac{(m-1)m(m+1)(m+2)}{4}+\boxed{m(m+1)(m+2)}$$
$$=\frac{(m-1)m(m+1)(m+2)+4m(m+1)(m+2)}{4}$$
$$=\frac{m(m+1)(m+2)\{(m-1)+4\}}{4}$$
$$=\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4}$$

따라서 $n=m+1$일 때에도 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 등식은 임의의 자연수 n에 대하여 성립한다.

128. 정답 ②

[해설]

$n=m$일 때,

등식 $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_mC_k}{{}_{m+4}C_k}=\frac{m+5}{5}$ 기 성립한다고 가정하자.

$n=m+1$ 일 때,

$$\sum_{k=0}^{m+1}\frac{{}_{m+1}C_k}{{}_{m+5}C_k}=\frac{{}_{m+1}C_0}{{}_{m+5}C_0}+\sum_{k=1}^{m+1}\frac{{}_{m+1}C_k}{{}_{m+5}C_k}$$
$$=\boxed{1}+\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m+1}C_{k+1}}{{}_{m+5}C_{k+1}}$$

자연수 l 에 대하여

$${}_{l+1}C_{k+1}=\frac{(l+1)!}{(k+1)!(l-k)!}$$
$$=\frac{l+1}{k+1}\times\frac{l!}{k!(l-k)!}$$
$$=\boxed{\frac{l+1}{k+1}}\times{}_lC_k\ (0\leqq k\leqq l)$$

이므로

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m+1}C_{k+1}}{{}_{m+5}C_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=0}^{m}\frac{(m+1)!}{(k+1)!(m-k)!}\cdot\frac{(k+1)!(m-k+4)!}{(m+5)!}$$
$$=\sum_{k=0}^{m}\frac{m+1}{m+5}\cdot\frac{m!}{k!(m-k)!}\cdot\frac{k!(m-k+4)!}{(m+4)!}$$
$$\boxed{\frac{m+1}{m+5}}\cdot\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_mC_k}{{}_{m+4}C_k}\text{ 이다.}$$

따라서

$$\sum_{k=0}^{m+1}\frac{{}_{m+1}C_k}{{}_{m+5}C_k}=1+\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m+1}C_{k+1}}{{}_{m+5}C_{k+1}}$$
$$=\boxed{1}+\boxed{\frac{m+1}{m+5}}\cdot\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_mC_k}{{}_{m+4}C_k}$$
$$=1+\frac{m+1}{m+5}\times\frac{m+5}{5}=\frac{m+6}{5}$$

그러므로 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

129. 정답 ④

[해설]

수열 $\{a_n\}$ 의 정의에 의해

$a_{m+1}=\dfrac{m^2}{(m+1)(m+2)}a_m$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+a_{m+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\boxed{\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}}a_m$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{(m-1)^2}{m(m+1)}\cdot\cdots\cdot\frac{1^2}{2\cdot3}a_1$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{(m-1)^2}{m(m+1)}\cdot\cdots\cdot\frac{1^2}{2\cdot3}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\boxed{\frac{1}{(m+1)^2(m+2)}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\frac{1}{(m+1)^2}-\boxed{\frac{1}{(m+1)(m+2)}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}-\left\{\frac{m}{m+1}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}-\frac{(m+1)^2}{(m+1)(m+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}-\frac{m+1}{m+2}$$

그러므로 $n=m+1$ 일 때에도 (*)이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 (*)이 성립한다.

130. 정답 ④

[해설]

(i) $n=3$일 때,

(좌변)$=3\times2\times1=6$, (우변)$=2^{3-1}=4$이므로

주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면

$k!>2^{k-1}$ $\cdots$ ㉠

그런데 $k+1>2$이므로

$(k+1)\cdot\boxed{2^{k-1}}>2\cdot2^{k-1}=2^k$

따라서 ㉠의 양변에 $\boxed{k+1}$을 곱하면

$k!\cdot\boxed{k+1}>2^{k-1}\cdot\boxed{k+1}>\boxed{2^k}$

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 3 이상인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

131. 정답 ⑤

[해설]

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=\dfrac{1}{3\cdot5}=\dfrac{1}{15}$, (우변)$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$이므로

부등식은 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(2i+1)(2i+3)}<\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$$

부등식의 양변에 $\boxed{\dfrac{1}{(2k+3)(2k+5)}}$을 더하면

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(2i+1)(2i+3)}+\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$$

$$<\frac{1}{2}-\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$$

$$<\frac{1}{2}-\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{(2k+2)(2k+4)}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\boxed{\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{2k+4}}\right)$$

$$<\frac{1}{2}-\boxed{\frac{1}{2k+4}}$$

즉, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{(2i+1)(2i+3)}<\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k+2}\right)$이므로 $n=k+1$일 때에도 부등식이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 임의의 자연수 n에 대하여 성립한다.

132. 정답 ②

[해설]

$a_1=1\le4,\ a_2=\dfrac{1}{2}a_1+\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\boxed{1}\le2$

이므로 $n=1,2$일 때 성립한다.

2이상의 자연수 k에 대하여 $a_k\le\dfrac{4}{k}$가 성립한다고 하면

$$a_{k+1}-\frac{4}{k+1}=\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{k+1}-\frac{4}{k+1}$$

$$=\frac{1}{2}a_k+\boxed{\frac{-3}{k+1}}$$

$$\le\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{k}-\frac{3}{k+1}$$

$$=\frac{2(k+1)-3k}{k(k+1)}$$

$$=\frac{2-k}{\boxed{k(k+1}}\le0\quad(\because k\ge2)$$

$n=k+1$일 때에도 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

133. 정답 ③

[해설]

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$,

(우변)$=\dfrac{1}{4}(3-1)=\dfrac{1}{2}$이므로 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(2k+1)-1}-\frac{1}{2(k+1)}$$

$$\le\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{2(k+1)-1}-\frac{1}{2(k+1)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+ 【\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}】$$

이 때,

$$\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)- 【\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}】$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}$$

$$= \frac{1}{2(k+1)}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$= 【\frac{1}{2(k+1)}】 \cdot \frac{1}{2k(2k+1)} 【>】 0$$

$$\therefore 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2(k+1)-1}-\frac{1}{2(k+1)}$$

$$\le \frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k+1}\right)$$

즉, $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서, (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

134. 정답 ③

주어진 순서도에서 N, A의 값을 차례로 구하면 다음과 같다.

N	1	2	3	$\cdots$
A	2	2×3	$2\times3\times3$	$\cdots$

위의 규칙에 따라서 $N=n$일 때, A의 값은

$2\times3\times3\times\cdots\times3 = 2\times3^{n-1}$이므로

$2\times3^{n-1}\ge100$에서 $3^{n-1}\ge50$ $\therefore$ $n\ge5$

따라서 인쇄되는 N의 값은 5이다.

135. 정답 ③

[해설]

N = 1, 2, 3, 4, $\cdots$일 때, S의 값이 최대가 되는 것은 $100-7N$의 값이 양수 중에서 최소인 경우이다.

즉, $100-7\mathrm{N}\ge0$에서 $\mathrm{N}\le14.\times\times\times$이므로 N의 최댓값은 14이다.

$\therefore k=14$

136. 정답 ②

[해설]

(가)가 처음으로 시행되고 A의 값이 출력될 때 B의 값은 $b+1$이다. 이 때, $b+1$은 5가 아니면 다시 돌아가서 (가)를 두 번째로 시행하고 B의 값은 $b+2$가 된다. 이와 같이 (가)를 10번 반복 시행했을 때, b의 값은 $b+10$이 되고 여기서 시행이 끝나고 A의 값을 출력하려면

$b+10=5$

$\because b=-5$

A, B의 값의 변화는 다음과 같다.

(가)의 시행 횟수	A	B
	100	-5
1	95	-4
2	90	-3
3	86	-2
4	83	-1
5	81	0
6	80	1
7	80	2
8	81	3
9	83	4
10	86	5

따라서 인쇄되는 A의 값은 $a=86$이다.

$\therefore a+b=81$

137. 정답 ⑤

[해설]

$S=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{10!}$을 구하기 위해

$n!$을 나타내는 변수를 P로 하면 변수 N은 $1, 2, 3, \cdots$으로 변하므로 P의 값은 1부터 차례로 변하는 N의 값을 계속 곱한 것으로 한다.

$\therefore P\leftarrow P\times N$

S는 $\frac{1}{P}$을 더해 나가야 하므로 $S\leftarrow S+\frac{1}{P}$

따라서 N, P, S의 값의 변화는 다음과 같다.

P	S	N
$1=1!$	$0+\frac{1}{1!}$	2
$1!\times2=2!$	$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}$	3
$2!\times3=3!$	$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}$	4
$3!\times4=4!$	$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$9!\times10=10!$	$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{10!}$	11

따라서 $N>10$을 처음으로 만족할 때 구하는 S가 인쇄된다.

138. 정답 256

[해설] 주어진 순서도에서 K, P의 값을 차례로 구하면 다음과 같다.

K	0	1	2	3	$\cdots$	8
P	1	2	2^2	2^3	$\cdots$	2^8

따라서 인쇄되는 P의 값은 $2^8=256$이다.

139. 정답 32

[해설] 주어진 순서도에서 A, B의 값을 차례로 구하면 다음과 같다.

A	160	64	64	32
B	96	96	32	32

따라서 인쇄되는 B의 값은 32이다.

[참고] A와 B의 최대공약수는 A와 $A-B$의 최대공약수와 같으므로 인쇄되는 B의 값은 160과 96의 최대공약수 32이다.

140. 정답 4

[해설]

A, r, S 의 값의 변화를 표로 나타내면 다음과 같다.

A	r	S
58	0	0
29	0	
14	1	1
7	0	
3	1	2
1	1	3
0	1	4

따라서 $A=0$일 때의 S 의 값은 4이다.

141. 정답 ③

[해설] 주어진 순서도에서 n, S의 값을 차례로 구하면 다음과 같다.

n	1	2	3	$\cdots$	10
S	$0+1$	$1+2$	$1+2+3$	$\cdots$	$1+2+\cdots+10$

따라서 인쇄되는 S의 값은 $1+2+\cdots+10=55$

142. 정답 ③

[해설]

n, S의 값의 변화는 다음과 같다.

n	S
0	0
$2\cdot 0+1=1$	$0+1=1$
$2\cdot 2+1=5$	$1+5=6$
$2\cdot 6+1=13$	$6+13=19$
$2\cdot 14+1=29$	$19+29=48$
$2\cdot 30+1=61$	$48+61=109$

따라서 인쇄되는 S의 값은 109이다.

143. 정답 ⑤

[해설]

A, S 의 값의 변화를 표로 나타내면 다음과 같다.

A	S
2	2
3	$2+3$
5	$2+3+5$
9	$2+3+5+9$
17	$2+3+5+9+17$
$\vdots$	$\vdots$

수열 $2, 3, 5, 9, 17, \cdots$ 의 일반항을 a_n이라 하면

$2, 3, 5, 9, 17, \cdots$
$\vee\ \vee\ \vee\ \vee$
$1, 2, 4, 8, \cdots$

$$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}=2+\frac{2^{n-1}-1}{2-1}=1+2^{n-1}$$

$a_n=1+2^{n-1}>300$이 성립하는 n의 최솟값은 10이다.

따라서 인쇄되는 S 의 값은

$$S=\sum_{k=1}^{10}(1+2^{k-1})=10+\frac{2^{10}-1}{2-1}=1033$$

144. 정답 ④

[해설]

N, A, S의 값의 변화는 다음과 같다.

N	A	S
0	0	0
1	3^1-1	$0+(3^1-1)$
2	3^2-1	$0+(3^1-1)+(3^2-1)$
3	3^3-1	$0+(3^1-1)+(3^2-1)+(3^3-1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	$3^{10}-1$	$0+(3^1-1)+(3^2-1)+(3^3-1)+\cdots+(3^{10}-1)$

따라서 인쇄되는 S의 값은

$$\begin{aligned}S&=(3^1-1)+(3^2-1)+\cdots+(3^{10}-1)\\&=(3+3^2+3^3+\cdots+3^{10})-10\\&=\frac{3(3^{10}-1)}{3-1}-10\\&=\frac{3}{2}(3^{10}-1)-10\end{aligned}$$

145. 정답 ①

[해설]

$n-3\left[\frac{n}{3}\right]$은 n을 3으로 나눈 나머지이므로 $n-3\left[\frac{n}{3}\right]=0$이면 n은 3의 배수임을 의미한다.

n, a, S의 값의 변화를 표로 나타내면 다음과 같다.

n	a	S
1	1	0
2	5	0
3	9	9
4	13	9
5	17	9
6	21	9+21
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
18	69	9+21+33+⋯+69

따라서 구하는 S의 값은 첫째항이 9이고 공차가 12인 등차수열의 6항까지의 합이므로

$$S=9+21+33+\cdots+69=\frac{6(9+69)}{2}=234$$

1. 정답 ②	2. 정답 ③	3. 정답 ⑤
4. 정답 45	5. 정답 ②	6. 정답 ①
7. 정답 ③	8. 정답 ④	9. 정답 ④
10. 정답 ①	11. 정답 ④	12. 정답 ①
13. 정답 ④	14. 정답 ②	15. 정답 ⑤
16. 정답 25	17. 정답 ②	18. 정답 ②
19. 정답 ②	20. 정답 ②	21. 정답 ④
22. 정답 ④	23. 정답 ③	24. 정답 ②
25. 정답 3	26. 정답 ③	27. 정답 ④
28. 정답 ③	29. 정답 ②	30. 정답 ⑤
31. 정답 ②	32. 정답 ⑤	33. 정답 ③
34. 정답 ②	35. 정답 ④	36. 정답 ②
37. 정답 ③	38. 정답 ③	39. 정답 ⑤
40. 정답 163	41. 정답 ④	42. 정답 ②
43. 정답 ②	44. 정정답 ②	45. 정답 ⑤
46. 정답 ④	47. 정답 ②	48. 정답 ⑤
49. 정답 ③	50. 정답 ③	51. 정답 8
52. 정답 50	53. 정답 ②	54. 정답 ①
55. 정답 ①	56. 정답 ④	57. 정답 ③
58. 정답 ①	59. 정답 ③	60. 정답 ④
61. 정답 ④	62. 정답 ④	63. 정답 ⑤
64. 정답 ②	65. 정답 ④	66. 정답 ⑤
67. 정답 ②	68. 정답 ②	69. 정답 ②
70. 정답 ③	71. 정답 ③	72. 정답 ①
73. 정답 ③	74. 정답 ①	75. 정답 ④
76. 정답 64	77. 정답 12	78. 정답 ①
79. 정답 ④	80. 정답 ②	81. 정답 ③
82. 정답 ②	83. 정답 ①	84. 정답 ⑤
85. 정답 ②	86. 정답 ⑤	87. 정답 ④

1. 정답 ②

[해설]

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)=(-1)^n \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)=(-1)^n \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

ㄱ. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)=(-1)^n \times \sqrt{2}$ 이므로 진동한다. 즉, 발산한다.

ㄴ. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)=(-1)^{2n} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ 이므로 수렴한다.

ㄷ. $\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\right)=(-1)^n$ 이므로 진동한다. 즉 발산한다.

따라서 수렴하는 것은 ㄴ이다.

2. 정답 ③

[해설]

점근선이 두 직선 $x=1$, $y=2$이므로

$f(x)=\frac{k}{x-1}+2\ (k>0)$

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} f(n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{n-1}+2\right)=2$ (참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} f(-n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{-n-1}+2\right)=2$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} f\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{1+\frac{1}{n}-1}+2\right)$

$=\lim_{n\to\infty}(nk+2)=\infty$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

3. 정답 ⑤

[해설] 임의의 자연수 n에 대하여 $|a_k|<\frac{1}{n}$을 만족시키는 a_n가 무한개 있어야 하므로 0으로 수렴하거나 0의 값을 반복해서 갖는 수열 $\{a_n\}$을 찾아야 한다.

ㄱ. $a_n=\frac{n+1}{n^2}$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0$

ㄴ. $a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$이므로

$\{a_n\}$: 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, $\cdots$

ㄷ. $a_n=\frac{(-1)^n+1}{2}$이므로

$\{a_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, 1, $\cdots$

따라서 조건을 만족하는 수열은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

4. 정답 45

[해설]

$\lim_{n\to\infty}\left({a_n}^3+{b_n}^3\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^3-3a_nb_n(a_n+b_n)\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)^3-3\lim_{n\to\infty}\{a_nb_b(a_n+b_n)\}$

$=\left\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\right\}^3-3\lim_{n\to\infty}a_nb_n\times\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$

$=3^3-3\cdot(-2)\cdot 3$

$=45$

5. 정답 ②

[해설]

첫째항이 2, 공차가 3이므로

$a_n=2+(n-1)\times 3$

$=3n-1$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_n}{n}\right]=\lim_{n\to}\left[\frac{3n-1}{n}\right]$

$=\lim_{n\to\infty}\left[3-\frac{1}{n}\right]$

$=2$

6. 정답 ①

[해설] $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}\left(x^2-\frac{2x}{n}k+\frac{1}{n^2}k^2\right)$

$=nx^2-\frac{2}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}x+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

$=nx^2-(n+1)x+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$

$=n\left(x-\frac{n+1}{2n}\right)^2-\frac{(n+1)^2}{4n}+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$

따라서 주어진 이차함수의 최솟값은

$a_n=-\frac{(n+1)^2}{4n}+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$

$=\frac{2(n+1)(2n+1)-3(n+1)^2}{12n}=\frac{n^2-1}{12n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{(n+1)^2}{4n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{12n^2}$

$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

7. 정답 ③

$(2n-1)^2-(2n)^2=-4n+1$이므로

$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2$

$=\sum_{k=1}^{n}(-4k+1)=-2n^2-n$

$\therefore$ (주어진 식) $=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2-n}{1-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}-1}=2$

8. 정답 ④

[해설] $f(n)=n^2+2n+5$

$f(n+1)=(n+1)^2+2(n+1)+5=n^2+4n+8$
이므로
$n^2+2n+5<f(x)<n^2+4n+8$
에서 $f(x)$의 값이 자연수인 것의 개수 a_n은
$a_n=(n^2+4n+8)-(n^2+2n+5)-1=2n+2$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+2)}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+4}{3n+1}=\frac{4}{3}$$

9. 정답 ④

[해설] 수열 $\{a_n\}$의 공차가 4이므로
$$b_n=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=1}^{n}4=4n$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}b_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}4k$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}$$
$$=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

10. 정답 ①

[해설] $a_1+a_2+\cdots+a_n$
$$=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\cdots+\log\frac{n+1}{n}$$
$$=\log\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)=\log(n+1)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^{\log(n+1)}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

11. 정답 ④

[해설] 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차 d_1이라 하면
$a_n=a+(n-1)d_1$
$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d_1\}}{2}=\frac{d_1n^2+(2b-d_1)n}{2}$$
등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b, 공차를 d_2라 하면
$b_n=b+(n-1)d_2$
$$T_n=\frac{n\{2b+(n-1)d_2\}}{2}=\frac{d_2n^2+(2b-d_2)n}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{d_1n^2+(2b-d_1)n}{2}}{\frac{d_2n^2+(2b-d_2)n}{2}}=\frac{d_1}{d_2}=\frac{2}{3}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+(n-1)d_1}{b+(n-1)d_2}=\frac{d_1}{d_2}=\frac{2}{3}$$

12. 정답 ①

[해설] $\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2-n+2}-\sqrt{n^2-n}\right)$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\{(n^2-n+2)-(n^2-n)\}}{\sqrt{n^2-n+2}+\sqrt{n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2-n+2}+\sqrt{n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=1$$

13. 정답 ④

[해설] $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n}\right)$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+4}+\sqrt{4}\right)}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}=2$$

14. 정답 ②

[해설] $\sqrt{n^2}<\sqrt{n^2+1}<\sqrt{(n+1)^2}$ 이므로
$n<\sqrt{n^2+1}<n+1$
$\therefore\ a_n=n,\ b_n=\sqrt{n^2+1}-n$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

15. 정답 ⑤

[해설]
n이 자연수이면
$9n^2-6n+1<9n^2-2n<9n^2$
$3n-1<\sqrt{9n^2-2n}<3n$
$\therefore\ \left[\sqrt{9n^2-2n}\right]=3n-1$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{9n^2-2n}-(3n-1)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(9n^2-2n)-(3n-1)^2}{\sqrt{9n^2-2n}+(3n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{\sqrt{9n^2-2n}+(3n-1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n}}{\sqrt{9-\frac{2}{n}}+\left(3-\frac{1}{n}\right)}=\frac{2}{3}$$

16. 정답 25

[해설] $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{kn+1}}{n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)}$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{kn+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{n(n+1-n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{kn+1}\,(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{k+\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{k+0}\,(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0})}{2} = \sqrt{k} = 5$$

$\therefore\ k=25$

17. 정답 ②

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-\sqrt{an^4+bn^3+1}}{2n+3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2-\sqrt{an^4+bn^3+1}\right)\left(n^2+\sqrt{an^4+bn^3+1}\right)}{(2n+3)\left(n^2+\sqrt{an^4+bn^3+1}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^4-\left(an^4+bn^3+1\right)}{(2n+3)\left(n^2+\sqrt{an^4+bn^3+1}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1-a)n^4-bn^3-1}{(2n+3)\left(n^2+\sqrt{an^4+bn^3+1}\right)}$$

$a\neq 1$이면 발산하므로 $a=1$이여야 한다. 즉

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-bn^3-1}{(2n+3)\left(n^2+\sqrt{an^4+bn^3+1}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-b-\frac{1}{n^3}}{\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{b}{n}+\frac{1}{n^4}}\right)} = -\frac{b}{4} = \frac{1}{2}$$

$\therefore\ b=-2$

$\therefore\ a+b=-1$

18. 정답 ②

[해설] $f(n)$이 일차함수이고, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{f(n)}=\frac{1}{3}$이므로

$f(n)=6n+a$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

이때, $(f\circ f)(n)=6(6n+a)+a=36n+7a$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{(f\circ f)(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{36n+7a} = \frac{1}{18}$$

19. 정답 ②

[해설] $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+a}\,\sqrt{n+b}-n)$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+a)(n+b)-n^2}{\sqrt{n+a}\,\sqrt{n+b}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(a+b)n+ab}{\sqrt{n+a}\,\sqrt{n+b}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a+b+\frac{ab}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}\,\sqrt{1+\frac{b}{n}}+1}$$

$$= \frac{a+b}{2}$$

$a>0, b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a+b}{2}\geq \sqrt{ab}=\sqrt{4}=2$$

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

20. 정답 ②

[해설] $\lim_{n\to\infty}(n+a-\sqrt{n^2+2n+3})$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+a-\sqrt{n^2+2n+3})(n+a+\sqrt{n^2+2n+3})}{n+a+\sqrt{n^2+2n+3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2a-2)n+a^2-3}{n+a+\sqrt{n^2+2n+3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2a-2+\frac{a^2-3}{n}}{1+\frac{a}{n}+\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}}$$

$$= \frac{2a-2}{2}=0$$

$\therefore a=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty} n(n+a-\sqrt{n^2+2n+3})$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+a-\sqrt{n^2+2n+3})(n+a+\sqrt{n^2+2n+3})}{n+a+\sqrt{n^2+2n+3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\{(2a-2)n+a^2-3\}}{n+a+\sqrt{n^2+2n+3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2a-2)n+a^2-3}{1+\frac{a}{n}+\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}}$$

$$= \frac{1^2-3}{2}=-1$$

21. 정답 ④

[해설] 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=-\sqrt{n}-3,\ \alpha_n\beta_n=-\frac{\sqrt{n}}{4}-\frac{1}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-\sqrt{n}-3}{-\frac{\sqrt{n}}{4}-\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{1+0}{\frac{1}{4}+0}=4$$

22. 정답 ④

[해설] $a_{n-1}x^2-a_nx+1=0$의 두 근이 α,β이므로 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha+\beta=\frac{a_n}{a_{n-1}},\ \alpha\beta\frac{1}{a_{n-1}}$$

$\alpha\beta-3\alpha-3\beta+1=0,\ \alpha\beta-3(\alpha+\beta)+1=0$에서

$$\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{3a_n}{a_{n-1}}+1=0$$

$$3a_n=a_{n-1}+1,\ a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{3}$$

$$a_n-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(a_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$$

이 때, $a_1-\frac{1}{2}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 이므로

$$a_n-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\mathrm{Lim}_{n}\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$$

23. 정답 ③

[해설] $-1\le \sin n\theta\le 1$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sin n\theta\right)\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sin n\theta\right)=0$$

24. 정답 ②

[해설]

$\frac{4^n}{2}<2^{a_n}<2\cdot 4^n$ 에서

$$2^{2n-1}<2^{a_n}<2^{2n+1}$$

$$\therefore\ 2n-1<a_n<2n+1$$

양변을 n으로 나누면

$$\frac{2n-1}{n}<\frac{a_n}{n}<\frac{2n+1}{n}$$

한편, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$$

25. 정답 3

[해설] $3n^2-n-1<a_n<3n^2+n-1$의 각 변을 n^2+2n+3으로 나누면 $n^2+2n+3>0$이므로

$$\frac{3n^2-n-1}{n^2+2n+3}<\frac{a_n}{n^2+2n+3}<\frac{3n^2+n-1}{n^2+2n+3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n-1}{n^2+2n+3}\le\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+2n+3}\le\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n-1}{n^2+2n+3}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n-1}{n^2+2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n-1}{n^2+2n+3}=3$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+2n+3}=3$$

26. 정답 ③

[해설] $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=20,\ \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=10$ 에서

$c_n=a_n+b_n \quad \cdots$ ㉠ $\quad \lim_{n\to\infty}c_n=20$

$d_n=a_n-b_n \quad \cdots$ ㉡ $\quad \lim_{n\to\infty}d_n=10$

㉠ − ㉡을 하면 $c_n-d_n=2b_n$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(c_n-d_n)=\frac{1}{2}(20-10)=5$$

27. 정답 ④

[해설] $b_n=(n^2+6n+9)a_n$ 이라 하면

$\lim_{n\to\infty}(n^2+6n+9)a_n=6$ 에서 $\lim_{n\to\infty}b_n=6$

$$a_n=\frac{b_n}{n^2+6n+9}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(3n^2-2n)a_n=\lim_{n\to\infty}(3n^2-2n)\times\frac{b_n}{n^2+6n+9}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2-2n)}{n^2+6n+9}\times\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$=3\times 6=18$$

28. 정답 ③

[해설]

$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$ 에서

$a_{n+2}-a_n=a_{n+1}-a_n$ 이므로

$$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}$$

$$=a_{n-1}-a_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$=a_2-a_1=3-1=2$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$$a_n=1+(n-1)\times 2$$

$$=2n-1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{4n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{4-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$$

29. 정답 ②

[해설] $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$

$$=0+\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)$$

$$=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2}$$

$$=\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n(n+1)}{3n^3}=\frac{1}{3}$$

30. 정답 ⑤

[해설] $a_n=\dfrac{n^2}{n^2-1}a_{n-1}$에 $n=2,3,4,\cdots,n$을 차례로 대입하면

$a_2=\dfrac{2^2}{2^2-1}a_1$

$a_3=\dfrac{3^2}{3^2-1}a_2,$

$a_4=\dfrac{4^2}{4^2-1}a_3$

$\vdots$

$a_n=\dfrac{n^2}{n^2-1}a_{n-1}$

위 식의 양변을 변끼리 곱하면

$a_n=\dfrac{2^2}{2^2-1}\times\dfrac{3^2}{3^2-1}\times\cdots\times\dfrac{n^2}{n^2-1}\times a_1$

$a_n=\dfrac{2^2}{1\cdot 3}\times\dfrac{3^2}{2\cdot 4}\times\cdots\times\dfrac{n^2}{(n-1)(n+1)}\times a_1$

$\therefore\ a_n=\dfrac{2n}{n+1}\ (\because a_1=1)$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+1}=2$

31. 정답 ②

[해설] $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$라고 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_{n+1}=\beta$

이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-4b_{n+1})=3\alpha-4\beta=2\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\lim\limits_{n\to\infty}(4a_{n+1}+3b_n)=4\alpha+3\beta=1\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=\dfrac{2}{5},\ \beta=-\dfrac{1}{5}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta=\dfrac{2}{5}\times\left(-\dfrac{1}{5}\right)=-\dfrac{2}{25}$

32. 정답 ⑤

[해설] 주어진 식을 이용하여 각 항을 차례로 나열하면

$1,2,1,2,1,2,\cdots$

ㄱ. n이 홀수이면 $a_n=1$이므로 $a_{11}=1$이다. (참)

ㄴ. $a_{2n}=2$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=2$이다. (참)

ㄷ. $n=2m$ (m은 자연수)일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{2m}\sum\limits_{k=1}^{2m}a_k=\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{3m}{2m}=\dfrac{3}{2}$

$n=2m-1$ (m은 자연수)일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{2m-1}\sum\limits_{k=1}^{2m-1}a_k=\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{3m-2}{2m-1}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\dfrac{3}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ이다.

33. 정답 ③

[해설] ㄱ. $a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{3}{2}\quad\cdots\cdots$ ㉠

$b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{3}{2}\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠−㉡을 하면 $a_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n-b_n)$

$\therefore\ a_n-b_n=(a_1-b_1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

이 때, $a_1=b_1$이므로 $a_n-b_n=0\qquad\therefore\ a_n=b_n$ (참)

ㄴ. $a_1=0,\ b_1=1$이면

$a_2=-\dfrac{1}{2}b_1+\dfrac{3}{2}=1,\ b_2=-\dfrac{1}{2}a_1+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$이므로

$a_3=-\dfrac{1}{2}b_2+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{4}$

$\therefore\ a_2>a_3$ (거짓)

ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}b_n+\dfrac{3}{2}$

$\alpha=-\dfrac{1}{2}\beta+\dfrac{3}{2}\quad\cdots\cdots$ ㉢

$\lim\limits_{n\to\infty}b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\dfrac{3}{2}$

$\beta=-\dfrac{1}{2}\alpha+\dfrac{3}{2}\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉢과 ㉣을 연립하여 풀면 $\alpha=\beta=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

34. 정답 ②

[해설] $x_n-1=\dfrac{2x_{n-1}+1}{x_{n-1}+2}-1=\dfrac{x_{n-1}-1}{x_{n-1}+2}$

$x_n+1=\dfrac{2x_{n-1}+1}{x_{n-1}+2}+1=\dfrac{3x_{n-1}+3}{x_{n-1}+2}$

이므로 $y_n=\dfrac{x_n-1}{x_n+1}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x_{n-1}-1}{x_{n-1}+1}=\dfrac{1}{3}y_{n-1}\ (n=2,3,4,\cdots)$

수열 $\{y_n\}$은 $y_1=\dfrac{3-1}{3+1}=\dfrac{1}{2}$, 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이므로

$y_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-y_n}{1+y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}=1$

35. 정답 ④

[해설] $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3na_n+1}$의 역수를 취하면

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+3n$

$\therefore\ \dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_1}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}3k=3+3\cdot\dfrac{(n-1)n}{2}$

$=\dfrac{3(n^2-n+2)}{2}$

따라서 $a_n = \dfrac{2}{3(n^2-n+2)}$이므로

$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \dfrac{2n^2}{3(n^2-n+2)} = \dfrac{2}{3}$

36. 정답 ②

[해설] (나)에서 $a=n,\ b=1$로 놓으면

$f(n+1)=f(1)f(n) \qquad \therefore f(n+1)=\dfrac{1}{3}f(n)$

수열 $\{f(n)\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{3}$, 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이므로

$f(n)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

이때, $a_{n+1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n a_n$이므로

$$a_n = a_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1+2+3+\cdots+(n-1)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\log_3 a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\log_3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}\log_3 3^{-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{-n(n-1)}{2n^2} = -\frac{1}{2}$$

37. 정답 ③

[해설] $a_n = 2a_{n-1}-3b_{n-1},\ b_n = 3a_{n-1}+8b_{n-1}$에서

$$a_n+b_n = 2a_{n-1}-3b_{n-1}+3a_{n-1}+8b_{n-1} = 5(a_{n-1}+b_{n-1})$$

$a_n+b_n=c_n$ 이라 하면

$c_n = 5c_{n-1},\ c_1 = a_1+b_1 = 15\ (n \ge 2)$

이므로 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 15이고 공비가 5인 등비수열을 이룬다.

$\therefore c_n = 15\cdot 5^{n-1} = 3\cdot 5^n$

이때, $a_n+b_n=c_n$에서 $b_{n-1}=c_{n-1}-a_{n-1}=3\cdot 5^{n-1}-a_{n-1}$

이므로 $a_n = 2a_{n-1}-3b_{n-1}$에 대입하면

$a_n = 2a_{n-1}-3(3\cdot 5^{n-1}-a_{n-1}) = 5a_{n-1}-9\cdot 5^{n-1}$

위의 식의 양변을 5^n으로 나누면

$\dfrac{a_n}{5^n}=\dfrac{a_{n-1}}{5^{n-1}}-\dfrac{9}{5}$

따라서 수열 $\left\{\dfrac{a_n}{5^n}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{a_1}{5}=2$이고 공차가 $-\dfrac{9}{5}$인 등차수열이므로

$\dfrac{a_n}{5^n}=2+(n-1)\left(-\dfrac{9}{5}\right)=\dfrac{19-9n}{5}$

$\therefore a_n = (19-9n)\cdot 5^{n-1},\ b_n=(9n-4)\cdot 5^{n-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(9n-4)5^{n-1}}{(19-9n)5^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{9-\frac{4}{n}}{\frac{19}{n}-9} = -1$$

38. 정답 ③

[해설] 두 함수 $f(x)=2x^2,\ g(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{x+2}$에 대하여

$$a_{2(k+1)} = f(a_{2k+1}) = f(g(a_{2k})) = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{a_{2k}+2}\right)^2 = \frac{1}{2}(a_{2k}+2)$$

$a_{2(k+1)}-2=\dfrac{1}{2}(a_{2k}-2)$

$\therefore a_{2n}-2=(a_2-2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

이 때, $a_2=f(a_1)=1$ 이므로

$a_{2n}=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

ㄱ. $a_4 = 2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2-1}=\dfrac{3}{2}$ (참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=2$ (참)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{a_{2n}+2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{4-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{4}=1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

39. 정답 ⑤

[해설] ㄱ. $a_{n+1} = \dfrac{300\times\frac{a_n}{100}+100\times\frac{b_n}{100}}{400}\times 100$

$=\dfrac{3}{4}a_n+\dfrac{1}{4}b_n$ (참)

ㄴ. $b_{n+1} = \dfrac{100\times\frac{a_n}{100}+100\times\frac{b_n}{100}}{200}\times 100$

$=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n$

ㄱ에서 $a_{n+1}=\dfrac{3}{4}a_n+\dfrac{1}{4}b_n$ 이므로

$2a_{n+1}+b_{n+1}=2a_n+b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\therefore a_{n+1}-a_n=-\dfrac{1}{2}(b_{n+1}-b_n)$ (참)

ㄷ. $a_1 = \dfrac{300\times\frac{16}{100}+100\times\frac{4}{100}}{400}\times 100 = 13$

$b_1 = \dfrac{100\times\frac{16}{100}+100\times\frac{4}{100}}{200}\times 100 = 10$

$2a_{n+1}+b_{n+1}=2a_n+b_n=\cdots=2a_1+b_1=36$ 이므로

$b_n = 36-2a_n$

ㄱ에서 $a_{n+1}=\dfrac{3}{4}a_n+\dfrac{1}{4}b_n$ 이므로

$a_{n+1}=\dfrac{3}{4}a_n+\dfrac{1}{4}(36-2a_n)$

$a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+9$

$a_{n+1}-12=\frac{1}{4}(a_n-12)$

$\therefore\ a_n=12+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=12$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

40. 정답 163

[해설] $x_1=0,\ x_2=80$이라 하면

$x_{n+2}=\frac{x_n+x_{n+1}}{2}=\frac{1}{2}x_{n+1}+\frac{1}{2}x_n$이므로

$x_{n+2}-x_{n+1}=-\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_n)$에서

$x_{n+1}-x_n=80\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\therefore\ x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}80\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$=0+\frac{80\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{160}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{160}{3}$이므로 $p=3,\ q=160$

$\therefore\ p+q=163$

41. 정답 ④

[해설] $P_1(a_1,a_1)$에서 $a_1=1$이므로 $P_1(1,1)$

$P_n(a_n,a_n)$이라 하면 $P_{n+1}(a_{n+1},a_{n+1})$

$\therefore a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+1$

이것을 변형하면

$a_{n+1}-2=\frac{2}{3}(a_n-3)$

따라서 수열 $\{a_n-3\}$은 첫째항이 $a_1-3=-2$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이다.

$\therefore a_n-3=-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n=3-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{3-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}=3$

42. 정답 ②

[해설]

$f(n)=n^2+n$이므로

$$y_n=\frac{2n(n^2+n)+(n^3+n)\times0}{2n+(n^3+n)}=\frac{2n^3+2n^2}{n^3+3n}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+2n^2}{n^3+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n^2}}=2$$

43. 정답 ②

[해설]

$y=\log_n\sqrt{x^3}$과 $y=\frac{3}{2}$을 연립하면

$\log_n\sqrt{x^3}=\frac{3}{2},\ x^{\frac{3}{2}}=n^{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ x=n$

또, $y=\log_{\sqrt{n^2+n}}x$와 $y=\frac{3}{2}$을 연립하면

$\log_{\sqrt{n^2+n}}x=\frac{3}{2}$

$x=\left(\sqrt[3]{n^2+n}\right)^{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ x=\sqrt{n^2+n}$

한편, 두 점 $P_n,\ Q_n$은 직선 $y=\frac{3}{2}$위에 있으므로

$\overline{P_nQ_n}=\sqrt{n^2+n}-n$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\overline{P_nQ_n}-\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}\right)+n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$$=\frac{1}{2}$$

44. 정정답 ②

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=3x+n$이 만나는 두 점 $A_n,\ B_n$의 x좌표를 각각 $\alpha_n,\ \beta_n$이라 하면 $A_n(\alpha_n,\ 3\alpha_n+n),\ B_n(\beta_n,\ 3\beta_n+n)$이고 $\alpha_n,\ \beta_n$은 $x^2-3x-n=0$의 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha_n+\beta_n=3,\ \alpha_n\beta_n=-n$

$$\therefore\ \alpha_n^2=\overline{A_nB_n}^2=(\alpha_n-\beta_n)^2+(3\alpha_n-3\beta_n)^2=10(\alpha_n-\beta_n)^2$$

$$=10\left\{(\alpha_n+\beta_n)^2-4\alpha_n\beta_n\right\}=10(3^2+4n)=40n+90$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{8n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{40n+90}{8n-3}=5$$

45. 정답 ⑤

[해설] $a_n=\frac{1}{2}nh_n$ ⋯⋯ ㉠

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 공비를 r라 하면

$a_n=\frac{1}{2}r^{n-1}$ ⋯⋯ ㉡

ㄱ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\frac{1}{2}$이면

㉠에서 $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}nh_n$

$\therefore\ h_n=\frac{1}{n}$ (참)

ㄴ. $h_2=\frac{1}{4}$이면 ㉠과 ㉡에서

$a_2=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}r$

$\therefore\ r=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (참)

ㄷ. $a_2=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot h_2=\frac{1}{2}r$에서 $r=2h_2$

$h_2<\frac{1}{2}$ 이면 $0<2h_2<1$이므로 $0<r<1$

$\lim_{n\to\infty}nh_n=\lim_{n\to\infty}r^{n-1}=0$ (참)

($\because$ ㉠, ㉡에서 $nh_n=r^{n-1}$)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

46. 정답 ④

[해설]

P_n의 좌표를 (x_n, y_n)이라 하면 Q_n의 좌표는 $\left(\frac{1+x_n}{2}, \frac{y_n}{2}\right)$이므로

P_{n+1}의 좌표는 $\left(\frac{1+x_n}{4}, \frac{2+y_n}{4}\right)$이다

$\therefore x_{n+1}=\frac{1+x_n}{4},\ y_{n+1}=\frac{2+y_n}{4}$

$x_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(x_n-\frac{1}{3}\right)$에서 $x_{n+1}=\frac{1}{3}+\left(x_1-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4^{n-1}}$

$y_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\left(y_n-\frac{2}{3}\right)$에서 $y_{n+1}=\frac{2}{3}+\left(y_1-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{4^{n-1}}$

$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{3},\ \lim_{n\to\infty}y_n=\frac{2}{3}$이므로 n이 한없이 커질 때,

점 P_n은 점 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$에 한없이 가까워진다

47. 정답 ②

[해설] 직선$\mathrm{P_0P_1}$의 기울기가 1이므로 직선$\mathrm{P_1P_2}$의 기울기는 -1이다.

점$\mathrm{P_1}(1,1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-1=-(x-1)$

즉, $y=-x+2$이므로 점$\mathrm{P_2}$의 좌표를 구하면

$x^2=-x+2$에서 $x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$x\neq 1$ 이므로 $x=-2$

$\therefore\ \mathrm{P_2}(-2,4)$

점$\mathrm{P_2}(-2,4)$를 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y-4=x+2$

즉, $y=x+6$이므로 점$\mathrm{P_3}$의 좌표를 구하면

$x^2=x+6$에서 $x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

$x\neq -2$이므로 $x=3$

$\therefore\ \mathrm{P_3}(3,9)$

점$\mathrm{P_3}(3,9)$를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-9=-(x-3)$

즉, $y=-x+12$이므로 점$\mathrm{P_4}$의 좌표를 구하면

$x^2=-x+12$에서 $x^2+x-12=0$, $(x+4)(x-3)=0$

$x\neq 3$ 이므로 $x=-4$

$\therefore\ \mathrm{P_4}(-4,16)$

이와 같은 방법으로 $\mathrm{P_n}$의 좌표를 구하면

$\mathrm{P_{2m-1}}(2m-1, 4m^2-4m+1)$

$\mathrm{P_{2m}}(-2m, 4m^2)\ (m=0,1,2,\cdots)$

$n=2m$일 때,

$$\begin{aligned} l_n=l_{2m}&=\overline{\mathrm{P_{2m-1}P_{2m}}}\\ &=\sqrt{(4m-1)^2+(4m-1)^2}\\ &=\sqrt{2}(4m-1)\\ &=\sqrt{2}(2n-1)\end{aligned}$$

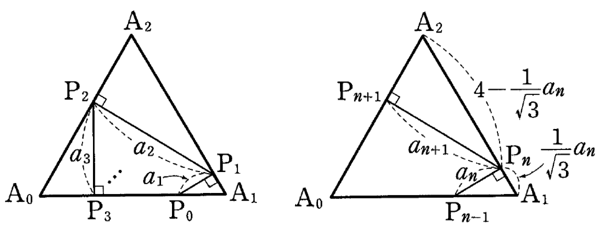
$n=2m+1$일 때,

$$\begin{aligned} l_n=l_{2m+1}&=\overline{\mathrm{P_{2m}P_{2m+1}}}\\ &=\sqrt{(4m+1)^2+(4m+1)^2}\\ &=\sqrt{2}(4m+1)\\ &=\sqrt{2}(2n-1)\end{aligned}$$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}(2n-1)}{n}=2\sqrt{2}$

48. 정답 ⑤

[해설]



위의 그림에서

$a_1=\overline{\mathrm{A_1P_0}}\sin 60^\circ=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a_2=\overline{\mathrm{A_2P_1}}\sin 60^\circ=\frac{7}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{4}$ 이고

$a_{n+1}=\left(4-\frac{1}{\sqrt{3}}a_n\right)\sin 60^\circ=-\frac{1}{2}a_n+2\sqrt{3}$ 이므로

$a_{n+1}-\frac{4\sqrt{3}}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

$$\begin{aligned}\therefore\ a_n&=\frac{4\sqrt{3}}{3}+\left(a_1-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ &=\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{5\sqrt{3}}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\end{aligned}$$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{5\sqrt{3}}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

49. 정답 ③

[해설] $\mathrm{P}_n(a_n,\ b_n)$은 $y=x^2\ (x\geq 0)$ 위의 점이므로 $b_n=a_n{}^2$

수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 6이고 공차가 4인 등차수열이므로

$c_n = 4n+2$

따라서 $c_n = b_{n+1} - b_n$에서

$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = \sum_{k=1}^{n-1}(4k+2) = 2(n^2-1)$

$x \geq 0$에서 $a_n \geq 0$이므로

$a_n = \sqrt{2(n^2-1)}\ (n \geq 2)$

$n=1$ 일 때, $a_1 = b_1 = 0$ 이므로

$a_n = \sqrt{2(n^2-1)}\ (n \geq 1)$

$\therefore a_{n+1} - a_n = \sqrt{2(n+1)^2 - 2} - \sqrt{2n^2-2}$

$= \dfrac{4n+2}{\sqrt{2(n+1)^2-2} + \sqrt{2n^2-2}}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{4+\dfrac{2}{n}}{\sqrt{2+\dfrac{4}{n}} + \sqrt{2-\dfrac{2}{n^2}}} = \sqrt{2}$

50. 정답 ③

[해설] 주어진 분수함수의 그래프에서 점근선의 방정식이

$x=-2,\quad y=1$이므로 $f(x) = \dfrac{a}{x+2}+1$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$을 지나므로

$f(0) = \dfrac{a}{2}+1 = \dfrac{1}{2}$

$\therefore a = -1$

$f(x) = \dfrac{-1}{x+2}+1 = \dfrac{x+1}{x+2}$

$f\left(\dfrac{2}{n}\right) = \dfrac{\dfrac{2}{n}+1}{\dfrac{2}{n}+2} = \dfrac{n+2}{2n+2}$

$\therefore A_n\left(\dfrac{2}{n}, \dfrac{n+2}{2n+2}\right),\ B_n\left(\dfrac{2}{n}, 0\right)$

따라서 삼각형 A_nOB_n의 넓이 S_n은

$S_n = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{n+2}{2n+2} = \dfrac{n+2}{2n(n+1)}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} nS_n = \lim_{n\to\infty}\dfrac{n(n+2)}{2n(n+1)} = \dfrac{1}{2}$

51. 정답 8

[해설] $f(n) = \overline{OA_n} - \overline{OB_n} = \sqrt{n^2+16n} - n$

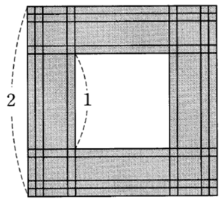
$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+16n}-n) = \lim_{n\to\infty}\dfrac{16n}{\sqrt{n^2+16n}+n}$

$= \lim_{n\to\infty}\dfrac{16}{\sqrt{1+\dfrac{16}{n}}+1}$

$=8$

52. 정답 50

[해설] (ⅰ) 가로 방향으로 $4n$개의 정사각형을 그린 경우

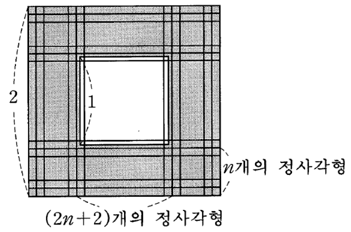


[그림 1]

[그림1]과 같이 한 변의 길이가 $\dfrac{1}{2n}$인 작은 정사각형을 어두운 부분에 넣는 경우 가로 방향과 세로 방향에 각각 최대 $4n$(개)의 정사각형이 들어가므로

$a_{2n} = (4n)^2 - (2n)^2 = 12n^2$

(ⅱ) 가로 방향으로 $(4n+2)$개의 정사각형을 그린 경우



[그림 2]

[그림2]와 같이 한 변의 길이가 $\dfrac{1}{2n+1}$인 작은 정사각형을 어두운 부분에 넣는 경우 가로 방향과 세로 방향에 각각 최대 $(4n+2)$(개)의 정사각형이 들어가므로

$a_{2n+1} = n\times(4n+2)\times 2 + (2n+2)\times n \times 2$

$= 2n(4n+2+2n+2)$

$= 2n(6n+4)$

$= 4n(3n+2)$

$\therefore a_{2n+1} - a_{2n} = 4n(3n+2) - 12n^2 = 8n$

$a_{2n} - a_{2n-1} = 12n^2 - 4(n-1)\{3(n-1)+2\}$

$= 12n^2 - 4(n-1)(3n-1)$

$= 12n^2 - 4(3n^2-4n+1) = 16n-4$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n+1}-a_{2n}}{a_{2n}-a_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{8n}{16n-4} = \dfrac{1}{2} = c$

따라서 $100c = 100\times\dfrac{1}{2} = 50$

53. 정답 ②

[해설] $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^n(2^{n+1}+1)}{4^{n+1}+2^n-1} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n+1}+2^n}{2^{2n+2}+2^n-1}$

$= \lim_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot 2^{2n}+2^n}{4\cdot 2^{2n}+2^n-1}$

$= \lim_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{2^n}}{4+\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{2^{2n}}}$

$= \dfrac{1}{2}$

54. 정답 ①

[해설] $\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n-3\cdot 4^n}{2^{2n}+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n-3}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

$=\frac{0-3}{1+0}=-3$

55. 정답 ①

[해설] $A^2=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2&0\\0&3^3\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}2^2&0\\0&3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^3&0\\0&3^3\end{pmatrix},\ \cdots,$

$A^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}$

이므로 $a_n=2^n,\ b_n=3^n$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-3b_n}{3a_n+2b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n-3\cdot 3^n}{3\cdot 2^n+2\cdot 3^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n-3}{3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+2}=-\frac{3}{2}$

56. 정답 ④

[해설] $a_n=S_n-S_{n-1}=n\cdot 3^n-(n-1)\cdot 3^{n-1}$

$=3^{n-1}(2n+1)\quad(n\ge 1)\quad(\because a_1=3)$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\frac{n\cdot 3^n}{3^{n-1}(2n+1)}=\frac{3}{2}$

57. 정답 ③

[해설]

다항식 $(x+3)^n$을 다항식 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R_n(x)=a_nx+b_n$이라 하면

$(x+3)^n=(x^2-1)Q(x)+a_nx+b_n$

$=(x+1)(x-1)Q(x)+a_xx+b_n$

이 식에 $x=-1$을 대입하면

$2^n=-a_n+b_n$ …… ㉠

또, $x=1$을 대입하면

$4^n=a_n+b_n$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면

$a_n=\frac{4^n-2^n}{2},\ b_n=\frac{4^n+2^n}{2}$

따라서 $R_n(x)=\frac{4^n-2^n}{2}x+\frac{4^n+2^n}{2}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n(2)}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4^n-2^n)+\frac{4^n+2^n}{4^n}}{4^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 4^n-2^n}{2\cdot 4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2}=\frac{3}{2}$

58. 정답 ①

[해설]

$A^2=\begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^2&3+2\\0&2^2\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}3^2&3+2\\0&2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^3&3^2+3\cdot 2+2^2\\0&2^3\end{pmatrix}$

$A^4=\begin{pmatrix}3^3&3^2+3\cdot 2+2^2\\0&2^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3^4&3^{n-1}+3^{n-2}\cdot 2+\cdots+2^{n-1}\\0&2^n\end{pmatrix}$

$\vdots$

$A^n=\begin{pmatrix}3^n&3^{n-1}+3^{n-2}\cdot 2+\cdots+2^{n-1}\\0&2^n\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3^n&\frac{3^{n-1}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{2}{3}}\\0&2^n\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3^n&3^n\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\\0&2^n\end{pmatrix}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n+c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{3^n+2^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1$

59. 정답 ③

[해설]

$\log N$의 지표가 n인 자연수 N은

$10^n\le N\le 10^{n+1}$

이므로

$f(n)=10^{n+1}-10^n=9\cdot 10^n$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)+f(2n+1)}{f(2n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{9\cdot 10^n+9\cdot 10^{2n+1}}{9\cdot 10^{2n+3}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{10^n+10\cdot 10^{2n}}{1000\cdot 10^{2n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^n+10}{1000}$

$\frac{1}{100}$

60. 정정답 ④

$10^n=(2\times 5)^n=2^n\times 5^n$이므로

$f(n)=(1+2+2^2+\cdots+2^n)(1+5+5^2+\cdots+5^n)$

$=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\times\frac{5^{n+1}-1}{5-1}=\frac{1}{4}(2^{n+1}-1)(5^{n+1}-1)$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{10^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\times\frac{(2^{n+1}-1)(5^{n+1}-1)}{10^n}$

$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{10^{n+1}-2^{n+1}-5^{n+1}+1}{10^n}\right)$

$= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left\{10-2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}$

$= \frac{1}{4}\cdot 10 = \frac{5}{2}$

61. 정답 ④

[해설] $f(n)=1+2+2^2+\cdots+2^n=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=2^{n+1}-1$

$g(n)=1+3+3^2+\cdots+3^n$

$=\frac{3^{n+1}-1}{3-1}=\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3f(n)+2g(n)}{2^n+3^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(2^{n+1}-1)+2\cdot\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)}{2^n+3^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 3^n+6\cdot 2^n-4}{2^n+3^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n-4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=3$

62. 정답 ④

[해설] $f(x)=x^{n+1}+x^n$으로 놓고 $f(x)$를 $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 a_nx+b_n이므로

$f(x)=(x-3)(x+2)Q(x)+a_nx+b_n$

$f(3)=3^{n+1}+3^n=3a_n+b_n$ …… ㉠

$f(-2)=(-2)^{n+1}+(-2)^n=-2a_n+b_n$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a_n=\frac{3^{n+1}+3^n-(-2)^{n+1}-(-2)^n}{5}$

$b_n=\frac{2\cdot 3^{n+1}+2\cdot 3^n+3\cdot(-2)^{n+1}+3\cdot(-2)^n}{5}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{2\cdot 3^{n+1}+2\cdot 3^n+3\cdot(-2)^{n+1}+3\cdot(-2)^n}{3^{n+1}+3^n-(-2)^{n+1}-(-2)^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+2+(-6)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^n+3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{3+1+2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^n-\left(-\frac{2}{3}\right)^n}=2$

63. 정답 ⑤

[해설] $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$이므로

$0\le x\le 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$이고, $0\le y\le 1$에서

$0\le 4x+y\le 5-4\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $a_n=5-4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{5-4\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=5$

64. 정답 ②

[해설] 분자의 최대 밑수가 3이므로 분모의 밑의 수 $3-\sqrt{3}+2\cos\theta$의 절댓값이 3보다 크면 극한은 0이므로 수렴하고, 3보다 작으면 무한대로 발산한다.

따라서 0이 아닌 값으로 수렴할 수 있는 경우는

$3-\sqrt{3}+2\cos\theta=3$ 일 때이다.

즉, $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore b=\frac{\pi}{6}\ \left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$

이 때, 주어진 식은 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}$이므로 $a=\frac{1}{3}$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\pi}{2}$

65. 정답 ④

[해설] $70^n=2^n5^n7^n$이므로

$S_n=(1+2+2^2+\cdots+2^n)\times(1+5+5^2+\cdots+5^n)$

$\times(1+7+7^2+\cdots+7^n)$

$=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\times\frac{5^{n+1}-1}{5-1}\times\frac{7^{n+1}-1}{7-1}$

$=\frac{1}{24}(2^{n+1}-1)(5^{n+1}-1)(7^{n+1}-1)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{70^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{24}\left(2-\frac{1}{2^n}\right)\left(5-\frac{1}{5^n}\right)\left(7-\frac{1}{7^n}\right)$

$=\frac{1}{24}\times 2\times 5\times 7=\frac{35}{12}$

66. 정답 ⑤

[해설] $(x+2)^n=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b$ … ㉠

라 하면 $R(x)=ax+b$이다.

㉠에 $x=1$을 대입하면 $3^n=a+b$

㉠에 $x=3$을 대입하면 $5^n=3a+b$

$\therefore a=\frac{5^n-3^n}{2}$, $b=\frac{3^{n+1}-5^n}{2}$

$R(0)=\frac{3^{n+1}-5^n}{2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+5^n}{R(0)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+5^n}{\frac{3^{n+1}-5^n}{2}}=-2$

67. 정답 ②

[해설] $a_n=10^{n-1}+(10^{n-1}+1)+(10^{n-1}+2)+\cdots+(10^n-1)$ 이므로

$a_n=\sum_{k=1}^{10^n-1}k-\sum_{k=1}^{10^{n-1}-1}k$

$=\frac{(10^n-1)10^n}{2}-\frac{(10^{n-1}-1)10^{n-1}}{2}$

$=\frac{10^{2n}-10^n-10^{2n-2}+10^{n-1}}{2}$

$=\frac{99\cdot 10^{2n-2}-9\cdot 10^{n-1}}{2}$

$$= \frac{9}{2} \cdot 10^{n-1}(11 \cdot 10^{n-1} - 1)$$

$$\frac{a_n}{10^{2n}} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{10^{n+1}}(11 \cdot 10^{n-1} - 1)$$

$$= \frac{9}{2}\left(\frac{11}{100} - \frac{1}{10^{n+1}}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{10^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{2}\left(\frac{11}{100} - \frac{1}{10^{n+1}}\right) = \frac{99}{200}$$

68. 정답 ②

[해설]

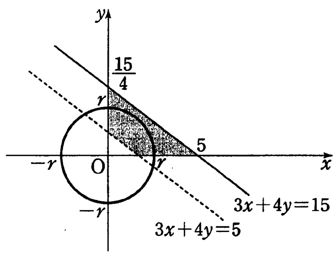
$\left\{\frac{(3x+4y-10)^n}{5^n}\right\}$에서 $\left\{\left(\frac{3x+4y-10}{5}\right)^n\right\}$이므로 무한등비수열이 수렴할 조건은

$$-1 < \frac{3x+4y-10}{5} \leq 1$$

$$-5 < 3x+4y-10 \leq 5$$

$\therefore\ 5 < 3x+4y \leq 15$ (단, $x>0$, $y>0$)

이 부등식의 영역은 오른쪽 그림과 같다.



이때, $x^2+y^2=r^2$이라 하면 이 원과 직선이 원과 직선 $3x+4y-5=0$이 접할 때의 반지름의 길이 r은

$$r = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$= 1$

이므로 조건을 만족시키는 r^2의 범위는

$r^2 > 1$ ……㉠

또, 원 $x^2+y^2=r^2$이 점 (5, 0)을 지날 때, $r^2=25$이므로 조건을 만족시키는 r^2의 범위는

$r^2 < 25$ ……㉡

따라서 ㉠, ㉡에서

$1 < r^2 < 25$

이므로 자연수 r^2의 값은 23개다.

69. 정답 ②

[해설] (i) $x=-1$ 일 때, 주어진 무한수열은 수렴한다.

(ii) $x \neq -1$일 때, 주어진 무한수열이 수렴하기 위한 조건은

$$-1 < \frac{3x-7}{4} \leq 1$$

$-4 < 3x-7 \leq 4$, $3 < 3x \leq 11$

$$\therefore\ 1 < x \leq \frac{11}{3}$$

따라서 정수 x의 값은 2, 3이다.

(i), (ii)에서 주어진 무한수열이 수렴하도록 하는 정수 x의 값은 -1, 2, 3이므로 이 값들의 합은 $-1+2+3=4$

70. 정답 ③

[해설]

$r>0$이므로 각 경우로 나누면 다음과 같다.

(i) $0<r<1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}+3r+2}{r^n+1} = 3r+2 = 3$$

$$\therefore\ r = \frac{1}{3}$$

(ii) $r=1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}+3r+2}{r^n+1} = 3$$

즉, 주어진 식은 성립한다.

(iii) $r>1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}+3r+2}{r^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{r+3\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}+2\left(\frac{1}{r}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{r}\right)^n} = r = 3$$

$\therefore\ r=3$

따라서 (i), (ii), (iii)에서 r의 모든 값의 합은

$$\frac{1}{3}+1+3 = \frac{13}{3}$$

71. 정답 ③

[해설]

$2^x>0$이므로 2^x의 값에 따라 범위를 나누면 다음과 같다.

(i) $2^x>1$, 즉, $x>0$일 때,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^x)^{n+1}-(2^x)^n+2}{(2^x)^n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^x-1+2 \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2^x}\right)^n}$$

$= 2^x - 1$

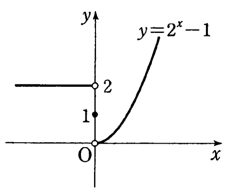
(ii) $2^x=1$, 즉 $x=0$일 때,

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^0)^{n+1}-(2^0)^n+2}{(2^0)^n+1} = 1$$

(iii) $0<2^x<1$, 즉 $x<0$일 때,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^x)^{n+1}-(2^x)^n+2}{(2^x)^n+1} = 2$$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



72. 정답 ①

[해설] (i) $|2r+1|<1$, 즉 $-1<r<0$일 때, $n\to\infty$이면 $(2r+1)^{2n}\to 0$이므로

$$a = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

(ii) $r=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{1-(2r+1)^{2n+1}}{1+(2r+1)^{2n}} = \frac{1+1}{1+1} = 1 = b$

(iii) $|2r+1|>1$, 즉 $r<-1$ 또는 $r>0$일 때, $n\to\infty$이면

$(2r+1)^{2n} \to \infty$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-(2r+1)^{2n+1}}{1+(2r+1)^{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2r+1)^{2n}} - (2r+1)}{\frac{1}{(2r+1)^{2n}}+1}$$

$$= -2r-1$$

즉, $r<-1$일 때, $c=-2r-1$

$$\therefore \ \frac{a+b+2c}{r} = \frac{1+1+2(-2r-1)}{r} = -4$$

***73.* 정답 ③**

[해설] $a_{n+1} \leqq \frac{2009}{2010} a_n$ 이므로

$$0 < a_n \leqq \left(\frac{2009}{2010}\right)^{n-1} \cdot a_1$$

$$\therefore \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\therefore \ \lim_{n\to\infty} \frac{2a_n+n-2}{5a_n+4n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot \frac{a_n}{n} + 1 - \frac{2}{n}}{5 \cdot \frac{a_n}{n} + 4 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{4}$$

***74.* 정답 ①**

[해설]

기울기가 $-\sqrt{3}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$인 직선이 x축과 이루는 예각의 크기는 각각 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$이므로

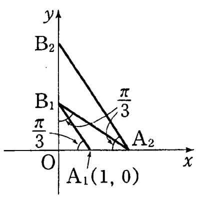
$$\overline{OB_1} = \overline{OA_1}\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\overline{OA_2} = \overline{OB_1}\tan\frac{\pi}{3} = 3$$

$$\overline{OB_2} = \overline{OA_2}\tan\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\overline{OA_3} = \overline{OB_2}\tan\frac{\pi}{3} = 3^2$$

$$\vdots$$



$$\therefore \ \overline{OA_n} = 3^{n-1}, \ \overline{OB_n} = \sqrt{3} \cdot 3^{n-1}$$

따라서

$$S_n = \frac{1}{2}\overline{OA_n} \cdot \overline{OB_n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3^{2n-2}$$

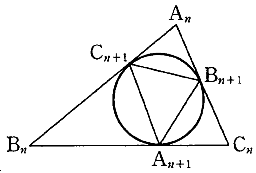
이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{(3^n+2^n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3^{2n-2}}{3^{2n}+2 \cdot 6^n + 2^{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3^{-2}}{1+2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}} = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

***75.* 정답 ④**

[해설]



오른쪽 그림의 삼각형 $A_nC_{n+1}B_{n+1}$에서 $\overline{A_nC_{n+1}} = \overline{A_nB_{n+1}}$이므로

$\angle A_nB_{n+1}C_{n+1} = \angle A_nC_{n+1}B_{n+1}$ …… ㉠

한편, 원의 성질에 의해 원의 접선인 직선 A_nB_n과 그 접점 C_{n+1}을 지나는 현 $C_{n+1}B_{n+1}$이 이루는 각인 $\angle A_nC_{n+1}B_{n+1}$의 크기는 호 $B_{n+1}C_{n+1}$에 대한 원주각인 $\angle B_{n+1}A_{n+1}C_{n+1}$의 크기와 같으므로

$\angle A_nC_{n+1}B_{n+1} = \angle B_{n+1}A_{n+1}C_{n+1}$ …… ㉡

이때, $\angle B_nA_nC_n = \theta_n$이라 하면 ㉠과 ㉡에서

$\angle A_nB_{n+1}C_{n+1} = \angle B_{n+1}A_{n+1}C_{n+1} = \theta_{n+1}$

그러므로 $\triangle A_nC_{n+1}B_{n+1}$에서

$$\theta_n + 2\theta_{n+1} = \pi$$

$$\therefore \ \theta_{n+1} = -\frac{1}{2}\theta_n + \frac{\pi}{2}$$

이 식을 변형하면

$$\theta_{n+1} - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\left(\theta_n - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore \ \theta_n - \frac{\pi}{3} = \left(\theta_1 - \frac{\pi}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \ \lim_{n\to\infty} \angle B_nA_nC_n = \lim_{n\to\infty} \theta_n = \frac{\pi}{3}$$

***76.* 정답 64**

[해설]

$f(n) = 2^n$, $g(n) = 2^{n-3}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)f(2n)}{g(n)\{f(n)+g(2n)\}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n 2^{2n}}{2^{n-3}(2^n+2^{2n-3})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n}}{\frac{1}{2^3}2^{2n} + \frac{1}{2^6}2^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{2^3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2^6}}$$

$$= 2^6 = 64$$

***77.* 정답 12**

[해설] $A_1(1, 0)$, $B_1(0, 1)$, $C_1(1, 1)$에서

$$a_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = 3$$

$\overline{A_2B_2}$의 중점이 $C_1(1, 1)$이므로

$A_2(2, 0)$, $B_2(2, 0)$, $C_2(2, 2)$

$$a_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2, \ b_2 = 6$$

$\overline{A_3B_3}$의 중점이 $C_2(2, 2)$이므로

$A_3(2^2, 0)$, $B_3(0, 2^2)$, $C_3(2^2, 2^2)$

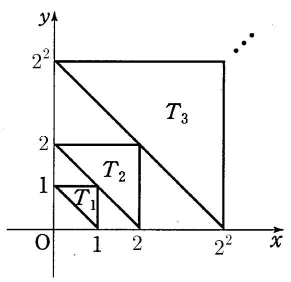
$$a_3 = \frac{1}{2} \times 2^2 \times 2^2 = 8, \ b_3 = 12$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2} \cdot 4^{n-1} = 2^{2n-3}, \ b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore \ \lim_{n\to\infty} \frac{2^n b_n}{a_n + 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot 3 \cdot 2^{n-1}}{2^{2n-3}+2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n-1} \cdot 3}{2^{2n-3}+2^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^{2n-1}\cdot 3}{2^{2n}}}{\dfrac{2^{2n-3}}{2^{2n}}+\dfrac{2^n}{2^{2n}}} = \frac{3\cdot 2^{-1}}{2^{-3}+0} = 12$$

다른 풀이



위 그림에서 T_n의 한 변의 길이는 2^{n-1}이므로

$a_n = \frac{1}{2}\cdot(2^{n-1})^2 = 2\cdot 4^{n-1}$

T_n에서 세 개의 꼭짓점을 제외한 각 변에 존재하는 격자점의 개수는 모두

$2^{n-1}-1$개이므로

$b_n = 3(2^{n-1}-1)+3 = 3\times 2^{n-1}$

$\therefore$ (준식)$= \lim_{n\to\infty}\dfrac{2^n\times 3\cdot 2^{n-1}}{\frac{1}{2}\cdot 4^{n-1}+2^n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{6}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n-2}}} = 12$$

참고 T_n 위에 일일이 격자점을 그려서 세어 보면

$b_1 = 3,\ b_2 = 6,\ b_3 = 12,\ b_4 = 24,\ \cdots$

가 되어, 수열 $\{b_n\}$은 공비가 2인 등비수열임을 알 수 있다.

78. 정답 ①

[해설]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\beta$라 하자.

이때, $a_n+b_n = c_n$, $a_n-b_n = d_n$이라 하면

$a_n = \dfrac{c_n+d_n}{2}$, $b_n = \dfrac{c_n-d_n}{2}$

한편, $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}d_n=\beta$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\dfrac{c_n+d_n}{2} = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$\lim_{n\to\infty}b_n = \lim_{n\to\infty}\dfrac{c_n-d_n}{2} = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$

즉, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 수렴한다. (참)

ㄴ. (반례) $a_n = 0$, $b_n = (-1)^n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n = \lim_{n\to\infty}0 = 0$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}0 = 0$

즉, 두 수열 $\{a_nb_n\}$, $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$은 수렴한다.

그러나 수열 $\{b_n\}$은 수렴하지 않는다. (거짓)

ㄷ. (반례) $a_n = (-1)^n$, $b_n = -(-1)^n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty}0 = 0$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}(-1) = -1$

즉, 두 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$은 수렴한다.

그러나 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 수렴하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

79. 정답 ④

[해설]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n = \beta$

라 하면, $a_n < 0 < b_n$에서

$\lim_{n\to\infty}a_n \leq 0 \leq \lim_{n\to\infty}b_n$

$\therefore\ \alpha \leq 0 \leq \beta$ $\cdots\cdots$ ㉠

ㄱ. (반례) $a_n = -\dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$이라 하면

$a_n < 0 < b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}b_n = 0$, 즉 수렴하지만

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n = 0$ (거짓)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = 0$에서

$\lim_{n\to\infty}a_n - \lim_{n\to\infty}b_n = 0$

즉, $\alpha = \beta$

㉠에서 $\alpha \leq 0 \leq \beta$이므로 $\alpha = \beta = 0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_nb_n = \lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n = \alpha\beta = 0$ (참)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}a_nb_n = \lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n = \alpha\beta < 0$이면

㉠에서 $\alpha \leq 0 \leq \beta$이므로

$\alpha < 0$ 이고 $\beta > 0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty}a_n - \lim_{n\to\infty}b_n = \alpha-\beta < 0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

80. 정답 ②

[해설]

ㄱ. (반례) $a_n = n-\dfrac{1}{n}$, $b_n = n+\dfrac{1}{n}$, $c_n = n$이면

$a_n < c_n < b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n) = \lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{n} = 0$이지만

$\lim_{n\to\infty}c_n = \lim_{n\to\infty}n = +\infty$ (발산) (거짓)

ㄴ. 수열 $\{b_n\}$이 수렴하면

$\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\{(a_n-b_n)+b_n\} = \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)+\lim_{n\to\infty}b_n$

에서 수열 $\{a_n\}$은 수렴하므로 모순이다

그러므로 수열 $\{b_n\}$도 발산한다 (참)

ㄷ. (반례) $\{a_n\}: 1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots$

$\{b_n\} : 0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots$

이면 $\{a_nb_n\}$은 $0, 0, 0, 0, 0, \cdots$이므로

수열 $\{a_nb_n\}$은 0으로 수렴하고 수열 $\{a_n\}$은 0으로 수렴하지 않는다

이 때, 수열 $\{b_n\}$도 0으로 수렴하지 않는다 (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다

***81.* 정답 ③**

[해설] ㄱ. $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$에서 $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$이면

$0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다. (참)

ㄴ. (반례) $a_n = (-1)^n$ 이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 0$이지만 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\left(a_n + \frac{1}{n}\right) = 0$에서 $b_n = a_n + \frac{1}{n}$이라 하면 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$a_n = b_n - \frac{1}{n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(b_n - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} {a_n}^2 = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

***82.* 정답 ②**

[해설] ㄱ. (반례) $a_n = -1$이면 $a_n^2 = 1$이므로

$\lim_{n\to\infty} {a_n}^2 = 1$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$이다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \alpha$이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{a_n} = 0$이다. (참)

ㄷ. (반례) $a_n = -\frac{1}{n}, b_n = -n^2$이면

$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to 0}\left\{\left(-\frac{1}{n}\right)\cdot(-n^2)\right\} = \infty$이고

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ 이지만

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(-n^2) = -\infty$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

***83.* 정답 ①**

[해설] ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \beta$ (α, β는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\{a_n - (a_n - b_n)\}$

$= \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha - \beta$ (참)

ㄴ. (반례) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ 이면 $0 < a_n < 1$이지만

$\lim_{n\to\infty} a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} \neq 0$ (거짓)

ㄷ. (반례) $a_n = 2 + \frac{1}{n}$, $b_n = (-1)^n$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ 이고

$-a_n < b_n < a_n$이지만 $\lim_{n\to\infty} b_n$은 발산(진동)한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

***84.* 정답 ⑤**

[해설] ㄱ. $f\left(f\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f\left(2 - \frac{5}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$

$f\left(\frac{5}{4}\right) = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$

$\therefore f\left(\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f\left(\frac{5}{4}\right)$ (참)

ㄴ. $1 < 1 + \frac{1}{n} \leq 2$이므로

$f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$ (참)

ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 $f(x-1) = f(x+1)$을 만족시키므로 $f(x) = f(x+2)$가 성립한다.

(i) $n = 2k - 1$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ 일 때,

$f\left(\frac{1}{2} + 2k - 1\right) = f\left(\frac{3}{2} + 2(k-1)\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

(ii) $n = 2k$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ 일 때,

$f\left(\frac{1}{2} + 2k\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 수열 $\left\{f\left(\frac{1}{2} + n\right)\right\}$은 $\frac{1}{2}$로 수렴한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

***85.* 정답 ②**

[해설] ㄱ. (반례) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 0$이고 $a_{n+1} < a_n$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$이다. (거짓)

ㄴ. $\frac{a_2}{a_1} < p, \frac{a_3}{a_2} < p, \cdots < \frac{a_n}{a_{n-1}} < p$이므로

$\frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \cdots \times \frac{a_n}{a_{n-1}} < p^{n-1}$

$\therefore 0 < a_n < a_1p^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} a_1p^{n-1} = 0$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다. (참)

ㄷ. (반례) $a_n = -1 + \frac{1}{n}$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < 0$이고, $a_n < a_{n+1}$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ 이다.

***86.* 정답 ⑤**

[해설]

ㄱ. 첫 번째 열을 나열하면

1, 2, 4, 7, 11, $\cdots$

이 수열의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$b_n = n$이므로

$$a_{(n,\ 1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= 1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

$\therefore\ a_{(10,\ 1)} = 46$ (참)

ㄴ. $a_{(n,\ 2)} = a_{(n,\ 1)} + (n+1)$

$$= \frac{n^2 - n + 2}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n^2 + n + 4}{2}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{(n,\ 1)}}{a_{(n,\ 2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2 - n + 2}{2}}{\frac{n^2 + n + 4}{2}} = 1 \text{ (참)}$$

ㄷ. $a_{(n,\ n)} = a_{(n,\ 1)} + \{(n+1) + (n+2) + \cdots + (n+n-1)\}$

$$= a_{(n,\ 1)} + \frac{(n-1)\{(n+1) + (2n-1)\}}{2}$$

$$= \frac{n^2 - n + 2}{2} + \frac{(n-1)\times 3n}{2}$$

$$= 2n^2 - 2n + 1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{(n,\ 1)}}{a_{(n,\ n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2 - n + 2}{2}}{2n^2 - 2n + 1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n + 2}{2(2n^2 - 2n + 1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{4 - \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

참고

n행, n열을 나열하면

1, 5, 13, 25, $\cdots$

이 수열의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$b_n = 4n$이므로

$$a_{(n,\ n)} = a_{(1,\ 1)} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4k = 1 + 2n(n-1)$$

$$= 2n^2 - 2n + 1$$

87. 정답 ④

[해설] $P_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 3n - 2$로 놓으면

$P_1 = a_1 = 1$

$P_{n-1} = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} = 3(n-1) - 2 = 3n - 5$ $(n \geq 2)$

$$\therefore\ a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{3n-2}{3n-5} \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{3n-5} = 1$$

1. 정답 ②	2. 정답 ③	3. 정답 ⑤
4. 정답 ③	4. 정답 ③	6. 정답 ⑤
7. 정답 ⑤	8. 정답 ③	9. 정답 ④
10. 정답 ⑤	11. 정답 ①	12. 정답 ②
13. 정답 ⑤	14. 정답 ⑤	15. 정답 ⑤
16. 정답 ⑤	17. 정답 ③	18. 정답 ①
19. 정답 ③	20. 정답 ⑤	21. 정답 ④
22. 정답 ②	23. 정답 ②	24. 정답 ②
25. 정답 ④	26. 정답 ②	27. 정답 ③
28. 정답 ③	29. 정답 ⑤	30. 정답 ①
31. 정답 ②	32. 정답 ⑤	33. 정답 ①
34. 정답 ②	35. 정답 6	36. 정답 ①
37. 정답 ④	38. 정답 ②	39. 정답 ④
40. 정답 ①	41. 정답 ③	42. 정답 ④
43. 정답 ②	44. 정답 ③	45. 정답 ②
46. 정답 ④		

1. 정답 ②

[해설] ㄱ. $0<0.2<1$이고 $0.2<0.3$이므로

$0.2^{0.2}>0.2^{0.3}$ (거짓)

ㄴ. $0<0.2<0.3$이고 $0.2>0$이므로

$0.2^{0.2}<0.3^{0.2}$ (참)

ㄷ. ㄱ,ㄴ에서

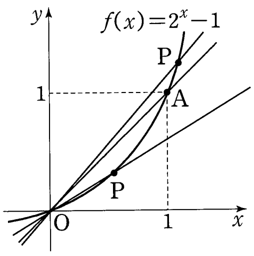
$0<0.2^{0.3}<0.2^{0.2}<0.3^{0.2}$이므로 $\frac{1}{0.2^{0.3}}>\frac{1}{0.3^{0.2}}$

$\therefore\ 0.2^{-0.3}>0.3^{-0.2}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

2. 정답 ③

[해설] 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점과 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$을 지나며, 직선 OA의 기울기는 1이다.



이때, 직선 $y=f(x)$ 위를 움직이는 점 P를 잡아 직선 OP의 기울기를 비교하자.

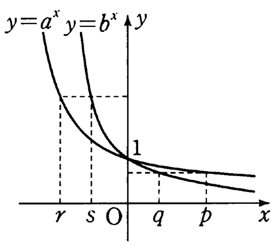
$x>1$이면 직선 OP의 기울기는 $\frac{f(x)}{x}>1$이고

$x<1$이면 직선 OP의 기울기는 $0<\frac{f(x)}{x}<1$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

3. 정답 ⑤

[해설] $0<b<a<1$이므로 두 함수 $y=a^x$, $y=b^x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 위의 그림에서 두 양수 p, q에 대하여 $a^p=b^q$이면 $p>q$이다. 따라서 $p>1$일 때, $0<q<1$일 수도 있다. (거짓)

ㄴ. ㄱ에서 $q>1$이면 $p>1$이다. (참)

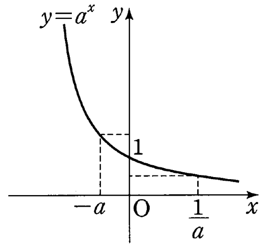
ㄷ. 위의 그림에서 $r<0$이고 $a^r=b^s$이면 $r<s<0$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

4. 정답 ③

[해설] $a^2<a<b<b^2$이므로 $0<a<1<b$이다.

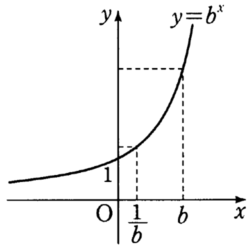
ㄱ. $0<a<1$이므로 $y=a^x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, $\frac{1}{a^a}=a^{-a}$이고 $-a<\frac{1}{a}$이므로 $a^{-a}>a^{\frac{1}{a}}$이다.

$\therefore\ \frac{1}{a^a}>a^{\frac{1}{a}}$ (참)

ㄴ. $b>1$이므로 $y=b^x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, $\frac{1}{b}<b$이므로 $b^{\frac{1}{b}}<b^b$이다. (거짓)

ㄷ. $0<\frac{a}{b}<1$, $b<\frac{b}{a}$이므로

$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a}}<\left(\frac{a}{b}\right)^{b}$ …… ㉠

또, $0<\frac{a}{b}<a<1$, $b>0$이므로

$\left(\frac{a}{b}\right)^{b}<a^b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a}}<\left(\frac{a}{b}\right)^{b}<a^b$

$\therefore\ \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a}}<a^b$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

5. 정답 ③

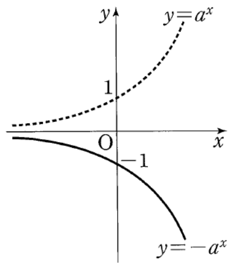
[해설]

$y=2^{-(x-1)}-1$의 그래프는 $y=2^{-x}$, 즉 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은 $y=-1$이다.

6. 정답 ⑤

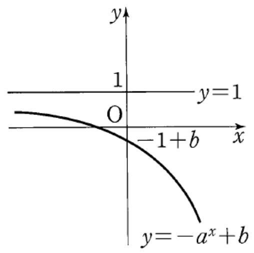
[해설]

$a>1$일 때, $y=-a^x$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



이 때, $y=-a^x+b$는 점근선이 $y=b$이고 $0<b<1$이므로 그래프는 다음

그림과 같이 제 2, 3, 4사분면을 지난다.



7. 정답 ⑤

[해설] $3^a=\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$ 이고 $2^b=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$

$3^{3a}=2,\ 2=3^{\frac{1}{2b}}$ 이므로 $3a=\dfrac{1}{2b}$ $\quad \therefore 6ab=1$

8. 정답 ③

[해설] 선분 AB의 중점의 x좌표가 0이므로

$\dfrac{a+b}{2}=0 \quad \therefore a+b=0$

$\therefore f(a)f(b)=2^{3-a}\times 2^{3-b}=2^{6-a-b}=2^6$

9. 정답 ④

[해설] ㄱ. $2=3^{\log_3 2}$ 이므로

$$\frac{2}{3^x}=\frac{3^{\log_3 2}}{3^x}=\frac{1}{3^{x-\log_3 2}}$$

따라서 곡선 $y=\dfrac{2}{3^x}$은 곡선 $y=\dfrac{1}{3^x}$의 그래프를

x축의 방향으로 $\log_3 2$만큼 평행이동 한 것이므로

두 곡선 $y=\dfrac{2}{3^x},\ y=\dfrac{1}{3^x}$은 서로 만나지 않는다. (거짓)

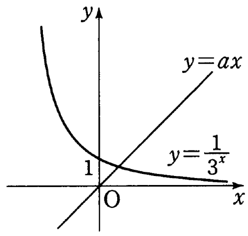
ㄴ. 곡선 $y=\dfrac{1}{3^x}$의 점근선이 $y=0$이므로 임의의 양수 a에 대하여

직선 $y=a$와 만난다. (참)

ㄷ. 곡선 $y=\dfrac{1}{3^x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

임의의 양수 a에 대하여 직선 $y=ax$와 만난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.



10. 정답 ⑤

[해설] 주어진 그림에서

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x\leftarrow 1) \\ -x & (-1\le x<1) \\ -1 & (x\ge 1)\end{cases}$$

이므로

$$y=2^{1-f(x)}=\begin{cases} 1 & (x\leftarrow 1) \\ 2^{x+1} & (-1\le x<1) \\ 4 & (x\ge 1)\end{cases}$$

따라서 $y=2^{1-f(x)}$의 그래프는 ⑤이다.

11. 정답 ①

[해설] $(a,\ b)\in A$이면 $b=\left(\dfrac{1}{2}\right)^a$이다.

이때, $\dfrac{1}{\sqrt{b}}=b^{-\frac{1}{2}}=\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^a\right\}^{-\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{a}{2}}$ 이므로

$\left(-\dfrac{a}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)\in A$

따라서 $\square$ 안에 알맞은 것은 $-\dfrac{a}{2}$이다.

12. 정답 ②

[해설] $f(x)=\dfrac{4^x+1}{2^{x+1}}=2^{x-1}+2^{-x-1}$이므로

$$\begin{aligned} f(a+b)f(a-b)&=\left(2^{a+b-1}+2^{-a-b-1}\right)\left(2^{a-b-1}+2^{-a+b-1}\right) \\ &=2^{2a-2}+2^{2b-2}+2^{-2b-2}+2^{-2a-2} \\ &=\frac{1}{2}\left(2^{2a-1}+2^{2b-1}+2^{-2b-1}+2^{-2a-1}\right) \\ &=\frac{1}{2}\left\{\left(2^{2a-1}+2^{-2a-1}\right)+\left(2^{2b-1}+2^{-2b-1}\right)\right\} \\ &=\frac{1}{2}\{f(2a)+f(2b)\}=5 \end{aligned}$$

13. 정답 ⑤

[해설] $f(x)=3^x$이므로 $f(x+1)=3^{x+1}$이다.

따라서 $2f(x+1)+f(x)=2\cdot 3^{x+1}+3^x=3^x(2\cdot 3+1)=7\cdot 3^x$이고

$f(x+k)=3^{x+k}=3^x\cdot 3^k$이므로 $7\cdot 3^x=3^x\cdot 3^k$

$3^k=7 \qquad \therefore k=\log_3 7$

14. 정답 ⑤

[해설] $y=\sqrt{3^x}=\left(\sqrt{3}\right)^x=3^{\frac{x}{2}}$ 이다.

ㄱ. $(a, b)\in S$ 이면 $b=3^{\frac{a}{2}}$ 이므로 $\frac{\sqrt{3}}{3}b=\frac{b}{\sqrt{3}}=\frac{3^{\frac{a}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}=3^{\frac{a-1}{2}}$

$\therefore \left(a-1, \frac{\sqrt{3}}{3}b\right)\in S$(참)

ㄴ. $(a, b)\in S$ 이면 $b=3^{\frac{a}{2}}$ 이므로 $b^2=\left(3^{\frac{a}{2}}\right)^2=3^{\frac{2a}{2}}$

$\therefore (2a, b^2)\in S$(참)

ㄷ. $(a, b)\in S, (c, d)\in S$ 이면 $b=3^{\frac{a}{2}}, d=3^{\frac{c}{2}}$ 이므로

$bd=3^{\frac{a}{2}}\times 3^{\frac{c}{2}}=3^{\frac{a+c}{2}}$

$\therefore (a+c, bd)\in S$(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15. 정답 ⑤

[해설] ㄱ. $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}+2}=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}$

$=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4}{4+2\cdot 4^x}$

$=\frac{4^x+2}{4^x+2}=1$ (참)

ㄷ. $\sum_{k=1}^{100} f\left(\frac{k}{101}\right)=f\left(\frac{1}{101}\right)+f\left(\frac{2}{101}\right)+\cdots+f\left(\frac{100}{101}\right)$

$=\left\{f\left(\frac{1}{101}\right)+f\left(\frac{100}{101}\right)\right\}+\left\{f\left(\frac{2}{101}\right)+f\left(\frac{99}{101}\right)\right\}$

$+\cdots+\left\{f\left(\frac{50}{101}\right)+f\left(\frac{51}{101}\right)\right\}$

$=1+1+\cdots+1$ ($\because$ ㄴ)

$=50$ [참]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

다른풀이

$f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}=\frac{2^{2x}}{2^{2x}+2}=\frac{2^x}{2^x+2^{1-x}}$ 에서

$f(1-x)=\frac{2^{1-x}}{2^x+2^{1-x}}$ $\quad\therefore f(x)+f(1-x)=1$

$x=\frac{1}{2}$ 을 위 식에 대입하면

$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ $\quad\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

또한, $f(x)+f(1-x)=1$을 만족하는 $y=f(x)$의 그래프는 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로

$\sum_{k=1}^{100} f\left(\frac{k}{101}\right)=\sum_{k=1}^{50}\left\{f\left(\frac{k}{101}\right)+f\left(\frac{101-k}{101}\right)\right\}=\sum_{k=1}^{50}1=50$

16. 정답 ⑤

[해설] $\square\mathrm{ABDC}=\frac{2^n+2^{n+1}}{2}=2^n\cdot\frac{1+2}{2}=3\cdot 2^{n-1}$

$\square\mathrm{ABFE}=\frac{n+n+1}{2}(2^{n+1}-2^n)=\frac{2n+1}{2}\cdot 2^n=(2n+1)2^{n-1}$

이때, $\square\mathrm{ABDC} : \square\mathrm{ABFE}=2 : 5$이므로

$3 : (2n+1)=2 : 5$

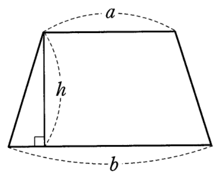
$4n+2=15$

$\therefore n=\frac{13}{4}$

참고

오른쪽 그림과 같이 윗변의 길이가 a, 아랫변의 길이가 b, 높이가 h인 사다리꼴의 넓이 S는

$S=\frac{a+b}{2}\cdot h$



17. 정답 ③

[해설]

오른쪽 그림과 같이 x축에 평행한 직선이 두 곡선 $y=2^x$, $y=3^{-x}$과 만나는 점이 B, D이므로 두 점 B, D의 x좌표를 각각 k, k'이라 하자.

이때, 점 B의 y좌표는 2^k이고, 이것은 점 D의 y좌표와 같으므로 $3^{-k'}=2^k$이 성립한다.

$-k'=\log_3 2^k$이므로

$k'=-k\log_3 2$

따라서 $\overline{\mathrm{BC}} : \overline{\mathrm{CD}}=1 : \log_3 2$이므로

$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{ACD}=1 : \log_3 2$

$\therefore \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{1+\log_3 2}\times\triangle\mathrm{ABD}$

$=\frac{1}{\log_3 6}\times 3\log_3 6$

$=3$

18. 정답 ①

[해설] $f(x)=4^x$은 증가함수이므로

$x=3$일 때, 최댓값 $M=4^3=64$

$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$은 감수함수이므로

$x=3$일 때, 최소값 $m=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

$\therefore \mathrm{M}m=64\times\frac{1}{8}=8$

19. 정답 ③

[해설] $0<a<1$이면 $0<\sqrt{a}<1$이므로 $\sqrt{a^x}=(\sqrt{a})^x$의 밑 $\sqrt{a}$가 1보다 작은 양수이다.

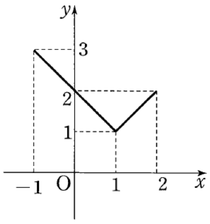
따라서 지수 x가 최소일 때 $f(x)$는 최대이므로 $f(x)$의 최댓값은

$f(-2)=(\sqrt{a})^{-2}=\frac{1}{a}=2$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

20. 정답 ⑤

오른쪽 그림에서 $-1 \leqq x \leqq 2$일 때 $y=|x-1|+1$은 $x=1$에서 최솟값 1을 갖고 $x=-1$에서 최댓값 3을 갖는다.



이 때, $a>1$이면 $f(x)$의 최댓값은 $a^3=\frac{1}{8}$,

즉, $a=\frac{1}{2}$이므로 모순이다.

따라서 $0<a<1$이고 $f(x)$의 최댓값은 $a=\frac{1}{8}$ 이다.

그러므로 $f(x)$의 최솟값은 $a^3=\left(\frac{1}{8}\right)^3=2^{-9}$이다.

21. 정답 ④

[해설]

$0<$(밑)<1이므로 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x}$은 x^2+2x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고, x^2+2x의 값이 감소하면 y의 값은 증가한다.

그런데 $x^2+2x=(x+1)^2-1 \geqq -1$이므로 x^2+2x는 최솟값 -1을 갖는다.

따라서 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x}$의 최댓값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$이다.

22. 정답 ②

[해설]

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2}\times 2^{3-2x}$$
$$=2^{x^2}\times 2^{-2x+3}$$
$$=2^{x^2-2x+3}=2^{(x-1)^2+2}$$

따라서 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $2^2=4$를 갖는다.

$\therefore a+b=1+4=5$

23. 정답 ②

[해설]

$$f(x)=-(2^x)^2+\frac{1}{2^a}\cdot 2^x+1$$
$$=-\left(2^x-\frac{1}{2^{a+1}}\right)^2+\frac{1}{2^{2(a+1)}}+1$$

이므로 함수 $f(x)$는 $2^x=\frac{1}{2^{a+1}}$일 때 최댓값 $\frac{1}{2^{2(a+1)}}+1$을 갖는다.

따라서 $\frac{1}{2^{2(a+1)}}+1=\frac{257}{256}$에서 $\frac{1}{2^{2(a+1)}}=\frac{1}{256}=\frac{1}{2^8}$이므로

$2a+2=8$ $\qquad \therefore a=3$

$2^b=\frac{1}{2^{a+1}}$에서 $2^b=\frac{1}{2^4}=2^{-4}$ $\qquad \therefore b=-4$

$\therefore a+b=-1$

24. 정답 ②

[해설]

$2^x+2^{1-x} \geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{1-x}}=2\sqrt{2}$ (단, 등호는 $x=\frac{1}{2}$일 때 성립)

$2^x+2^{1-x}=t$라 하면 $t \geqq 2\sqrt{2}$이다.

$t \geqq 2\sqrt{2}$일 때, $y=-\sqrt{2}t$의 최댓값은 $-\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=-4$이다.

25. 정답 ④

[해설]

$$\mathrm{AB}=\left(2x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{2}{x}\right)=2xy+\frac{2}{xy}+5$$

이 때, 산술평균과 기하평균의 대소 관계에 의하여

$$\mathrm{AB}=2xy+\frac{2}{xy}+5 \geqq 2\sqrt{2xy\cdot\frac{2}{xy}}+5=9$$

(등호는 $xy=1$일 때 성립)

그런데 $0<\frac{1}{\sqrt[3]{3}}<1$이므로

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{\mathrm{A}}\right\}^{\mathrm{B}}=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{\mathrm{AB}} \leqq \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{9}=\frac{1}{27}$$

따라서 $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{\mathrm{A}}\right\}^{\mathrm{B}}$은 최댓값 $\frac{1}{27}$을 갖는다.

26. 정답 ②

[해설]

$f^{-1}(8)=a$로 놓으면 $f(a)=8$

$4^a-2^{a+1}=8$에서 $(2^a)^2-2\cdot 2^a-8=0$

$(2^a-4)(2^a+2)=0$

$2^a=4$ $(\because 2^a>0)$ $\qquad \therefore a=2$

27. 정답 ③

[해설] $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같고, 두 교점의 x좌표가 1, 3이므로 교점의 좌표는 (1, 1), (3, 3)이다.

$f(1)=1$에서 $a^{1-m}=1$이므로 $1-m=0$

$\therefore m=1$

$f(3)=3$에서 $a^{3-m}=3$이므로 $a^2=3$

$a>0$이므로 $\qquad \therefore a=\sqrt{3}$ $(\because a>0)$

$\therefore$ $a+m=1+\sqrt{3}$

28. 정답 ③

$y=3\cdot 4^{x+1}-2=4^{\log_4 3}\cdot 4^{x+1}-2=4^{x+\log_4 3+1}-2$이므로

$y=3\cdot 4^{x+1}-2$의 그래프는 $y=2^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-1-\log_4 3$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 점 (0, 0)은 이 평행이동에 의해 점 $(-1-\log_4 3,\ -2)$로 옮겨진다.

$\therefore$ $m-n=-1-\log_4 3-(-2)$

$=1-\log_4 3=\log_4\frac{4}{3}$

29. 정답 ⑤

[해설]

$y=\sqrt{2}f(x)=\sqrt{2}\cdot 5^{x}=5^{\log_5\sqrt{2}}\cdot 5^{x}=5^{x+\log_5\sqrt{2}}$ 이므로

$y=\sqrt{2}f(x)$의 그래프는 $f(x)=5^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\log_5\sqrt{2}$ 만큼 평행이동시킨 것이다.

$\therefore m=-\log_5\sqrt{2}=-\frac{1}{2}\log_5 2$

30. 정답 ①

[해설]

함수 $f(x)$의 그래프가 두 점 $\left(\frac{5}{2},\ 3\right)$, $(3,\ 3\sqrt{3})$을 지나므로

$f\left(\frac{5}{2}\right)=3,\ f(3)=3\sqrt{3}$

$\therefore\ (\sqrt{3})^{\frac{5a}{2}+b}=3=(\sqrt{3})^{2},\ (\sqrt{3})^{3a+b}=3\sqrt{3}=(\sqrt{3})^{3}$

$\frac{5a}{2}+b=2,\ 3a+b=3\quad\therefore a=2,\ b=-3$

이 때, $f(x)=(\sqrt{3})^{2x-3}=3^{x-\frac{3}{2}}$ 이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 함수 $y=3^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼 평행이동한 그래프와 일치한다.

$\therefore abcd=2\times(-3)\times 3\times\frac{3}{2}=-27$

31. 정답 ②

[해설] $y=3^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 $y=3^{x-a}+b$이다.

이때, 점근선의 방정식은 $y=b$이므로 $b=2$

또, 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$3^{-a}+2=4$

$\therefore\ a=-\log_3 2$

$\therefore\ a+b=-\log_3 2+2=2-\log_3 2$

32. 정답 ⑤

[해설]

ㄱ. $bc<1,\ c>1$이므로 $0<b<1$

즉, $y=b^{x}$의 그래프는 (가)이다.

그런데 (가)와 (나)는 y축에 대하여 대칭이므로 지수함수 (가)와 (나)의 밑의 곱은 1이다.

따라서 $bc<1$이고 $c>1$이므로 $y=c^{x}$의 그래프는 (다)이다. (참)

ㄴ. $y=b^{x}$의 그래프 (가)와 직선 $y=\frac{1}{2}$ 이 만나는 점의 x좌표는 양수이다.

그러므로 방정식 $b^{x}=\frac{1}{2}$을 만족하는 x는 양수이다. (참)

ㄷ. $1<c<a$이므로 $0<\frac{c}{a}<1$이다. $y=\left(\frac{c}{a}\right)^{x}$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

33. 정답 ①

[해설] $f(x)=a^{bx-1}$의 그래프와 $g(x)=a^{1-bx}$의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로

$f(2)=g(2)$

가 성립한다.

따라서, $a^{2b-1}=a^{1-2b}$에서

$2b-1=1-2b,\ 4b=2$

$\therefore\ b=\frac{1}{2}$

또, $f(4)=g(0),\ g(4)=f(0)$이므로

$f(4)+g(4)=g(0)+f(0)=\frac{5}{2}$

$a+a^{-1}=\frac{5}{2}$

양변에 $2a$를 곱하여 정리하면

$2a^{2}-5a+2=(a-2)(2a-1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}\ \ (\because 0<a<1)$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

34. 정답 ②

[해설]

$y=-2^{-x-2}+6$ …… ㉠의 그래프는 $y=-2^{-x}$의 그래프를 평행이동시킨 것이다.

$y=-2^{-x}$의 그래프는 $y=2^{x}$의 그래프와 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 $y=2^{x}$과 $y=-2^{-x-2}+6$의 그래프는 한 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다. $y=2^{x}$의 그래프를 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이동시키면

$2q-y=2^{2p-x}$

$\therefore y=-2^{2p-x}+2q$ …… ㉡

㉠, ㉡은 서로 같은 함수이므로 $2p=-2,\ 2q=6$

$\therefore p=-1,\ q=3$

$\therefore a+b=-1+3=2$

35. 정답 6

[해설]

$y=2^{x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동시키면 $y=2^{-x}$의 그래프가 되고 이 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동 시키면 $y=2^{-(x-2)}$의 그래프가 된다.

따라서 $y=2^{-x+2}=4\cdot 2^{-x}=\frac{4}{2^{x}}$에서 $a=4,\ b=2$이므로

$a+b=4+2=6$

36. 정답 ①

[해설]

ㄱ. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$은 x의 값이 커질 때, y의 값은 작아진다.

$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+2$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다. (참)

ㄴ. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+2>2$이고

$g(x)=|x+1|=\begin{cases}x+1 & (x\geq -1)\\ -x-1 & (x<-1)\end{cases}$이므로

$(g\circ f)(x_1)=g(f(x))=\left(\frac{1}{2}\right)^x+3$

따라서 $x_1<x_2$이면

$(g\circ f)(x_1)>(g\circ f)(x_2)$이다. (거짓)

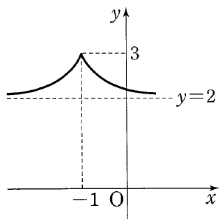
ㄷ. $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|}+2$

$|x+1|\geq 0$이므로 $(f\circ g)(x)$는 최댓값 $\left(\frac{1}{2}\right)^0+2=3$을 갖고 최솟값은 존재하지 않는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

참고

$f(g(x))=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|}+2$의 그래프는 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 다음
과 같다.



37. 정답 ④

[해설]

$f(a)=m,\ f(b)=n$이므로

$2^a=m,\ 2^b=n\quad\cdots$ ㉠

선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점의 x좌표가 4이므로 $\frac{2b-a}{2-1}=4$에서

$2b-a=4\quad\cdots$ ㉡

㉠에서 $\frac{(2^b)^2}{2^a}=\frac{n^2}{m}$이므로 $2^{2b-a}=\frac{n^2}{m}$

이 식에 ㉡을 대입하면 $2^4=\frac{n^2}{m}\quad\therefore\ n^2=16m$

38. 정답 ②

[해설] 곡선 $y=3^x$을 x축의 방향으로 b_k만큼 평행이동시킨 곡선 $y=3^{x-b_k}$이 점 $(k,2)$를 지난다고 하면 $2=3^{k-b_k}$이다.

$\therefore\ 3^{-b_k}=\frac{2}{3^k}$

이때 곡선 $y=3^{x-b_k}$의 y절편은 3^{-b_k}이므로 $a_k=3^{-b_k}=\frac{2}{3^k}$이다.

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^k}=2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1$$

39. 정답 ④

[해설] $f(n+1)-f(n)=(n+1)^2\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}-n^2\left(\frac{4}{5}\right)^n$

$=\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\left\{(n+1)^2-\frac{5}{4}n^2\right\}$

$=\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\left(-\frac{1}{4}n^2+2n+1\right)$

이때, $g(n)=-\frac{1}{4}n^2+2n+1$로 놓으면

$g(n)=-\frac{1}{4}(n^2-8n-4)$

$=-\frac{1}{4}(n-4-\sqrt{20})(n-4+\sqrt{20})$

$4+\sqrt{20}=8.\times\times\times$이므로

$1<n<8$일때, $g(n)>0$

$n\geq 9$일 때, $g(n)<0$

따라서 $n\leq 8$일 때 $f(n+1)>f(n)$이고, $n\geq 9$일 때 $f(n+1)<f(n)$이므로 $n=9$일 때 최댓값 $f(9)$를 갖는다.

$\therefore k=9$

40. 정답 ①

[해설]

$p<q$를 만족하는 임의의 실수 $p,\ q$에 대하여 $a^p>a^q$이려면 $0<a<1$이어야 하므로

$0<\frac{2}{3}x^2-x+1<1$

(i) $\frac{2}{3}x^2-x+1>0$, 즉 $2x^2-3x+3>0$에서 이차방정식

$2x^2-3x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 3<0$이므로 부등식 $2x^2-3x+3>0$의 해는 x는

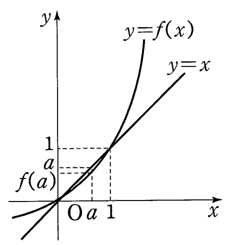
모든 실수이다.

(ii) $\frac{2}{3}x^2-x+1<1$에서 $\frac{2}{3}x\left(x-\frac{3}{2}\right)<0\quad\therefore 0<x<\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 조건을 만족하는 정수 x의 값의 합은 1이다.

41. 정답 ③

[해설] ㄱ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 점 $(1,1)$에서 만나므로 오른쪽 그림에서



$0<a<1$이면 $f(a)<a$이고,

$a>1$이면 $f(a)>a$이다. [참]

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 두 점을 $A(a,\ f(a))$, $B(b,\ f(b))$라 할 때

직선 AB의 기울기는

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{2^b-1-(2^a-1)}{b-a}=\frac{2^b-2^a}{b-a}$

이고, 기울기가 1보다 큰 경우는 $\frac{2^b-2^a}{b-a}>1$

즉, $b-a<2^b-2^a$

기울기가 1보다 작은 경우는

$\frac{2^b-2^a}{b-a}<1$

즉, $b-a>2^b-2^a$ [거짓]

ㄷ. 오른쪽 그림에서

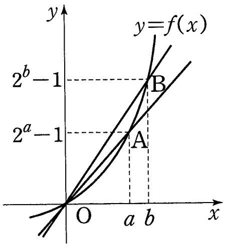
(직선 OA의 기울기)

$<$(직선 OB의 기울기)

이므로 $\dfrac{2^a-1}{a}<\dfrac{2^b-1}{b}$

$\therefore\ b(2^a-1)<a(2^b-1)$ [참]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.



42. 정답 ④

[해설] 오른쪽 그림에서 $x_1<x_2<0$,

$0<y_2<y_1<1$이고,

$y_1=-x_1,\ y_2=-x_2$이다.

ㄱ. $x_1+y_2=x_1-x_2<0$ (참)

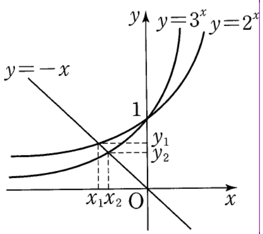
ㄴ. $x_1<x_2<0,\ 0<y_2<y_1<1$이므로

$x_1y_1<x_2y_2$ (거짓)

ㄷ. $x_1y_2=x_1(-x_2),\ x_2y_1=x_2(-x_1)$이므로

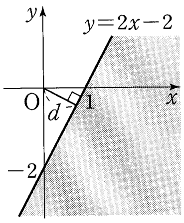
$x_1y_2=x_2y_1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.



43. 정답 ②

[해설] 임의의 실수의 값을 갖는 x, y의 범위를 구하기 위해 근과 계수의 관계를 이용하자. a, b를 두 근으로 하는 이차방정식은 $t^2-2^xt+2^y=0$이므로 이차함수 $f(t)=t^2-2^xt+2^y$의 그래프는 $t>0$에서 t축과 만나야 한다. 그런데 축이 $t=\dfrac{2^x}{2}>0,\ f(0)=2^y>0$이므로 판별식 $D\geq 0$이어야 한다.



$D=(2^x)^2-4\cdot 2^y\geq 0$

$2^{2x}-2^{2+y}\geq 0$, 즉 $2x-y-2\geq 0$따라서 원점으로부터 점 $P(x, y)$까지

의 거리의 최솟값 d는 $d=\dfrac{|-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

44. 정답 ③

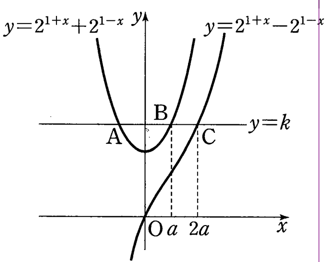
[해설]

함수 $f(x)=2^{1+x}+2^{1-x}$은

$f(-x)=f(x)$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 따라서 선분 AB의 중점은 y축 위에 있다.

또, $\overline{AB}=2\overline{BC}$이므로 B의 x좌표를 a라 하면 점 C의 x좌표는 $2a$이다.



따라서 $2^{1+a}+2^{1-a}=2^{1+2a}-2^{1-2a}$이 성립한다.

즉, $2\cdot 2^a+2\cdot 2^{-a}=2\cdot 2^{2a}-2\cdot 2^{-2a}$의 양변을 2로 나누면

$2^a+2^{-a}=2^{2a}-2^{-2a}$

$2^a+2^{-a}=(2^a+2^{-a})(2^a-2^{-a})$

$\therefore 2^a-2^{-a}=1$

$(2^a)^2-2^a-1=0$에서 $2^a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ $(\because 2^a>0)$

$$\begin{aligned}\therefore k&=2^{1+a}+2^{1-a}\\&=2(2^a+2^{-a})\\&=2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)\\&=2\sqrt{5}\end{aligned}$$

45. 정답 ②

[해설] ㄱ. $y=f(x)+g(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}+\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}=a^x$

$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고,

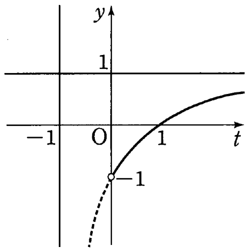
$a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. (거짓)

ㄴ. $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$에서

$a^{2x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$y=\dfrac{t-1}{t+1}=\dfrac{-2}{t+1}+1\ (t>0)$

이고, 그 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$의 치역은 $\{y\mid -1<y<1\}$이다. (참)

ㄷ. $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$이고

$g(-x)=\dfrac{a^{-x}-a^x}{2}=-\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}=-g(x)$이므로

$f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)$

따라서 $y=f(x)g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

46. 정답 ④

[해설]

ㄱ. $F(x)=f(x)g(x)$로 놓으면

$f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$

$g(-x)=\dfrac{a^{-x}-a^x}{2}=-\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}=-g(x)$이므로

$F(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-F(x)$

따라서 $y=f(x)g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. (거짓)

ㄴ. $2f(x)g(x)=2\cdot\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}\cdot\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}=\dfrac{a^{2x}-a^{-2x}}{2}$

$=g(2x)$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $g(2x)=2f(x)g(x)=2g(x)$

$\therefore\ f(x)=2$ 또는 $g(x)=0$

(ⅰ) $f(x)=2$를 풀면 산술평균과 기하평균의 대소 관계에 의하여

$a^x+a^{-x}\geq 2\sqrt{a^x\cdot a^{-x}}=2$이므로

$f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2} \geqq 1$이고 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대 칭이므로 $f(x)=2$를 만족하는 x의 값은 2개다.

(ii) $g(x)=0$을 풀면 $y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$g(x)=0$을 만족하는 x의 값은 0 하나뿐이다.

그러므로 방정식 $g(2x)=4g(x)$를 만족시키는 실수 x의값은 모두 3개 다. (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

1. 정답 ④

[해설] $f(x)=\frac{1}{2}$에서 $\log_3 x=\frac{1}{2}$ $\therefore x=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

$\therefore g\left(\frac{1}{2}\right)=(g\circ f)\sqrt{3}=\sqrt{\sqrt{3}+2}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

2. 정답 ②

[해설] $\log x=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)로 놓으면

$\alpha=0$일 때, $\log\frac{1}{x}=-n$이므로

$f(x)=[\log x]+\left[\log\frac{1}{x}\right]=n-n=0$

$0<\alpha<1$일 때, $\log\frac{1}{x}=-n-\alpha=(-n-1)+(1-\alpha)$이므로

$f(x)=[\log x]+\left[\log\frac{1}{x}\right]=n+(-1-n)=-1$

따라서 $f(x)$의 치역은 $\{-1,\ 0\}$이므로 원소의 개수는 2개이다.

3. 정답 ②

[해설] $0<f(a)<f(b)$에서 $1<a<b$이므로 $1<\log_a b$

ㄱ. (반례) $a=3$, $b=9$일 때, $\log_a b=2$이므로 $2^2>\sqrt{2}$ (거짓)

ㄴ. $\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{b}=\log_a b$이므로

$(\log_a b)^2-\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{b}=\log_a b(\log_a b-1)>0$

$\therefore \log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{b}<(\log_a b)^2$ (참)

ㄷ. (반례) $a=3$, $b=9$일 때, $\log_a b=2$이므로 $2>\sqrt{2}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

4. 정답 ②

[해설] ㄱ. $x>1$이면 $\log_2 x$의 그래프가 $y=\log_3 x$의 그래프보다 위쪽에

있으므로 $\log_2 a>\log_3 a$ (거짓)

ㄴ. $\frac{\log_2 3a+\log_2 a}{2}=\frac{1}{2}\log_2 3a^2=\log_2\sqrt{3}\,a<\log_2 2a$ (참)

ㄷ. [반례] $a=2$이면

(좌변)$=2\log_2 3=\log_2 9$

(우변)$=3\log_2 2=\log_2 8$

이때, $\log_2 9>\log_2 8$이므로 $2\log_2 3>3\log_2 2$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

5. 정답 (1) $4\log_4 3<\log_2 10<2+\log_2 3$

(2) $-\frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{6}<-\log_2\sqrt{10}<\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}}27$

[해설]

(1) 주어진 수를 밑이 2인 로그로 바꾸면

$2+\log_2 3=\log_2 12$

$4\log_4 3=4\log_{2^2}3=2\log_2 3=\log_2 3^2=\log_2 9$

(밑)>1이고, $9<10<12$이므로

$\log_2 9<\log_2 10<\log_2 12$

$\therefore\ 4\log_4 3<\log_2 10<2+\log_2 3$

(2) 주어진 수를 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그로 바꾸면

$\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}}27=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{3^3}=\log_{\frac{1}{2}}3$

$-\frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{6}=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}+\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{6}$

$=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}+\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{6}$

$=\log_{\frac{1}{2}}2\sqrt{3}$

$-\log_2\sqrt{10}=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{10}$

$0<$(밑)<1이고, $3<\sqrt{10}<2\sqrt{3}$이므로

$\log_{\frac{1}{2}}2\sqrt{3}<\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{10}<\log_{\frac{1}{2}}3$

$\therefore\ -\frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{6}<-\log_2\sqrt{10}<\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}}27$

6. 정답 ⑤

[해설]

$y=\log_a(-x)$의 그래프는 $y=\log_a x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $y=\log_a(-x)$의 그래프는 a의 값에 관계 없이 항상 점 $(-1,\ 0)$을 지나고 점근선의 방정식은 $x=0$이다. 또,

$y=\log_a\{-(x-4)\}-1$의 그래프는 $y=\log_a(-x)$의 그래프를 x축의 방

향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행히동한 것이다.

따라서 $y=\log_a\{-(x-4)\}-1$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(3,\ -1)$을 지나고 점근선의 방정식은 $x=4$이다.

$\therefore p+q+r=3-1+4=6$

7. 정답 ③

[해설]

함수 $y=\log_a(x+b)+c$의 그래프는 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. 주어진 함수가 감소함수이므로 $0<a<1$ (참)

ㄴ. 점근선의 방정식이 $x=-b$이므로 $-b<0$ $\therefore$ $b>0$ (참)

ㄷ. (반례) $c=-1$인 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{4}\right)-1$의 그래프는 점 $(0,\ 1)$을

지나므로 제 1, 2, 4사분면을 지난다. (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

8. 정답 ③

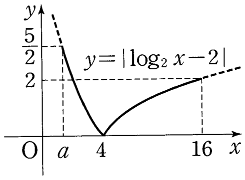
[해설] 함수 $y=|\log_2 x-2|$ $(a\le x\le 16)$의 그래프는 오른쪽 그림과

같다. 이때, 치역이 $\left\{y \mid 0 \le y \le \frac{5}{2}\right\}$이므로

$a \le 4$, $-(\log_2 a - 2) = \frac{5}{2}$

$\therefore a = 2^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore a^2 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$



9. 정답 ③

[해설] ㄱ. $x^2+2x+10=(x+1)^2+9 \ge 9$이므로

$f(x) \le \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$

$\therefore \{f(x) | x\text{는 실수}\} \subset \{x | x<0\}$ (참)

ㄴ. $g(x)=x^2+2x+10$으로 놓으면

$x>0$일 때, $g(x)>g(0)$이므로

$\log_{\frac{1}{3}} g(x) < \log_{\frac{1}{3}} g(0)$ $\therefore f(x)<f(0)$ (참)

ㄷ. ㄱ에서 $f(x)$는 $x=-1$일 때, 최댓값 -2를 가지므로 교점은 하나뿐이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

10. 정답 ②

[해설] ㄱ. (반례) $a=\frac{1}{2}$, $t=2$일 때, $f(2)=\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$이므로

$|f(2)| \ne f(2)$ (거짓)

ㄴ. $0<t<1$이므로 $0<(1-t)(1+t)<1$

$\therefore f(1-t)+f(1+t)=\log_a (1-t)(1+t)$

$>\log_a 1 = 0$ (참)

ㄷ. (반례) $a=\frac{1}{2}$, $s=2$, $t=4$일 때

$2f(4)=-4=4f(2)$ (거짓)

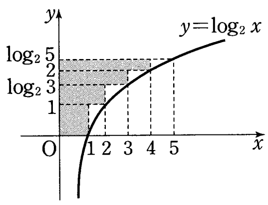
따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

11. 정답 ⑤

[해설]

$x=1, 2, 3, 4, 5$에서 함숫값은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 어두운 직사각형들의 넓이의 합은



$1+2(\log_2 3-1)$

$+3(2-\log_2 3)+4(\log_2 5-2)$

$=1+(2\log_2 3-2)+(6-3\log_2 3)+(4\log_2 5-8)$

$=4\log_2 5-\log_2 3-3$

$=\log_2 625-\log_2 3-\log_2 8$

$=\log_2 \frac{625}{24}$

12. 정답 68

[해설]

$x>0$, $\log_4 x>0$에서 $x>1$

$\log_3(\log_4 x)>0$에서 $\log_4 x>1$ $\therefore x>4$

따라서 함수 $f(x)$의 정의역은 $X=\{x \mid x>4\}$이므로 $a=4$

$y=f(x)$의 그래프가 x축과 마나는 점을 구하기 위해서 $x=b$, $y=0$을 대입하면

$\log_2\{\log_3(\log_4 b)\}=0$, $\log_3(\log_4 b)=1$

$\log_4 b=3$ $\therefore b=64$

$\therefore a+b=68$

13. 정답 ③

[해설] ㄱ. $y=2\log_2 3x=2\log_2 x+2\log_2 3$이므로 $y=2\log_2 3x$의 그래프는

$y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 $2\log_2 3$만큼 평행이동하면 겹쳐진다.

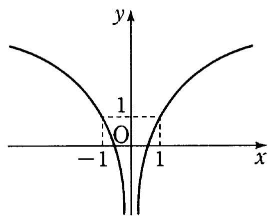
ㄴ. $y=\log_2 x^2+1=2\log_2 |x|+1$이므로 $y=2\log_2 x$의 그래프를 평행이동하면 겹쳐지지 않는다..

ㄷ. $y=\log_{\sqrt{2}} 2x=2\log_2 2x=2\log_2 x+2$이므로 $y=2\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 겹쳐진다.

따라서 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

[참고]

$y=\log_2 x^2+1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



14. 정답 ⑤

[해설] ㄱ. 함수 $y=f(x)$가 등식 $(g \circ f)(x)=x$를 만족하므로 $y=g(x)$는

$y=f(x)$의 역함수이다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. $y=\log_2 \frac{1}{x+3}$에서 $2^y=\frac{1}{x+3}$

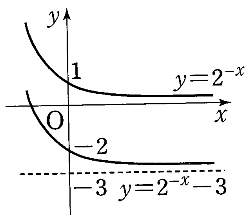
$\therefore x=2^{-y}+3$

따라서 $g(x)=2^{-x}-3$이다.

$y=g(x)$의 그래프는 $y=2^{-x}$의 그래프를

y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하여

얻을 수 있으므로 점근선의 방정식은 $y=-3$이다. (참)



ㄷ. 위의 그림과 같이 제2, 3, 4사분면을 지난다. (참)

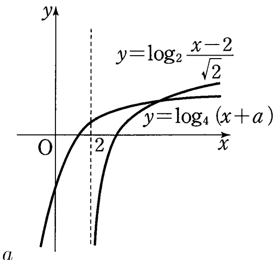
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15. 정답 ③

[해설]

$y=\log_2 \frac{x-2}{\sqrt{2}}=\log_2(x-2)-\frac{1}{2}$

이므로 $y=\log_2\dfrac{x-2}{\sqrt{2}}$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $-\dfrac{1}{2}$만큼 평행이동시킨 것이다.



$y=\log_4(x+a)$의 그래프는 $y=\log_4 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동시킨 것이다.

ㄱ. $a=-100$이면 $y=\log_4(x+a)$의 그래프는 $y=\log_4 x$의 그래프를 x축의 방향으로 100만큼 평행이동시킨 것이므로 두 그래프는 만나지 않음을 알 수 있다. (참)

ㄴ. $a=100$이면 $y=\log_4(x+a)$의 그래프는 $y=\log_4 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -100만큼 평행이동시킨 것이므로 두 그래프는 한 점에서 만남을 알 수 있다. (거짓)

ㄷ. $x=4$일 때, $y=\log_2\dfrac{4-2}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$이므로 점 A의 좌표는 $\left(4,\ \dfrac{1}{2}\right)$이다.

이때, $\dfrac{1}{2}=\log_4(4+a)$에서 $4+a=2 \quad \therefore a=-2$

$\log_2\dfrac{x-2}{\sqrt{2}}=\log_4(x-2)$에서

$\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2=x-2,\ (x-2)(x-4)=0$

$x-2>0$이므로 $x=4$

그러므로 점 A 이외의 다른 교점은 존재하지 않는다. (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

16. 정답 10

$y=\log_4(2x-11)+4$

$=\log_4 2\left(x-\dfrac{11}{2}\right)+4$

$=\log_4 2+\log_4\left(x-\dfrac{11}{2}\right)+4$

$=\dfrac{1}{2}\log_2 2+\log_4\left(x-\dfrac{11}{2}\right)+4$

$=\log_4\left(x-\dfrac{11}{2}\right)+\dfrac{9}{2}$

이므로 $y=\log_4(2x-11)+4$의 그래프는 $y=\log_4 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{11}{2}$만큼, y축의 방향으로 $\dfrac{9}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $p=\dfrac{11}{2},\ q=\dfrac{9}{2}$이므로

$p+q=10$

17. 정답 ④

[해설] $(a,\ b)\in A$, $(c,\ d)\in B$이므로 $3^a=b$, $\log_3 c=d$이다.

ㄱ. (반례) $a=1$, $b=3$일 때 $(1,\ 3)\in A$ 이지만 $(1^3,\ 3\cdot 3)\notin A$ 이다. (거짓)

ㄴ. $3^a=b$ 즉, $\log_3 b=a$

$\therefore\ (b,\ a)\in B$ (참)

ㄷ. $3^a=b$, $\log_3 c=d$ 즉, $3^d=c$가 성립하므로

$3^{a+d}=bc$

$\therefore\ (a+d,\ bc)\in A$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

18. 정답 ④

[해설] ㄱ. $(a,\ b)\in X$, 즉 $b=\log_2 a$이면

$2b=2\log_2 a=\log_2 a^2$이므로 $(a^2,\ 2b)\in X$ (참)

ㄴ. $(\sqrt{2}\,a,\ b)\in X$, 즉 $b=\log_2\sqrt{2}\,a=\dfrac{1}{2}+\log_2 a$이면

$b-\dfrac{1}{2}=\log_2 a$이므로 $\left(a,\ b-\dfrac{1}{2}\right)\in X$ (거짓)

ㄷ. $(a,\ b)\in X$, $(c,\ d)\in X$, 즉 $b=\log_2 a$, $d=\log_2 c$이면

$b+d=\log_2 a+\log_2 c=\log_2 ac$이므로

$(ac,\ b+d)\in X$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

19. 정답 ②

[해설] $f(2x)=\log_2 x$에서 $2x=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t}{2}$이므로

$f(2x)=f(t)=\log_2\dfrac{t}{2}=\log_2 t-1$

$\therefore\ f(x)=\log_2 x-1$

ㄱ. $f(ab)=\log_2 ab-1$

$f(a)+f(b)=(\log_2 a+1)+(\log_2 b-1)=\log_2 ab-2$

이므로 $f(ab)=f(a)+f(b)+1$ (거짓)

ㄴ. $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\log_2\dfrac{1}{a}-1=-\log_2 a-1$

$=-(\log_2 a-1)-2=-f(a)-2$

$\therefore f\left(\dfrac{1}{a}\right)=-f(a)-2$ (참)

ㄷ. $f(a^b)=\log_2 a^b-1=b\log_2 a-1$

$bf(a)=b(\log_2 a-1)=b\log_2 a-b$

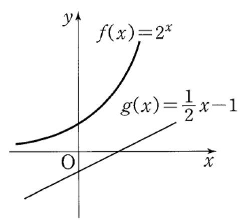
이때, $b>0$이므로 $f(a^b)\neq bf(a)-1$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

20. 정답 ⑤

[해설]

ㄱ. $f(x)=2^x$, $g(x)=\dfrac{1}{2}x-1$일 때, 두 함수의 그래프는 다음 그림과 같이 만나지 않는다.



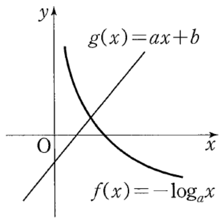
ㄴ. 두 함수 $f(x)=-\log_a x$,

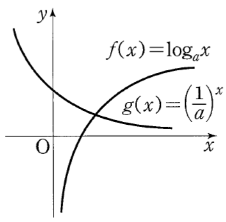
$g(x)=ax+b$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 항상 만난다.

ㄷ. 두 함수 $f(x)=\log_a x$,

$g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 항상 만난다.

따라서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 항상 만나는 것은 ㄴ, ㄷ이다.





21. 정답 ④

[해설] 점 A의 x좌표를 k라 하면

$\log_2 k-\log_4 \frac{1}{k}=3$

$\log_2 k+\frac{1}{2}\log_2 k=3$

$\frac{3}{2}\log_2 k=3$, $\log_2 k=2$

$\therefore\ k=4$

따라서 직선 AC의 기울기가 1이고, 점 A$(4,\ -1)$을 지나므로

$y=(x-4)-1=x-5$

따라서 y절편은 -5이다.

22. 정답 ③

[해설] 세 점 A_x, B_x, C_x의 x좌표를 각각 a, b, c라 하면 세 점 A_y, B_y, C_y의 y좌표는 $\log_2 a$, $\log_2 b$, $\log_2 c$이고

$\log_2 b-\log_2 a=\log_2 c-\log_2 b=1$이므로

$\log_2 \frac{b}{a}=\log_2 \frac{c}{b}=1$

$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=2$

따라서 $c=2b$, $b=2a$이므로

$\frac{c-b}{b-a}=\frac{2b-b}{b-\frac{1}{2}b}=2$

$\therefore\ \overline{A_xB_x}:\overline{B_xC_x}=1:2$

23. 정답 ③

[해설] A$(k,\ 2)$로 놓으면 C$(k+2,\ 4)$이므로

$\log_a k=2$ $\quad\therefore\ k=a^2$

$\log_a (k+2)=4$ $\quad\therefore\ k=a^4-2$

$a^4-a^2-2=0$에서 $(a^2+1)(a^2-2)=0$ $\quad\therefore\ a^2=2$

따라서 $k=2$이고 B$(4,\ 2)$이다.

즉, $2=\log_b 4$이므로 $b^2=4$

$\therefore\ b=2\ (\because\ b>0)$

24. 정답 ③

[해설]

오른쪽 그림과 같이 x축에 평행한 직선이 두 곡선 $y=2^x$, $y=3^{-x}$과 만나는 점이 B, D이므로 두 점 B, D의 x좌표를 각각 k, k'이라 하자.

이때, 점 B의 y좌표는 2^k이고, 이것은 점 D의 y좌표와 같으므로 $3^{-k'}=2^k$이 성립한다.

$-k'=\log_3 2^k$이므로

$k'=-k\log_3 2$

따라서 $\overline{BC}:\overline{CD}=1:\log_3 2$이므로

$\triangle ABC:\triangle ACD=1:\log_3 2$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{1+\log_3 2}\times\triangle ABD$

$=\frac{1}{\log_3 6}\times 3\log_3 6$

$=3$

25. 정답 ②

[해설]

두 점 A, B의 좌표는

A$(3,\ 1)$, B$(3,\ -\log_2 3)$

이므로 선분 AB의 길이는

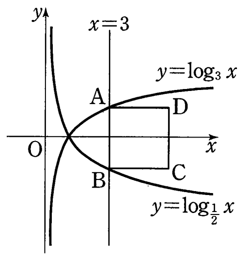
$1+\log_2 3=\log_6$

따라서 점 D의 좌표는

D$(3+\log_2 6,\ 1)$이다.

따라서 직선 BD의 방정식은

$y+\log_2 3=\frac{1+\log_2 3}{3+\log_2 6-3}(x-3)$



에서 $y=x-3-\log_2 3$이므로 구하는 y절편은

$-3-\log_2 3=-\log_2 24$

26. 정답 ①

[해설]

점 P의 좌표를 $(a,\ 2a)$라 하면 두 점 A, B의 좌표는 A$(a,\ 4^a)$, B$=(4^a,\ 2a)$이다.

$\triangle OPA=\frac{1}{2}(4^a-2a)\cdot a=12$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\triangle OPB=\frac{1}{2}(4^a-a)\cdot 2a=28$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\frac{4^a-a}{4^a-2a}=\frac{7}{6}$, $6(4^a-a)=7(4^a-2a)$

$\therefore 4^a=8a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면 $a^2=4$

$\therefore\triangle APB=\frac{1}{2}(4^a-a)(4^a-2a)=21a^2=84$

27. 정답 ③

[해설]

ㄱ. $b_1=2$이면 $-\log c_1=\log b_1=\log 2$

$\therefore\ c_1=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. (반례) $b_1=2$, $b_2=3$, $b_3=4$, $b_4=5$, $\cdots$이면 $b_{n+1}-b_n=1$

이지만 $c_1=\frac{1}{2}$, $c_2=\frac{1}{3}$, $c_3=\frac{1}{4}$, $c_4=\frac{1}{5}$, $\cdots$ 이므로

$c_{n+1}-c_n$ 의 값은 일정하지 않다. (거짓)

ㄷ. $-\log c_n=\log b_n=a_n$ 이므로 $\frac{1}{c_n}=b_n$ $\quad\therefore b_n c_n=1$

그러므로 $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ 의 값이 일정하면 $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ 의 값도 일정하다. (참)

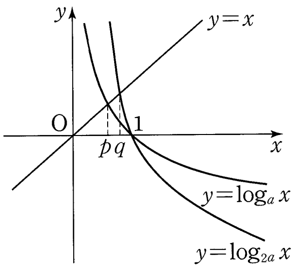
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

28. 정답 ⑤

[해설] $0<a<\frac{1}{2}$ 에서

$0<a<2a<1$ 이므로

두 함수 $y=\log_a x$, $y=\log_{2a} x$ 의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $p=\frac{1}{2}$ 이면 $p=\log_a p$ 에서

$a^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$ 이므로 양변을 제곱하면

$a=\frac{1}{4}$ (참)

ㄴ. 위의 그림에서 $p<q$ (참)

ㄷ. $p=\log_a p$, $q=\log_{2a} q$ 이므로

$a^p=p$, $(2a)^q=q$

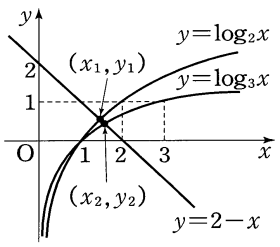
즉, $a^p=p$, $a^q=\frac{q}{2^q}$

$\therefore\ a^{p+q}=a^p\cdot a^q=p\cdot\frac{q}{2^q}=\frac{pq}{2^q}$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

29. 정답 ⑤

[해설]



ㄱ. 앞의 그림에서 $x_1>1$, $0<y_2<1$ 이므로 $x_1>y_2$ [참]

ㄴ. 두 점$(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$는 직선 $y=2-x$ 위의 점이므로

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$

$\therefore\ x_2-x_1=-(y_2-y_1)=y_1-y_2$ [참]

ㄷ. $x_1y_1-x_2y_2=x_1(2-x_1)-x_2(2-x_2)$

$=({x_2}^2-{x_1}^2)-2(x_2-x_1)$

$=(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)$

$x_2-x_1>0$ 이고, $x_1>1$, $x_2>1$ 에서 $x_1+x_2>2$ 이므로

$x_1y_1-x_2y_2>0$ $\qquad\therefore x_1y_1>x_2y_2$ (참)

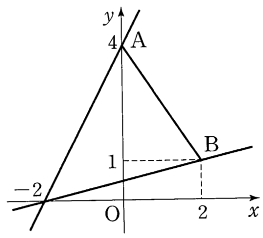
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

30. 정답 15

[해설] $y=x\log_4 a+\log_4 a^2$

$=\log_4 a\ \bullet\ (x+2)$

이므로 주어진 함수의 그래프는 점 $(-2, 0)$을 지나고 기울기가 $\log_4 a$인 직선이다. 이때, 선분 AB와 만나기 위한 a의 값의 범위는



$\frac{1}{4}\le\log_4 a\le 2,\ 4^{\frac{1}{4}}\le a\le 4^2$ $\qquad\therefore\ \sqrt{2}\le a\le 16$

따라서 자연수 a는 $2, 3, \cdots, 16$의 15개다.

31. 정답 ④

[해설]

(밑)>1이므로 진수 $-x^2+3\sqrt{3}$이 최대일 때

$\log_3(-x^2+3\sqrt{3})$은 최대이다.

$-x^2+3\sqrt{3}\le 3\sqrt{3}$ 이므로 구하는 최댓값은

$\log_3 3\sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$

32. 정답 ③

[해설] $y=\log|1-x|+\log|7-x|=\log|(x-1)(x-7)|$

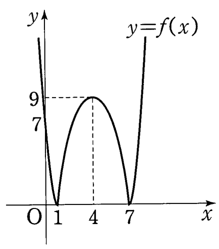
이때, $f(x)=|(x-1)(x-7)|$이라 하면

$x\le 1,\ x\ge 7$일 때, $f(x)=(x-1)(x-7)=(x-4)^2-9$

$1<x<7$일 때, $f(x)=-(x-1)(x-7)=-(x-4)^2+9$

$2\le x\le 5$에서 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 9를 갖는다.

따라서 구하는 최댓값은 $\log 9=2\log 3$



33. 정답 ②

[해설]

$f(x)=x^2-6x+a^2+9$라 하면

$f(x)=x^2-6x+a^2+9=(x-3)^2+a^2$이므로 $f(x)$의 최댓값은 없고 최솟값은 $x=3$일 때 a^2이다.

그런데 함수 $y=\log_a(x^2-6x+a^2+9)$가 최댓값 β를 가지므로 $0<a<1$이다.

따라서 $x=3$일 때 y의 최댓값은 $\log_a a^2=2$이다.

즉, $\alpha=3$, $\beta=2$이므로 $\alpha\beta=6$이다.

34. 정답 ①

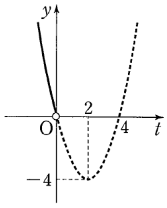
$a=2\log_5 2=\log_5 4$이고 $\log_5 1<\log_5 4<\log_5 5$이므로

$0<a<1$

ㄱ. $y=ax^2$은 $x=0$일 때 최솟값을 갖는다.

ㄴ. $0<a<1$, $x>1$이므로 $\log_a x<0$

$\log_a x = t$로 놓으면 $y = t^2 - 4t = (t-2)^2 - 4$이므로 오른쪽 그림과 같이 $t < 0$에서 최솟값을 갖지 않는다.



ㄷ. 산술평균과 기하평균의 대소 관계에 의하여

$x^2 + \dfrac{1}{2x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \dfrac{1}{2x^2}} = \sqrt{2}$ 이므로

$\log_a\left(x^2 + \dfrac{1}{2x^2}\right) \leq \log_a \sqrt{2}$

그러므로 $y = \log_a\left(x^2 + \dfrac{1}{2x^2}\right)$은 최댓값 $\log_a \sqrt{2}$를 갖고 최솟값은 존재하지 않는다.

따라서 보기에서 최솟값이 존재하는 함수는 ㄱ이다.

35. 정답 6

[해설]

$y = \log_2(x^2 - 4x + 2a)$

$= \log_2\{(x-2)^2 + 2a - 4\}$

이 때, 진수 $(x-2)^2 + 2a - 4$의 최솟값이 $2a-4$이므로

$y = \log_2(x^2 - 4x + 2a)$의 최솟값은 $\log_2(2a-4)$이다.

$\log_2(2a-4) = 1$에서 $2a - 4 = 2$

$\therefore a = 3$

$y = 0(\log_2 x)^2 + 2\log_2 x + 3$

$= -(\log_2 x - 1)^2 + 4$

이므로 최댓값은 $\log_2 x = 1$, 즉 $x = 2$일 때 4이다.

$\therefore\ k + m = 2 + 4 = 6$

36. 정답 ③

[해설] $f(x) = -5^{\log x} \cdot x^{\log 5} + 2(5^{\log x} + x^{\log 5}) + 10$

$= -5^{\log x} \cdot 5^{\log x} + 2(5^{\log x} + 5^{\log x}) + 10$

$= -(5^{\log x})^2 + 4 \cdot 5^{\log x} + 10$

이때, $5^{\log x} = t$로 놓으면 $\log x$는 x의 값이 증가하면 함숫값이 증가하므로 $x > 1$일 때, $t > 5^{\log 1} = 1$이다.

또, $g(t) = -t^2 + 4t + 10 = -(t-2)^2 + 14$로 놓으면

$t = 2$일 때, $g(t)$는 최댓값 14를 갖는다.

따라서 주어진 함수의 최댓값은 14이다.

37. 정답 ②

[해설] 두 점 D, F의 좌표는 D$(0,\ \log_a 2)$, F$(0,\ \log_a 16)$이고, 점 E는 선분 DF를 1 : 2로 내분하는 점이므로 E$\left(0,\ \dfrac{2\log_a 2 + \log_a 16}{3}\right)$이다.

이때, $\dfrac{2\log_a 2 + \log_a 16}{3} = \dfrac{2\log_a 2 + 4\log_a 2}{3} = \log_a 4$

이므로 E$(0,\ \log_a 4)$

따라서 점 B의 x좌표는 4이다.

38. 정답 ②

[해설] $f(1 + \log_2 x) = \log_3 x^2$에서 $1 + \log_2 x = t$로 놓으면

$\log_2 x = t - 1$이므로

$\log_3 x^2 = 2\log_3 x = \dfrac{2\log_2 x}{\log_2 3} = \dfrac{(t-1)\log_2 4}{\log_2 3} = (t-1)\log_3 4$

$\therefore\ f(t) = (t-1)\log_3 4$

$\therefore\ f(x) = (x-1)\log_3 4$

이때, $y = (x-1)\log_3 4$로 놓고 x를 y에 대하여 정리하면

$x = \dfrac{y}{\log_3 4} + 1$

x, y를 서로 바꾸면 $y = \dfrac{x}{\log_3 4} + 1 = x\log_4 3 + 1$

$\therefore f^{-1}(x) = x\log_4 3 + 1$

따라서 역함수 $f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y = x\log_4 3 + 1$이므로

x절편은 $-\dfrac{1}{\log_4 3} = -\log_3 4$, y절편은 1이다.

그러므로 구하는 삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \cdot 2\log_3 2 \cdot 1 = \log_3 2$

39. 정답 ①

[해설]

행렬 $\begin{pmatrix} \log t & \log(at)^2 \\ 1 & \log 10t \end{pmatrix}$가 역행렬을 가지려면

$\log t \cdot \log 10t - \log(at)^2 \neq 0\ \cdots$ ㉠

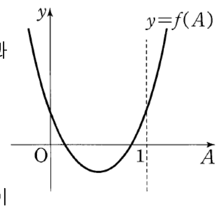
이 성립해야 한다.

이 때, $\log t = \mathrm{A}$로 놓으면

$\mathrm{A}(1 + \mathrm{A}) - 2\mathrm{A} - 2\log a \neq 0$

$\mathrm{A}^2 - \mathrm{A} - 2\log a \neq 0\ \ \cdots$ ㉡

10보다 큰 임의의 실수 t에 대하여 ㉠이 성립하려면 1보다 큰 임의의 실수 A에 대하여 ㉡이 성립해야 한다.



$f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^2 - \mathrm{A} - 2\log a$로 놓으면 오른쪽 그림과 같이

$f(1) = 1^2 - 1 - 2\log a > 0$이어야 한다.

$\therefore a < 1$

그런데 $\log(at)^2$에서 진수의 조건에 의하여 $a \neq 0$이므로 정수 a의 최댓값은 -1이다.

40. 정답 27

[해설]

$f_1(x) = \log_3 x$

$f_2(x) = f_1(x^2) + f_1(x)$

$= \log_3 x^2 + \log_3 x$

$= 3\log_3 x$

$f_3(x) = f_2(x^2) + f_2(x)$

$= 3\log_3 x^2 + 3\log_3 x$

$= 3^2\log_3 x$

$f_4(x) = f_3(x^2) + f_3(x)$

$= 3^2\log_3 x^2 + 3^2\log_3 x$

$= 3^3\log_3 x$

$\vdots$

이상에서 $f_n(x) = 3^{n-1}\log_3 x$라 추정할 수 있다.

$\therefore f_{81}(27) = 3^{81-1}\log_3 27 = 3^{81}$

$\therefore \log_{27}\{f_{81}(27)\} = \log_{3^3} 3^{82} = 27$

1. 정답 23	2. 정답 20	3. 정답 ③
4. 정답 ④	5. 정답 ②	6. 정답 ④
7. 정답 ③	8. 정답 ⑤	9. 정답 ③
10. 정답 ③	11. 정답 ④	12. 정답 ①
13. 정답 ③	14. 정답 ②	15. 정답 20
16. 정답 34	17. 정답 ③	18. 정답 ①
19. 정답 ④	20. 정답 ②	21. 정답 ①
22. 정답 ③	23. 정답 ③	24. 정답 ①
25. 정답 ①	26. 정답 24	27. 정답 24
28. 정답 ⑤	29. 정답 ③	30. 정답 ③
31. 정답 ②	32. 정답 ③	33. 정답 ⑤
34. 정답 ②	35. 정답 ⑤	36. 정답 ①
37. 정답 25	38. 정답 ②	39. 정답 ③
40. 정답 ①	41. 정답 ⑤	42. 정답 ③
43. 정답 ④	44. 정답 ①	45. 정답 ②
46. 정답 9	47. 정답 ②	48. 정답 ②
49. 정답 ③	50. 정답 ④	51. 정답 ③
52. 정답 ④	53. 정답 8	54. 정답 63
55. 정답 25	56. 정답 ④	57. 정답 ④
58. 정답 ①	59. 정답 ④	60. 정답 ⑤

1. 정답 23

[해설]
$4^{-2x+1}=(2^2)^{-2x+1}=2^{-4x+2}$,

$\frac{\sqrt{2}}{8^{1-x}}=\frac{2}{(2^3)^{1-x}}=2^{\frac{1}{2}-3+3x}=2^{3x-\frac{5}{2}}$

이므로 $-4x+2=3x-\frac{5}{2}$가 성립해야 한다.

따라서 $x=\frac{9}{14}$이므로

$p+q=14+9=23$

2. 정답 20

[해설] $\frac{7^{x^2-2x}}{7^{4x-10}}=49$에서 $7^{(x^2-2x)-(4x-10)}=7^2$

$(x^2-2x)-(4x-10)=2$
$x^2-6x+8=0$
$(x-2)(x-4)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=4$
$\therefore \alpha^2+\beta^2=2^2+4^2=20$

3. 정답 ③

[해설] 양변에 상용로그를 취하면 $(3-2x)\log 2=(2x-1)\log 5$
$x(2\log 2+2\log 5)=3\log 2+\log 5$
$x log100=\log 40$
$\therefore x=\frac{1}{2}log40=\log\sqrt{40}$
$\therefore 10^{\alpha}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

4. 정답 ④

[해설]

방정식 $x^{x+1}=\sqrt[x]{x}=x^{\frac{1}{x}}$에서 $x+1=\frac{1}{x}$

정리하면 $x^2+x-1=0$ ······ ㉠

㉠의 양의 근이 α이므로 $\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$이다.

즉, $\alpha^2+\alpha-1=0$이고 $0<\alpha<1$이므로

$\frac{\log(1-\alpha)}{\log\alpha}=\frac{\log\alpha^2}{\log\alpha}=\frac{2\log\alpha}{\log\alpha}=2$

5. 정답 ②

[해설]
주어진 연립방정식의 각 변에 밑이 2인 로그를 취하면
$(y-2)\log_2 x=2$ ······ ㉠
$(2y-3)\log_2 x=6$ ······ ㉡

$\log_2 x\neq 0$이므로 ㉠÷㉡을 하면 $\frac{y-2}{2y-3}=\frac{1}{3}$

따라서 $3(y-2)=2y-3$에서 $y=3$ ······ ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면 $\log_2 x=2$이므로 $x=4$

$\therefore \alpha+\beta=4+3=7$

6. 정답 ④

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면
$9^x-3^{x+k}+9=t^2-3^k t+9=0$
주어진 방정식의 두 근을 각각 α, 3α라 하면 이차방정식 $t^2-3^k t+9=0$의 두 근은 3^{α}, $3^{3\alpha}$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$3^{\alpha}\times 3^{3\alpha}=3^{4\alpha}=9=3^2 \qquad \therefore \alpha=\frac{1}{2}$

$3^k=3^{\alpha}+3^{3\alpha}=3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{3}{2}}=\sqrt{3}+3\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

$k=\log_3 4\sqrt{3}=\log_3 4+\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}+2\log_3 2$

$\therefore\ pq=\frac{1}{2}\times 2=1$

Tip

지수방정식 $ap^{2x}+bp^x+c=0$이 두 근, α, β를 가질 때, $p^x=t$로 치환하여 얻은 이차방정식 $at^2+bt+c=0$의 두 근은 p^{α}, p^{β}이다.

따라서 $p^{\alpha}p^{\beta}=a^{\alpha+\beta}=\frac{c}{a}$가 성립하므로 $\alpha+\beta=\log_p\frac{c}{a}$

7. 정답 ③

[해설] $3^x=t(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은
$3t^2+t^3=70t, t(t^2+3t-70)=0$
$t(t+10)(t-7)=0 \quad \therefore t=7(\because t>0)$
즉, $3^a=7$이므로 $3<3^a=7<3^2$
$\therefore 1<\alpha<2$

8. 정답 ⑤

[해설]
$3^x=t$로 치환하면 주어진 방정식은 $t^2-6t+k=0$이다.
이 때, $t>0$이어야 하므로 지수방정식 $9^x-2\cdot 3^{x+1}+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 $t^2-6t+k=0$은 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가져야 한다.

(i) $\frac{D}{4}=9-k>0$에서 $k<9$

(ii) $\alpha+\beta=6>0$이고, $\alpha\beta=k>0$이어야 하므로 $k>0$
(i), (ii)에서 $0<k<9$이므로 구하는 정수 k의 값의 합은
$1+2+3+4+5+6+7+8=36$

9. 정답 ③

[해설]
$2^x=t\ (t>0)$으로 놓으면 주어진 방정식은
$(t-1)^2+(t+1)^2=5t$
$(t^2-2t+1)+(t^2+2t+1)-5t=0$
$2t^2-tt+2=0$, $(2t-1)(t-2)=0$

$t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$, 즉 $2^x=\frac{1}{2}$ 또는 $2^x=2$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 모든 근의 합은 0이다.

10. 정답 ③

[해설] $2^x = t(t>0)$로 놓으면 t에 대한 이차방정식 $4^a t^2 - 2^b t + 2^{2a+3} = 0$은 오직 하나의 양의 실근을 갖거나 양의 중근을 가져야 한다. 이때, $f(t)= 4^a t^2 - 2^b t + 2^{2a+3}$의 축은 $x = \frac{2^b}{2 \cdot 4^a} > 0$이고 $f(0)= 2^{2a+3} > 0$이므로 t에 대한 이차방정식 $4^a t^2 - 2^b t + 2^{2a+3} = 0$은 양의 중근을 가져야 한다.

판별식 $D = (2^b)^2 - 4 \cdot 4^a \cdot 2^{2a+3} = 0$에서

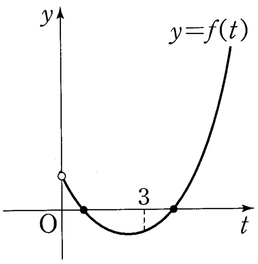
$2^{2b} = 2^{2+2a+2a+3}$ $\quad \therefore b - 2a = \frac{5}{2}$

따라서 t에 대한 이차방정식은 양의 중근

$t = \frac{2^b}{2 \cdot 4^a} = 2^{b-2a-1} = 2^{\frac{3}{2}}$을 가지므로 주어진 방정식은 실근 $x = \alpha = \frac{3}{2}$을 갖는다.

11. 정답 ④

[해설] 주어진 방정식의 한 근은 1보다 작고, 다른 한 근은 1보다 크므로 $3^x = t$ $(t>0)$로 놓으면 이차방정식 $t^2 - 2(k-2)t + k = 0$의 한 근은 0보다 크고 3보다 작고, 다른 한 근은 3보다 크다.



이때, $f(t) = t^2 - 2(k-2)t + k$로 놓으면 다음 부등식을 만족해야 한다.

$f(0) > 0,\ f(3) < 0$

$f(0) > 0$에서 $k > 0$ …… ㉠

$f(3) < 0$에서

$f(3) = 9 - 6(k-2) + k = 21 - 5k < 0$

$\therefore\ k > \frac{21}{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $k > \frac{21}{5}$

12. 정답 ①

[해설]

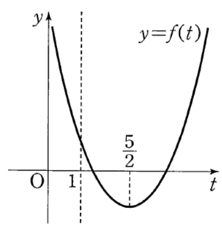
$\{(\sqrt{5})^x\}^2 - 5 \cdot (\sqrt{5})^x - a = 0$에서

$(\sqrt{5})^x = t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2 - 5t - a = 0$ … ㉠

이 때, 주어진 지수방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠은 1보다 큰 두 실근을 가져야 한다.

$f(t) = t^2 - 5t - a$로 놓으면 다음과 같이 조건에 맞는 그림을 생각할 수 있다.



(ⅰ) $f(1) = 1 - 5 - a > 0$에서

$a < -4$

(ⅱ) (축)$= \frac{5}{2} > 1$ (성립)

(ⅲ) $D = 25 + 4a > 0$에서 $a > -\frac{25}{4}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)을 동시에 만족시키는 a의 값의 범위는

$-\frac{25}{4} < a < -4$

따라서 구하는 정수 a는 -6, -5의 2개다.

13. 정답 ③

[해설]

$4^x - 2^{x+a} + 1 = 0$에서 $(2^x)^2 - 2^a \cdot 2^x + 1 = 0$

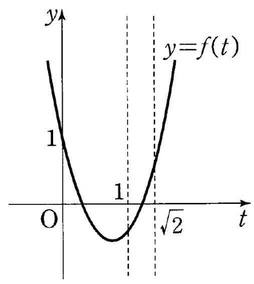
$2^x = t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2 - 2^a \cdot t + 1 = 0$ …… ㉠

주어진 방정식의 한 근이 0과 $\frac{1}{2}$ 사이에 있으므로 ㉠의 한 근이

$2^0 = 1$과 $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ 사이에 존재한다.

따라서 이차함수 $f(t) = t^2 - 2^a \cdot t + 1$의 그래프는 다음 그림과 같이 t좌표가 1과 $\sqrt{2}$ 사이인 점에서 t축과 만난다.



이때,

$f(1) = 2 - 2^a < 0$ …… ㉡

$f(\sqrt{2}) = 3 - 2^a \cdot \sqrt{2} > 0$ …… ㉢

㉡에서 $2^a > 2$

$\therefore a > 1$

㉢에서 $2^{a+\frac{1}{2}} < 3$, $a + \frac{1}{2} < \log_2 3$, $a < \log_2 3 - \frac{1}{2}$

$\therefore a < \log_2 \frac{3}{\sqrt{2}}$

따라서 $1 < a < \log_2 \frac{3}{\sqrt{2}}$이므로

$\alpha^2 + \beta^2 = 1 + \frac{9}{2}$

$= \frac{11}{2}$

14. 정답 ②

[해설]

$2^x = t$ $(t>0)$로 치환하면 주어진 방정식은

$t^2 + 2at + b^2 = 0$ … ㉠

$t > 0$이므로 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근 α, β를 가질 조건은

$D > 0$, $\alpha + \beta > 0$, $\alpha\beta > 0$

(ⅰ) $\frac{D}{4} = a^2 - b^2 > 0$에서

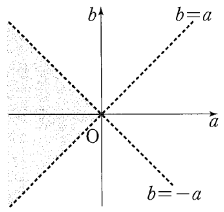
$b > -a$, $b < a$ 또는 $b < -a$, $b > a$

(ⅱ) $\alpha + \beta = -2a > 0$에서 $a < 0$

(ⅲ) $\alpha\beta = b^2 > 0$에서 $b \neq 0$인 모든 실수

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 점 $(a,\ b)$의 존재 범위를 좌표평면 위에 나타내면 다음

과 같다. (단, 경계선은 제외)



15. 정답 20

[해설]

$9^x - 2\cdot 3^{x+1} + 8 = 0$에서 $(3^x)^2 - 6\cdot 3^x + 8 = 0$

$(3^x - 2)(3^x - 4) = 0$

따라서 $3^x = 2$또는 $3^{\text{ㅌ}} = 4$이므로 $3^\alpha = 2,\ 3^\beta = 4$라고 하면

$$\begin{aligned} 3^{2\alpha} + 3^{2\beta} &= (3^\alpha + 3^\beta)^2 - 2\cdot 3^\alpha \cdot 3^\beta \\ &= (2+4)^2 - 2\cdot 2\cdot 4 \\ &= 36 - 16 = 20 \end{aligned}$$

16. 정답 34

[해설]

$2^x = \mathrm{X},\ 3^y = \mathrm{Y},\ 5^z = \mathrm{Z}$로 놓으면

(가)에서 $\mathrm{X} + \mathrm{Y} + \mathrm{Z} = 12$ …… ㉠

(나)에서 $2\mathrm{X} + \mathrm{Y} + \dfrac{\mathrm{Z}}{5} = 8$ …… ㉡

㉠－㉡을 하면 $-\mathrm{X} + \dfrac{4}{5}\mathrm{Z} = 4$

$\therefore \mathrm{X} = \dfrac{4}{5}\mathrm{Z} - 4$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $\dfrac{4}{5}\mathrm{Z} - 4 + \mathrm{Y} + \mathrm{Z} = 12$

$\therefore \mathrm{Y} = -\dfrac{9}{5}\mathrm{Z} + 16$ …… ㉣

$$\begin{aligned} \therefore k &= 5\mathrm{X} + 5\mathrm{Y} + 14\mathrm{Z} \\ &= 5\left(\frac{4}{5}\mathrm{Z} - 4\right) + 5\left(-\frac{9}{5}\mathrm{Z} + 16\right) + 14\mathrm{Z} \\ &= 9\mathrm{Z} + 60 \end{aligned}$$

이 때, $\mathrm{X} > 0,\ \mathrm{Y} > 0,\ \mathrm{Z} > 0$이므로 ㉢, ㉣에서

$\mathrm{X} = \dfrac{4}{5}\mathrm{Z} - 4 > 0,\ \mathrm{Y} = -\dfrac{9}{5}\mathrm{Z} + 16 > 0$

$\therefore 5 < \mathrm{Z} < \dfrac{80}{9}$

$\therefore 105 < 9\mathrm{Z} + 60 < 140$

따라서 $105 < k < 140$이므로 구하는 원소의 개수는

$140 - 105 - 1 = 34$

17. 정답 ③

[해설] $2^{2x} + 2^{2y} = (2^x + 2^y)^2 - 2\cdot 2^x \cdot 2^y$이므로

$272 = 20^2 - 2\cdot 2^{x+y}$

$\therefore\ 2^{x+y} = 64 = 2^6$

따라서 $x + y = 6$이므로 $\alpha + \beta = 6$

18. 정답 ①

[해설] x시간 후의 속력은 800×0.8^x(km/시)이므로

$800\times 0.8^x = 100$

$\therefore\ 0.8^x = \dfrac{1}{8}$

위 식의 양변에 상용로그를 취하면

$x\log\dfrac{8}{10} = \log\dfrac{1}{8}$

$x(3\log 2 - 1) = -3\log 2$

$\therefore\ x = \dfrac{-3\times 0.3}{3\times 0.3 - 1} = \dfrac{-0.9}{-0.1} = 9$

따라서 속력이 100 km/분이 되는 것은 9시간 후이다.

19. 정답 ④

[해설] $A(10) = 100(1 + r^{-\frac{1}{5}})$

$A(5) = 100(1 + r^{-\frac{1}{10}})$

$\dfrac{A(10)}{A(5)} = \dfrac{13}{15}$이므로

$15(1 + r^{-\frac{1}{5}}) = 13(1 + r^{-\frac{1}{10}})$

$15\cdot r^{-\frac{1}{5}} - 13\cdot r^{-\frac{1}{10}} + 2 = 0$

이때, $r^{-\frac{1}{10}} = t\ (t > 0)$로 놓으면

$15t^2 - 13t + 2 = 0,\ (3t - 2)(5t - 1) = 0$

$\therefore\ t = \dfrac{2}{3}$ 또는 $t = \dfrac{1}{5}$

즉, $r^{-\frac{1}{10}} = \dfrac{2}{3}$ 또는 $r^{-\frac{1}{10}} = \dfrac{1}{5}$이므로

$\therefore\ r = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}$ 또는 $r = 5^{10}$

그런데 $0 < r < 100$이므로 $r = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}$

참고

지수함수와 로그함수의 비교

(1) 그래프 (단, $a > 0,\ a \neq 1$)

	$y=a^x$	$y=\log_a x$
정의역	모든 실수	$x>0$인 실수
치역	$y>0$인 실수	모든 실수
점근선	$y=0$	$x=0$
$0<a<1$	감소하는 함수	감소하는 함수
$a>1$	증가하는 함수	증가하는 함수

(2) 함수식

① 지수함수 $f(x) = a^x$에 대하여

$f(x+y) = f(x)f(y)$

$f(x-y) = f(x) \div f(y)$

$f(nx) = \{f(x)\}^n$

② 로그함수 $g(x) = \log_a x$에 대하여

$g(xy) = g(x) + g(y)$

$g\left(\dfrac{x}{y}\right) = g(x) - g(y)$

$g(x^n) = ng(x)$

20. 정답 ②

[해설] $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x < 3\sqrt{3}$ 에서 $3^{-\frac{x}{2}} < 3^{\frac{3}{2}}$, $-\frac{x}{2} < \frac{3}{2}$

$\therefore x > -3$

$3\sqrt{3} < \left(\frac{1}{9}\right)^{x-2}$ 에서 $3^{\frac{3}{2}} < 3^{-2(x-2)}$, $\frac{3}{2} < -2(x-2)$

$\therefore x < \frac{5}{4}$

따라서 구하는 해는 $-3 < x < \frac{5}{4}$ 이므로

$\beta - \alpha = \frac{5}{4} - (-3) = \frac{17}{4}$

21. 정답 ①

[해설]

$2^{-x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$ 이므로 주어진 부등식은

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$

밑 $\frac{1}{2}$은 1보다 작으므로

$x+1 > 2x > x^2$

(i) $x+1 > 2x$에서 $x < 1$

(ii) $2x > x^2$에서

$x^2 - 2x < 0$, $x(x-2) < 0$

$\therefore 0 < x < 2$

(i), (ii)에서 $0 < x < 1$

$\therefore a^2 + b^2 = 1$

22. 정답 ③

[해설] $3^{x^2} < 27 \cdot 3^{4x+2}$에서 $3^{x^2} < 3^{4x+5}$

밑 3이 1보다 크므로 $x^2 < 4x+5$

$x^2 - 4x - 5 < 0$, $(x+1)(x-5) < 0$

$\therefore -1 < x < 5$

$\therefore A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$한편, $2^{|x-1|} > 4$에서 $2^{|x-1|} > 2^2$

밑 2가 1보다 크므로 $|x-1| > 2$

$\therefore x < -1$ 또는 $x > 3$

$\therefore B = \{x | x < -1 \text{ 또는 } x > 3, x\text{는 정수}\}$

따라서 집합 A의 부분집합 중 4를 반드시 원소로 가져야 하므로 그 개수는

$2^{5-1} = 2^4 = 16$(개)이다.

23. 정답 ③

[해설]

$a^{2x} + 1 < a^{x+2} + a^{x-2}$에서

$(a^x)^2 - a^x(a^2 + a^{-2}) + 1 < 0$

$(a^x - a^2)(a^x - a^{-2}) < 0$ ...... ㉠

(i) $0 < a < 1$일 때, $a^{-2} > a^2$이므로

㉠은 $a^2 < a^x < a^{-2}$

$\therefore -2 < x < 2$

(ii) $a > 1$일 때, $a^2 > a^{-2}$이므로

㉠은 $a^{-2} < a^x < a^2$

$\therefore -2 < x < 2$

이상에서 $\mathrm{A} = \{x | -2 < x < 2\}$

따라서 구하는 정수의 개수는 -1, 0, 1의 3개다.

24. 정답 ①

[해설]

$3^x = t$ $(t > 0)$로 놓으면

$9^x = (3^x)^2 = t^2$, $3^{x+1} = 3 \cdot 3^x = 3t$이므로

$t^2 - 3t - 54 < 0$, $(t-9)(t+6) < 0$

이 때, $t > 0$이므로 $t - 9 < 0$, 즉 $t < 9$이어야 한다.

따라서 $3^x < 3^2$에서 $x < 2$이므로 자연수 x는 1개다.

25. 정답 ①

[해설]

$a^x = t$로 치환하면 $t > 0$이고,

$a^{2x} - 4a^{x+2} + 4 > 0$에서 $t^2 - 4a^2t + 4 > 0$

이 때, 주어진 x에 대한 지수부등식의 해가 $x < \alpha$또는 $x < \beta$이므로 t에 대한 이차부등식의 해는 $t < a^\alpha$또는 $t > a^\beta$이다.

$a^{2x} - 4a^{x+2} + 4 = t^2 - 4a^2t + 4 = (t - a^\alpha)(t - a^\beta)$이므로

$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} = 4$

이 때, $\alpha + \beta = 6$이므로 $a^6 = 4 = 2^2$에서

$a = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

26. 정답 24

[해설]

$9^x - 10 \cdot 3^x + 24 < 0$에서

$(3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 24 < 0$

$(3^x - 4)(3^x - 6) < 0$

$4 < 3^x < 6$

따라서 $3^\alpha = 4$, $3^\beta = 6$이므로

$3^{\alpha+\beta} = 3^\alpha \cdot 3^\beta = 4 \times 6 = 24$

27. 정답 24

[해설] $4^{2x} - 4^{x+1} - 12 < 0$에서

$(4^x)^2 - 4 \cdot 4^x - 12 < 0$, $(4^x - 6)(4^x + 2) < 0$

이때, $4^x + 2 > 0$이므로

$4^x < 6$ $\quad \therefore x < \log_4 6$

이때, 부등식 $2^{2x} + a \cdot 2^x - 18 < 0$의 해가 $x < \log_4 6 = \log_2 \sqrt{6}$, 즉 $2^x < \sqrt{6}$이려면 $2^{2x} + a \cdot 2^x - 18 = (2^x - \sqrt{6})(2^x + 3\sqrt{6}) < 0$이어야 한다.

$\therefore a = -\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$ $\quad \therefore a^2 = 24$

28. 정답 ⑤

[해설] $3^x + 3^{-x} = t$로 놓으면

$t = 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \times 3^{-x}} = 2$

(단, 등호는 $3^x = 3^{-x}$일 때 성립)

이고, $9^x + 9^{-x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$이므로 주어진 부등식은

$t^2 - 2t + k - 2 \geq 0$

$\therefore\ (t-1)^2 + k - 3 \geq 0$

$t \geq 2$일 때, 위의 부등식이 항상 성립하기 위해서는

$(2-1)^2 + k - 3 \geq 0$

$\therefore\ k \geq 2$

따라서 실수 k의 값의 최솟값은 2이다.

참고

치환할 경우에는 항상 그 범위를 생각한다.

① $3^x = t$로 놓으면 $t > 0$

② $3^x + 3^{-x} = t$로 놓으면 $t \geq 2$

29. 정답 ③

[해설] 용기에 가득 담긴 용액의 양을 A라 하면 n일 후 용기에 담긴 용액의 양은 $\left(\frac{4}{5}\right)^n A$이다.

따라서 부등식 $\left(\frac{4}{5}\right)^n A \leq \frac{1}{10}A$, 즉 $\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq \frac{1}{10}$의 양변에 상용로그를 취하여 정리하면

$n\log\frac{4}{5} \leq -1$, $n(3\log 2 - 1) \leq -1$

$\therefore\ n \geq \frac{1}{1 - 3\log 2} = \frac{1}{0.097} = 10.3\text{xxx}$

따라서 용기에 담긴 용액의 양이 처음 양의 $\frac{1}{10}$ 이하로 줄어드는 것은 11일 후, 즉 12일이므로 처음으로 용액을 다시 채우는 날은 13일이다.

따라서 두 번째로 용액을 다시 채우는 것은 25일이다.

30. 정답 ③

[해설]

$\log_4(x-1) + 1 = \log_4 4(x-1)$

$\log_2(x-4) = \log_{2^2}(x-4)^2$

$= \log_4(x^2 - 8x + 16)$

이므로

$4(x-1) = x^2 - 8x + 16$

$x^2 - 12x + 20 = 0$, $(x-2)(x-10) = 0$

$\therefore x = 2$ 또는 $x = 10$

그런데 진수의 조건에서 $x - 1 > 0$, $x - 4 > 0$이므로

$x > 4$

$\therefore x = 10$

따라서 모든 근의 합은 10이다.

31. 정답 ②

[해설] 진수 조건에서 $-4 < x < 2$ 또는 $x > 2$이다.

$\log_2(x+4) = \log_{2^2}(x-2)^2$이므로 주어진 방정식은

$\log_4(x+4)^2 = \log_4(x-2)^2$

이때, $(x+4)^2 = (x-2)^2$이어야 하므로

$x^2 + 8x + 16 = x^2 - 4x + 4$에서 $x = -1$

이것은 진수 조건을 만족하므로 구하는 해는 $x = -1$

따라서 정수 x는 1개이다.

[참고]

다음은 틀린 풀이이다.

진수는 0보다 커야 하므로

$x + 4 > 0$이고 $(x-2)^2 > 0$ $\quad\therefore -4 < x < 2$ 또는 $x > 2$

$\log_4(x-2)^2 = \frac{1}{2}\log_2(x-2)^2 = \log_2(x-2)$이므로 주어진 방정식을 간단히 하면

$\log_2(x+4) = \log_2(x-2)$

이때, $x + 4 = x - 2$를 만족시키는 실수 x의 값은 존재하지 않으므로 해는 없다.

위의 풀이가 옳지 않은 이유는

$\log_4(x-2)^2$은 $x \neq 2$인 모든 실수 x에 대하여 정의되고

$\log_2(x-2)$는 $x > 2$인 실수 x에 대하여 정의되므로

일반적으로 $\log_4(x-2)^2 \neq \log_2(x-2)$이기 때문이다.

32. 정답 ③

[해설] 로그의 진수 조건에서 $0 < x < 2$이고 $a > 2$ …… ㉠

주어진 방정식을 정리하면

$\log_2 x(2-x) = \log_2 a(a-2)$

$\therefore\ x(2-x) = a(a-2)$

이때, $y = x(2-x)$의 그래프에서 $0 < x < 2$일 때 $0 < y \leq 1$이다.

따라서 방정식 $x(2-x) = a(a-2)$를 만족하는 실수 x가 존재하려면 $0 < a(a-2) \leq 1$이어야 한다.

$a(a-2) > 0$에서 $a < 0$ 또는 $a > 2$ …… ㉡

$a(a-2) \leq 1$에서 $1 - \sqrt{2} \leq a \leq 1 + \sqrt{2}$ …… ㉢

㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면

$1 - \sqrt{2} \leq a < 0$ 또는 $2 < a \leq 1 + \sqrt{2}$

그런데 ㉠에서 $a > 2$이므로 구하는 a값의 범위는 $2 < a \leq 1 + \sqrt{2}$

$\therefore\ p + q = 2 + (1 + \sqrt{2}) = 3 + \sqrt{2}$

33. 정답 ⑤

[해설] 진수 조건에 의해 $x > 2$

주어진 방정식에서

$x^2 + 5x - k = x - 2$ $\qquad\therefore x^2 + 4x - k + 2 = 0$

이 방정식은 2보다 큰 실근을 가져야 하므로

$f(x) = x^2 + 4x - k + 2$로 놓으면 $f(x) = (x+2)^2 - k - 2$

$y = f(x)$의 그래프는 축이 $x = -2$이므로 2보다 큰 실근을 갖기 위해서는 $f(2) < 0$이어야 한다.

즉, $14 - k < 0$ $\qquad\therefore k > 14$

참고

주어진 방정식의 해가 존재하기 위해서는 다음 세 식을 만족해야 한다.

(ⅰ) $x^2 + 5x - k > 0$

(ii) $x-2>0$

(iii) $x^2+5x-k=x-2$

이때, (i),(iii)을 만족하면 (i)을 만족하므로 (ii)와(iii)을 만족하는 조건을 구하면 된다.

34. 정답 ②

[해설]

진수의 조건에서 $x \neq 2a,\ x>0$

밑의 조건에서 $0<a<1,\ a>1$

$\log_a|x-2a|+\log_a x=2$에서 $\log_a|x-2a|x=2$

$\therefore x|x-2a|=a^2$

(i) $0<x<2a$일 때,

$x(-x+2a)=a^2,\ -x^2+2ax=a^2$

$(x-a)^2=0$에서 $x=a$

밑과 진수의 조건을 만족시키므로 $x=a$는 주어진 방정식의 근이다.

(ii) $x>2a$일 때,

$x(x-2a)=a^2,\ x^2-2ax-a^2=0$

$\therefore x=a\pm\sqrt{2}a$

밑과 진수의 조건을 만족시키는 것은 $x=a+\sqrt{2}a$이다.

(i), (ii)에서 $x=a$ 또는 $x=a+\sqrt{2}a$이므로

$\alpha^2+\beta^2=a^2+(1+\sqrt{2})^2a^2=(4+2\sqrt{2})a^2=8+4\sqrt{2}$

$\therefore a=\sqrt{2}$

35. 정답 ⑤

[해설]

주어진 방정식의 해는 두 그래프

$y=\log_a(x-2)$ $\cdots\cdots$ ㉠

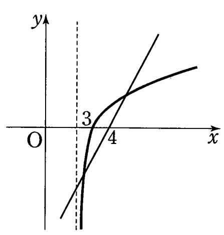
$y=ax-4a=a(x-4)$ $\cdots\cdots$ ㉡

의 교점의 x좌표와 같다.

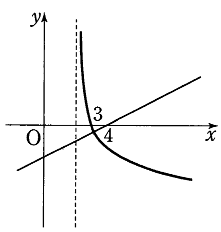
a의 값에 관계없이 ㉠은 항상 점 $(3,\ 0)$을 지나고, ㉡은 항상 점 $(4,\ 0)$을 지난다.

따라서 ㉠, ㉡의 위치 관계는 다음 그림과 같다.

(i) $a>1$일 때



(ii) $0<a<1$일 때



ㄱ. a의 값에 관계없이 항상 근을 갖는다. (참)

ㄴ. $a>1$일 때, 서로 다른 두 개의 근을 갖는다. (참)

ㄷ. 오직 한 개의 실근을 갖는 경우는 $0<a<1$일 때이므로 $3<\alpha<4$이다.(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

36. 정답 ①

[해설]

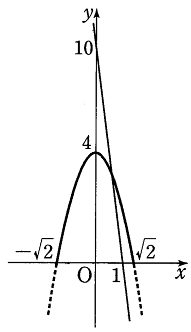
$\log(4-2x^2)=\log(a-x)+1$에서

$\log(4-2x^2)=\log10(a-x)$이므로 주어진 방정식의 근은 두 그래프

$y=4-2x^2,\ y=10(a-x)$

(단, $4-x^2>0,\ a-x>0$)

의 교점의 x좌표와 같다.



오른쪽 그림에서 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$인 범위에서 두 그래프가 만나려면 a는 자연수 이므로 $a=1$이다. $\therefore \alpha=1$

이때, $4-2x^2=10(1-x)$에서 $x^2-5x+3=0$

$\therefore x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

그런데 $\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}>\sqrt{2}$이므로 주어진 방정식의 근이 될 수 없다.

따라서 $\beta=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$이므로

$\alpha+\beta=\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$

37. 정답 25

[해설] $2^{2x}-2^{x+1}-8<0$에서

$(2^x)^2-2\cdot2^x-8<0,\ (2^x-4)(2^x+2)<0$

$2^x-4<0$ ($\because\ 2^x+2>0$)

$\therefore\ x<2$

$\therefore\ A=\{x\mid x<2\}$

이때, $A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\{x\mid x\le 8\}$이 성립하려면

$B=\{x\mid 2\le x\le 8\}$이어야 한다.

$(\log_2 x)^2-a\log_2 x+b\le 0$에서 $\log_2 x=t$로 놓으면

$2\le x\le 8 \Leftrightarrow 1\le t\le 3$

이므로 $(t-1)(t-3)=t^2-4t+3\le 0$

$\therefore\ a=4,\ b=3$

$\therefore\ a^2+b^2=25$

38. 정답 ②

[해설] $x^{\log x}\ge(100x)^k$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}\ge\log(100x)^k$

$\log x\cdot\log x\ge k(\log 100+\log x)$

$(\log x)^2-k\log x-2k\ge 0$

$\log x=t$로 놓으면 임의의 실수 t에 대하여 부등식

$t^2-kt-2k\ge 0$

이 성립해야 한다. 따라서 판별식 D는

$D=k^2+8k\le 0$ $\therefore\ -8\le k\le 0$

그러므로 실수 k의 최솟값은 -8이다.

39. 정답 ③

[해설]

$y^2\cdot x^{\log x}=100$의 양변에 상용로그를 취하면

$2\log y+(\log x)^2=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{M}=xy$라 하고 양변에 상용로그를 취하면

$\log\mathrm{M}=\log x+\log y$ $\cdots\cdots$ ㉡

이때, $\log_x=\mathrm{X}$, $\log y=\mathrm{Y}$로 놓으면

㉠, ㉡에서 $2Y+X^2=2$, $\log M = X+Y$ 이다.

$\therefore \log M = X+Y$

$= X+1-\frac{1}{2}X^2$

$= -\frac{1}{2}(X-1)^2+\frac{3}{2}$

따라서 $\log M$은 $X=1$일 때 최댓값 $\frac{3}{2}$을 갖는다.

$X=1$일 때 $Y=\frac{1}{2}$이므로 $x=10$일 때 $y=\sqrt{10}$ 이다.

따라서 $\alpha=10$, $\beta=\sqrt{10}$, $\gamma=10^{\frac{3}{2}}=10\sqrt{10}$ 이므로

$\log\alpha\beta\gamma=\log 10^3=3$

40. 정답 ①

$(\log_{\frac{1}{3}}x)^2-k\log_{\frac{1}{3}}x-6=0$에서 $\log_{\frac{1}{3}}x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-kt-6=0$ …… ㉠

이 때, 이차방정식 ㉠의 두 근은 $\log_{\frac{1}{3}}\alpha$, $\log_{\frac{1}{3}}\beta$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$k=\log_{\frac{1}{3}}aloha+\log_{\frac{1}{3}}\beta=\log_{\frac{1}{3}}\alpha\beta=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}=2$

Tip

로그방정식 $a(\log_p x)^2+b\log_p x+c=0$의 두근을 α, β라 하면 이차방정식 $at^2+bt+c=0$의 두 근은 $\log_p\alpha$, $\log_p\beta$이다.

$\therefore \log_p\alpha+\log_p\beta=\log_p\alpha\beta=-\frac{b}{a}$

41. 정답 ⑤

[해설]

$\log x=t$라 하면

$(\log x)^2-6\log x-2=0$에서 $t^2-6t-2=0$ … ㉠

$(\log x)^2-a\log x+b=0$에서 $t^2-at+b=0$ … ㉡

이 때, 이차방정식 ㉠의 두 근은 $\log\alpha$, $\log\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log\alpha+\log\beta=6$, $\log\alpha\log\beta=-2$

한편, 이차방정식 ㉡의 두 근은 $\log\frac{1}{\alpha}$, $\log\frac{1}{\beta}$, 즉 $-\log\alpha$, $-\log\beta$이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$a=-\log\alpha-\log\beta=-(\log\alpha+\log\beta)=-6$

$b=(-\log\alpha)(-\log\beta)=\log\alpha\log\beta=-2$

$\therefore ab=(-6)\cdot(-2)=12$

42. 정답 ③

[해설]

밑과 진수의 조건에서 $x>0$, $x\neq1$, $y>0$, $y\neq1$, $x-y>0$

$(\log_x xy)(\log_y xy)+\log_x(x-y)\cdot\log_y(x-y)=0$

$\frac{(\log x+\log y)}{\log x}\cdot\frac{(\log x+\log y)}{\log y}+\frac{\log(x-y)}{\log x}\cdot\frac{\log(x-y)}{\log y}$

$=0$

$(\log x+\log y)^2+\{\log(x-y)\}^2=0$

$\therefore \log x+\log y=\log xy=0$, $\log(x-y)=0$

$\therefore xy=1$, $x-y=1$

$y=x-1$이므로 $x(x-1)=1$에서 $x^2-x-1=0$

$\therefore x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $(\because x>0)$

$\therefore y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=\sqrt{5}$

43. 정답 ④

[해설] $\log_2 2x=\log_3 9y$에서 $\log_2 x=\log_3 y+1$ … ㉠

또, $\log_3 x\log_2 y=\frac{\log x}{\log 3}\cdot\frac{\log y}{\log 2}=\frac{\log x}{\log 2}\cdot\frac{\log y}{\log 3}$

$=\log_2 x\log_3 y$

이므로 $\log_2 x\log_3 y=12$ … ㉡

㉠을㉡에 대입하여 정리하면

$(\log_3 y)^2+\log_3 y-12=0$, $(\log_3 y+4)(\log_3 y-3)=0$

$\therefore \log_3 y=-4$또는 $\log_3 y=3$

$\therefore y=27$ ($\because y$는 정수)

이때, $\log_2 x=\log_3 27+1=4$이므로 $x=2^4=16$

$\therefore x+y=16+27=43$

44. 정답 ①

[해설]

주어진 식을 정리하면

$$\begin{cases} a\cdot2^x-5^y=0 & \cdots ㉠ \\ \frac{1}{4}\cdot2^x-b\cdot5^y=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

$b\times$㉠ $-$ ㉡을 하면

$\left(ab-\frac{1}{4}\right)2^x=0$ $\therefore ab=\frac{1}{4}$ $(\because 2^x>0)$

$a>0$, $b>0$이므로 산술·기하평균의 관계에 의해

$a+b\geq2\sqrt{ab}=1$ (단, 등호는 $a=b=\frac{1}{2}$일 때 성립)

$\left(\frac{1}{2}\right)^{a+b}$은 $a+b$가 최솟값을 가질 때 최댓값을 가지므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{a+b}$은 $a+b=1$일 때 최댓값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

45. 정답 ②

[해설] 현재의 이산화탄소 배출량을 A라 하고 매년 $r\%$의 비율로 배출량을 줄여 나간다고 하면 10년 후의 이산화탄소 배출량은 $0.676A$이어야 하므로

$A\left(1-\frac{r}{100}\right)^{10}=0.676A$

$\left(1-\frac{r}{100}\right)^{10}=0.676$

양변에 상용로그를 취하면

$10\log\left(1-\frac{r}{100}\right)=0.83-1=-0.17$

$\log\left(1-\frac{r}{100}\right)=-0.017=-\log 1.04$

$\frac{100}{100-r}=1.04$

$1.04r=4$

$\therefore\ r\fallingdotseq 3.85$

따라서 매년 3.85%의 비율로 줄여야 한다.

46. 정답 9

[해설]

주어진 방정식에서 $x>0$이므로 $\log_2 x^2=2\log_2 x$이다.

따라서 주어진 방정식은 $[\log_2 x^2]+\log_2 x^2=\frac{9}{2}$

$\log_2 x^2=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)로 놓으면

$[\log_2 x^2]+\log_2 x^2=n+(n+\alpha)=2n+\alpha=4+\frac{1}{2}$

$\therefore n=2,\ \alpha=\frac{1}{2}$

따라서 $\log_2 x^2=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$에서 $x^2=2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{32}$이므로

$x=\sqrt[4]{32}=2^{\frac{5}{4}}\qquad(\because x>0)$

$\therefore a+b=4+5=9$

47. 정답 ②

[해설] $|\log_2(x+1)|<1$에서 $-1<\log_2(x+1)<1$

$\log_2\frac{1}{2}<\log_2(x+1)<\log_2 2$

$\frac{1}{2}<x+1<2\qquad\therefore -\frac{1}{2}<x<1$

이때, $-\frac{1}{2}<x<1$을 해로 갖는 이차부등식은

$\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)<0\qquad\therefore x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}<0$

따라서 $a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}$이므로 $a^2+b^2=\frac{1}{2}$

48. 정답 ②

[해설] 진수 조건에 의해 $x^2-6x+8>0,\ x-4>0$이므로

$x>4$ ………㉠

주어진 부등식에서 $\log(x^2-6x+8)\le\log 10(x-4)$

밑이 1보다 크므로

$x^2-6x+8\le 10(x-4),\ x^2-16+48\le 0$

$(x-4)(x-12)\le 0\quad\therefore 4\le x\le 12$ ………㉡

㉠, ㉡에 의해 주어진 조건을 만족하는 정수는

$x=5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12$

따라서 모든 정수들의 합은 $17\times 4=68$

49. 정답 ③

[해설]

$\log_2(x^2-3x-4)\le 1+\log_2 3$에서

$\log_2(x^2-3x-4)\le\log_2 6$

$x^2-3x-4\le 6,\ x^2-3x-4>0$

$x^2-3x-10\le 0,\ (x-4)(x+1)>0$

$-2\le x\le 5$ 그리고 ($x<-1$ 또는 $x>4$)

$\therefore -2\le x<-1$ 또는 $4<x\le 5$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 모든 정수의 합은 $-2+5=3$이다.

50. 정답 ④

[해설]

(i) 진수의 조건에 의하여 $x-5>0,\ x-6>0$

$\therefore x>6$ ⋯⋯ ㉠

(ii) $\log_{\frac{1}{2}}(x-5)+1>\log_2(x-6)$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(x-5)-\log_2(x-6)>-1$

$\log_{\frac{1}{2}}(x-5)+\log_{\frac{1}{2}}(x-6)>\log_{\frac{1}{2}}2$

따라서 $\log_{\frac{1}{2}}(x-5)(x-6)>\log_{\frac{1}{2}}2$이므로

$(x-5)(x-6)<2,\ x^2-11x+28<0$

$(x-4)(x-7)<0$

$\therefore 4<x<7$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $6<x<7\qquad\therefore 6.54\in A$

51. 정답 ③

[해설] $k=\log_2(x+1)$로 놓으면 $x>1$일 때, $k>1$이고

$x=\boxed{2^k-1}$, 즉 $2^k=\boxed{x+1}$

그런데 $x>1$에서 부등식 $3^x>2^x+1$이 성립하므로

$3^k>2^k+1=(x+1)+1=\boxed{x+2}$

양변에 3을 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_3 3^k=k=\log_2(x+1)>\log_3(x+2)$

이므로 부등식 $\log_2(x+1)>\log_3(x+2)$가 성립한다.

52. 정답 ④

[해설] $|\log_4 x-2|=\left|\log_4\frac{x}{16}\right|\le 1-\log_4 y=\log_4\frac{4}{y}$에서

$-\log_4\frac{4}{y}\le\log_4\frac{x}{16}\le\log_4\frac{4}{y}$

$\frac{y}{4}\le\frac{x}{16}\le\frac{4}{y}\qquad\therefore 4y^2\le xy\le 64$

$4y^2\le 64$에서 $y=1,2,3,4$

$y=1$일 때, $x=4,5,\cdots,64$

$y=2$일 때, $x=8,9,10,\cdots,32$

$y=3$일 때, $x=12,13,\cdots,21$

$y=4$일 때, $x=16$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $61+25+10+1=97$(개)

53. 정답 8

[해설]

$\log_{\frac{1}{5}}(x^2+2) \geqq \log_{\frac{1}{5}}3(x+4)$의 진수의 조건에서

$x^2+2>0$이고 $3(x+4)>0$이므로

$x>-4 \cdots$ ㉠

$0<(\text{밑})=\dfrac{1}{5}<1$이므로

$\log_{\frac{1}{5}}(x^2+2) \geqq \log_{\frac{1}{5}}3(x+4)$

$x^2+2 \leqq 3x+12$

$x^2-3x-10 \leqq 0,\ (x-5)(x+2) \leqq 0$

$\therefore\ -2 \leqq x \leqq 5 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$-2 \leqq x \leqq 5$

따라서 구하는 정수 x는 $-2,\ -1,\ \cdots,\ 5$의 8개다.

54. 정답 63

[해설] 밑의 변환 공식에 의하여

$$\frac{2\log x}{2\log 2}+\frac{3\log 2}{\frac{1}{2}\log x} \leq 7$$

$$\frac{\log x}{\log 2}+\frac{6\log 2}{\log x} \leq 7$$

밑의 조건에 의하여 $x \neq 1$이고 x는 자연수이므로 $x>1$

양변에 $\log 2 \cdot \log x$를 곱하여 정리하면

$(\log x)^2-7\log 2 \cdot \log x+6(\log 2)^2 \leq 0$

$(\log x-\log 2)(\log x-6\log 2) \leq 0$

$\log 2 \leq \log x \leq 6\log 2$

$\therefore\ 2 \leq x \leq 2^6$

따라서 구하는 자연수 x의 개수는 63개이다.

55. 정답 25

[해설]

밑과 진수의 조건에서 $x^2+x+2>0$이므로 $3x^2+ax+2>0$

$\therefore\ D=a^2-24<0 \qquad \therefore\ 0<a<2\sqrt{6}\ \ (a \neq 1)$

(i) $0<a<1$일 때

$3x^2+ax+2>4(x^2+x+2)$

$x^2+(4-a)x+6<0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

임의의 실수 x에 대하여 ㉠이 항상 성립하도록 하는 실수 a는 존재하 지 않는다.

(ii) $a>1$일 때

$3x^2+ax+2<4(x^2+x+2)$

$x^2+(4-a)x+6>0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡이 임의의 실수 x에 대하여 항상 성립하려면

$D=(4-a)^2-24=a^2-8a-8<0$

따라서 $4-2\sqrt{6}<a<4+2\sqrt{6}$이므로

$1<a<4+2\sqrt{6}$

(i), (ii)에서 구하는 양수 a의 조건은 $1<a<2\sqrt{6}$이다.

$\therefore\ p^2+q^2=1+24=25$

56. 정답 ④

[해설] $\log_2 x=t$로 놓으면 $(\log_2 9x)(\log_2 x)=2$에서

$(2\log_2 3+\log_2 x)(\log_2 x)=2$이므로 $t^2+2t\log_2 3-2=0$

위의 방정식의 두 근을 $t_1=\log_2\alpha,\ t_2=\log_2\beta$로 놓으면 근과 계수의 관계에 의해

$t_1+t_2=\log_2\alpha+\log_2\beta=\log_2\alpha\beta=-2\log_2 3=\log_2\dfrac{1}{9}$

$\therefore \alpha\beta=\dfrac{1}{9}$

57. 정답 ④

[해설]

진수의 조건에서 $x>0 \cdots$ ㉠

$x^{2\log x}<\dfrac{100}{x^3}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{2\log x}<\log\dfrac{100}{x^3}\ (x>0)$

$2(\log x)62<\log 100-3\log x$

$\log x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$2t^2<2-3t,\ \ 2t^2+3t-2<0$

$(2t-1)(t+2)<0 \quad \therefore\ -2<t<\dfrac{1}{2}$

$-2<\log x<\dfrac{1}{2}$에서

$\dfrac{1}{100}<x<\sqrt{10}$

따라서 $\alpha=\dfrac{1}{100},\ \beta=\sqrt{10}$이므로

$\dfrac{\beta}{\alpha}=100\sqrt{10}$

58. 정답 ①

[해설]

(i) $\log_2(x^2+y^2-2)<0$

진수의 조건에서

$x^2+y^2-2>0 \cdots$ ㉠

$0=\log_2 1$이고, 밑 2가 1보다 크므로

$x^2+y^2-2<1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $2<x^2+y^2<3$

(ii) $\log_{\frac{1}{2}}y<\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}x^2$

진수의 조건에서

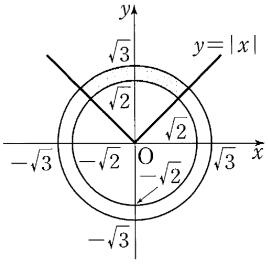
$y>0,\ x^2>0 \cdots$ ㉢

$\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}x^2=\log_{\frac{1}{2}}|x|$이고, 밑 $\dfrac{1}{2}$이 1보다 작으므로

$y>|x| \cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 $y>|x|$

(i), (ii)에서 점 $(x,\ y)$가 만족하는 영역을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림의 어두운 부분과 같다. (단, 경계선은 제외)



따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{4}\{\pi(\sqrt{3})^2-\pi(\sqrt{2})^2\}=\frac{\pi}{4}$$

***59.* 정답 ④**

[해설]

(i) $\log_8 y^3 \ge \log_2(2x^2-7x+5)$에서 $\log_2 y \ge \log_2(2x^2-7x+5)$ 이므로

$y \ge 2x^2-7x+5$

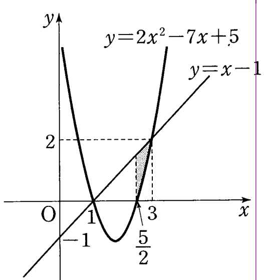
진수의 조건에서 $y>0$, $2x^2-7x+5>0$

(ii) $\log_2 y \le 2\log_4(x-1)$에서 $\log_2 y \le \log_2(x-1)$이므로

$y \le x-1$

진수의 조건에서 $y>0$, $x-1>0$

이상에서 주어진 연립부등식을 만족시키는 $(x,\ y)$를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$2x^2-7x+5=x-1$에서

$x^2-4x+3=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

이때, $x+y$의 값은 $x=3$, $y=2$일 때, 최댓값 5를 갖는다.

따라서 $\log_{\sqrt{5}}(x+y)$의 최댓값은 $\log_{\sqrt{5}}5=2$이다.

***60.* 정답 ⑤**

[해설]

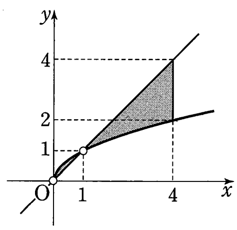
밑과 진수의 조건에서

$x>0$, $x\neq1$, $y>0$

$2(\log_x y)^2-3\log_x y+1 \le 0$에서

$(2\log_x y-1)(\log_x y-1)\le 0$

$\therefore \frac{1}{2}\le \log_x y \le 1$



(i) $0<x<1$일 때, $x \le y \le \sqrt{x}$

(ii) $1<x\le 4$일 때, $\sqrt{x}\le y \le x$

따라서 주어진 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 위의 그림과 같다.

$\left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 2^y=k$로 놓으면 $2^y=k\cdot 3^x$

양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$y=\log_2(k\cdot 3^x)=\log_2 k+x\log_x 3$ …… ㉠

㉠은 기울기가 $\log_2 3$인 직선을 y축의 방향으로 $\log_2 k$만큼 평행이동시킨 것이다.

이때, $\log_2 3>1$이므로 $0<x<1$에서 곡선 $y=\sqrt{x}$와 접할 때 k의 값은 최대이고, 점 $(4,\ 2)$를 지날 때, k의 값은 최소이다.

따라서 구하는 최솟값은 $k=\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot 2^2=\frac{4}{81}$