일차변환 51문제 답안지

1) ①

원점을 중심으로 45° 만큼 회전이동한 다음 원점을 중심으로 $\frac{1}{2}$ 배로 축소하는 일차변환이므로

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos45^{\circ} & -\sin45^{\circ}\\ \sin45^{\circ} & \cos45^{\circ}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos45^{\circ} & -\sin45^{\circ}\\ \sin45^{\circ} & \cos45^{\circ}\end{pmatrix}$$

$$A^{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\begin{pmatrix}\cos180^{\circ} & -\sin180^{\circ}\\ \sin180^{\circ} & \cos180^{\circ}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{4}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$a=-\frac{1}{16},\quad b=-\frac{1}{16}$$

$$\therefore \frac{a+bi}{1+i}=-\frac{1}{16}\cdot\frac{1+i}{1+i}=-\frac{1}{16}$$

2) 8개

f는 원점을 중심으로 90° 만큼 회전하는 회전변환, g 는 y 축에 대한 대칭변환이다.

점 $P(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2})$ 은 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 30° 인 단위원 위의 점이다.

따라서, 점 P를 f와 g의 유한 번 합성변환에 의해 옮기면 8 개의 점 하나로 옮겨진다.

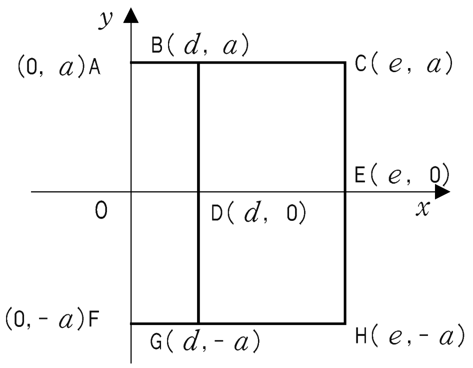
3) ④

ㄱ. 주어진 도형을 원점을 중심으로 180° 만큼 회전이동하면 얻어진다.

.ㄷ 일차변환의 행렬 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$에서 $ad-bc=0$ 인 경우 일차변환에 의해 좌표평면 위의 도형은 원점을 지나는 직선 또는 한 점으로 옮겨진다.

따라서 ㄱ, ㄷ 만 가능하다.

4) ⑤



좌표를 그림과 같이 정하고 준 일차변환의 행렬을 P라 하면 $P\begin{pmatrix}d & d\\ a & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$

$$P=\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & d \\ a & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$=-\frac{1}{ad}\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -d \\ -a & d \end{pmatrix}$$
$$=-\frac{1}{ad}\begin{pmatrix} 0 & -de \\ -a^2 & ad \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{ad}\begin{pmatrix} 0 & de \\ a^2 & -ad \end{pmatrix}$$
$$\therefore\ P\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}=\frac{1}{ad}\begin{pmatrix} 0 & de \\ a^2 & -ad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{ad}\begin{pmatrix} ade \\ -a^2 d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e \\ -a \end{pmatrix}$$
따라서, 점 A는 점 H로 옮겨진다.

(별해) 주어진 일차변환을 f라 하면

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}$이고, $f(\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OE}$, $f(\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{OA}$ 이므로 $f(\overrightarrow{OB})=f(\overrightarrow{OA})+f(\overrightarrow{OD})$

$=f(\overrightarrow{OA})+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OE}$

$\therefore\ f(\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OH}$

따라서, 점 A는 점 H로 옮겨진다.

5) 0

6) 12

7) ②

8) ①

9) ②

10) ③

11) ②

12) $b=\frac{5}{4}$

13) ②

일차변환 $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 에 의해 점 $(x,\ y)$ 가 점 $(x',\ y')$ 로 옮겨진다고 하자.

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$x+ay=x'$, $y=y'$

$y=y'$, $x=x'-ay'$

따라서, $x+y-1=0$ 에 대입하여 정리하면

$x'+(1-a)y'=1$

$x-y-1=0$ 과 일치할 조건은

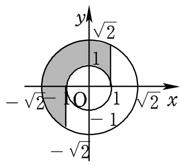
$$\frac{1}{1}=\frac{1-a}{-1}=\frac{-1}{-1}$$

$$1-a=-1$$

$$\therefore\ a=2$$

14) ①

행렬 A 는 180° 회전변환이므로 선분을 180° 회전시키면 지나가는 영역은 오른쪽 그림과 같다.
따라서, 넓이가 같은 것은 ① 이다.



15) ⑤

일차변환은 이동 후의 점 $(x',\ y')$ 이 이동 전의 점 $(x,\ y)$ 에 대한 일차식으로 나타나고
상수항은 0 인 변환을 일차변환이라 하므로 각 변환은 다음과 같이 나타낼 수 있으므로 ⑤ 는 일차변환이 아니다.

① $\begin{cases} x'=x=1\cdot x+0\cdot y \\ y'=0=0\cdot x+0\cdot y \end{cases}$

② $\begin{cases} x'=0=0\cdot x+0\cdot y \\ y'=y=0\cdot x+1\cdot y \end{cases}$

③ $\begin{cases} x'=-x=(-1)\cdot x+0\cdot y \\ y'=-y=0\cdot x+(-1)\cdot y \end{cases}$

④ $\begin{cases} x'=-y=0\cdot x+(-1)\cdot y \\ y'=-x=(-1)\cdot x+0\cdot y \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} x'=2a-x=(-1)\cdot x+0\cdot y+2a \\ y'=2b-y=0\cdot x+(-1)\cdot y+2b \end{cases}$

16) ①

$f\circ g$ 를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

따라서, 점 $(1,\ 1)$ 이 이동하는 점을 $(a,\ b)$ 라 하면

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

17) 72

합성변환 $f\circ g$ 에 의하여 점 $(x,\ y)$ 가 점 $(y,\ x)$ 로 옮겨지므로
$f\circ g$ 는 $y=x$ 에 대한 대칭이동을 나타내는 변환이다.

따라서, $f\circ g$ 를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\therefore\ A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

따라서, 모든 성분의 곱은 72 이다.

18) 답 : ⑤

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A^6 = 2^6\begin{pmatrix} \cos 360^\circ & -\sin 360^\circ \\ \sin 360^\circ & \cos 360^\circ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^6 & 0 \\ 0 & 2^6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ a+b=-16$

19) 답 : 2

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

이므로

$x=-x'+2y'$, $y=-3x'+5y'$

그런데 점 $(x,\ y)$가 직선 $y=2x+1$ 위에 있으므로

$-3x'+5y'=2(-x'+2y')+1$

$\therefore\ y'=x'+1$

따라서, $a=1$, $b=1$ 이므로 $a+b=2$

20) ④

일차변환 f 를 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 라 놓으면

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

에서 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\therefore\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ㄱ. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

ㄴ. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하지 않으므로 $(3,\ 6)$으 로 옮겨지는 점은 $(1,\ 1)$ 뿐이 아닐 수 있다.

즉, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

에서 알 수 있듯이 직선 $2x+y=3$ 위의 모든 점은 점 $(3,\ 6)$으로 옮겨진다.

ㄷ. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 4x+2y \end{pmatrix}$ 에서

$x'=2x+y,\quad y'=4x+2y$

즉, $y'=2x'$이므로 좌표평면 위의 모든 점들은 직선 $y=2x$ 위의 점으로 옮겨진다.

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21) ①

주어진 일차변환의 행렬로부터 일차변환 f는 원점을 중심으로 θ만큼 회전이동시킨 후, 원점을 중심으로 $\frac{1}{2}$ 배 축소시키는 것임을 알 수 있다.

따라서, 원 C'의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}$ 이다.

또, 원 C'의 중심의 좌표는

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix}$ 로부터

$(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$이다.

원 C'이 y축에 접하므로 $|2\cos\theta| = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \cos^2\theta = \frac{1}{16}$

22) 정답 ③

일차변환 f와 g는 각각 x축에 대한 대칭이동과 직선 $y=x$에 대한 대칭이동을 나타낸다.

점 A$(2,\ 1)$과 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동인 점을 B, 점 B와 x축에 대칭인 점을 C,

점 C와 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 점을 D, 점 D와 x축에 대하여 대칭인 점을 E, $\cdots$

이와 같이 찾아보면 집합 S는 위의 그림과 같은 8 개의 점 A~H를 원소로 가진다.

23) 정답 ③

일차변환 f의 행렬은

$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 이다.

즉, $\begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix}$ 이므로 f는 원점을 중심으로 120° 회전이동 시키는 일차변환을 나타낸다.

24) 정답 : -10

$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ 에서 $\begin{pmatrix} 3+a \\ 9+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\therefore\ a=-1,\ b=-2$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 에서

$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ c = -3,\ d = -4$

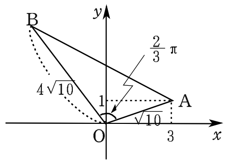
$\therefore\ a + b + c + d = -1 - 2 - 3 - 4 = -10$

25) 정답 ②

일차변환 f 를 나타내는 행렬은

$$2\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi \end{pmatrix}$$

이므로 f 는 원점을 중심으로 $\frac{2}{3}\pi$ 만큼 회전한 다음 4 배 확대하는 회전변환과 닮음변환의 합성변환이다.



이 때, $\overline{OA} = \sqrt{10}$, $\overline{OB} = 4\sqrt{10}$ $\angle AOB = \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$\triangle OAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times 4\sqrt{10} \times \sin\frac{2}{3}\pi = 10\sqrt{3}$$

26) 정답 ②

직선 $y = kx$ 위의 임의의 점을 $(x,\ kx)$ 라 하면

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ kx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3kx \\ x + kx \end{pmatrix}$$

이 때, 점 $(2x + 3kx,\ x + kx)$ 는 직선 $y = kx$ 위의 점이므로

$x + kx = k(2x + 3kx)$

$(3k^2 + k - 1)x = 0$

모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$3k^2 + k - 1 = 0$

이 방정식의 모든 실근의 합은 근과 계수와의 관계에 의하여 $-\frac{1}{3}$ 이다.

27) 정답 -7

행렬 A 의 역행렬이 존재하지 않으므로

$(b - t)a - 3(t + 4) = 0$

$ab - at - 3t - 12 = 0$

$(a + 3)t - ab + 12 = 0$ ………… ㉠

㉠ 이 t 에 대한 항등식이므로

$a + 3 = 0,\ -ab + 12 = 0$

$\therefore\ a = -3,\ b = -4$

$\therefore\ a + b = -7$

28) 정답 ⑤

일차변환 f 는 원점을 중심으로 2 배 확대한 변환이고,

g : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-60^{\circ}) & -\sin(-60^{\circ}) \\ \sin(-60^{\circ}) & \cos(-60^{\circ}) \end{pmatrix}$

이므로 원점을 중심으로 -60° 회전한 변환이다.

$\triangle$ABC 의 넓이는 1 이므로 일차변환 f 에 의해서 넓이가 4 인 삼각형으로 옮겨지고, 회전변환 g 에 의해서는 삼각형의 넓이는 변하지 않는다.

따라서, 옮겨진 삼각형의 넓이는 4 이다.

29) 52

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 에서

$x' = 3y,\ \ y' = 2x \iff x = \frac{1}{2}y',\ y = \frac{1}{3}x'$

이 값을 $x^2 + y^2 = 1$ 에 대입하면

$\frac{x'^2}{3^2} + \frac{y'^2}{2^2} = 1$

즉, 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ 이므로

$p = 6,\ \ q = 4$

$\therefore\ p^2 + q^2 = 36 + 14 = 52$

30) 정답 ⑤

행렬 A 로 나타내어지는 일차변환을 f 라 할 때, 좌표평면 위의 서로 다른 두 점 P, Q 의 일차변환 f 에 의한 상을 $f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$, $f(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}'$ 이라 하자.

① 직선 PQ 위의 임의의 점 R 는

R $=$ P $+$ $(1-t)$Q (단, t 는 실수)로 표현할 수 있다.

$f(\mathrm{R}) = f\{t\mathrm{P} + (1-t)\mathrm{Q}\}$

$= tf(\mathrm{P}) + (1-t)f(\mathrm{Q})$

$= t\mathrm{P}' + (1-t)\mathrm{Q}'$

② 선분 PQ 의 중점 M 은 $\mathrm{M} = \frac{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}{2}$ 이므로

$f(\mathrm{M}) = f\left(\frac{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}{2}\right) = \frac{f(\mathrm{P}) + f(\mathrm{Q})}{2}$

$= \frac{\mathrm{P}'+\mathrm{Q}'}{2}$

따라서, 일차변환 f 에 의한 선분 PQ 의 중점 M 은 P′Q′ 의 중점으로 옮겨진다.

③, ④ □PQRS 에서 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ 이면 $\overrightarrow{\mathrm{RS}} = k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

$f(\overrightarrow{\mathrm{RS}}) = f(k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}) = kf(\overrightarrow{\mathrm{PQ}})$

$\therefore$ $\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$ $\overrightarrow{\mathrm{R'S'}}$

따라서, 평행한 직선은 평행한 직선으로 옮기고 평행사변형은 평행사변형으로 옮긴다.

⑤ $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, O$(0,\ 0)$, P$(1,\ 0)$, Q$(0,\ 1)$ 이라 하면 $\triangle$OPQ 는 직각이등변삼각형이지만 P′$(2,\ 0)$,

$Q'(0,\ 1)$ 이므로 $\triangle OP'Q'$ 은 직각이등변삼각형이 아니다. 즉, 삼각형의 상은 삼각형이지만 닮은꼴은 아니다.

31) 정답 ⑤

일차변환 f 에 의해 점 $(1,\ 0)$ 이 점 $(2,\ 1)$ 로, 점 $(0,\ 1)$ 이 점 $(0,\ 2)$ 로 옮겨지므로 일차변환 f 의 행렬을 A 라 하면

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

점 B 의 좌표는 $(1,\ 1)$ 이므로

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

즉, 일차변환 f 에 의해 점 B 는 점 Z 로 옮겨진다.

32) 정답 ①

$P(x,\ y)$, $Q(x',\ y')$, $R(x'',\ y'')$ 이라 하면

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$ 이고

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x' \\ y' \end{pmatrix}$$ 이므로

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서, 구하는 행렬은 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 이다.

33) 정답 ②

좌표평면 위의 모든 점이 일차변환에 의하여 원점을 지나는 직선 $y = mx$ 위의 점으로 옮겨지므로 행렬 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ 은 역행렬을 갖지 않는다.

따라서, $-3a - 6 = 0$ 에서 $a = -2$ 이다.

또, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y \\ 6x - 3y \end{pmatrix}$

즉, $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = 6x - 3y \end{cases}$ 이므로 $y' = -3x'$

따라서, 행렬 $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ 으로 나타나는 일차변환에 의하여 좌표평면 위의 모든 점은 직선 $y = -3x$ 위의 점으로 옮겨진다.

$\therefore\ m = -3$

$\therefore\ a + m = (-2) + (-3) = -5$

34) 정답 ②

일차변환 f 는 두 점 A_2, A_5를 지나는 직선에 대하여 대칭이동시킨 변환이다.

따라서, A_2가 옮겨지는 점은 A_2 자신이다.

35) 정답 10

$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 인 점 P $(x,\ y)$ 가 존재한다.

$\left(단,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이므로 행렬 $\begin{pmatrix} 4-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{pmatrix}$ 는 역행렬을 가질 수 없다.

$\therefore\ (4-k)(3-k)=0$

$k^2-7k+10=0$

따라서, 두 근의 곱은 10 이다.

36) ②

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 에서

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x'+3y' \\ x'-y' \end{pmatrix}$

$x=-2x'+3y'$, $y=x'-y'$을 $x+2y=1$ 에 대입하면

$(-2x'+3y')+2(x'-y')=1 \iff y'=1$

따라서 직선 l 의 방정식은 $y=1$

직선 $y=1$ 이 포물선 $y=x^2+2x+a$ 에 접하므로

방정식 $1=x^2+2x+a$ 즉, $x^2+2x+a-1=0$ 이 중근을 갖는다.

판별식 $\dfrac{D}{4}=1-a+1=0 \quad \therefore\ a=2$

37) ⑤

(ⅰ) 일차변환은 원점을 원점으로 옮기므로 ①, ②, ③ 은 될 수 없다.

(ⅱ) 일차변환은 선분을 선분으로 옮기므로 ④ 가 될 수 없다,

(ⅲ) 일차변환의 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 가 영행렬이 아니고

$ad-bc=0$ 이면 원점을 포함한 영역은 원점을 포함하는 선분으로 옮겨질 수 있다.

38) 정답 ⑤

직선 $x+y=1$ 위의 점 $(x,\ y)$ 가 주어진 일차변환에 의하여 옮겨지는 점을 $(x',\ y')$ 이라고 하면

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x' + y' \\ y' \end{pmatrix}$$

$\therefore\ x = x' + y',\quad y = y'$

이것을 $x + y = 1$ 에 대입하여 정리하면

$x' + 2y' = 1$

따라서, 옮겨지는 직선의 방정식은 $x + 2y = 1$ 이다.

$\therefore\ a = 1,\quad b = 2$

$\therefore\ a + b = 3$

39) ④

영역 D 에 속하는 임의의 점을 $P(x,\ y)$라고 하면 $y < 2x$ 이고 $y > \frac{1}{2}x$

주어진 일차변환에 의한 점P 의 상을 P'이라 할 때,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x - 2y \end{pmatrix}$$

$\therefore P'(2x - y,\ x - 2y)$

그런데 위에서 $2x - y > 0$ 이고 $x - 2y < 0$ 이므로 점P'은 제4 사분면 위의 점이다.

40) 정답 ①

일차변환 f 의 행렬을 A 라 하면

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이므로

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

직선 OQ 의 방정식이 $y = -x$ 이므로 직선 OQ 위의 임의의 점

$(t\ -\ t)$ 의 일차변환 f 에 의한 상은

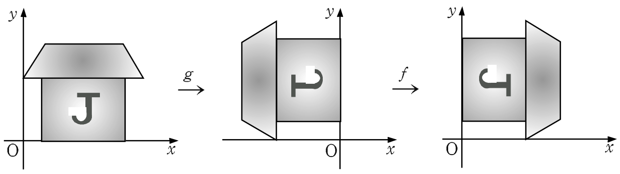
$$A \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

즉, 직선 OQ 의 일차변환 f 에 의한 상은 원점 O 이다.

41) 정답 ①

일차변환 f 는 y 축에 대한 대칭변환이고, 일차변환 g 는 원점을 중심으로 $90°$ 회전이동하는 변환이다.

따라서, 합성변환 $f \circ g$ 에 의하여 주어진 그림은 다음과 같이 이동한다.



42) 정답 ①

f 는 직선 $y=x$ 위의 점 $(x,\ y)$ 를 자기 자신 $(x,\ y)$ 로 옮기는 일차변환이므로

일차변환 f 를 나타내는 행렬을 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 라 하면

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

연립방정식이 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가져야 하므로

$(a-1)(d-1)-bc=0$

즉, $ad-(a+d)+1-bc=0$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ ㉠

그런데, f 의 역변환이 존재하지 않으므로 행렬 A 의 역행렬이 존재하지 않는다.

즉, $ad-bc=0$

㉠에서 $-(a+d)+1=0$

$\therefore\ a+d=1$

43) 4

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 에서 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2a}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\therefore\ x=\dfrac{1}{2a}(ax'-y'),\ y=\dfrac{1}{2a}\cdot 2y'=\dfrac{y'}{a}$

따라서 위 식을 직선 $y=2x+5$ 에 대입하여 정리하면

$y'=\dfrac{1}{2}ax'+\dfrac{5a}{2}$

이 직선이 $y=2x+5$ 와 평행하므로 $\dfrac{1}{2}a=2$ 에서 $a=4$

44) ① [출제의도] 합성변환을 활용할 수 있다.

일차변환을 나타내는 행렬을 A 라 하고, 점 P, Q 의 좌표를 P$(a,\ b)$, Q$(c,\ d)$라고 하면

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

또, 합성변환 $f\circ f$ 를 나타내는 행렬은 A^2 이고

$$A^2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad A^2\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

즉, $A^2\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

한편, 세 점 O, P, Q 는 일직선 위에 있지 않으므로

$\frac{b}{a} \neq \frac{d}{c}$, $ad - bc \neq 0$,

즉, 행렬 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ 의 역행렬 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1}$ 이 존재한다.

$\therefore A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

따라서, 합성변환 $f \circ f$ 에 의하여 원 C 는

원점 O 로 옮겨진다.

45) 답 3

일차변환 f 를 나타내는 행렬을 A 라 하면

$$A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 2a - 3c \\ 2b - 3d \end{pmatrix} &= A\left(2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) \\ &= 2A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - 3A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\therefore \ e + f = 5 + (-2) = 3$

46) ⑤ [출제의도] 주어진 일차변환을 이해하고 이를 도형에 적용할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

이므로 일차변환 f 는 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{4}$ 회전시킨 회전변환과 원점을 중심으로 $\sqrt{2}$ 배 확대시킨 닮음변환의 합성변환이다.

따라서 점 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 를 좌표평면에 나타내면 위의 그림과 같다.

$\therefore$(오각형 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 의 넓이)

$= \triangle OP_1P_2 + \triangle OP_2P_3 + \triangle OP_3P_4 + \triangle OP_4P_5$

$= 1 + 2 + 4 + 8 = 15$

47) $\left(\frac{1}{2}, \ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$ 이므로 일차변환 f 는 원점을

중심으로 60° 만큼 회전이동시키는 회전변환이므로

f^{2003} 은 $2003 \times \frac{\pi}{3} = 333 \times 2\pi + \frac{5}{3}\pi$ 에서 원점을 중심으로 $\frac{5}{3}\pi$ 만큼 회전이동시킨 회전변환이다.

따라서 $\begin{pmatrix} \cos\frac{5}{3}\pi & -\sin\frac{5}{3}\pi \\ \sin\frac{5}{3}\pi & \cos\frac{5}{3}\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

48) ③ [출제의도] 합성변환에 의하여 이동되는 도형의 식을 구할 수 있다.
$g \circ f$ 를 나타내는 행렬
$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$
직선 $3x-2y=1$ 위의 점(x, y)가 일차변환 $g \circ f$ 에 의하여 (x', y')으로 이동된다면
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-2y \\ -6x+4y \end{pmatrix}$
$3x-2y=1$이므로 $x'=1$
또, $y'=-6x+4y=-2(3x-2y)=-2$
∴ 이동된 도형은 $(1, -2)$가 된다.

49) ④
$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$
라 하면
$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (BA)^{n-1}\begin{pmatrix} 32 \\ 0 \end{pmatrix} = (B(\frac{1}{2}E))^{n-1} 2^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 2^5 B^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$= 2^{-n+1+5}\begin{pmatrix} \cos\frac{(n-1)\pi}{3} & -\sin\frac{(n-1)\pi}{3} \\ \sin\frac{(n-1)\pi}{3} & \cos\frac{(n-1)\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$= 2^{-n+6}\begin{pmatrix} \cos(n-1)\frac{\pi}{3} \\ \sin(n-1)\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$
그런데 $P_n(x_n, y_n)$이 그림의 어두운 부분에 속하기 위해서는 $2^{-n+6} \leqq 1 \leftrightarrow n \geqq 6$ .... (1)

$2k\pi + \frac{\pi}{2} \leqq (n-1)\frac{\pi}{3} \leqq 2k\pi + \pi$ .... (2)

$(k=0,1,2,\cdots)$

(2)에서
ㄱ) $k=0$일 때, $n=3, 4$ 이것은 (1)에서 모순
ㄴ) $k=1$일 때, $n=9, 10$
ㄷ) $k=2$일 때, $n=15, 16$
⋮
따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 9이다.

50) 41 이해력- 일차변환과 행렬
점 P의 좌표를 (α, β)라 놓으면

$A^{2004}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$이므로

$A^{2004}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -26 \end{pmatrix}$

$\therefore\ a = 15,\ b = -26 \quad \therefore\ a - b = 41$

51) 8개
일차변환 f 가 나타내는 행렬을 $A = \begin{pmatrix} a\ b \\ c\ d \end{pmatrix}$ 라 하면

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\ b \\ c\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 에서 $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$

이 때, 점 $(x',\ y')$가 $x'^2 + y'^2 = 1$ 을 만족하므로

$(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = 1$

$\therefore (a^2 + c^2)x^2 + (b^2 + d^2)y^2 + 2(ab + cd)xy = 1$

이 식이 $x^2 + y^2 = 1$ 을 만족해야 하므로

$a^2 + c^2 = 1,\quad b^2 + d^2 = 1 \quad \cdots$ ①

$ab + cd = 0 \quad \cdots$ ②

이 때, a, b, c, d 는 정수이므로 ①에서

$(a,c) = (0,1),\ (0,\ -1),\ (1,0),\ (-1,0) \ \cdots$ ③

$(b,d) = (0,1),\ (0,-1),\ (1,0),(-1,0)$

그런데, ③ 에서 $a = 0$ 이면 $c \neq 0$ 이므로, ②에서 $d = 0$ 이다.

따라서, $(a,c) = (0,1)$ 에 대하여

$(b,d) = (1,0),\ (-1,0)$ 이 ②를 만족한다.

같은 방법으로 (a,c)의 4 가지 각각의 해에 대하여 (b,d)의 해가 2 가지씩 존재하므로

구하는 일차변환 f 의 개수는 8 개다.

1. 답 ①	2. 답 ④	3. 답 18	4. 답 14
5. 답 ②	6. 답 ②	7. 답 ①	8. 답 ②
9. 답 ②	10. 답 ⑤	10. 답 ⑤	12. 답 ③
13. 답 60	14. 답 7	15. 답 ②	16. 답 ①
17. 답 ⑤	18. 답 4	19. 답 29	20. 답 ②
21. 답 12	22. 답 ①	23. 답 ⑤	24. 답 ⑤
25. 답 ⑤	26. 답 ②	27. 답 ③	28. 답 ②
29. 답 ②	30. 답 288	31. 답 ④	32. 답 ①
33. 답 ④	34. 답 40	35. 답 ⑤	36. 답 20
36. 답 20	38. 답 ①	39. 답 ①	40. 답 ③
41. 답 ③	42. 답 12	43. 답 ⑤	44. 답 ③
45. 답 ③	46. 답 15	47. 답 ③	48. 답 ①
49. 답 ⑤	50. 답 3	51. 답 ③	51. 답 ③
53. 답 ①	54. 답 ⑤	55. 답 ⑤	56. 답 ⑤
57. 답 ①	58. 답 ②	59. 답 ③	60. 답 ③
61. 답 10	62. 답 ②	63. 답 141	64. 답 ②
65. 답 ①	66. 답 ②	67. 답 ②	68. 답 ③
69. 답 ①	70. 답 ②	71. 답 ③	72. 답 ③
73. 답 ④	74. 답 ①	75. 답 ④	76. 답 ④

1. **답 ③**

[해설]

주어진 포물선의 방정식은 $x^2=4\times 2y=8y$이다.

이 포물선이 점 $(a,\ 2)$를 지나므로

$a^2=16$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$

2. **답 ④**

[해설]

$y^2=8x=4\cdot 2\cdot x$에서 $p=2$

즉, 포물선 $y^2=8x$의 초점의 좌초는 $(2,\ 0)$이므로

$\alpha=2$

또, 준선의 방정식은 $x=-2$이므로

$\beta=-2$

$\therefore\ \alpha\beta=2\times(-2)=-4$

3. **답** 18

[해설]

포물선 $x^2=4y$의 초점의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 포물선 $(x-1)^2=4y$의 초점 F_1의 좌표는 $F_1(0+1,\ 1)$, 즉 $F_1(1,\ 1)$이다.

또한, 포물선 $y^2=4\times(-2)x=-8x$의 초점의 좌표는 $(-2,\ 0)$이므로 포물선 $(y+2)^2=-8x$의 초점 F_2의 좌표는 $F_2(-2,\ 0-2)$, 즉 $F_2(-2,\ -2)$이다.

$\therefore \overline{F_1F_2}^2=(-3)^2+(-3)^2=18$

4. **답** 14

[해설]

포물선 $y^2=a(x+3)=4\cdot\frac{a}{4}(x+3)$의 초점의 좌표는

$\left(\frac{a}{4}-3,\ 0\right)$

포물선 $x^2=-8(y-b)=4\cdot(-2)(y-b)$의 초점의 좌표는

$(0,\ -2+b)$

두 초점의 좌표가 일치하므로

$\frac{a}{4}-3=0,\ -2+b=0$

$\therefore\ a=12,\ b=2$

$\therefore\ a+b=14$

5. **답 ②**

[해설] 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $b(a+2)=39$이고 $b^2=8a$

$\therefore b\left(\frac{b^2}{8}+2\right)=39,\ b^3+16b-312=0$

$(b-6)(b^2+6b+52)=0$

$\therefore b=6,\ a=\frac{9}{2}$

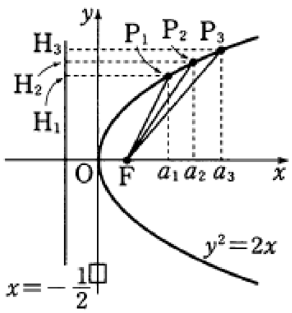
$F(2,\ 0)$이므로 $\tan\theta=\dfrac{6}{\frac{9}{2}-2}=\frac{12}{5}$

6. **답 ②**

[해설]

포물선 $y^2=4\cdot\frac{1}{x}$의 초점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, 준선의 방정식은 $x=-\frac{1}{2}$이다.

점 P_n에서 준선에 내린 수선의 발을 H_n이라 하면



$\overline{FP_n}=\overline{H_nP_n}=\frac{1}{2}+a_n$

$=\frac{1}{2}+1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2}+1$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{20}\overline{FP_n}=\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{n}{2}+1\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{20\cdot 21}{2}+20=125$

7. **답 ①**

[해설]

직선 $y=3x+2$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동시킨 직선의 방정식은 $y=3(x-k)+2$, 즉 $x=\frac{y+3k-2}{3}$

이 식을 포물선 $y^2=4x$에 대입하여 정리하면

$3y^2-4y+8-12k=0$ ⋯ ㉠

직선이 포물선과 접하므로 ㉠의 판별식 $D=0$이다.

$\frac{D}{4}=4-3(8-12k)=0$

$\therefore k=\frac{5}{9}$

다른 풀이

포물선 $y^2=4x$에 접하고 기울기 $m=3$인 접선의 방정식은

$y=mx+\dfrac{p}{m}$에서 $y=3x+\dfrac{1}{3}$ ⋯⋯ ㉠

$y=3x+2$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동시키면

$y=3(x-k)+2=3x-3k+2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$-3k+2=\dfrac{1}{3}$ $\quad\therefore k=\dfrac{5}{9}$

8. 답 ②

[해설]

직선 $y=-4x+3$을 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=-4(x-m)+3$

$\therefore\ y=-4x+4m+3$ ⋯⋯ ㉠

포물선 $y^2=16x$에 접하고 기울기가 -4인 접선의 방정식은

$y=-4x+\dfrac{4}{-4}$

$\therefore\ y=-4x-1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡이 일치해야 하므로

$4m+3=-1$

$\therefore\ m=-1$

9. 답 ②

[해설]

$y^2+4y+4x-4=0$을 변형하면

$(y^2+4y+4)+4(x-2)=0,\ (y+2)^2=-4(x-2)$

이때, 주어진 방정식이 나타내는 도형은 포물선 $y^2=-4x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 포물선이다.

$y^2=-4x=4\cdot(-1)\cdot x$ 에서 초점의 좌표는 $(-1,0)$이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는

$(-1,0)\to(-1+2,0-2)=(1,-2)$

점 $(1,-2)$ 의 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(-2,1)$ 이므로 포물선 $x^2+2ax+by+a^2=0$의 초점의 좌표는 $(-2,1)$ 이다.

$x^2+2ax+by+a^2=0$을 변형하면

$(x^2+2ax+a^2)+by=0,\ (x+a)^2=-by$

이때, 주어진 방정식이 나타내는 도형은 포물선 $x^2=-by$ 의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 포물선이다.

$x^2=-by=4\cdot\left(-\dfrac{b}{4}\right)y$ 에서 초점의 좌표는 $\left(0,-\dfrac{b}{4}\right)$이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는

$\left(0,-\dfrac{b}{4}\right)\to\left(-a,-\dfrac{b}{4}\right)$

즉, $-a=-2,\ -\dfrac{b}{4}=1$ 이므로

$a=2,\ b=-4\ \ \therefore a+b=-2$

10. 답 ⑤

[해설]

ㄱ. $y^2=\dfrac{1}{2}x=4\cdot\dfrac{1}{8}\cdot x$에서 초점의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{8},\ 0\right)$, 준선의 방정식은 $x=-\dfrac{1}{8}$이므로 초점과 준선 사이의 거리는 $2\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}$이다. 그런데 포물선 $y^2=2x=4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot x$에서 초점의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$, 준선의 방정식은 $x=-\dfrac{1}{2}$이므로 초점과 준선 사이의 거리는 $2\times\dfrac{1}{2}=1$이다.

따라서 두 그래프는 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㄴ. 포물선 $y^2=\dfrac{1}{2}x$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$x^2=\dfrac{1}{2}y$, 즉, $y=2x^2$이 된다.

ㄷ. $y^2=\dfrac{1}{2}(x+y)$에서

$y^2-\dfrac{1}{2}y=\dfrac{1}{2}x,\ y^2-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{16}$

$\therefore\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{8}\right)$

따라서 주어진 방정식이 나타내는 도형은 포물선 $y^2=\dfrac{1}{2}x$를 x축의 방향으로 $-\dfrac{1}{8}$만큼, y축의 방향으로 $\dfrac{1}{4}$만큼 평행이동한 것이다.

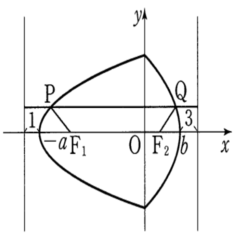
그러므로 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

참고

평면에서 도형을 평행이동하거나 대칭이동하면 원래의 도형과는 합동이고 그 위치만 달라진다. 따라서 포물선 $y^2=4px$를 평행이동하거나 대칭이동한 도형은 $y^2=4px$의 도형과 합동이므로 초점과 준선사이의 거리는 변하지 않는다.

11. 답 12

[해설]



오른쪽 그림과 같이 꼭짓점의 좌표는 각각 $(-a,\ 0)$, $(b,\ 0)$이고 꼭짓점에서 준선까지의 거리는 각각 $1,\ 3$이므로 준선의 방정식은 각각 $x=-a-1,\ x=b+3$이다. 초점과 준선의 성질을 이용하면 선분 PF_1은 점 P에서 준선 $x=-a-1$까지의 거리가 되며 선분 QF_2는 점 Q에서 준선 $x=b+3$까지의 거리가 되므로 $\overline{F_1P}+\overline{PQ}+\overline{QF_2}$는 두 준선 사이의 거리가 된다.

$b+3-(-a-1)=a+b+4=12$ ⋯⋯ ㉠

또한 두 포물선의 교점은 y축 위에 놓이므로

$4a=12b$ $\quad\therefore a=3b$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=6,\ b=2$

$\therefore ab=6\times2=12$

12. 답 ③

[해설] 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 직선 l의 방정식은

$y-b=8(x-a)$

직선 l과 포물선의 교점의 y좌표를 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha,\ \beta$는

$y^2=2(y-b)+16a$의 두 근이므로

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=2b-16a$

그런데 점 P의 y좌표는 $\frac{\alpha+\beta}{2}=1$이고 이 값은 a, b의 값과 관계가 없으므로 구하는 도형 D의 방정식은 $y=1\left(x>\frac{1}{16}\right)$ 이다.

따라서 주어진 점들 중 도형 D 위의 점인 것은 ③이다.

13. 답 60

[해설]

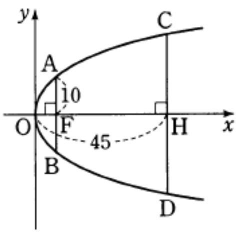
포물선 $y^2=4px(p>0)$가 점 $A(p,\ 10)$을 지나므로

$100=4p^2 \qquad \therefore p=5$

점 C 의 좌표를 $(45,\ c)(c>0)$라 하면

$c^2=4\cdot5\cdot45 \qquad \therefore c=30$

$\therefore \overline{CD}=2c=60$

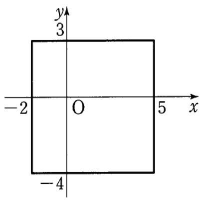


14. 답 7

[해설]

포물선 $(y+m)^2=8(x-n)$은 포물선 $y^2=4\cdot2x$의 그래프를 x축의 방향으로 n만큼, y축의 방향으로 $-m$만큼 평행이동시킨 것이다.

포물선 $y^2=4\cdot2x$의 초점의 좌표는 $(2,0)$이고 준선의 방정식은 $x=-2$이므로 포물선 $(y+m)^2=8(x-n)$의 초점의 좌표는 $(2+n,-m)$ 준선의 방정식은 $x=-2+n$이다.



초점이 위의 그림의 정사각형의 내부에 있으므로

$-2<2+n<5$ 이고 $-4<-m<3$

$\therefore -4<n<3$ 이고 $-3<m<4$ …… ㉠

준선이 정사각형과 만나지 않으므로

$-2+n<-2$ 또는 $-2+n<5$

$\therefore n<0$ 또는 $n>7$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-4<n<0,\ -3<m<4$

따라서 정수 m, n에 대하여 $m+n$의 최댓값은 $\alpha=3-1=2$, 최솟값은 $\beta=-2-3=-5$ 이므로

$\alpha-\beta=2-(-5)=7$

15. 답 ②

[해설]

초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)$, 준선의 방정식이 $x=-p$이므로

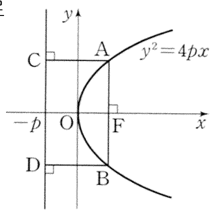
$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BD}}=2p$

이 때, 사각형 ACDB의 넓이는

$2p\times4p=8p^2=120$

$\therefore\ p=\sqrt{15}$

따라서 초점의 x좌표는 $\sqrt{15}$ 이다.



16. 답 ①

[해설]

$y=\log_2(x+a)+b$의 점근선은 $x=-a$,

포물선 $y^2=x$의 준선은 $x=-\frac{1}{4}$이므로 $a=\frac{1}{4}$

$y=\log_2(x+a)+b$의 그래프가 포물선 $y^2=x$의 초점 $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$을 지나므로

$0=\log_2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+b=\log_2\frac{1}{2}+b=-1+b$

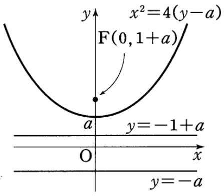
$\therefore b=1$

$\therefore a+b=\frac{5}{4}$

17. 답 ⑤

[해설]

포물선 $x^2=4(y-a)$의 초점의 좌표는 $F(0,\ 1+a)$이고 준선의 방정식은 $y=-1+a$이다.



ㄱ. 포물선 $x^2=4(y-a)$는 포물선 $x^2=4y$를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동시킨 것이다.

따라서 $x^2=4(y-a)$의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ a)$이다. (참)

ㄴ. 위의 그림에서 초점과 준선 사이의 거리는 $1+a-(-1+a)=2$이다. (참)

ㄷ. 점 P에서 초점까지의 거리가 a이므로 점 P에서 준선 $y=-1+a$까지의 거리는 a이다. 또한, 준선 $y=-1+a$와 직선 $y=-a$ 사이의 거리는 $-1+a-(-a)=2a-1$이다.

따라서 점 P에서 직선 $y=-a$까지의 거리는

$a+2a-1=3a-1$이다. (참)

그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

18. 답 4

[해설]

초점이 $F(2p,0)$ 이고 준선의 방정식이 $x=-p$인 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$이고 꼭짓점과 초점 사이의 거리는 $\left|\frac{3}{2}p\right|$ 이다.

따라서 초점이 $F\ (2p,0)$이고 준선의 방정식이 $x=-p$인 포물선은 $y^2=4\cdot\frac{3}{2}px$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{p}{2}$만큼 평행이동시킨 것이다.

포물선 $y^2=4\cdot\frac{3}{2}px$에 접하고 기울기가 3인 접선의 방정식은

$$y=3x+\frac{\frac{3}{2}p}{3}=3x+\frac{p}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠을 x축의 방향으로 $\frac{p}{2}$만큼 평행이동시키면

$$y=3\left(x-\frac{p}{2}\right)+\frac{p}{2}$$

이 식이 $y=3x-4$와 일치하므로

$-p=-4 \qquad \therefore p=4\ (\because p\neq0)$

다른 풀이

초점이 $F(2p,0)$ 이고 준선의 방정식이 $x=-p$인 포물선의 방정식은 $y^2=6p\left(x-\frac{p}{2}\right)$이다.

직선 $y=3x-4$를 이 포물선의 방정식에 대입하여 정리하면

$9x^2-2(12+3p)x+(16+3p^2)=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(12+p)^2-9(16+3p^2)=0$$

$$-18p^2+72p=0$$

$$-18p(p-4)=0 \qquad \therefore p=4$$

19. 답 29

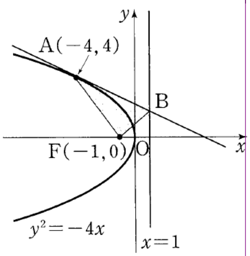
[해설]

포물선 $y^2=-4x$위의 점 $\mathrm{A}(-4,4)$에서의 접선의 방정식은

$4y=-2(x-4)$

$\therefore\ x+2y-4=0$ …… ㉠

준선의 방정식은 $x=1$이므로 접선과 준선의 교점 B의 좌표는 $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$이다.



$$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{5^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$$

초점 $\mathrm{F}(-1,\ 0)$과 접선 ㉠사이의 거리는

$$\frac{|-1+0-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$$

따라서 삼각형 ABF의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{5\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{5}=\frac{25}{4}$$

$$\therefore\ p+q=4+25=29$$

참고 (점과 직선 사이의 거리)

좌표평면 위의 한 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

20. 답 ②

[해설] $y=\dfrac{4}{x+3}$의 점근선은 x축과 직선 $x=-3$이다. 그런데 포물선 $y^2=ax$의 준선과 점근선이 서로 같으므로 포물선의 준선의 방정식은 $x=-3$이다.

즉, $y^2=ax$에서 $a=4\times3=12$

$y=1$이면 $1\le x\le 8$에서 격자점의 개수는 8

$y=2$이면 $\frac{4}{12}\le x\le 8$에서 격자점의 개수는 8

$y=3$이면 $\frac{9}{12}\le x\le 8$에서 격자점의 개수는 8

$y=4$이면 $\frac{16}{12}\le x\le 8$에서 격자점의 개수는 7

$y=5$이면 $\frac{25}{12}\le x\le 8$에서 격자점의 개수는 6

$y=6$이면 $3\le x\le 8$에서 격자점의 개수는 6

$y=7$이면 $\frac{49}{12}\le x\le 8$에서 격자점의 개수는 4

$y=8$이면 $\frac{64}{12}\le x\le 8$에서 격자점의 개수는 3

$y=9$이면 $\frac{81}{12}\le x\le 8$에서 격자점의 개수는 2

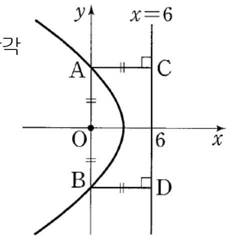
따라서 구하는 격자점의 개수는

$8+8+8+7+6+6+4+3+2=52$

21. 답 12

[해설]

두 점 A, B에서 준선 $x=6$에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하면 포물선의 정의에 의하여



$\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{AC}}=6,\quad \overline{\mathrm{BO}}=\overline{\mathrm{BD}}=6$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AO}}+\overline{\mathrm{BO}}$

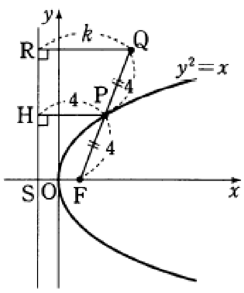
$\qquad =6+6=12$

22. 답 ①

[해설]

포물선 $y^2=x$의 초점은 $F\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$이고,

준선의 방정식은 $x=-\frac{1}{4}$이다.



점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{PF}=\overline{PH}=4$

점 Q에서 준선에 내린 수선의 발을 R, 준선과 x축의 교점을 S라 하면 사각형 $FQRS$는 사다리꼴이다.

이 때, $\overline{QR}=k$라 하면 두 점 $P,\ H$는 각각 두 선분 $FQ,\ SR$의 중점이고, $\overline{FS}=\frac{1}{2}$이므로

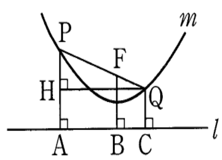
$$\frac{k+\frac{1}{2}}{2}=4 \qquad \therefore k=\frac{15}{2}$$

따라서 점 Q의 x좌표는

$$\frac{15}{2}-\frac{1}{4}=\frac{29}{4}$$

23. 답 ⑤

[해설]



ㄱ. 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PA}=\overline{PF},\ \overline{QC}=\overline{QF}$이고

$\overline{PF}:\overline{QF}=2:1$이므로

$\overline{PA}:\overline{QC}=2:1$ (참)

ㄴ. 점 Q에서 선분 PA에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{PA}=\overline{PF}=2k,\ \overline{QC}=\overline{QF}=k$ (k는 상수)라 하면

$\overline{PH}=\overline{PA}-\overline{QC}=k$

직선 PQ와 직선 l이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\angle PQH=\theta$이므로

$$\sin\theta=\frac{\overline{PH}}{\overline{PQ}}=\frac{k}{2k+k}=\frac{1}{3}$$

그러므로 포물선 m의 모양에 관계없이 직선 PQ와 직선 l이 이루는 각은 일정하다. (참)

ㄷ. $\overline{PF}:\overline{QF}=2:1$이고 $\overline{PA}=2k$, $\overline{QC}=k$이므로

$$\overline{FB}=\frac{2\cdot k+1\cdot 2k}{2+1}=\frac{4k}{3}=4$$

$\therefore k=3$

$\triangle PHQ$에서 $\overline{HQ}=\sqrt{\overline{PQ}^2-\overline{PH}^2}=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$

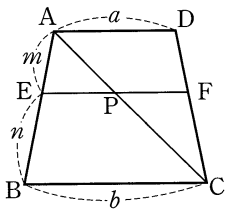
$$\therefore \square PACQ=\frac{1}{2}\cdot(\overline{PA}+\overline{QC})\cdot\overline{HQ}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(6+3)\cdot 6\sqrt{2}$$
$$=27\sqrt{2}\ \text{(참)}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

참고

오른쪽 그림의 사다리꼴 $ABCD$에서

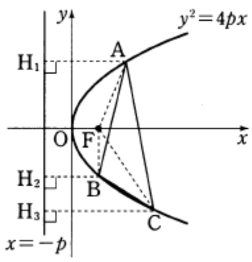
$$\overline{EF}=\overline{EP}+\overline{FP}$$
$$=\frac{m}{m+n}b+\frac{n}{m+n}a$$
$$=\frac{mb+na}{m+n}$$



24. 답 ⑤

[해설]

$A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$이라 하고, 세 점 A, B, C에서 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2, H_3이라 하면 포물선의 정의에서 $\overline{AF}=\overline{AH_1}$, $\overline{BF}=\overline{BH_2}$, $\overline{CF}=\overline{CH_3}$이다.



ㄱ. 포물선은 x축에 대하여 대칭이므로 $\overline{AF}$, $\overline{BF}$, $\overline{CF}$의 값 중 2개는 같을 수 있지만 세 개는 같을 수 없다. (거짓)

ㄴ. $\triangle ABC$의 무게중심이 F이므로

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=p \qquad \therefore x_1+x_2+x_3=3p$$

$\therefore \overline{AF}+\overline{BF}+\overline{CF}=\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}$

$=(x_1+p)+(x_2+p)+(x_3+p)$

$=(x_1+x_2+x_3)+3p=6p$ (참)

ㄷ. $\overline{AO}=\overline{OB}$가 성립하려면 $x_1=x_2$, $y_1=-y_2(y_1>0)$

이 때, $\overline{AB}=2y_1$이므로 $\overline{AO}=\overline{AB}$에서

$x_1{}^2+y_1{}^2=4y_1{}^2$ $\cdots$ ㉠

또한, $y_1{}^2=4px_1$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $x_1=12p$

그러므로 $\overline{AO}=\overline{OB}=\overline{AB}$인 서로 다른 두 점 A, B가 존재한다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

25. 답 ⑤

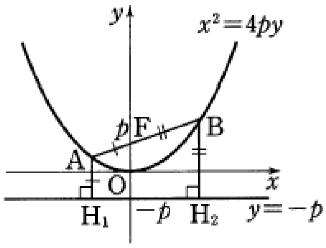
[해설]

포물선 $x^2=4py$에서 초점 F의 좌표는 $(0,\ p)$이고 준선의 방정식은 $\boxed{y=-p}$이다.

포물선 위의 두 점 A, B에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF}=\overline{AH_1}$, $\overline{BF}=\overline{BH_2}$

세 점 A, B, F가 한 직선 위에 있으려면 $\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AB}$이다.



따라서 $\overline{AB}=k$이므로 $(y_1+p)+(y_2+p)=k$

$\therefore y_1+y_2=\boxed{k-2p}$

26. 답 ②

[해설]

직선 $y=m(x-1)$은 포물선 $y^2=4x$의 초점 $F(1,\ 0)$을 지난다.

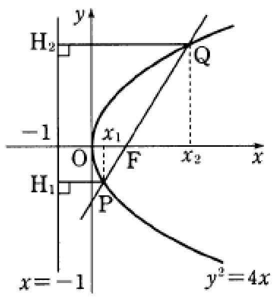
$y=m(x-1)$을 포물선의 방정식 $y^2=4x$에 대입하면

$\{m(x-1)\}^2=4x$

위 식을 정리하면

$m^2x^2-(2m^2+4)x+m^2=0$

점 P에서 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 H_1, 점 Q에서 준선에 내린 수선의 발을 H_2라 하고 직선과 포물선의 교점의 x좌표를 각각 x_1, $x_2(x_1<x_2)$라 하면



$\overline{PQ}=\overline{PH_1}+\overline{QH_2}$

$=(x_1+1)+(x_2+1)=(x_1+x_2)+2$

$$=\frac{2m^2+4}{m^2}+2=10$$

$$6m^2=4 \qquad \therefore m=\frac{\sqrt{6}}{3}\ \ (\because m>0)$$

27. 답 ③

[해설]

$y^2=8x=4\cdot2\cdot x$에서 초점은 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

두 점 A, B에서 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AA'}}=\overline{\mathrm{AC}}+1=\overline{\mathrm{AF}}$, $\overline{\mathrm{BB'}}=\overline{\mathrm{BD}}+1=\overline{\mathrm{BF}}$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}=(\overline{\mathrm{AC}}+1)+(\overline{\mathrm{BD}}+1)$

$=\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}}+2$

$=8+2=10$

28. 답 ②

[해설]

점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H', 이 수선과 포물선의 교점을 P'이라 하자.

또한 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AP}+\overline{PF}=\overline{AP}+\overline{PH}$

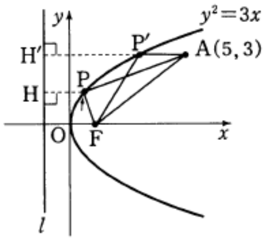
$\geq \overline{AP'}+\overline{P'H'}$

$= \overline{AP'} + \overline{P'F}$

이므로 $\overline{AP} + \overline{PF}$가 최소일 때의 점 P의 y좌표는 3이다.

점 P의 좌표를 $(a,\ 3)$으로 놓으면

$3^2 = 3a$에서 $a = 3$



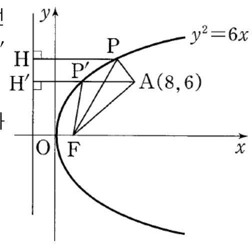
$\therefore \triangle APF = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{AP} \cdot 3 = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$

29. 답 ②

[해설]

점 A에서 포물선 $y^2 = 6x$의 준선에 내린 수선의 발을 H′, 이 수선과 포물선의 교점을 P′이라 하자.

또, 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AP} + \overline{PH}$

$\geq \overline{AP'} + \overline{P'H'}$

$= \overline{AP'} + \overline{P'F}$

이므로 $\overline{AP} + \overline{PF}$가 최소일 때의 점 P의 y좌표는 6이다.

점 P의 좌표를 $(a,\ 6)$으로 놓으면

$6^2 = 6a$

$\therefore\ a = 6$

이 때, △APF에서 선분 AF의 길이가 일정하므로 $\overline{AP} + \overline{PF}$가 최소일 때, △APF의 둘레의 길이도 최소이다.

30. 답 288

[해설]

$y^2 = 12x = 4 \cdot 3x$에서 이 포물선의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(3,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x = -3$이다.

포물선의 정의에 의하여 선분 AF의 길이는 점 A에서 준선에 내린 수선의 길이와 같으므로

$\overline{AF} = x_1 + 3,$

같은 방법으로

$\overline{BF} = x_2 + 3,\ \overline{CF} = x_3 + 3,\ \overline{DF} = x_4 + 3$

$\overline{AF} + \overline{BF} + \overline{CF} + \overline{DF} = 36$이므로

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 12 = 36$

$\therefore\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24$

네 점 A, B, C, D는 포물선 $y^2 = 12x$ 위의 점이므로

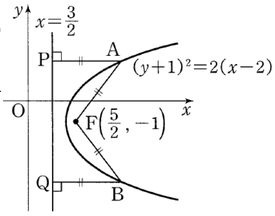
$$\begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 &= 12x_1 + 12x_2 + 12x_3 + 12x_4 \\ &= 12(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ &= 12 \times 24 \\ &= 288 \end{aligned}$$

31. 답 ④

$(y+1)^2 = 2(x-2)$

주어진 포물선은 포물선 $y^2 = 2x$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2 = 2x$의 초점의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$, 준선의 방정식은 $x = -\dfrac{1}{2}$이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(\dfrac{5}{2},\ -1\right)$, 준선의 방정식은 $x = \dfrac{3}{2}$이다.



A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하면

$\overline{AP} = \overline{AF} = 4,\ \overline{BQ} = \overline{BF} = 4$

이 때, 두 점 A, B에서 y축에 이르는 거리는 각각 $4 + \dfrac{3}{2}$이므로 구하는 거리의 합은

$2\left(4 + \dfrac{3}{2}\right) = 11$

32. 답 ①

[해설]

포물선 $y^2 = 4x$와 직선 $y = mx + 1$ 사이의 최단 거리는

포물선 $y^2 = 4x$의 접선 중 기울기가 m인 직선과 직선 $y = mx + 1$사이의 거리와 같다.

포물선 $y^2 = 4x$에서 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y = mx + \dfrac{1}{m}$이므로 직선 $mx - y + \dfrac{1}{m} = 0$과 직선 $y = mx + 1$ 위의 점 $(0,\ 1)$과의 거리는

$$\frac{\left|-1 + \dfrac{1}{m}\right|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 제곱하여 정리하면

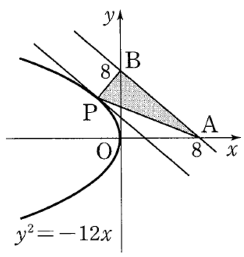
$\left(-1 + \dfrac{1}{m}\right)^2 = m^2 + 1,\ m^4 = -2m + 1$

$\therefore m^4 + 2m = 1$

33. 답 ④

[해설]

△ABP에서 밑변의 길이 $\overline{AB} = 8\sqrt{2}$에 대하여 높이가 최소일 때, △ABP의 넓이는 최소이다. 즉, 오른쪽 그림과 같이 점 P가 직선 AB에 평행한 접선의 접점이 될 때, △ABP의 넓이가 최소이다.



두 점 $\mathrm{A}(8,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 8)$을 지나는 직선의 기울기는 -1이므로 포물선 $y^2 = -12x = 4 \cdot (-3) \cdot x$에 접하고 기울기가 -1인 접선의 방정식은

$y = -x + \dfrac{-3}{-1}$

$\therefore y = -x + 3 \ \cdots\cdots ㉠$

직선 ㉠ 위의 한 점 $(3,\ 0)$과 직선 AB, 즉 $x + y - 8 = 0$사시의 거리는

$\dfrac{|3 + 0 - 8|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

따라서 △ABP의 넓이의 최솟값은

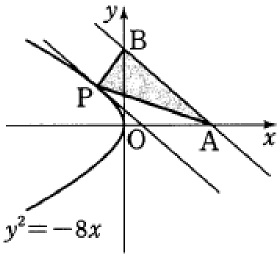
$\dfrac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot \dfrac{5\sqrt{2}}{2} = 20$

34. 답 40

[해설]

$\triangle ABP$에서 밑변의 길이 $\overline{AB}=10\sqrt{2}$에 대하여 높이가 최소일 때, $\triangle ABP$의 넓이는 최소이다.

즉, 그림과 같이 점 P가 직선 AB에 평행한 접선과 접점이 될 때, $\triangle ABP$의 넓이가 최소이다.



두 점 $A(10,\ 0)$, $B(0,\ 10)$을 지나는 직선의 기울기는 -1이므로 포물선 $y^2=4\cdot(-2)x$에 접하고 기울기가 -1인 접선의 방정식은

$y=-x+\dfrac{-2}{-1}$ $\qquad\therefore y=-x+2 \quad \cdots$ ㉠

직선 ㉠ 위의 한 점 $(2,\ 0)$에서 직선 AB, 즉 $x+y-10=0$에 이르는 거리는

$\dfrac{|2+0-10|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

따라서 구하는 $\triangle ABP$의 넓이의 최솟값을 S라 하면

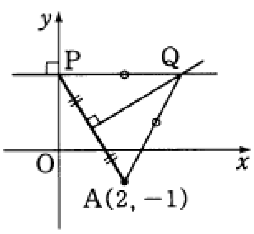
$S=\dfrac{1}{2}\times10\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=40$

35. 답 ⑤

[해설]

오른쪽 그림에서 점 Q는 선분 AP의 수직이등분선 위의 점이므로 삼각형 APQ는 이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{AQ}=\overline{PQ}$



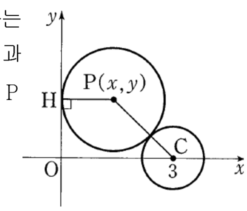
그런데 점 P는 y축 위의 점이므로 점 Q는 점 $A(2,\ -1)$을 초점으로 하고 직선 $x=0$ (y축)을 준선으로 하는 포물선 위의 점이다. 이 포물선은 초점의 좌표가 $(1,\ 0)$이고, 준선의 방정식이 $x=-1$인 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 구하는 점 Q가 나타내는 도형의 방정식은

$(y+1)^2=4(x-1)$

36. 답 20

[해설]

원 $(x-3)^2+y^2=1$에 외접하고 y축에 접하는 원의 중심을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하자. 오른쪽 그림과 같이 원 $(x-3)^2+y^2=1$의 중심을 C, 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{PH}}+1$

$\therefore \sqrt{(x-3)^2+y^2}=x+1$

양변을 제곱하면

$x^2-6x+9+y^2=x^2+2x+1$

$y^2=8x-8=4\cdot2\cdot(x-1)$

이 때, 포물선 $y^2=8x$의 초점의 좌표가 $(2,\ 0)$, 준선의 방정식이 $x=-2$이므로 포물선 $y^2=4\cdot2\cdot(x-1)$의 초점의 좌표는 $(3,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-1$이다.

$\therefore\ 10(a+b+c)=10(3+0-1)=20$

참고

반지름의 길이가 각각 r_1, r_2인 두 원이 외접하면 두 원의 중심 사이의 거리 d는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같다. 즉,

$d=r_1+r_2$

37. 답 ①

[해설] 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 직선 $x=-1$에 접하고 있으므로 반지름의 길이는 $x+1$이다.

또, 원 $(x-2)^2+y^2=1$에 외접하고 있으므로 반지름의 길이는 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}-1$

따라서 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}-1=x+1$에서

$(x-2)^2+y^2=(x+2)^2$ $\qquad\therefore y^2=8x$

즉, 점 P가 그리는 도형의 방정식은 $y^2=8x$이므로 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

38. 답 ①

[해설] 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $b^2=8a$이고 이 점에서 접선의 방정식은 $by=4(x+a)$ ⋯㉠, 초점 F는 $(2,\ 0)$이다.

직선 FP에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{a-2}{b}$이므로 점 F를 지나고 직선 FP에 수직인 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{a-2}{b}(x-2)$ ⋯ ㉡

직선 ㉡과 접선 ㉠의 교점 Q의 x좌표는

$b\times\left(-\dfrac{a-2}{b}\right)(x-2)=4(x+a)$에서

$(a+2)x=-2(a+2)$

$\therefore x=-2$

이 식은 y의 값에 관계없이 항상 성립하므로 점 Q가 그리는 도형은 직선 $x=-2$이다.

39. 답 ①

[해설]

$y=-x+k$를 $y^2=2x$에 대입하면

$(-x+k)^2=2x$에서

$x^2-(k+1)x+k^2=0 \quad \cdots$ ㉠

포물선과 직선이 만나지 않으려면 이차방정식 ㉠이 허근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식 $D<0$이어야 한다.

$\dfrac{D}{4}=(k+1)^2-k^2=2k+1<0$

$\therefore\ k<-\dfrac{1}{2}$

따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다.

40. 답 ③

[해설]

$\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=8(x+2)$는 $y^2=8x$의 그래프를 x축과 y축의 방향으로

각각 $-2,\ \dfrac{3}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y^2=8x$의 초점의 좌표가 $(2,\ 0)$이므로 $\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=8(x+2)$의 초점의 좌표는 $\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$이다.

조건에서 구하는 포물선은 준선이 $y=-\dfrac{3}{2}$이므로 포물선 P의 방정식은

$x^2=4\cdot\dfrac{3}{2}y$, 즉 $x^2=6y$이다.

$y=-x+k$를 $x^2=6y$에 대입하여 정리하면

$x^2+6x-6k=0$ … ㉠

㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=3^2+6k=0$ $\quad\therefore k=-\dfrac{3}{2}$

***41.* 답 ③**

[해설]

$y=-2x+5$를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=-2(x-m)+5$

즉, $y=-2x+2m+5$ … ㉠

포물선 $y^2=8x$에 접하고 기울기가 -2인 접선의 방정식은

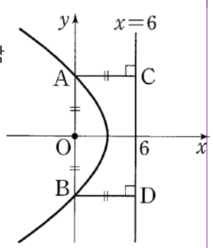
$y=-2x+\dfrac{2}{-2}$ 즉, $y=-2x-1$ … ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로 $2m+5=-1$

$\therefore m=-3$

***42.* 답 12**

[해설]



두 점 A, B에서 준선 $x=6$에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AO}=\overline{AC}=6$, $\overline{BO}=\overline{BD}=6$

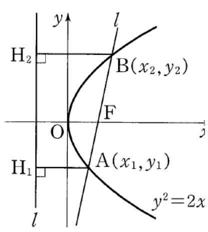
$\therefore \overline{AB}=\overline{AO}+\overline{BO}$

$=6+6=12$

***43.* 답 ⑤**

[해설]

교점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면



$\overline{AH_1}:\overline{BH_2}=\overline{AF}:\overline{BF}$

$=2:3$

$\overline{AH_1}=2k$, $\overline{BH_2}=3k$라 하면

$x_2-x_1=\overline{BH_2}-\overline{AH_1}$

$=3k-2k=k$

$\overline{AB}=5k$이므로 직선 l의 기울기는

$\dfrac{\sqrt{(5k)^2-k^2}}{k}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

그림짤림

***44.* 답 ③**

[해설]

$n(A\cap B)=2$가 되려면 직선 $y=2x-k$와 포물선 $y^2=2x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$y=2x-k$를 $y^2=2x$에 대입하여 정리하면

$(2x-k)^2=2x$에서

$4x^2-2(2k+1)x+k^2=0$ … ㉠

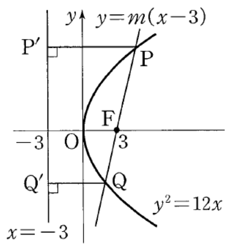
㉠의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(2k+1)^2-4k^2>0$

$4k+1>0$ $\quad\therefore k>-\dfrac{1}{4}$

***45.* 답 ③**

[해설]



포물선 $y^2=12x$의 초점의 좌표는 $(3,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-3$이다. 또, 직선 $y=m(x-3)$은 m의 값에 관계없이 초점 $(3,\ 0)$을 지나는 직선이다. 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하고 두 점 P, Q에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하면

$\overline{PF}=\overline{PP'}=x_1+3$

$\overline{QF}=\overline{QQ'}=x_2+3$

한편, $\overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{QF}=11$이므로

$(x_1+3)+(x_2+3)=11$

$\therefore x_1+x_2=5$

따라서 선분 PQ의 중점의 x좌표는

$\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{5}{2}$

***46.* 답 15**

[해설]

직선 $y=x+p$에서 $x=y-p$

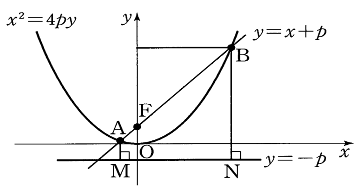
이를 포물선의 방정식 $x^2=4py$에 대입하면

$y^2-2py+p^2-4py=0$, $y^2-6py+p^2=0$

두 교점의 y좌표를 각각 α, β라 하면

$\alpha+\beta=6p$

또한 점 A에서 준선 $y=-p$에 내린 수선의 발을 M, 점 B에서 준선에 내린 수선의 발을 N이라 하자.



$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AM}+\overline{BN}$

$=(\alpha+p)+(\beta+p)=\alpha+\beta+2p$

$=6p+2p=8p$

따라서 $30<8p<50$을 만족하는 양의 정수 p의 값은 4, 5, 6이므로 그 합은 15이다.

47. 답 ③

[해설]

직선 l의 방정식을 $y=-x+k$라 하고 두 점 A, B의 좌표를 각각 $(\alpha^2,\ \alpha)$, $(\beta^2,\ \beta)$라 하자.

직선의 방정식 $x=-y+k$를 포물선의 방정식 $y^2=x$에 대입하면

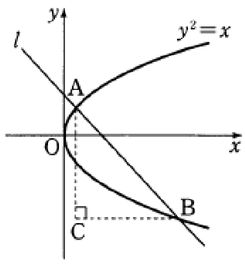
$y^2+y-k=0$ … ㉠

따라서 방정식 ㉠의 두 근이 α, β이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1+4k$

$\therefore |\alpha-\beta|=\sqrt{1+4k}$ … ㉡

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 각각 x축, y축에 수직인 직선을 그어 그 교점을 C라 하면 삼각형 ACB는 직각이등변삼각형이다.



즉, $\overline{AB}=5\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{AC}=5$ … ㉢

㉡, ㉢에서

$\sqrt{1+4k}=5$, $1+4k=25$

$\therefore k=6$

다른 풀이

직선 l의 방정식은 $y=-x+k$라 하고

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(\alpha^2,\ \alpha)$, $(\beta^2,\ \beta)$라 하자.

직선의 방정식 $x=-y+k$를 포물선의 방정식 $y^2=x$에 대입하면

$y^2+y-k=0$ … ㉠

따라서 방정식 ㉠의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-k$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AB}^2&=(\alpha^2-\beta^2)^2+(\alpha-\beta)^2\\&=(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2+(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}^2-4\alpha^2\beta^2+(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=(1+2k)^2-4k^2+1+4k=8k+2=50\end{aligned}$$

$\therefore k=6$

48. 답 ①

[해설] $y=x-1$에서 $x=y+1$이므로 $y^2+6y-k=4x$에 대입하면

$y^2+6y-k=4y+4$

$\therefore y^2+2y-k-4=0$

위 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 교점은 $(\alpha+1,\ \alpha)$, $(\beta+1,\ \beta)$이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-k-4$

$\overline{PQ}=6$이므로 $2(\beta-\alpha)^2=36$, 즉 $(\beta-\alpha)^2=18$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4-4(-k-4)=18$

$\therefore k=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore m+n=1+2=3$

49. 답 ⑤

[해설] 직선 PQ가 초점 $(2,\ 0)$을 지나므로 $y=\dfrac{d-b}{c-a}(x-2)$이다.

이 직선은 점 $(a,\ b)$를 지나므로 $bc-ba=ad-ab-2d+2b$에서

$ad-bc=2(d-b)$

l과 l'의 방정식을 구하면 각각 $by=4(c+a)$, $dy=4(x+c)$이다.

ㄱ. $4d(x+a)=4b(x+c)$이므로

$4(d-b)x=4(bc-ad)=-8(d-b)$

그러므로 교점의 x좌표는 -2이다. (참)

ㄴ. $ad-bc=2(d-b)$이고 $b^2=8a$, $d^2=8c$이므로 a, c를 소거하면

$\dfrac{b^2d}{8}-\dfrac{bd^2}{8}=2(d-b)$

$\therefore bd=-16$ (참)

ㄷ. 두 직선 l, l'의 기울기가 각각 $\dfrac{4}{b}$와 $\dfrac{4}{d}$이고

$\dfrac{4}{b}\times\dfrac{4}{d}=\dfrac{16}{bd}=\dfrac{16}{-16}=-1$

이므로 두 직선 l, l'은 수직으로 만난다.

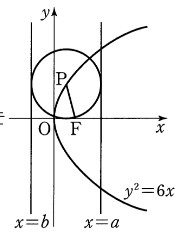
$\therefore \cos\theta=0$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

50. 답 3

[해설]

오른쪽 그림의 원 C의 넓이가 $\dfrac{81}{16}\pi$이므로



$\overline{PF}=\dfrac{9}{4}$

원 C가 $x=b$ $(b<0)$와 접한다고 하면 $x=b$는 포물선의 준선의 방정식이 된다.

한편, 포물선 $y^2=6x=4\cdot\dfrac{3}{2}x$의 준선은

$x=-\dfrac{3}{2}$ 이므로 $b=-\dfrac{3}{2}$

$a-b=2\cdot\dfrac{9}{4}$ 이므로 $a+\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}$ $\quad\therefore a=3$

51. 답 ③

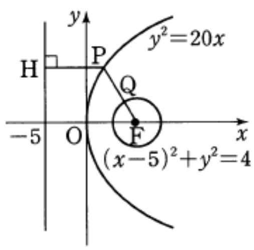
[해설]

직선 $y=-2x+10$이 포물선 $y^2=20x$의 초점의 좌표 $F(5,\ 0)$을 지난다.

또한 포물선 $y^2=20x$의 준선의 방정식은 $x=-5$이므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{PH}=\overline{PF}$

$\therefore \overline{PH}-\overline{PQ}=\overline{PF}-\overline{PQ}=\overline{QF}=2$



52. 답 ③

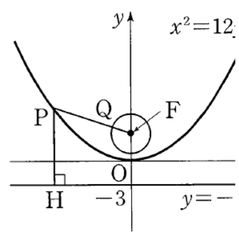
[해설]

원 $x^2+(y-3)^2=5$의 중심 $(0,\ 3)$은 포물선 $x^2=12y$의 초점 $\mathrm{F}(0,\ 3)$이다. 또, 이 포물선의 준선의 방정식은 $y=-3$이므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}$

$\therefore \overline{\mathrm{PH}}-\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PQ}}$

$=\overline{\mathrm{QF}}=\sqrt{5}$



53. 답 ①

[해설]

포물선 $y^2=-16x=4\cdot(-4)\cdot x$의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(-4,\ 0)$이므로 원 $(x+4)^2+y^2=3$의 중심과 일치한다.

점 P에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{FQ}}^2}$

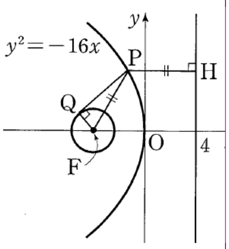
$=\sqrt{\overline{\mathrm{PH}}^2-3}$

$(\because \overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}},\ \overline{\mathrm{FQ}}=\sqrt{3})$

$\overline{\mathrm{PH}}$가 최소일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$도 최소이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}\geq\sqrt{4^2-3}=\sqrt{13}\ (\because\ \overline{\mathrm{PH}}\geq 4)$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\sqrt{13}$이다.



참고

포물선 위의 점 P가 포물선의 꼭짓점에 있을 때, 포물선에서 준선에 이르는 거리가 최소이다.

54. 답 ⑤

[해설]

포물선 $y^2=4\cdot\dfrac{5}{2}x$에서 초점의 좌표는 $F\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$이므로

두 점 A, B의 좌표를 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$로 놓으면

$\overline{AF}+\overline{BF}=\left(x_1+\dfrac{5}{2}\right)+\left(x_2+\dfrac{5}{2}\right)=8$에서

$x_1+x_2=3$

$\therefore S_1+S_2=\pi\overline{AC}^2+\pi\overline{BD}^2$

$=\pi{y_1}^2+\pi{y_2}^2=10\pi(x_1+x_2)(\because {y_1}^2=10x_1,\ {y_2}^2=10x_2)$

$=30\pi$

55. 답 ⑤

[해설]

ㄱ. 포물선 $x^2=4y$의 초점의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 중심의 좌표는 $(0,\ 1+r)$이므로 원의 방정식은

$x^2+\{y-(r+1)\}^2=r^2$ … ㉠

$x^2=4y$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$y^2-2(r-1)y+2r+1=0$ …㉡

원이 곡선에 접하므로

$\dfrac{D}{4}=(r-1)^2-2r-1=0$

$r^2-4r=0$

$\therefore r=4\ (\because r\neq 0)$

따라서 중심 C의 좌표는 $(0,\ 1+4)$, 즉 $(0,\ 5)$이다. (거짓)

ㄴ. $r=4$를 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2-6y+9=0$, $(y-3)^2=0$ $\therefore y=3$

점 P에서 준선 $y=-1$에 내린 수선의 발을 H라 하면

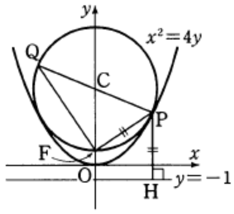
$\overline{PF}=\overline{PH}=3+1=4$

ㄷ. $\overline{CF}=\overline{CP}=\overline{PF}=4$이므로 $\triangle CFP$는 정삼각형이다.

따라서 $\angle FCP=60^\circ$ 이므로

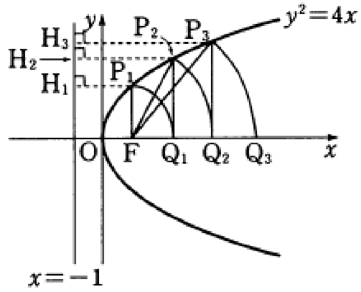
$\angle FQP=\dfrac{1}{2}\angle FCP=30^\circ$

그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.



56. 답 ⑤

[해설]



포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표는 $(1,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-1$이다.

점 P_n에서 준선에 내린 수선의 발을 H_n이라 하면

$\overline{P_1F}=\overline{H_1P_1}=1+1=2$, $\overline{FQ_1}=\overline{P_1F}=2$

$\overline{P_2F}=\overline{H_2P_2}=\overline{FQ_1}+2=4$, $\overline{FQ_2}=\overline{P_2F}=4$

$\overline{P_3F}=\overline{H_3P_3}=\overline{FQ_2}+2=6$, $\overline{FQ_3}=\overline{P_3F}=6$

⋮

$\therefore \overline{P_nF}=2n$, $\overline{FQ_n}=2n$

따라서 직각삼각형 P_nFQ_{n-1}에서

$\cos(\angle P_nFQ_{n-1})=\dfrac{\overline{FQ_{n-1}}}{\overline{P_nF}}=\dfrac{2n-2}{2n}$

이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{\overline{FQ_{n-1}}}{\overline{P_nF}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n-2}{2n}=1$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\angle P_nFQ_n)=0$

57. 답 ①

[해설] 원 C의 중심은 $(3,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1이므로 원의 방정식은 $(x-3)^2+y^2=1$

$\overline{PC}$와 점 P에서 준선까지의 거리가 같으므로

$\overline{PC}=a+3$

피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{PQ}^2=\overline{PC}^2-1$이므로

$\overline{PQ}^2=(a+3)^2-1$

$\triangle PCQ=\dfrac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{CQ}=\dfrac{1}{2}\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(a+3)^2-1}$

따라서 삼각형 PCQ의 넓이의 최솟값은 $a=0$일 때

$\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$

$\therefore m+S=0+\sqrt{2}=\sqrt{2}$

58. 답 ②

[해설]

포물선 $x^2=\frac{1}{4}y=4\cdot\frac{1}{16}\cdot y$위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$x_1x=2\cdot\frac{1}{16}\cdot(y+y_1)$

이 때, $x_1=-1,\ y_1=4$이므로

$-x=\frac{1}{8}(y+4)$

$\therefore\ y=-8-4$

위 식에 $y=0$을 대입하면

$0=-8x-4 \quad \therefore\ x=-\frac{1}{2}$

따라서 접선의 x절편은 $-\frac{1}{2}$이다.

59. **답** ③

[해설]

포물선 $y^2=16x=4\cdot 4x$에서 $p=4$이므로

포물선 $y^2=16x$ 위의 점 $(4,8)$에서 그은 접선의 방정식은

$8y=8(x+4)$

$\therefore y=x+4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠에 수직인 직선의 기울기 $m=-1$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y=mx+\frac{p}{m}=-x+\frac{4}{(-1)}=-x-4$

따라서 직선의 y절편은 -4이다.

60. **답** ③

[해설]

포물선 $y^2=4x$위의 접점을 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$y_1y=2(x+x_1)$

이 접선이 점 $(-2,\ 1)$을 지나므로

$y_1=2(x_1-2) \ \cdots\cdots$ ㉠

또, 접점은 포물선 위의 점이므로

$y_1^2=4x_1 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x_1=1,\ y_1=-2$ 또는 $x_1=4,\ y_1=4$

ㄱ. $\mathrm{P}(1,\ -2), \mathrm{Q}(4,\ 4)$ 라 하면 P, Q의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+4}{2},\ \frac{-2+4}{2}\right)$

즉, $\left(\frac{5}{2},\ 1\right)$이다. (참)

ㄴ. 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$y+2=\frac{4+2}{4-1}(x-1),\ y=2x-4$

$\therefore\ 2x-y-4=0$ (참)

ㄷ. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(4-1)^2+(4+2)^2}=3\sqrt{5}$

점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$과 직선 $2x-y-4=0$사이의 거리는

$\frac{|-4-1-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{9\sqrt{5}}{5}$

이므로 삼각형 APQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 3\sqrt{5}\times\frac{9\sqrt{5}}{5}=\frac{27}{2}$ (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

참고

두 점 $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)$를 지나는 방정식은

$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ (단, $x_1\neq x_2$)

61. **답** 10

[해설]

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 직선 $y=x+4$위의 점이므로

$b=a+4$

직선 $y=x+4$위의 점 $(a,\ a+4)$에서 포물선 $y^2=4x$에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y-(a+4)=m(x-a)$

$y^2=4x$와 연립하여 x를 소거하면

$my^2-4y-4am+4a+16=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

포물선과 직선이 접할 때, ㉠의 판별식 $\mathrm{D}=0$이므로

$\frac{\mathrm{D}}{4}=4-m(-4am+4a+16)=0$

$\therefore\ am^2-(a+4)m+1=0 \ \cdots\cdots$ ㉡

이 때, m에 대한 이차방저식 ㉡의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면, $\alpha,\ \beta$는 두 접선의 기울기이고, 두 접선이 서로 수직이므로 기울기의 곱 $\alpha\beta=-1$이다.

㉡에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=\frac{1}{a}=-1$

$\therefore\ a=-1,\ b=3$

$\therefore\ a^2+b^2=10$

62. **답** ②

[해설]

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $P(a,b)$에서의 접선의 방정식은 $by=2(x+a)$이므로 점 Q의 좌표는 $(-a,0)$이다.

또한, $b^2=4a$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{4a^2+b^2}=\sqrt{4a^2+4a}=4\sqrt{5}$

$4a^2+4a=80,\ a^2+a-20=0$

$(a+5)(a-4)=0$

$\therefore a=4 \quad (\because a>0)$

따라서 $b^2=16$이므로

$a^2+b^2=32$

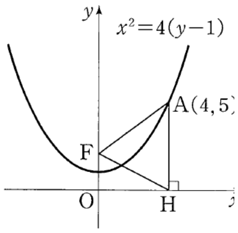
63. **답** 141

[해설]

포물선 $x^2=4(y-1)$은 포물선 $x^2=4y$를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $x^2=4y$의 초점의 좌표가 $(0,\ 1)$, 준선의 방정식이 $y=-1$이므로 주어진 포물선의 초점은 $\mathrm{F}(0,\ 2)$, 준선의 방정식은 $y=0$, 즉 x축이다.

$\therefore \overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AH}}=5$



점 H의 좌표는 $(4,\ 0)$이므로

$\overline{FH} = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}$

$\therefore \sin(\angle FHA)$

$= \sin(90^\circ - \angle FHO)$

$= \cos(\angle FHO)$

$= \dfrac{4}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

이 때, 삼각형 AFH의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$2R = \dfrac{\overline{AF}}{\sin(\angle FHA)} = 5 \times \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore R = \dfrac{5\sqrt{5}}{4}$

따라서 삼각형 AFH의 외접원의 넓이는

$\pi \times \left(\dfrac{5\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \dfrac{125}{16}\pi$

$\therefore\ a+b = 16+125 = 141$

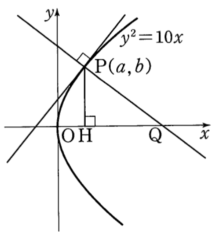
참고 (사인법칙)

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길으를 R라 하면

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

***64.* 답 ②**

[해설]



점 P에서의 접선은 $by = 5(x+a)$이다.

접선의 기울기가 $\dfrac{5}{b}$이므로 점 P를 지나고

접선에 수직인 직선은

$y-b = -\dfrac{b}{5}(x-a)$

$y=0$으로 놓으면 $x=a+5$

따라서 $Q(a+5, 0)$이고 $H(a, 0)$이므로

$\overline{HQ} = 5$

***65.* 답 ①**

[해설]

점 P의 좌표를 $P(x_1, y_1)$이라 하면

$\overline{OP} = {x_1}^2 + {y_1}^2 = {x_1}^2 + 3x_1 = 4$에서

$(x_1-1)(x_1+4) = 0$

$\therefore x_1 = 1,\ y_1 = -\sqrt{3}\ (\because x_1 > 0,\ y_1 < 0)$

따라서 점 $P(1,\ -\sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

$y_1 y = \dfrac{3}{2}(x+x_1)$에서

$-\sqrt{3}y = \dfrac{3}{2}(x+1)$

$\therefore y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x+1) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore ab = (-\dfrac{\sqrt{3}}{2})\cdot(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{3}{4}$

***66.* 답 ②**

[해설] 포물선의 꼭짓점은 원점이므로 직선 l의 방정식은 $y = \dfrac{1}{2}x$

직선 l'의 기울기는 -2이므로 직선 l'의 방정식은 $y = -2x$

직선 $y=-2x$와 포물선 $y^2 = 2x$의 교점은 $4x^2 = 2x$에서 $x = \dfrac{1}{2}$

그러므로 점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{2},\ -1\right)$

직선 PQ의 방정식은

$y-4 = \dfrac{4+1}{8-\dfrac{1}{2}}(x-8) = \dfrac{2}{3}(x-8)$

따라서 구하는 교점의 x좌표는 2이다.

***67.* 답 ②**

[해설]

점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면 접선의 방정식은

$\boxed{y_1 y = \dfrac{1}{2}(x+x_1)}$

이 식에 $y=0$을 대입하면 교점 T의 좌표는 $(-x_1,\ 0)$이다.

$y^2 = 4\cdot\dfrac{1}{4}x$에서 초점 F의 좌표는 $\boxed{\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)}$이므로

$\overline{FT} = \boxed{x_1 + \dfrac{1}{4}}$

한편, $\overline{FP} = \sqrt{\left(x_1 - \dfrac{1}{4}\right)^2 + {y_1}^2}$

$= \sqrt{\left(x_1 - \dfrac{1}{4}\right)^2 + x_1}\ (\because {y_1}^2 = x_1)$

$= \sqrt{\left(x_1 + \dfrac{1}{4}\right)^2} = \boxed{x_1 + \dfrac{1}{4}}$

따라서 $\overline{FP} = \overline{FT}$이다.

***68.* 답 ③**

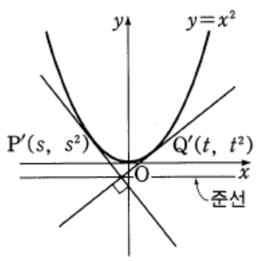
[해설] 점 P에서 그은 접선 l의 방정식은 $by = 4(x+a)$이므로 $y=0$일 때 $x=-a$이다. 즉, $a=8$

그런데 점 P에서 초점까지의 거리는 점 P에서 준선 $x=-2$까지의 거리와 같으므로 $8-(-2) = 10$이다.

따라서 점 P에서 초점까지의 거리는 10이다.

***69.* 답 ①**

[해설]



포물선 $y=x^2$ 위의 두 점 $P'(s,\ s^2)$, $Q'(t,\ t^2)$에서 각각 그은 이 포물선의 접선은 수직이다. (단, $s<0<t$)

ㄱ. 두 접선의 교점은 준선 위의 점이므로 s가 증가하면 준선 위의 교점이 x축의 양의 방향으로 이동하므로 t도 증가한다. (참)

ㄴ. ㄷ. 포물선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 일정하므로 a, b의 변화는 넓이에 영향을 미치지 않는다. (거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

70. 답 ②

[해설]

접점을 $P(x_1,\ y_1)$이라 하면 구하는 접선의 방정식은

$y_1 y = 4(x + x_1)$ …… ㉠

접선 ㉠이 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로

$y_1 = 4(x_1 - 1)$ …… ㉡

또한 점 P는 포물선 위의 점이므로

${y_1}^2 = 8x_1$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하여 정리하면

$2{x_1}^2 - 5x_1 + 2 = 0,\ (x_1 - 2)(2x_1 - 1) = 0$

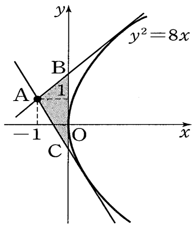
$\therefore x_1 = 2$ 또는 $x_1 = \frac{1}{2}$

$\therefore x_1 = 2,\ y_1 = 4$ 또는 $x_1 = \frac{1}{2},\ y_1 = -2$

구하는 접선의 방정식은 ㉠으로부터

$y = x + 2$ 또는 $y = -2x - 1$

따라서 두 직선의 y절편은 2와 -1이므로 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{2}$

71. **답 ③**

[해설]

포물선 $y^2 = 12x$ 위의 점 $\mathrm{P}(3,\ 6)$에서의 접선의 방정식은

$6y = 6(x + 3)$

즉, $y = x + 3$이므로 $\mathrm{Q}(-3,\ 0)$

$y^2 = 12x = 4 \cdot 3 \cdot x$에서 $\mathrm{F}(3,\ 0)$

따라서 삼각형 PQF의 넓이는

$\frac{1}{2}(3 + 3) \cdot 6 = 18$

72. 답 ③

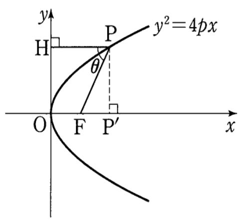
[해설]

ㄱ. $\theta = 90^\circ$이면 $\overline{PH} = p,\ \overline{PF} = 2p$

$\therefore \triangle FPH = \frac{1}{2} \cdot p \cdot 2p = p^2$ (참)

ㄴ. $\overline{PH} < \overline{PF}$이므로 $\triangle FPH$는 정삼각형이 될 수 없다. (거짓)

ㄷ. 점 P의 x좌표를 α, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 P'이라하면



$\overline{PF} = \alpha + p,\ \overline{FP'} = \alpha - p$

$\cos\theta = \frac{1}{3}$이므로

$\frac{\alpha - p}{\alpha + p} = \frac{1}{3}$

$3(\alpha - p) = \alpha + p \quad \therefore \alpha = 2p$

이 때, $\overline{OF} = \overline{FP'}$이므로 $\overline{HF} = \overline{PF}$

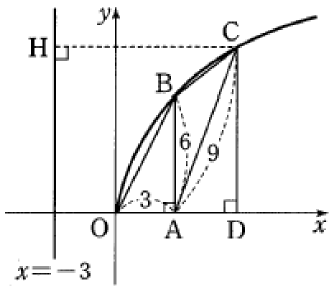
그러므로 $\triangle FPH$는 이등변 삼각형이다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

73. 답 ④

[해설]

주어진 조건과 그림을 점 O를 원점, 직선 OA를 x축으로 하는 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



포물선의 방정식을 $y^2 = 4px$로 놓으면

$\overline{OA} = 3,\ \overline{AB} = 6$에서 점 B의 좌표는 $B(3,\ 6)$이므로

$36 = 4p \cdot 3 \qquad \therefore p = 3$

따라서 포물선의 방정식은 $y^2 = 12x$이고, $y^2 = 4 \cdot 3 \cdot x$에서 초점의 좌표는 $A(3,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x = -3$이다.

점 C에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면

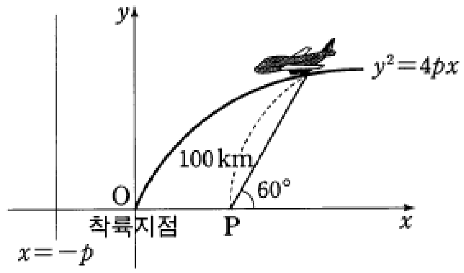
$\overline{OD} = \overline{HC} - 3 = \overline{CA} - 3 = 6,\ \overline{AD} = 3$

또한, $\overline{DC} = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}$

$\therefore \square ABCD = \frac{1}{2}(6 + 6\sqrt{2}) \cdot 3 = 9 + 9\sqrt{2}$

74. 답 ①

[해설]



위의 그림과 같이 착륙지점을 원점, 점 P의 좌표를 $(p,\ 0)$으로 하는 좌표평면을 도입하면 포물선의 방정식은 $y^2 = 4px$이다.

점 P에서 100km 떨어진 비행물체의 x좌표는

$p + 100\cos 60^\circ = p + 50$

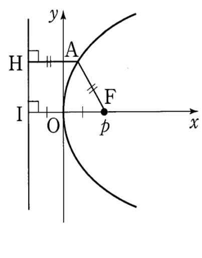
이므로 비행물체에서 준선 $x = -p$까지의 거리는 $(2p + 50)$km이다.

포물선의 정의에 의하여 $2p + 50 = 100$이므로 $p = 25$(km)

75. 답 ④

[해설]

오른쪽 그림과 같이 포물선궤도에 좌표평면을 도입하면 포물선의 방정식은



$y^2 = 4px \quad (p > 0)$이다. 점 $(p,\ 6 \times 10^{12})$이 포물선 위의 점이므로

$36 \times 10^{24} = 4p^2 \quad \therefore p = 3 \times 10^{12}$

포물선의 정의에 의하여 오른쪽 그림에서

$\overline{FA} = \overline{HA} \geq \overline{IO} = \overline{OF}$

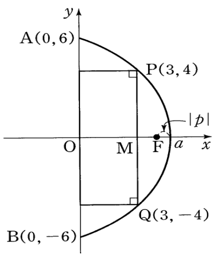
이므로 초점 F와 포물선 위의 점 사이의 최소 거리는 $\overline{OF}$이다.

따라서 구하는 최소 거리는

$p = 3 \times 10^{12}\,(km)$

76. 답 ④

[해설]



포물선의 축이 해안가와 수직이고 P, Q는 해안가에서 같은 거리에 있으므로 포물선의 축은 선분 PQ의 중점 M을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 y축으로, 포물선의 축을 x축으로 하는 좌표평면을 도입하여 $10m$를 1의 눈금으로 하면 포물선은 두 점 $A(0,\ 6)$, $P(3,\ 4)$를 지난다.

이때, 포물선의 방정식을

$y^2 = 4p(x-a)\ (p<0)$라 하면 이 포물선은 두 점 $A(0,\ 6)$, $P(3,\ 4)$를 지나므로

$36 = -4pa$ …… ㉠

$16 = 4p(3-a)$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p = -\dfrac{5}{3}$, $a = \dfrac{27}{5}$

$\therefore \overline{OF} = \dfrac{27}{5} - \dfrac{5}{3} = \dfrac{56}{15}$

따라서 초점 F가 해안가에서 떨어져 있는 거리는

$\dfrac{56}{15} \times 10 = \dfrac{112}{3}(m)$이다.

1. 답 ②	2. 답 ③	3. 답 ③	4. 답 ④
5. 답 ④	6. 답 25	7. 답 ②	8. 답 ③
9. 답 ③	10. 답 ②	11. 답 ③	12. 답 ①
13. 답 25	14. 답 ②	15. 답 39	16. 답 ⑤
17. 답 ①	18. 답 112	19. 답 135	20. 답 ⑤
21. 답 ③	22. 답 28	23. 답 72	24. 답 4.25
25. 답 ⑤	26. 답 17	27. 답 ⑤	28. 답 ②
29. 답 ⑤	30. 답 ①	31. 답 ③	32. 답 ②
33. 답 ④	33. 답 ④	35. 답 12	36. 답 ⑤
37. 답 ②	38. 답 ③	39. 답 ③	40. 답 ⑤
41. 답 36	42. 답 ③	43. 답 ⑤	44. 답 11
45. 답 ②	46. 답 ④	47. 답 ④	48. 답 4
49. 답 ②	50. 답 ③	51. 답 100	52. 답 ③
53. 답 ④	54. 답 15	55. 답 2	56. 답 ③
57. 답 ②	58. 답 ④	59. 답 ④	60. 답 ③
61. 답 ③	62. 답 16	63. 답 ③	64. 답 ①
65. 답 ②	66. 답 ③	67. 답 ④	68. 답 80
69. 답 68	70. 답 ③	71. 답 64	72. 답 ⑤
73. 답 ④	74. 답 ①	75. 답 ④	76. 답 ④
77. 답 ③	78. 답 ③	79. 답 304	80. 답 ⑤
81. 답 ⑤	82. 답 ③	83. 답 6	84. 답 22
85. 답 ④	86. 답 75	87. 답 ⑤	88. 답 ④
89. 답 ⑤	90. 답 ④	91. 답 8	92. 답 ③
93. 답 ①	94. 답 ②	95. 답 ④	96. 답 ⑤
97. 답 ④	98. 답 ④	99. 답 ④	100. 답 ⑤
101. 답 ④	102. 답 ③	103. 답 ③	104. 답 ②
105. 답 ①	106. 답 8	107. 답 169	108. 답 ④
109. 답 ③	110. 답 ⑤	111. 답 ①	112. 답 ③
113. 답 13	114. 답 ④	115. 답 60	116. 답 ④
117. 답 19	118. 답 ③	119. 답 ⑤	120. 답 32
121. 답 ③	122. 답 ④	123. 답 ③	124. 답 ③
125. 답 ①	126. 답 ①	127. 답 ③	128. 답 38
129. 답 ⑤	130. 답 ②	131. 답 16	132. 답 ⑤
133. 답 ①	134. 답 ④	135. 답 90	136. 답 11
137. 답 ⑤	138. 답 ②	139. 답 ⑤	140. 답 34
141. 답 ①	142. 답 ②	142. 답 ②	144. 답 ④
145. 답 68	146. 답 ⑤	147. 답 ①	148. 답 ④
149. 답 ⑤			

***1.* 답 ②**

[해설] 점 P를 중심으로 가지는 원의 반지름의 길이를 r라고 하면

$\sqrt{(a+1)^2+b^2}=r+1$

$\sqrt{(a-1)^2+b^2}=5-r$

이므로 $\sqrt{(a+1)^2+b^2}+\sqrt{(a-1)^2+b^2}=6$

그러므로 점 $P(a,\ b)$에서 두 점 $(-1,\ 0)$과 $(1,\ 0)$까지의 거리의 합이 6으로 일정하다.

즉, 점 P가 그리는 도형은 장축의 길이가 6이고 초점이 $(\pm 1,\ 0)$인 타원이다.

타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이라 하면 $2a=6$이므로 $a=3$

$b^2=3^2-1^2=8$

$\therefore \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$

***2.* 답 ③**

[해설]

중심이 점 $(0,\ 0)$이고, 초점이 x축 위에 있으므로 타원의 방정식의 꼴은

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이다.

장축의 길이가 6이므로 $2a=6$

$\therefore\ a=3$

초점이 $(\sqrt{5},\ 0)$, $(-\sqrt{5},\ 0)$이므로

$b=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$

이고, 단축의 길이는 $2\cdot 2=4$이다.

***3.* 답 ③**

[해설]

$3x^2+4y^2-12x+8y+4=0$을 정리하면

$3(x-2)^2+4(y+1)^2=12$

$\therefore \dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(y+1)^2}{3}=1$

따라서 장축의 길이는 4이고, 중심의 좌표는 $(2,\ -1)$이다.

$\therefore\ l+m+n=4+2+(-1)=5$

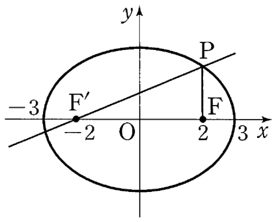
4. **답 ④**

두 정점까지의 거리의 합이 일정한 점이 나타내는 도형은 타원이다. 중심이 원점이고 두 초점이 x축 위에 있으므로 타원의 방정식

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$

에서 $a^2-b^2=2^2$이고 $2a=6$

$\therefore\ a^2=9,\ b^2=5$



즉, 주어진 타원의 방정식은

$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$이다.

$x=2$를 타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$에 대입하면 $\dfrac{4}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$, 즉 $y=\pm\dfrac{5}{3}$에서 점

P의 좌표는 $\left(2,\ \dfrac{5}{3}\right)$이다.

따라서 직선 PF'의 기울기는

$\dfrac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{F'F}}}=\dfrac{\frac{5}{3}}{4}=\dfrac{5}{12}$

5. **답 ④**

두 정점까지의 거리의 합이 일정한 점이 나타내는 도형은 타원이다. 중심이 원점이고 두 초점이 x축 위에 있으므로 타원의 방정식

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$

에서 $a^2-b^2=2^2$이고 $2a=6$

$\therefore\ a^2=9,\ b^2=5$

즉, 주어진 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$이다.

$x=2$를 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$에 대입하면 $\frac{4}{9}+\frac{y^2}{5}=1$, 즉 $y=\pm\frac{5}{3}$에서 점 P의 좌표는 $\left(2,\ \frac{5}{3}\right)$이다.

따라서 직선 PF′의 기울기는

$$\frac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{F'F}}}=\frac{\frac{5}{3}}{4}=\frac{5}{12}$$

***6.* 답** 25

[해설]

타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$의 초점의 좌표는

$(\pm\sqrt{36-20},\ 0)$

이므로 초점이 $(\pm4,\ 0)$이고, 장축의 길이가 10인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$위의 점이므로

$3\leq\sqrt{a^2+b^2}\leq5$

$\therefore\ 9\leq a^2+b^2\leq25$

따라서 a^2+b^2의 최댓값은 25이다.

참고

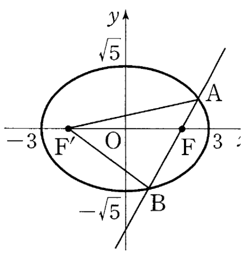
타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$위의 임의의 점 P와 원점 O를 이은 선분을 $\overline{\mathrm{OP}}$라 할 때,

$b\leq\overline{\mathrm{OP}}\leq a$, 즉 $b^2\leq\overline{\mathrm{OP}}^2\leq a^2$

***7.* 답** ②

[해설]

타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$은 오른쪽 그림과 같고 타원의 정의에 의하여



$\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}=2\times3=6$

$\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}}=2\times3=6$

따라서 삼각형 ABF′의 둘레의 기리는

$(\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}+(\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}})=6+6=12$

***8.* 답** ③

[해설] 점 $P(2,\ 3)$은 타원 위의 점이므로 $\overline{PF}+\overline{PF'}=\sqrt{0^2+3^2}+\sqrt{4^2+3^2}=8$에서 장축의 길이가 8임을 알 수 있다. 주어진 조건을 만족하는 타원의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$로 놓으면

$2a=8,\ 2^2=a^2-b^2$

$\therefore a=4,\ b^2=12\qquad\therefore b=2\sqrt{3}$

$\therefore\overline{AB}=4\sqrt{3}$

***9.* 답** ③

[해설] 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$이므로

$c=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}\qquad\therefore F(\sqrt{3},\ 0)$

$x=\sqrt{3}$을 타원의 방정식에 대입하면

$\frac{3}{4}+y^2=1\qquad\therefore y=\pm\frac{1}{2}$

$\therefore\overline{PQ}=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

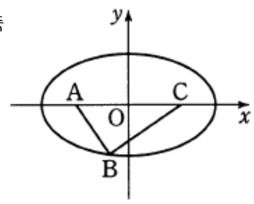
따라서 삼각형 OPQ의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1=\frac{\sqrt{3}}{2}$

***10.* 답** ②

[해설]

삼각형 ABC를 오른쪽 그림과 같이 좌표축 위에 놓고 타원의 방정식을



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$

로 놓으면 $\overline{AB}+\overline{BC}=3+4=7$에서

$2a=7\quad\therefore a=\frac{7}{2}$

$\overline{AC}=5$이므로 초점 C의 x좌표 $c=\frac{5}{2}$

$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{6}$

따라서 구하는 타원의 단축의 길이는 $2\sqrt{6}$이다.

***11.* 답** ③

[해설] 장축의 길이가 10이므로

$\overline{AF}+\overline{AF'}=\overline{BF}+\overline{BF'}=\overline{CF}+\overline{CF'}=\overline{DF}+\overline{DF'}=10$

두 초점 $F,\ F'$을 지나는 두 직선이 평행하므로 삼각형 PFF'과 삼각형 $QF'F$가 합동이다. 즉, $\overline{PF}+\overline{PF'}=\overline{QF'}+\overline{QF}$이다.

그런데 삼각형 PFF'의 둘레의 길이가 14이고

$\overline{FF'}=2\sqrt{25-9}=8$이므로 $\overline{PF}+\overline{PF'}=\overline{QF}+\overline{QF'}=6$

따라서 구하는 육각형 $ABQDCP$의 둘레의 길이는

$\{(\overline{AF}+\overline{AF'})+(\overline{BF}+\overline{BF'})+(\overline{CF}+\overline{CF'})+(\overline{DF}+\overline{DF'})\}$

$-\{(\overline{PF}+\overline{PF'})+(\overline{QF}+\overline{QF'})\}$

$=40-12=28$

***12.* 답** ①

[해설] 오른쪽 그림에서 타원의 정의를 이용하면

$\overline{PF}+\overline{PF_1}=16,$

$\overline{PF}+\overline{PF_2}=24$

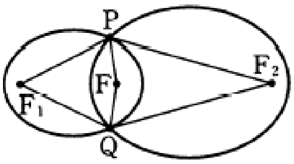
이므로 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=8$

마찬가지로 $\overline{QF}+\overline{QF_1}=16$,

$\overline{QF}+\overline{QF_2}=24$이므로

$|\overline{QF_1}-\overline{QF_2}|=8$

$\therefore |\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|+|\overline{QF_1}-\overline{QF_2}|=16$



13. **답** 25

[해설]

타원 $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$의 초점의 좌표를 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$ $(c>0)$으로 놓으면

$c^2=5^2-4^2=3^2$

즉, 초점의 좌표는 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$이미—로 두 점 A, B는 타원의 초점이다.

타원의 정의에 의하여

$\overline{PA}+\overline{PB}=2\times 5=10$

$\therefore \overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PA}\cdot(10-\overline{PA})$

$=-\overline{PA}^2+10\overline{PA}$

$=-(\overline{PA}-5)^2+25$

$2\leq\overline{PA}\leq 8$이므로 $\overline{PA}=5$일 때, $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$의 최댓값은 25이다.

다른 풀이

타원의 정의에 의하여 $\overline{PA}+\overline{PB}=10$, $\overline{PA}>0$, $\overline{PB}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 대소관계에 의하여

$10=\overline{PA}+\overline{PB}\geq 2\sqrt{\overline{PA}\cdot\overline{PB}}$ (단, 등호는 $\overline{PA}=\overline{PB}=5$일 때 성립한다.)

$\sqrt{\overline{PA}\cdot\overline{PB}}\leq 5$

$\therefore \overline{PA}\cdot\overline{PB}\leq 25$

참고

산술평균과 기하평균의 대소관계

$a>0$, $b>0$일 때,

$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

14. 답 ②

[해설] 타원 - 추론능력

타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$의 초점의 좌표를 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c=\sqrt{16-12}=2$이므로 $\mathrm{F}(2,\ 0)$이다.

삼각형 FPQ의 무게중심이 원점 O가 되려면 세 점 F, P, Q의 y좌표의 합은 0이므로 두 점 P, Q는 x축에 대하여 대칭이다.

즉, 선분 PQ의 중점 M은 x축 위에 있다.

오른쪽 그림에서 $\overline{OF}=2$이므로 $\overline{OM}=1$이고 점 M의 x좌표는 -1이다.

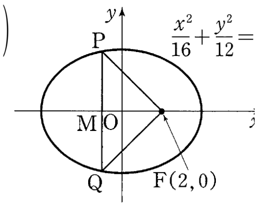
$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$에 $x=-1$을 대입하면

$y^2=\dfrac{45}{4}$ $\quad\therefore\ y=\pm\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

따라서 $\mathrm{P}\left(-1,\ \dfrac{3\sqrt{5}}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(-1,\ -\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\right)$

이므로

$\overline{PQ}=3\sqrt{5}$



참고 삼각형의 무게중심

삼각형 ABC의 무게중심 G는 세 중선의 교점이다.

이 때, 점 G는 각 중선을 2 : 1로 내분한다.

15. 답 39

[해설]

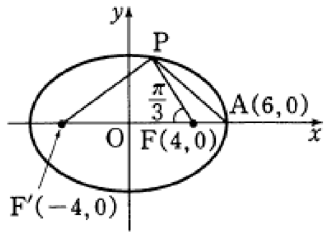
타원의 방정식 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$에서

$a^2-b^2=36-20=16$

이므로 두 초점 F, F'의 좌표는 각각 $F(4,\ 0)$, $F'(-4,\ 0)$이다.

$\overline{PF}=t$로 놓으면 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF'}=12-t$이므로 $\triangle PF'F$에서 제이코사인법칙을 이용하면



$(12-t)^2=t^2+8^2-2\cdot 8\cdot t\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}$

$t^2-24t+144=t^2+64-8t$

$16t=80 \qquad \therefore t=5$

또, $\triangle PFA$에서 $\angle PFA=\dfrac{2}{3}\pi$이므로 제이코사인법칙을 이용하면

$\overline{PA}^2=2^2+5^2-2\cdot 2\cdot 5\cos\dfrac{2}{3}\pi$

$=4+25+10=39$

16. 답 ⑤

[해설]

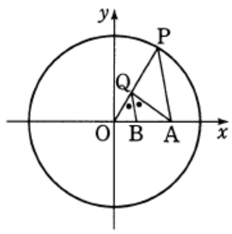
$\angle OQA$의 이등분선이 선분 OA와 만나는 점을 B라 하자. $\overline{AP}\mathbin{/\!/}\overline{BQ}$이므로

$\angle AQB=\angle QAP$, $\angle OQB=\angle QPA$

$\therefore \angle AQP=\angle QPA$

그러므로 $\triangle QAP$는 $\overline{QA}=\overline{QP}$인 이등변삼각형이고,

$\overline{OQ}+\overline{QA}=\overline{OQ}+\overline{QP}=\overline{OP}=6$



즉, 점 Q는 두 점 O, A에 이르는 거리의 합이 6으로 일정하다.

점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overline{OQ}+\overline{QA}=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+y^2}=6$

$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=6-\sqrt{x^2+y^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-8x+16+y^2=36-12\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$

$3\sqrt{x^2+y^2}=2x+5$

또, 양변을 제곱하여 정리하면

$9x^2+9y^2=4x^2+20x+25$

$5(x-2)^2+9y^2=45$

따라서 점 Q의 자취는

$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ (단, $y\neq 0$)이므로

$X\subset\left\{(x,\ y)\middle|\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1\right\}$

17. 답 ①

[해설]

ㄱ. 두 초점이 $F,\ F_1$인 타원의 장축의 길이를 $2a$라 하고 두 초점이 $F,\ F_2$인 타원의 장축의 길이를 $2c$라 하면 타원의 정의에 의하여

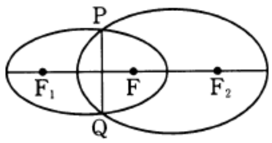
$\overline{PF}+\overline{PF_1}=2a$ … ㉠

$\overline{PF}+\overline{PF_2}=2c$ … ㉡

그런데 $\overline{PF_1}=\overline{PF_2}$이므로 ㉠-㉡에서 $2a-2c=0$

따라서 두 타원의 장축의 길이는 서로 같다. (참)

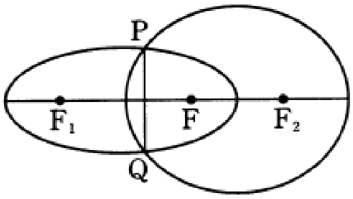
ㄴ. (반례) $\overline{FF_1}=\overline{FF_2}$이므로 두 타원의 중심에서 초점까지의 거리는 서로 같다.



그런데 위 그림과 같이 오른쪽 타원의 장축의 길이가 더 길면 선분 PQ와 선분 F_1F_2가 점 F가 아닌 점에서 만난다. 즉 세 점 $P,\ F,\ Q$는 한 직선 위에 있지 않다. (거짓)

ㄷ. (반례) 그림과 같이 장축의 길이가 서로 같은 두 타원에서 오른쪽 타원의 단축의 길이가 더 길면 오른쪽 타원의 두 초점 사이의 거리가 더 짧다. ($\because c=\sqrt{a^2-b^2}$)

이 때, 선분 PQ는 선분 FF_1과 만난다. (거짓)



그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

18. **답** 112

[해설]

초점의 좌표를 $\mathrm{F}(c,\ 0),\ \mathrm{F}(-c,\ 0)\ (c>0)$이로 놓으면 $\overline{\mathrm{FF}'}=8$에서

$2c=8\quad\therefore\ c=4$

또, 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF}'}=2a=16\quad\therefore\ a=8$

$c^2=a^2-b^2$에서 $b^2=a^2-c^2=64-16=48$

$\therefore\ a^2+b^2=64+48=112$

19. 답 135

[해설]

삼각형 $\mathrm{AF'B}$가 정삼각형이면 $\overline{\mathrm{F'A}}=12,\ \overline{\mathrm{FA}}=6$이므로

$\overline{\mathrm{F'A}}+\overline{\mathrm{FA}}=18=2a,\ a=9$

$\therefore\ a^2=9^2=81$

한편, 삼각형 $\mathrm{AF'F}$는 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{F'F}}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$

이고, 초점 $\mathrm{F},\ \mathrm{F'}$의 좌표는

$\mathrm{F}(3\sqrt{3},\ 0),\ \mathrm{F'}(-3\sqrt{3},\ 0)$

이 때, $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{81-b^2}=3\sqrt{3}$이므로

$b^2=81-27=54$

$\therefore\ a^2+b^2=81+54=135$

20. 답 ⑤

[해설]

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$에서 $c^2=25-9=16$이므로 초점의 좌표는

$\mathrm{F}(4,\ 0),\ \mathrm{F'}(-4,\ 0)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{FF'}}=8$

한편, $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=10$이고 $\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PF'}}=3:2$ 이므로

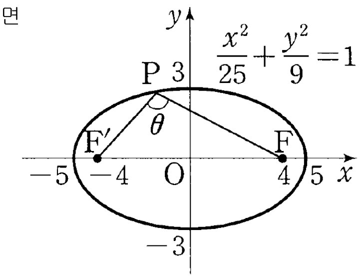
$\overline{\mathrm{PF}}=6,\ \overline{\mathrm{PF'}}=4$

$\triangle\mathrm{PFF'}$에서 $\angle\mathrm{FPF'}=\theta$로 놓으면

제이코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{6^2+4^2-8^2}{2\cdot 6\cdot 4}=-\frac{1}{4}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$



따라서 삼각형 $\mathrm{PFF'}$의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot\sin\theta=12\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=3\sqrt{15}$

21. 답 ③

[해설]

$\overline{\mathrm{PF}}=a,\ \overline{\mathrm{PF'}}=b$로 놓으면 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=a+b=8$

$\sqrt{16-7}=3$이므로 두 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(3,\ 0),\ \mathrm{F'}(-3,\ 0)$이고, $\overline{\mathrm{FF'}}=6$이다.

삼각형 $\mathrm{PF'F}$에서 제이코사인법칙을 적용하면

$6^2=a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ$

$a^2+b^2-2ab=36$

$(a+b)^2-3ab=36$

$a+b=8$이므로 $64-3ab=36$에서 $ab=\frac{28}{3}$

따라서 삼각형 $\mathrm{FPF'}$의 넓이는

$\frac{1}{2}ab\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{28}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

참고 제이코사인법칙

삼각형의 세 변 $a,\ b,\ c$와 세 각 $\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}$에 대하여

(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}$

(2) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos\mathrm{B}$

(3) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\mathrm{C}$

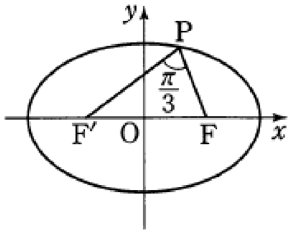
22. 답 28

[해설]

$\overline{PF}=a,\ \overline{PF'}=b$로 놓으면 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=a+b=8$이 성립한다.

또한, $\overline{FF'}=2\sqrt{16-7}=6$이다.
삼각형 $PF'F$에서 제이코사인법칙을 적용하면



$6^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\frac{\pi}{3}$

$a^2+b^2-ab=36$

$a^2+b^2+2ab-2ab-ab=36$

$(a+b)^2-3ab=36$

$a+b=8$이므로 $64-3ab=36$ $\quad\therefore 3ab=28$

$\therefore 3\overline{PF}\cdot\overline{PF'}=28$

23. 답 72

[해설]

점 P에서의 접선의 방정식은 $\frac{ax}{16}+\frac{by}{7}=1$이므로

$y=0$을 대입하면 $x=\frac{16}{a}$

$\therefore \mathrm{A}\left(\frac{16}{a},\ 0\right)$

$\triangle \mathrm{PF'F}:\triangle \mathrm{PFA}=2:3$ 에서 두 삼각형의 높이가 같으므로

$\overline{\mathrm{F'F}}=6,\ \overline{\mathrm{FA}}=\frac{16}{a}-3$

즉, $6:\left(\frac{16}{a}-3\right)=18\quad\therefore a=\frac{4}{3}$

한편, 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 타원 위의 점이므로

$\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{16}+\frac{b^2}{7}=1$에서 $\frac{1}{9}+\frac{b^2}{7}=1$

$b^2=\frac{8}{9}\times 7=\frac{56}{9}\quad\therefore\ b=\frac{2\sqrt{14}}{3}$

$\therefore\ 9(a^2+b^2)=9\left(\frac{16}{9}+\frac{56}{9}\right)=72$

24. 답 4.25

[해설]

단면을 나타내는 타원의 방정식은

$\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$

철제빔의 길이가 6m이므로 철제빔까지의 높이를 hm라 하면 $(3,\ h)$는 타원 위의 점이므로

$\frac{3^2}{6^2}+\frac{h^2}{5^2}=1$

$\therefore h=\frac{5\sqrt{3}}{2}=4.25$

25. 답 ⑤

[해설]

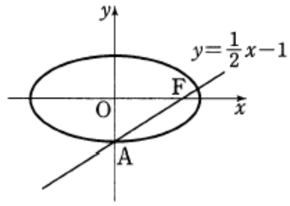
오른쪽 그림과 같이 A와 F는 직선 $y=\frac{1}{2}x-1$이 x축, y축과 만나는 점이므로 $A(0,\ -1)$, $F(2,\ 0)$이다.

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에서 초점 $F(2,\ 0)$이고 $b=1$이다.

$4=a^2-1$이므로 $a^2=5$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{5}$

$\therefore$ (장축의 길이) $=2a=2\sqrt{5}$



26. 답 17

[해설]

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 초점의 좌표가 $(\pm b,\ 0)$이므로

$a^2-b^2=b^2\quad\therefore a^2=2b^2\quad\cdots$ ㉠

또, 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의 y절편이 ± 1이므로

$\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}=\pm 1\quad\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a^2=\frac{4}{3},\ b^2=\frac{2}{3}$

$\therefore a^2b^2=\frac{8}{9}$

$\therefore p+q=17$

27. 답 ⑤

[해설]

$\overline{AF}=\overline{AF'}$이고, $\overline{AF}+\overline{AF'}=2a$이므로 $\overline{AF}=a$

$\angle AFO=60^\circ$ 이므로 $\overline{AO}=b=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

28. 답 ②

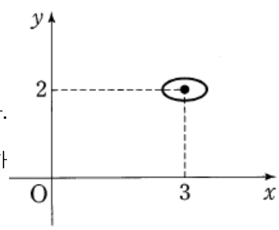
[해설] 주어진 타원의 방정식을 표준형으로 고치면

$4(x^2-6x+9)+16(y^2-4y+4)=-99+36+64$

$4(x-3)^2+16(y-2)^2=1$

$\frac{(x-3)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{(y-2)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=1$

이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$이므로 장축은 x축과 평행하다. (거짓)

ㄴ. $\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=1$의 초점의 좌표를 $(k,\ 0)$, $(-k,\ 0)$이라 하면

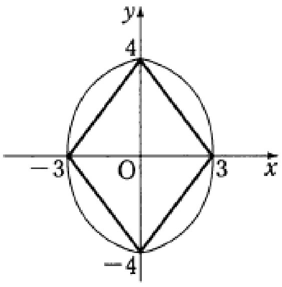
$k=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

그러므로 초점의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\ 0\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{4},\ 0\right)$이고 두 초점 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{3}}{4}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. (참)

ㄷ. 장축의 양 끝점의 좌표가 $\left(\frac{5}{2},\ 2\right)$, $\left(\frac{7}{2},\ 2\right)$이고 단축의 양 끝점의 좌표가 $\left(3,\ \frac{7}{4}\right)$, $\left(3,\ \frac{9}{4}\right)$이므로 타원의 내부에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 것은 $(3,\ 2)$뿐이다. (거짓)
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

29. 답 ⑤

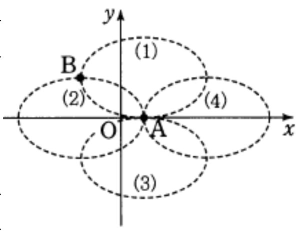
[해설]



오른쪽 그림과 같이 도형 $4|x|+3|y|=12$가 x축 및 y축과 만나는 점은 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$, $(0,\ 4)$, $(0,\ -4)$이다. 이 네 점을 꼭짓점으로 갖는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$의 단축의 길이는 $2a=6$, 장축의 길이는 $2b=8$이다.
즉, $a=3,\ b=4$이므로 두 초점 $F,\ F'$의 좌표를 각각 $(0,\ c)$, $(0,\ -c)$라 하면
$c^2=b^2-a^2=7$
따라서 구하는 초점의 좌표는 $(0,\ -\sqrt{7})$, $(0,\ \sqrt{7})$이다.

30. 답 ①

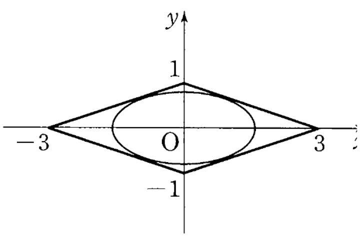
[해설]



ㄱ. 점 $A(2,\ 0)$을 한 꼭짓점으로 하는 타원은 오른쪽 그림과 같은 4가지 경우이다.
그런데 점 $B(-3,\ 3)$이 다른 한 꼭짓점이므로 (1), (2)만 가능하다. (참)
ㄴ. 그림에서 장축의 길이는 $2\cdot\{2-(-3)\}=10$, 단축의 길이는 $2\cdot(3-0)=6$이므로 그 합은 16이다. (거짓)
ㄷ. (2)인 경우 타원의 초점은 x축 위에 놓인다.
(1)인 경우 타원의 중심의 좌표는 $(2,\ 3)$이고 장축의 길이는 10, 단축의 길이는 6이므로 타원의 초점의 좌표는 $\pm\sqrt{5^2-3^2}=\pm4$에서 $(-2,\ 3)$, $(6,\ 3)$이다.
즉, 타원의 한 초점은 제 2사분면에 존재한다. (거짓)
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

31. 답 ③

[해설] 타원 - 이해능력
장축의 길이가 단축의 길이의 $\sqrt{3}$배이면 $a^2=3b^2$이므로 타원의 방정식은
$\frac{x^2}{3b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$로 놓을 수 있다.



오른쪽 그림에서 타원 $\frac{x^2}{3b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{3}$인 직선의 방정식은
$y=\frac{1}{3}x\pm\sqrt{3b^2\cdot\frac{1}{9}+b^2}$
이 직선이 $y=\frac{1}{3}x\pm1$과 같으므로
$\sqrt{\frac{b^2}{3}+b^2}=\sqrt{\frac{4}{3}b^2}=1$에서 $b^2=\frac{3}{4}$
따라서 $a^2=\frac{9}{4}$이므로 장축의 길이는
$2\times\frac{3}{2}=3$

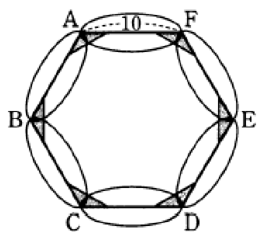
32. 답 ②

[해설]

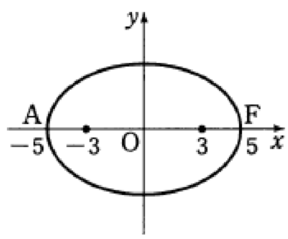
초점이 같은 두 타원의 방정식을 각각
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, $\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{d^2}=1\ (c>d>0)$로 놓는다.
ㄱ. $a>c$라고 하면
$a^2-b^2=c^2-d^2$에서 $a^2-c^2=b^2-d^2$ … ㉠
$\therefore b>d$
즉, 초점이 같은 두 타원에서 한 타원이 다른 타원보다 장축의 길이가 더 길면, 단축의 길이도 더 길다.
ㄴ, ㄷ. ㉠에서
$(a+c)(a-c)=(b+d)(b-d)$
그런데 $a+c>b+d$이므로 $a-c<b-d$이다.
즉, 두 타원의 단축의 길이의 차가 장축의 길이의 차보다 크다.
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

33. 답 ④

[해설]



색칠한 6개의 삼각형은 서로 합동인 이등변삼각형이다. 정육각형의 한 내각의 크기는 120°이므로 이등변삼각형에서 길이가 같은 두 변의 길이를 a라 하면 6개의 이등변삼각형의 넓이의 합은
$6\times\frac{1}{2}\times a^2\times\sin120^\circ=6\sqrt{3}$
$\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2=6\sqrt{3}$, $a^2=4$
$\therefore a=2$
이 때, 두 초점 사이의 거리는 $10-2\cdot2=6$이므로 두 꼭짓점 $A,\ F$를 장축의 양 끝점으로 하는 타원의 중심이 원점에 오도록 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



타원의 방정식을 $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$로 놓으면
초점의 좌표가 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$이므로
$5^2-b^2=3^2$에서 $b^2=16$
$\therefore b=4$

따라서 단축의 길이는 $2b=8$이다.

34. 답 ③

[해설] $y^2-\dfrac{4^a-2}{2}x^2=8a-1$의 양변을 $8a-1$로 나누면

$$\frac{x^2}{-\dfrac{2(8a-1)}{4^a-2}}+\frac{y^2}{8a-1}=1$$

이 때, 이 방정식의 두 초점이 모두 x축 위에 있는 타원이 되려면

$$-\frac{2(8a-1)}{4^a-2}>8a-1>0$$

이 성립해야 한다.

먼저, $8a-1>0$에서 $a>\dfrac{1}{8}$ …㉠

또한, ㉠의 범위에서

$$-\frac{2(8a-1)}{4^a-2}>8a-1,\ -\frac{2}{4^a-2}>1$$

$$\frac{2}{4^a-2}+1<0,\ \frac{4^a}{4^a-2}<0$$

이 때, $4^a-2<0$이므로

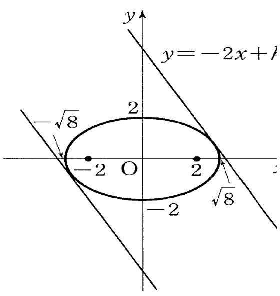
$a<\dfrac{1}{2}$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{1}{8}<a<\dfrac{1}{2}$

35. 답 12

[해설]

$2x+y=k$로 놓으면 $y=-2x+k$이므로 기울기가 -2이고 y절편이 k인 직선이다 따라서 오른쪽 그림과 같이 직선과 타원이 제 1사분면에서 접할 때 k는 최대이고, 제 3사분면에서 접할 때 k는 최소이다.



타원 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$에 접하고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y=-2x\pm\sqrt{8\cdot4+4}=-2x\pm6$

따라서 $2x+y$의 최댓값 $\mathrm{M}=6$, 최솟값 $m=-6$이므로

$\mathrm{M}-m=6-(-6)=12$

36. 답 ⑤

[해설]

타원 $x^2+2y^2=6$에서 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ……㉠

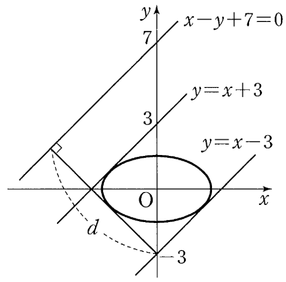
㉠에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{6\cdot1+3}$

∴ $y=\pm3$

오른쪽 그림에서 최대 거리는 평행한 두 직선 $y=x-3$과 $x-y+7=0$사이의 거리이므로 직선 $y=x-3$위의 점$(0,\ -3)$에서 직선 $x-y+7=0$에 이르는 거리 d는

$$d=\frac{|0+3+7|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$$



37. 답 ②

[해설]

타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$이라 하면 초점의 좌표가 $(\sqrt{3},0)$, $(-\sqrt{3},\ 0)$이므로 $b^2=a^2-c^2$에서

$b^2=a^2-(\pm\sqrt{3})^2=a^2-3$

또한, 타원이 $(0,\ 1)$을 지나므로 $\dfrac{1}{b^2}=1$

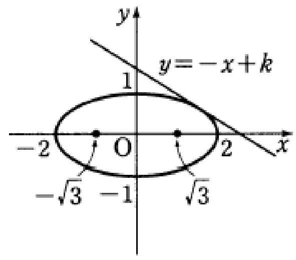
$\therefore b^2=1,\ a^2=b^2+3=4$

따라서 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

이다.

$x+y=k$로 놓으면 $y=-x+k$가 오른쪽 그림과 같을 때 최댓값을 갖는다.

즉, 직선이 타원과 접할 때이므로



$$\frac{x^2}{4}+(-x+k)^2=1$$

$$\frac{x^2}{4}+x^2-2kx+k^2=1$$

$5x^2-8kx+4k^2-4=0$

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=16k^2-5(4k^2-4)=0$$

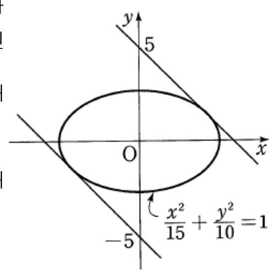
$4k^2=20,\ k^2=5$

$\therefore k=\sqrt{5}\ (\because k>0)$

38. 답 ③

[해설] $x+y=k$로 놓고 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-x+k$와 타원 $\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{10}=1$이 제3사분면에서 접할 때의 k의 값을 구하면 된다.

$y=-x+k$를 $2x^2+3y^2-30=0$에 대입하여 정리하면



$5x^2-6kx+3k^2-30=0$

$$\frac{D}{4}=(-3k)^2-5(3k^2-30)=0$$

$k^2=25\ \therefore k=\pm5$

따라서 구하는 $x+y$의 최솟값은 -5이다.

39. 답 ③

[해설] $\triangle ABP$의 넓이가 최대이려면 점 P에서의 접선이 직선 AB에

평행하여야 한다. 직선 AB의 기울기가 3이므로 점 P에서의 접선이 기울기도 3이다.

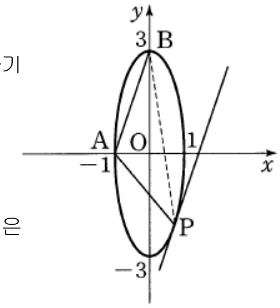
한편 타원 $x^2+\frac{y^2}{9}=1$에 접하고 기울기가 3인 접선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{1^2\cdot 3^2+3^2}$

$\therefore y=3x\pm 3\sqrt{2}$

따라서 점 P에서의 접선의 방정식은

$y=3x-3\sqrt{2}$

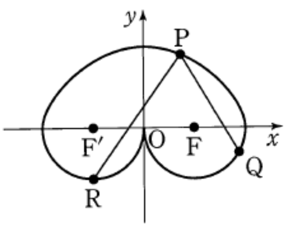


40. 답 ⑤

[해설] $y=\sqrt{27\left(1-\frac{x^2}{36}\right)}$의 양변을 제곱하여 정리하면

$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1\ (y\geq 0)$

인 타원의 일부이므로 타원의 초점의 좌표는 $F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$이다.



반원의 방정식도 제곱하여 표준형으로 고치면 각각

$(x-3)^2+y^2=9$, $(x+3)^2+y^2=9$

가 됨을 알 수 있다.

타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=12$

또, $\overline{PQ}\leq\overline{PF}+\overline{FQ}=\overline{PF}+3$

$\overline{PR}\leq\overline{PF'}+\overline{RF'}=\overline{PF'}+3$이므로

$\overline{PQ}+\overline{PR}\leq(\overline{PF}+3)+(\overline{PF'}+3)$

$=(\overline{PF}+\overline{PF'})+6=12+6=18$

참고

점 F와 점 F'을 지날 때 $\overline{PQ}+\overline{PR}$의 길이는 최대이다.

41. 답 36

[해설] 타원 - 내적해결능력

장축과 단축이 각각 x축, y축 위에 있고 타원의 중심이 원점에 오도록 타원을 좌표평면 위에 놓으면 타원의 방정식은

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

이 때, $A(-4,\ 0)$, $B(0,\ -3)$ 이라 하면 삼각형 PAB의 넓이가 최대가 되려면 점 P가 직선 AB에 평행하면서 제 1사분면에서 접하는 접선의 접점이 될 때이다.

직선 AB의 방정식은

$y=-\frac{3}{4}x-3$

$\therefore\ 3x+4y+12=0\quad\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이므로 기울기가 $-\frac{3}{4}$이면서 제 1사분면에서 타원에 접하는 접선의 방정식은

$y=-\frac{3}{4}x+\sqrt{16\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2+9}$

$\therefore\ y=-\frac{3}{4}x+3\sqrt{2}\quad\cdots\cdots$ ㉡

직선 ㉡위의 한 점 $(0,\ 3\sqrt{2})$에서 직선 ㉠까지의 거리는

$\frac{|4\times 3\sqrt{2}+12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{12+12\sqrt{2}}{5}$

한편, $\overline{AB}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times 5\times\frac{12+12\sqrt{2}}{5}=6+6\sqrt{2}$

$\therefore ab=36$

42. 답 ③

[해설]

직사각형의 한 꼭짓점을 $A(x_1,\ y_1)$이라 하고, 점 A에서 타원에 기울기가 m인 접선을 그으면 접선의 방정식은 점 A의 위치에 따라

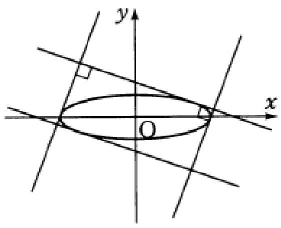
$y=mx+\sqrt{4m^2+1}$ 또는 $y=mx-\sqrt{4m^2+1}$이다. 이 접선의 점 A를 지나므로

$y_1=mx_1+\sqrt{4m^2+1}$ 또는 $y_1=mx_1-\sqrt{4m^2+1}$

이항하여 양변을 제곱하면

$(y_1-mx_1)^2=4m^2+1$

$({x_1}^2-4)m^2-2x_1y_1m+{y_1}^2-1=0$



점 A에서 그은 두 접선이 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

두 접선의 기울기를 m_1, m_2라 하면 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

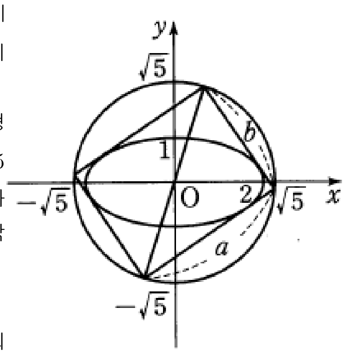
$m_1m_2=\frac{{y_1}^2-1}{{x_1}^2-4}=-1$

$\therefore {x_1}^2+{y_1}^2=5$

즉, 타원에 외접하는 직사각형의 네 꼭짓점은 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이다.

따라서 타원에 내접하는 직사각형의 대각선의 길이는 원 $x^2+y^2=5$의 지름의 길이인 $2\sqrt{5}$이다. 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 a, b라하면

$a^2+b^2=(2\sqrt{5})^2$



산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2\geq 2ab$이므로 $20\geq 2ab$, $10\geq ab$

등호는 $a=b=\sqrt{10}$일 때, 성립하므로 직사각형의 넓이 ab의 최댓값은 10이다.

43. 답 ⑤

[해설]

$\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\overline{AC}+\overline{BC}=2\times\overline{AB}=8$

따라서 점 C는 두 점 A, B에서 거리의 합이 8인 점이므로 점 C의 자취는 장축의 길이가 8인 타원이다.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에서 $2a=8$, $2^2=a^2-b^2$이므로

$a^2=16$, $b^2=12$

따라서 점 C의 자취는

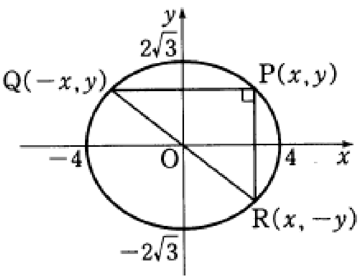
$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1\ (y\neq 0)$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x>0,\ y>0$이고

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

이 때, 직각삼각형 PQR의 넓이를 S라 하면



$S=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 2y=2xy\ \cdots ㉠$

산술평균과 기하평균의 관계에서

$1=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}\geq 2\sqrt{\frac{x^2}{16}\cdot\frac{y^2}{12}}=2\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot xy$

$\therefore xy\leq 4\sqrt{3}$

즉, ㉠에서 $S\leq 8\sqrt{3}$ 이므로 구하는 넓이의 최댓값은 $8\sqrt{3}$ 이다.

44. 답 11

[해설]

타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$에서 $x^2+2y^2=8$이므로 $y=2x+k$를 대입하여 정리하면

$9x^2+8kx+2k^2-8=0\ \cdots\cdots ㉠$

타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$과 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식 $\mathrm{D}>0$이어야 한다.

$\frac{\mathrm{D}}{4}=(4k)^2-9(2k^2-8)=-2k^2+72>0$

$k^2<36,\ (k+6)(k-6)<0$

$\therefore\ -6<k<6$

따라서 정수 k는 $-5,\ -4,\ -3,\ \cdots,\ 5$ 이므로 그 개수는 11개다.

***45.* 답 ②**

[해설]

$\begin{cases} y=2x+a & \cdots ㉠ \\ x^2+\frac{y^2}{2}=1 & \cdots ㉡ \end{cases}$

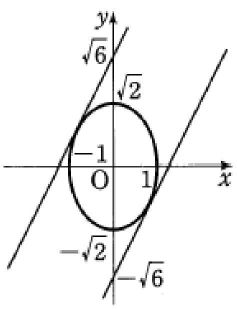
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$x^2+\frac{(2x+a)^2}{2}-1=0$

$6x^2+4ax+a^2-2=0$

$\frac{D}{4}=4a^2-6a^2+12=-2(a^2-6)<0$

$\therefore a<-\sqrt{6}$ 또는 $a>\sqrt{6}$



그런데 $-3<-\sqrt{6}<-2$이므로 구하는 음의 정수 a의 최댓값은 -3이다.

46. 답 ④

[해설]

타원 $3x^2+2y^2=6$에서 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$이 타원에 접하고 기울기가 인 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{2\cdot 3+3}$

$\therefore\ y=\sqrt{3}x\pm 3$

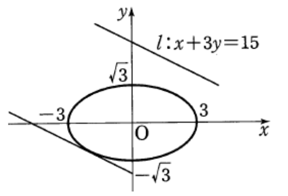
따라서 $\mathrm{P}(0,\ 3),\ \mathrm{Q}(0,\ -3)$이라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=6$

***47.* 답 ④**

[해설]

오른쪽 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$과 제 3사분면에서 접하는 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.



이 때, $y=-\frac{1}{3}x\pm\sqrt{9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2+3}$

에서 제 3사분면을 지나는 접선의 방정식은

$y=-\frac{1}{3}x-2$

그런데 직선 l : $x+3y=15$ 를 y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면

$x+3(y-n)=15$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+n+5$

이 직선이 $y=-\frac{1}{3}x-2$와 일치해야 하므로

$n+5=-2\qquad \therefore n=-7$

***48.* 답** 4

[해설] 타원 $\frac{x^2}{10}+y^2=1$에 접하고, 기울기가 $2\sqrt{2}$ 이며 y절편이 양수인 접선의 방정식 l은

$y=2\sqrt{2}x+\sqrt{10\cdot 8+1}=2\sqrt{2}x+9\ \cdots ㉠$

타원의 꼭짓점 $A(0,\ 1)$에서 외접하는 원의 중심의 좌표를 $C(0,\ a)$라 하면 점 C에서 직선 l까지의 거리는 점 C에서 꼭짓점 A까지의 거리와 같다.

즉, $\frac{|-a+9|}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}}=a-1$이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$-a+9=3a-3$에서 $a=3$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $3-1=2$이므로 원의 넓이 S는 4π이다.

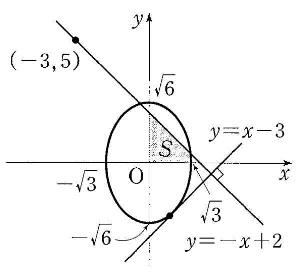
$\therefore\frac{S}{\pi}=4$

49. **답 ②**

타원 위의 점 $(1,\ -2)$ 위에서의 접선의 방정식은

$2x-2y=6\qquad \therefore y=x-3$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 기울기가 -1이고 점 $(-3,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은



$y-5=-(x+3)\qquad \therefore y=-x+2$

따라서 구하는 삼각형의 넓이를 S라 하면

$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$

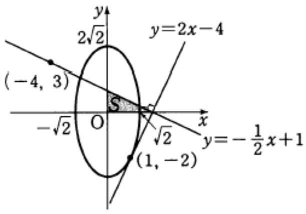
50. 답 ③

[해설]

타원 위의 점 $(1,\ -2)$에서의 접선의 방정식은

$4x-2y=8 \quad \therefore y=2x-4$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이므로



기울기가 $-\dfrac{1}{2}$이고 점 $(-4,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=-\frac{1}{2}(x+4)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{2}x+1$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$$

51. 답 100

[해설] 점 P를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하자.

선분 PF에 수직이고 점 F를 지나는 직선의 방정식은

$$y=-\frac{x_1-8}{y_1-0}(x-8)$$

점 P에서의 접선 l의 방정식은

$$\frac{x_1x}{100}+\frac{y_1y}{36}=1$$

두 직선의 교점의 x좌표는

$$\frac{36x_1x}{100}-36=(x_1-8)x-8x_1+64$$

$$800x_1-100^2=(64x_1-800)x$$

$$x=\frac{100(8x_1-100)}{8(8x_1-100)}=\frac{100}{8}$$

$$\therefore 8a=100$$

52. 답 ③

[해설] ㄱ. 타원 위의 점 $P(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식

$$\frac{x_1x}{27}+\frac{y_1y}{2}=1$$

이 접선의 x절편이 $\dfrac{27}{x_1}$이므로 $Q\left(\dfrac{27}{x_1},\ 0\right)$ (참)

ㄴ. $\overline{FQ}=\left|\dfrac{27}{x_1}-5\right|,\ \overline{F'Q}=\left|\dfrac{27}{x_1}+5\right|$ 이므로

$\overline{FQ}:\ \overline{F'Q}=|27-5x_1|:\ |27+5x_1|$ (거짓)

ㄷ. 두 점 $F,\ F'$에서 직선 PQ에 내린 수선의 발을 각각 $H,\ H'$이라 하면 $\triangle PFH \backsim \triangle PF'H'$ $(AA$ 닮음$)$이므로

$$\overline{FP}:\ \overline{F'P}=\overline{FH}:\ \overline{F'H'}=\frac{\left|\frac{5x_1}{27}-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{27}\right)^2+\left(\frac{y_1}{2}\right)^2}}:\frac{\left|-\frac{5x_1}{27}-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{27}\right)^2+\left(\frac{y_1}{2}\right)^2}}$$

$=|5x_1-27|\ :\ |5x_1+27|$

$\therefore \overline{FQ}:\ \overline{F'Q}=\overline{FP}:\ \overline{F'P}$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

53. 답 ④

[해설] 접점을 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 $x_1^2+4y_1^2=4\cdots$ ㉠

이고 접선의 방정식은 $x_1x+4y_1y=4$

이 접선이 점 $(8,\ 2)$를 지나므로

$8x_1+8y_1=4$에서 $2x_1+2y_1=1\ \cdots$㉡

㉠, ㉡에서 y_1을 소거하면

$x_1^2+(1-2x_1)^2=4$

$\therefore 5x_1^2-4x_1-3=0\ \cdots$ ㉢

이 방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha,\ \beta$는 두 접점 $P,\ Q$의 x좌표이므로 삼각형 OPQ의 무게중심의 x좌표는

$\dfrac{0+\alpha+\beta}{3}=\dfrac{\alpha+\beta}{3}$이다.

따라서 이차방정식 ㉢에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{\alpha+\beta}{3}=\frac{4}{15}$$

54. 답 15

[해설] $Q(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은 $\dfrac{x_1x}{9}+y_1y=1$이다.

이 접선의 y절편이 k이므로 $ky_1=1$

$Q(x_1,\ y_1)$은 타원 위의 점이므로 $\dfrac{x_1^2}{9}+y_1^2=1$

$\overline{PQ}=\overline{OP}$이므로 $x_1^2+(y_1-k)^2=k^2$

$9-9y_1^2+y_1^2-2=0$

$$y_1=\pm\frac{\sqrt{14}}{4}$$

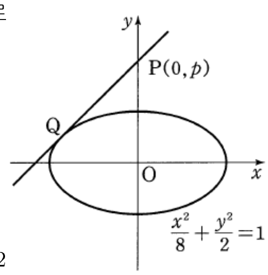
$$\therefore k=\pm\frac{4}{\sqrt{14}}$$

따라서 $k^2=\dfrac{8}{7}$에서 $m+n=15$

55. 답 2

[해설] 점 Q는 타원 위의 점이므로 $Q(x_1,\ y_1)$이라 하면

$\dfrac{x_1^2}{8}+\dfrac{y_1^2}{2}=1\cdots$㉠



점 Q에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{8}+\frac{y_1y}{2}=1$$

이 접선이 점 $P(0,\ p)$를 지나므로 $y_1p=2$

에서 $y_1=\dfrac{2}{p}$

이것을 ㉠에 대입하면 $x_1^2=8\left(1-\dfrac{2}{p^2}\right)$

$$\therefore \overline{PQ}^2=x_1^2+(y_1-p)^2=8\left(1-\frac{2}{p^2}\right)+\left(\frac{2}{p}-p\right)^2$$

$$=4-\frac{12}{p^2}+p^2$$

$\overline{OP}^2=p^2$이므로 $\overline{PQ}\geq\overline{OP}$에서

$4-\dfrac{12}{p^2}+p^2 \geq p^2$, $\dfrac{12}{p^2} \leq 4$

이때, $p^2 \geq 3$이므로 자연수 p의 최솟값은 2이다.

56. 답 ③

[해설] 점 P가 그리는 도형을 구하여 만족하는 점을 찾아보자.

(ⅰ) 기울기가 $m \neq 0$인 경우

점 P를 지나는 직선의 방정식은 $y=mx \pm \sqrt{64m^2+36}$이고 점 P를 지나고 이 직선과 수직이면서 타원에 접하는 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{m}x \pm \sqrt{64\left(\dfrac{1}{m}\right)^2+36}$

이때, $ma-b=\pm\sqrt{64m^2+36}$, $a+mb=\pm\sqrt{64+36m^2}$

각 변을 제곱하여 두 식을 더하면

$(m^2+1)(a^2+b^2)=100(m^2+1)$

(ⅱ) 기울기가 $m=0$인 경우

점 P는 $(8,\ \pm 6)$ 또는 $(-8,\ \pm 6)$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 점 P가 그리는 도형은 원 $x^2+y^2=100$이다.

주어진 점 중에서 이 식을 만족하는 점은 $(8,\ 6)$, $(5,\ 5\sqrt{3})$, $(\sqrt{35},\ \sqrt{65})$이다.

따라서 점 P가 될 수 있는 것은 3개다.

57. 답 ②

[해설] $\overline{PF'}+\overline{PF}=8$이므로 $\overline{PF}=x$라 하면 $\overline{PF'}=8-x$

삼각형 PFF'은 직각삼각형이므로

$x^2+(8-x)^2=6^2$

$2x^2-16x+28=0$

$x^2-8x+14=0$

따라서 삼각형 PFF'의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times x(8-x)=\dfrac{1}{2}(8x-x^2)=\dfrac{1}{2}\times 14=7$

다른 풀이

타원 T의 방정식은 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1 \cdots$ ㉠

원 C의 방정식은 $x^2+y^2=9 \ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\dfrac{9-y^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$, $\dfrac{9}{112}y^2=\dfrac{7}{16}$, $y^2=\dfrac{49}{9}$

$\therefore y=\pm\dfrac{7}{3}$

$\triangle PFF'=\dfrac{1}{2}\times 6\times\dfrac{7}{3}=7$

58. **답 ④**

타원 $x^2+5y^2=20$, 즉 $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{4}=1$의 초점의 좌표는$c^2=20-4=16$에서 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$이므로 점 Q는 타원의 한 초점이다.

한편, 포물선 $y^2=16x=4\cdot 4\cdot x$에서 푸물선의 초점은 $(4,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-4$이다.

따라서 점 $(4,\ 0)$을 F라 하면 포물선의 정의에 의하여

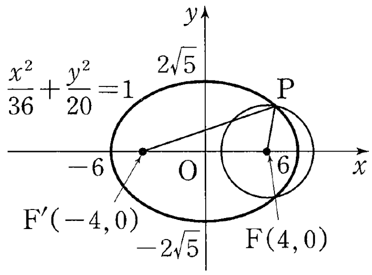
$\overline{PF}=\overline{PH}$

또, 타원의 정의에 의하여 $\overline{PQ}+\overline{PH}=\overline{PQ}+\overline{PF}=2\sqrt{20}=4\sqrt{5}$

59. 답 ④

[해설]

$c^2=36-20=16$이므로 타원의 초점은 $F(4,\ 0)$, $F'(-4,\ 0)$이다.



이 때, 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=2\times 6=12$

한편, 선분 PF의 길이는 원의 반지름의 길이 3과 같다.

$\therefore \overline{PF'}=12-\overline{PF}=12-3=9$

60. **답 ③**

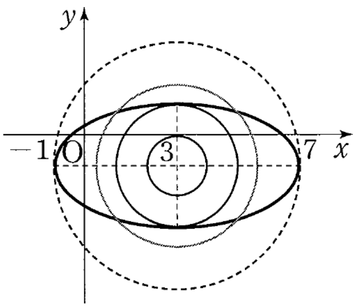
[해설]

$x^2-6x+4y^2+8y-3=0$에서

$(x-3)^2+4(y+1)^2=16$

$\therefore \dfrac{(x-3)^2}{4^2}+\dfrac{(y+1)^2}{2^2}=1$

주어진 이차곡선은 타원 $\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것으로 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $a=1$이면 원과 타원은 만나지 않으므로 $f(1)=0$이다. (참)

ㄴ. 원과 타원이 서로 다른 두 점에서 만나려면 a의 값은 2또는 4이어야 하므로 $f(a)=2$를 만족하는 a의 값의 합은 6이다. (참)

ㄷ. 원과 타원이 서로 다른 네 점에서 만나려면 $2<a<4$이어야 하므로 $f(a)=4$를 만족하는 a값의 범위는 $2<a<4$이다. (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

61. 답 ③

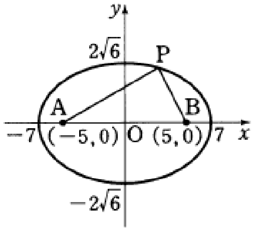
[해설]

타원의 초점의 좌표는 $c^2=49-24=25$에서 $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$이므로 두 점 A, B는 타원의 초점이다.

또한, $\overline{PA}+\overline{PB}=2\cdot 7=14$이고 $2\leq\overline{PA}\leq 12$이다.

$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PA}(14-\overline{PA})=-(\overline{PA}-7)^2+49$

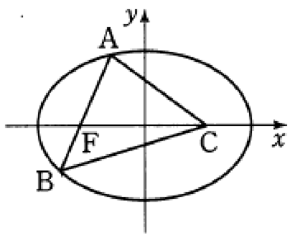
이므로 최댓값은 $\overline{PA}=7$일 때, 49이고,
최솟값은 $\overline{PA}=2$ 또는 $\overline{PA}=12$일 때 24
이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은
$49+24=73$



62. 답 16

[해설]

타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$에서 $\sqrt{16-7}=3$
이므로 초점의 좌표가
$(-3,\ 0)$, $(3,\ 0)$이다.
$F(-3,\ 0)$이라 하면
$\overline{AC}+\overline{AF}=8$, $\overline{FB}+\overline{BC}=8$



$\therefore \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{AF}+\overline{FB}+\overline{BC}+\overline{CA}$
$=(\overline{AF}+\overline{CA})+(\overline{FB}+\overline{BC})=8+8=16$

63. 답 ③

[해설] 교점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$ $(x_1y_1\neq 0)$이라 하면 접선의 방정식은
각각 $x_1x+ay_1y=1$, $y_1y=4(x+x_1)$
그런데 두 직선이 서로 수직으로 만나므로 기울기의 곱이 -1이다.

즉, $-\dfrac{x_1}{ay_1}\cdot\dfrac{4}{y_1}=-1$이므로

$ay_1^2=4x_1$

점 $(x_1,\ y_1)$은 포물선 위의 점이므로 $y_1^2=8x_1$

따라서 $8ax_1=4x_1$이므로 $a=\dfrac{1}{2}$

64. 답 ①

[해설]
원의 반지름의 길이를 r라 하면 삼각형 $\mathrm{AF'F}$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 2r\cdot r=r^2=9\quad \therefore r=3$

타원의 장축의 길이가 8이므로

$\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}}=8$ …… ㉠

선분 $\mathrm{FF'}$이 원의 지름이므로 $\angle \mathrm{FBForime}=90^\circ$

또, $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-3,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{FF'}}=6$

삼각형 $\mathrm{BF'F}$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{BF}}^2+\overline{\mathrm{BF'}}^2=\overline{\mathrm{FF'}}^2=36$ …… ㉡

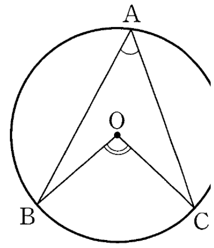
㉠, ㉡에서

$\overline{\mathrm{BF}}^2+\overline{\mathrm{BF'}}^2=(\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}})^2-2\cdot\overline{\mathrm{BF}}\cdot\overline{\mathrm{BF'}}$

이므로 $36=64-2\overline{\mathrm{BF}}\cdot\overline{\mathrm{BF'}}$에서

$\overline{\mathrm{BF}}\cdot\overline{\mathrm{BF'}}=7$

참고
원주각과 중심각의 관계
원의 중심을 O라 할 때, 호 BC에 대한 원주각의 크기는 중심각의 크기의
$\dfrac{1}{2}$이다. 즉, $\angle \mathrm{BAC}=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{BOC}$



65. 답 ②

[해설]
타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{16+9}=x\pm 5$

그런데 접선이 원과 접하므로 직선 l의 방정식은

$y=x+5$

직선 l에 접하면서 타원 위의 점 $\mathrm{A}(0,3)$에 외접하는 원의 중심의 좌표를 $\mathrm{C}(0,\ a)$라 하면 중심 C에서 직선 l까지의 거리는 중심 C에서 점 A까지의 거리와 같다.

즉, $\dfrac{|-a+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=a-3$이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-2a-7=0$

$\therefore\ a=1+2\sqrt{2}\quad (\because a>0)$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는

$a-3=2\sqrt{2}-2$

66. 답 ③

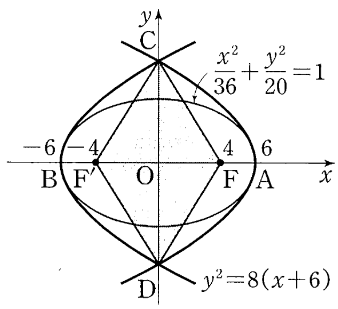
[해설] 포물선과 타원 - 내적문제해결능력

타원 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-4,\ 0)$이고 x축과 만나는 두 점의 좌표는 $\mathrm{A}(6,\ 0)$, $\mathrm{B}(-6,\ 0)$이다.

이 때, 점 F′이 초점이고 점 B가 꼭짓점인 포물선은 초점이 $(2,0)$이고 원점을 지나는 포물선을 x축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이므로

$y^2=8x$에서

$y^2=8(x+6)$



점 F가 초점이고 점 A가 꼭짓점인 포물선은 점 F′이 초점이고 점 B가 꼭짓점인 포물선과 y축에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 교점의 좌표는 y축 위에 존재한다.

$x=0$일 때, $y^2=48$이므로

$y=\pm 4\sqrt{3}$

따라서 $\mathrm{C}(0,\ 4\sqrt{3})$, $\mathrm{D}(0,\ -4\sqrt{3})$이므로 사각형 $\mathrm{CF'DF}$의 넓이는

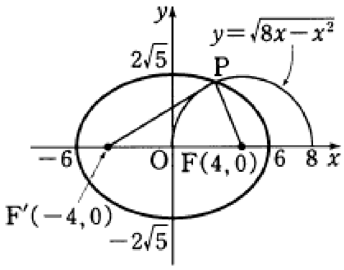
$4\times\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{3}=32\sqrt{3}$

67. 답 ④

[해설]

타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$의 두 초점 F, F'의 좌표를 각각 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면 $c=\sqrt{36-20}=4$

$\therefore F(4,\ 0)$, $F'(-4,\ 0)$



타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$에서 장축의 길이가 12이므로

$\overline{PF'}+\overline{PF}=12$

또한, $y=\sqrt{8x-x^2} \Leftrightarrow x^2+y^2-8x=0 \quad (y \geq 0)$

$\Leftrightarrow (x-4)^2+y^2=4^2 \quad (y \geq 0)$

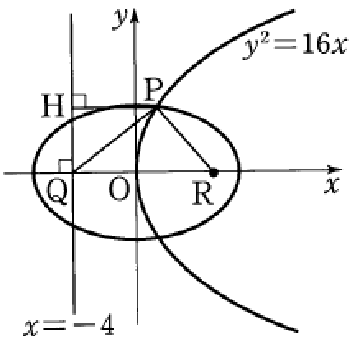
이고, $\overline{PF}$의 길이는 반원의 반지름의 길이 4이므로

$\overline{PF'}=12-\overline{PF}=8$

$\therefore \overline{PF} \cdot \overline{PF'}=4 \cdot 8=32$

68. 답 80

[해설] 타원 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$의 초점의 좌표는 $c^2=20-4=16$에서 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$이므로 점 Q는 타원의 한 초점이다.



한편, $y^2=4 \cdot 4 \cdot x$에서 포물선의 초점은 $(4,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-4$이다.

따라서 점 $(4,\ 0)$을 R라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{PR}=\overline{PH}$

또, 타원에서 $\overline{PQ}+\overline{PR}=2\sqrt{20}=4\sqrt{5}$이므로

$\overline{PQ}+\overline{PH}=\overline{PQ}+\overline{PR}=4\sqrt{5}$

$\therefore (\overline{PQ}+\overline{PH})^2=80$

69. 답 68

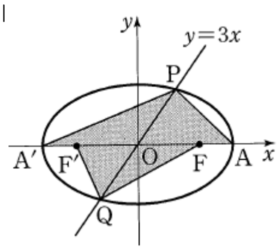
[해설] 타원의 초점을 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$이라 하면

$\triangle AA'P=3\triangle FQF'$에서

$2a=3 \cdot 2c$

$\therefore a=3c \ \cdots ㉠$

또, 삼각형 FQF'의 둘레의 길이가 16이므로



$\overline{QF}+\overline{QF'}+\overline{FF'}=2a+2c=16$

$\therefore a+c=8 \ \cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $a=6$, $c=2$

그런데 $c^2=a^2-b^2$이므로 $b^2=32$

$\therefore a^2+b^2=36+32=68$

70. 답 ③

[해설]

삼각형 FPF'에서 $\overline{OF}=\overline{OF'}$이고

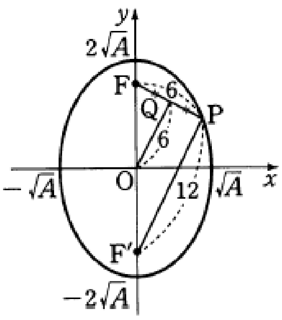
$\overline{PQ}=\overline{FQ}$이므로

$\overline{OQ}=\frac{1}{2}\overline{PF'}=6$

$\therefore \overline{PF'}=12$

또, 타원의 정의로부터 $\overline{PF}+\overline{PF'}=$(장축의 길이)이고

$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{4A}=1$에서 장축의 길이는 $2\times\sqrt{4A}$이다.



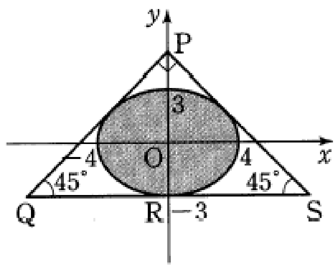
$\therefore 2\times\sqrt{4A}=18$, $\sqrt{A}=\frac{9}{2}$

따라서 주어진 타원의 단축의 길이는 $2\sqrt{A}=9$이다.

71. 답 64

[해설]

타원의 중심을 원점으로, 장축과 단축을 각각 x축, y축 위에 놓으면 다음 그림과 같다.



이 때 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$이다.

$\angle PQR=\angle PSR=45^\circ$이므로 직선 PQ와 직선 PS의 기울기는 각각 1, -1이다.

즉, 기울기가 1인 타원의 접선 중 위쪽에 있는 방정식은

$y=x+\sqrt{4^2 \cdot 1^2+3^2}=x+5 \ \cdots ㉠$

이므로 점 P의 좌표는 $(0,\ 5)$이다.

또한, 직선 $y=x+5$와 직선 $y=-3$의 교점의 좌표는 $(-8,\ -3)$이다.

따라서 구하는 직각이등변삼각형의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\overline{QS}\times\overline{PR}=\frac{1}{2}\times16\times8=64$

72. 답 ⑤

[해설] 타원 $\frac{x^2}{15^2}+\frac{y^2}{9^2}=1$의 장축의 길이는 $2\times 15=30$이다.

또, 두 초점의 좌표는 $c^2=15^2-9^2=12^2$에서 $F(-12,\ 0)$, $F'(12,\ 0)$이므로 두 점 H_4, H_{28}은 이 타원의 초점이다.

이때, $\overline{H_4P_4}=\overline{H_{28}P_{28}}$, $\overline{H_4P_5}=\overline{H_{28}P_{27}}$, $\cdots$, $\overline{H_4P_{15}}=\overline{H_{28}P_{17}}$이므로

$$\sum_{k=4}^{28}\overline{H_4P_k}=(\overline{H_4P_4}+\overline{H_4P_{28}})+(\overline{H_4P_5}+\overline{H_4P_{27}})+\cdots$$
$$+(\overline{H_4P_{15}}+\overline{H_4P_{17}})+\overline{H_4P_{16}}$$
$$=(\overline{H_{28}P_{28}}+\overline{H_4P_{28}})+(\overline{H_{28}P_{27}}+\overline{H_4P_{27}})+\cdots$$
$$+(\overline{H_{28}P_{17}}+\overline{H_4P_{17}})+\overline{H_4P_{16}}$$
$$=30\times 12+15=375$$

73. 답 ④

[해설] $\overline{F'Q}=6$이고 장축의 길이가 10이므로

$\overline{FQ}=4$

$\angle QF'F=\theta$라 하면 삼각형 $QF'F$에서

$$\cos\theta=\frac{6^2+6^2-4^2}{2\times 6\times 6}=\frac{7}{9}$$

그런데 $\frac{b}{a+3}=\tan\theta$이므로

$$\tan^2\theta=\left(\frac{9}{2}\right)^2-1=\frac{32}{49}$$

$$\therefore \left(\frac{b}{a+3}\right)^2=\frac{32}{49}$$

74. 답 ①

[해설] $t=\overline{OP}^2=x_1^2+y_1^2$이고 $\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1$이므로

$x_1^2=2(t-1)$, $y_1^2=2-t$

접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{2}+y_1y=1$이므로 원점에서 접선까지의 거리는

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{4}+y_1^2}}=\frac{2}{\sqrt{x_1^2+4y_1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2(t-1)+4(2-t)}}=\frac{2}{\sqrt{6-2t}}$$

따라서 피타고라스의 정의에 의하여

$$\overline{PQ}^2=t-\frac{4}{6-2t}=t+\frac{2}{t-3}$$

$$\therefore S^2=\frac{1}{4}\times\left(t+\frac{2}{t-3}\right)\times\frac{2}{3-t}=\frac{-t^2+3t-2}{2(t-3)^2}$$

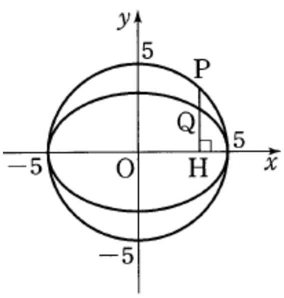
75. 답 ④

[해설] 오른쪽 그림에서

$P(x_1,\ y_1)$, $Q(x,\ y)$로 놓으면

$x_1^2+y_1^2=25\ \cdots$ ㉠

$x=x_1,\ y=\frac{3}{5}y_1\ \cdots$ ㉡



㉡을 ㉠에 대입하여 x_1, y_1을 소거하면

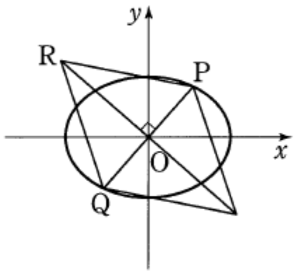
$$x^2+\left(\frac{5}{3}y\right)^2=25,$$

$$9x^2+25y^2=9\cdot 25$$

$$\therefore \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\ (y\neq 0)$$

76. 답 ④

[해설] 두 점 P, Q는 타원 위의 점이므로 $P(\alpha,\ \beta)$, $Q(-\alpha,\ -\beta)$라고 하면 $\frac{\alpha^2}{10}+\frac{\beta^2}{6}=1\ \cdots$㉠



$\triangle PQR$는 정삼각형이고 점 O는 선분 PQ의 중점이므로

$\angle POR=\frac{\pi}{2}$, $\overline{OR}=\sqrt{3}\cdot\overline{OP}$

이때, 점 $R(x,\ y)$라 하면

$x=\pm\sqrt{3}\beta$, $y=\mp\sqrt{3}\alpha$(복부호동순)

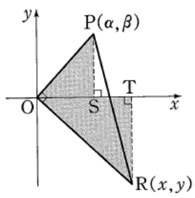
$\beta=\pm\frac{x}{\sqrt{3}}$, $\alpha=\mp\frac{y}{\sqrt{3}}$를 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{10}\left(\mp\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\pm\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2=1$$

따라서 구하는 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{30}=1$이므로 초점의 좌표는 $(0,\ \pm 2\sqrt{3})$이다.

참고

오른쪽 그림에서 두 삼각형 OPS와 ROT는 닮은 도형이고 그 길이의 비가 $1:\sqrt{3}$이므로 $x=\sqrt{3}\beta$, $y=-\sqrt{3}\alpha$이다.



77. 답 ③

[해설] 점 $P(a,\ b)$에서 x축에 내린 수선의 발 H의 좌표는 $H(a,\ 0)$이다.

그런데 점 Q는 $\overline{PH}$를 $1:4$로 내분하는 점이므로 점 Q의 좌표는 $\left(a,\ \frac{4}{5}b\right)$이다.

그러므로 $x=a$, $y=\frac{4}{5}b$로 놓으면 $a^2+b^2=25$에서

$$x^2+\frac{25}{16}y^2=25$$

즉, 도형 S는 타원이다.

따라서 이 도형을 x축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 입체의 부피는

$$\pi\int_{-5}^{5}\left(16-\frac{16}{25}x^2\right)dx=2\pi\int_{0}^{5}\left(16-\frac{16}{25}x^2\right)dx$$

$$=2\pi\left[16x-\frac{16}{75}x^3\right]_0^5=\frac{320}{3}\pi$$

78. 답 ③

[해설]

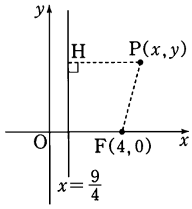
쌍곡선 위의 점을 $P(x,\ y)$라 하고 점 P에서 직선 $x=\frac{9}{4}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $3\overline{PF}=4\overline{PH}$이므로

$$3\sqrt{(x-4)^2+y^2}=|4x-9|$$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$7x^2-9y^2=63$

$\therefore \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$ …… ㉠



ㄱ. 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}x$이다. (참)

ㄴ. 두 점 $(3,0),(-3,0)$을 잇는 선분이 주축이므로 주축의 길이는 6이 다. (거짓)

ㄷ. ㉠에 $(4,a)$를 대입하면 $a^2=\frac{49}{9}$, $a=\pm\frac{7}{3}$

구하는 거리를 d라 하면 두 점 $(4,0)$, $(-4,0)$이 쌍곡선의 초점이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$d-\frac{7}{3}=6$ $\quad\therefore d=\frac{25}{3}$(참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

79. 답 304

[해설]쌍곡선 - 내적문제해결능력

두 점 $A(-6,\ 0)$, $B(6,\ 0)$으로부터 거리의 차가 8인 곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$

이라 하면 $a^2+b^2=6^2$, $2a=8$이므로

$a=4,\ b=2\sqrt{5}$

즉, 쌍곡선의 방정식은

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$

점 C의 좌표를 $(0,\ k)$라 하면 점 C가 선분 AP를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$C\left(\frac{1\cdot p+2\cdot(-6)}{1+2},\ \frac{1\cdot q+2\cdot 0}{1+2}\right)$

즉, $\frac{p-12}{3}=0$, $\frac{q}{3}=k$이므로

$p=12,\ q=3k$

$\therefore P(12,\ 3k)$

점 P는 쌍곡선 위의 점이므로

$\frac{144}{16}-\frac{9k^2}{20}=1$, $k^2=\frac{160}{9}$

$\therefore k=\frac{4\sqrt{10}}{3}$

따라서 $P(12,\ 4\sqrt{10})$이므로

$p^2+q^2=144+160=304$

80. 답 ⑤

[해설]

△ABP에서 제인코사인법칙에 의하여

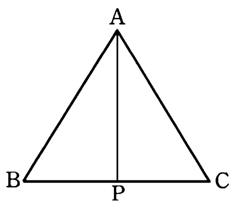
$\overline{AP}^2=\overline{AB}^2+\overline{BP}^2$

$\quad-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BP}\cos60°$

$\{f(x)\}^2=1+(x-1)^2$

$\quad-2\cdot(x-1)\cdot\frac{1}{2}$

$\quad=x^2-3x+3$



$f(x)=y$로 놓으면 $y^2=x^2-3x+3$

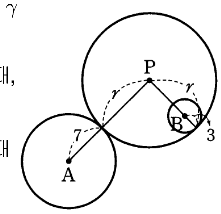
$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-y^2=-\frac{3}{4}(1\le x\le 2)$

따라서 쌍곡선의 일부가 된다.

81. 답 ⑤

[해설]

오른쪽 그림과 같이 원 P의 반지름의 길이를 γ라하면



원 P가 원 A와 외접하고 원 B와 내접할 때,

$\overline{PA}=\gamma+7,\ \overline{PB}=\gamma-3$ …… ㉠

원 P가 원 A와 내접하고 원 B와 외접할 때

$\overline{PA}=\gamma-7,\ \overline{PB}+\gamma+3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $|\overline{PA}-\overline{PB}|=10$이므로 점 P는

두 점 A, B를 초점으로 하고 주축의 길이가 10인 쌍곡선이다.

82. 답 ③

[해설]

두 점 P, Q는 각각 직선

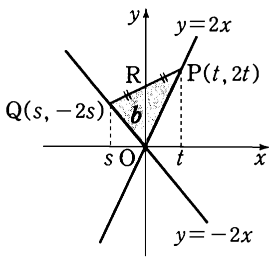
$y=2x$와 $y=-2x$ 위의 점이므로

$P(t,2t)$, $Q(s,-2s)$라고 하자.

삼각형 OPQ의 넓이는 점 P와 점 Q에서

x축 또는 y축에 수선의 발을 내려

사다리꼴을 만들어서 구한다.



오른쪽 그림에서는 s,t의 부호가 반대이므로

$\triangle OPQ=\frac{1}{2}(-2s+2t)(t-s)$

$\quad-\left\{\frac{1}{2}\times(-s)\times(-2s)+\frac{1}{2}\times t\times 2t\right\}$

$\quad=-2st$

$12=\triangle OPQ=-2st$, $st=-6$

선분 PQ의 중점을 $R(x,y)$

$R(x,y)=\left(\frac{s+t}{2},\ \frac{-2s+2t}{2}\right)=\left(\frac{s+t}{2},\ -s+t\right)$

$\frac{s+t}{2}=x$, $-s+t=y$ 이므로

$s=x-\frac{y}{2}$, $t=x+\frac{y}{2}$

따라서 $st=-6$ 이므로 $x^2-\frac{y^2}{4}=-6$

$\therefore \frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{24}=-1$

83. 답 6

[해설]

점 P가 나타내는 도형은 두 점 F, F′을 초점으로 하는 쌍곡선이므로

$|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2a=4$

$\therefore\ a=2$

초점이 $F(\sqrt{6},\ 0)$, $F'(-\sqrt{6},\ 0)$이므로

$(\sqrt{6})^2=a^2+b^2$에서 $b^2=6-4=2$

$\therefore\ a^2+b^2=4+2=6$

84. 답 22

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$에서 $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{6})^2}=1$이므로 두 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$이다.

$\therefore\ a=4$

한편, 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}x$이므로 기울기가 양인 점근선의 방정식은 $y=\frac{\sqrt{6}}{2}x$이다.

$\therefore\ b=\sqrt{6}$

$\therefore a^2+b^2=4^2+(\sqrt{6})^2=22$

85. 답 ④

[해설]

타원 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{15}=1$의 두 초점의 좌표는 $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$ 이다.

따라서 쌍곡선 `$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$에서

$a^2+b^2=9,\ 2b=4$이므로

$b=2,\ a=\sqrt{5}$

$\therefore \frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=-1$

86. 답 75

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$의 두 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(2\sqrt{3},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-2\sqrt{3},\ 0)$이다.

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=4$이므로

$8-\overline{\mathrm{PF}}=4\quad\therefore\ \overline{\mathrm{PF}}=4$

또, $\overline{\mathrm{FF}'}=4\sqrt{3}$ 이므로 $\triangle\mathrm{PF}'\mathrm{F}$에서 제이코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{4^2+8^2-(4\sqrt{3})^2}{2\cdot4\cdot8}=\frac{1}{2}$

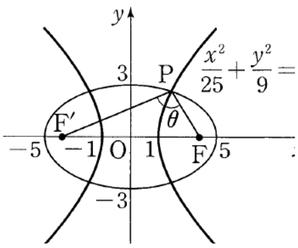
$\therefore \sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$\therefore\ 100\sin^2\theta=100\times\frac{3}{4}=75$

87. 답 ⑤

[해설]

오른쪽 그림에서 타원과 쌍곡선의 정의에 의하여



$\overline{\mathrm{PF}'}+\overline{\mathrm{PF}}=10$

$\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=2$

두 식을 연립하여 풀면

$\overline{\mathrm{PF}'}=6,\ \overline{\mathrm{PF}}=4$

한편, $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c=\sqrt{25-9}=4$

$\therefore \overline{\mathrm{FF}'}=8$

따라서 $\triangle\mathrm{PF}'\mathrm{F}$에서 제이코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{6^2+4^2-8^2}{2\cdot6\cdot4}=-\frac{1}{4}$

88. **답** ④

타원의 방정식에서 초점이 x축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$이라 하면 주축의 길이는 $2a$이고, 한 점근선의 방정식이 $y=\sqrt{3}x$이므로

$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$ …… ㉠

또한, 타원과 쌍곡선의 초점이 같으므로

$a^2+b^2=36-16=20$ …… ㉡

㉠에서 $b=\sqrt{3}a$를 ㉡에 대입하면

$a^2+3a^2=20\quad\therefore\ a=\sqrt{5}$

따라서 이 쌍곡선의 두 꼭짓점 사이의 길이는

$2a=2\sqrt{5}$

89. 답 ⑤

[해설]

$|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF}'}|=8$이므로

$2a=8\quad\therefore\ a=4$

또, 점근선의 방정식이 $y=\pm\sqrt{3}x$이므로

$\frac{b}{a}=\sqrt{3}\quad\therefore\ b=\sqrt{3}a=4\sqrt{3}$

이 때, 두 초점의 좌표를 $\mathrm{F}(c,\ 0),\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$ 이라 하면

$c^2=a^2+b^2=16+48=64$

$\therefore\ c=8$

이 때, 두 초점 사이의 거리는

$2c=16$

90. 답 ④

[해설] 쌍곡선 - 이해능력

쌍곡선 $5x^2-4y^2=20$의 두 꼭짓점의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 0)$이고, 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 Q의 좌표는 $(a,\ 0)$이다.

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=b,\ \overline{\mathrm{AQ}}=a+2,\ \overline{\mathrm{BQ}}=a-2$

이 때, 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 쌍곡선 위의 점이므로

$5a^2-4b^2=20$

$\therefore \overline{\mathrm{AQ}}\cdot\overline{\mathrm{BQ}}=(a+2)(a-2)=a^2-4$

$=\frac{1}{5}(4b^2+20)-4=\frac{4}{5}b^2$

$\therefore\ \frac{\overline{\mathrm{AQ}}\cdot\overline{\mathrm{BQ}}}{\overline{\mathrm{PQ}}^2}=\frac{\frac{4}{5}b^2}{b^2}=\frac{4}{5}$

91. 답 8

[해설] 점 $P(4,\ -2)$가 제4사분면에서 점근선 $y=-\frac{1}{2\sqrt{2}}x$의 아랫부분에 있으므로 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$로 놓을 수 있다.

$\frac{b}{a}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 에서 $a=2\sqrt{2}b$

또, 점 $P(4,\ -2)$를 대입하면 $\frac{4^2}{(2\sqrt{2}b)^2}-\frac{(-2)^2}{b^2}=-1$에서

$a^2=16,\ b^2=2$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{2}=-1$이므로

주축의 길이 l은 $l=2\sqrt{2}$　　$\therefore l^2=8$

다른 풀이

두 점근선이 $\frac{1}{2\sqrt{2}}x+y=0,\ \frac{1}{2\sqrt{2}}x-y=0$이므로 쌍곡선의 방정식은 $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}x+y\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}x-y\right)=k$

$\therefore \frac{1}{8}x^2-y^2=k$

이 쌍곡선이 점 $(4,\ -2)$를 지나므로

$\frac{1}{8}\cdot 4^2-(-2)^2=k$　　$\therefore k=-2$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{8}-y^2=-2$, 즉

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{2}=-1$이므로 주축의 길이 l은 $l=2\sqrt{2}$　　$\therefore l^2=8$

92. 답 ③

[해설] 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$의 두 초점 $F,\ F'$의 좌표는

$F(6,\ 0),\ F'(-6,\ 0)$

$\therefore \overline{FF'}=2\times 6=12$

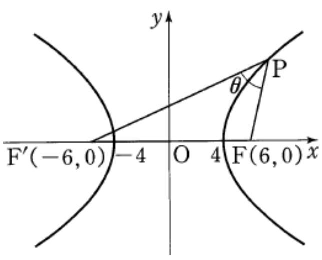
$\overline{PF'}:\ \overline{PF}=2\ :\ 1$ 에서

$\overline{PF'}=2k,\ \overline{PF}=k\ (k>0)$라 하면

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=k=2a=8$

$\therefore k=8,\ \overline{PF'}=16,\ \overline{PF}=8$



따라서 한 점 P와 두 초점 $F,\ F'$에 대하여 $\angle F'PF=\theta$이므로 제이코사인법칙에 의하여

$\cos\theta\frac{16^2+8^2-12^2}{2\cdot 16\cdot 8}=\frac{11}{16}$

93. 답 ①

[해설]

쌍곡선 $9x^2-4y^2-16y-52=0$에서

$9x^2-4(y+2)^2=36$

$\therefore \frac{x^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$　　$\cdots\cdots$ ㉠

한편, 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$　　$\cdots\cdots$ ㉡ 에서

$c=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$이므로 쌍곡선의 두 초점의 좌표는

$(\sqrt{13},0),\ (-\sqrt{13},0)$이다.

그런데 쌍곡선 ㉠은 쌍곡선 ㉡을 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 구하는 두 초점의 좌표는 $(\sqrt{13},-2)$, $(-\sqrt{13},\ -2)$이다.

$\therefore\ a+b=\sqrt{13}-2,\ c+d=-\sqrt{13}-2$

따라서 두 실수 $\sqrt{13}-2,\ -\sqrt{13}-2$를 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2-\{(\sqrt{13}-2)+(-\sqrt{13}-2)\}x+(\sqrt{13}-2)(-\sqrt{13}-2)=0$$

$\therefore\ x^2+4x-9=0$

94. 답 ②

[해설]

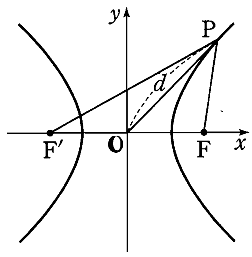
쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ b>0)$로 놓으면 점근선의 방정식이 $y=\pm\sqrt{2}x$이므로 $\frac{b}{a}=\sqrt{2}$

또한, 주축의 길이가 6이므로 $2a=6$

$\therefore\ a=3,\ b=3\sqrt{2}$

따라서 조건을 만족하는 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{18}=1$

이고, 이 쌍곡선의 두 초점 F′, F의 좌표는 각각 $(-3\sqrt{3},0)$, $(3\sqrt{3},\ 0)$이다.



점 O는 선분 F′F의 중점이므로 삼각형 FPF′에서 중선의 정리를 이용하면

$\overline{\mathrm{PF'}}^2+\overline{\mathrm{PF}}^2$

$=2\{(3\sqrt{3})^2+d^2\}$

그런데

$\overline{\mathrm{PF'}}^2+\overline{\mathrm{PF}}^2$

$=(\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}})^2+2\overline{\mathrm{PF'}}\cdot\overline{\mathrm{PF}}$

이고, $|\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}|=6$이므로

$54+2d^2=36+2\overline{\mathrm{PF'}}\cdot\overline{\mathrm{PF}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PF'}}\cdot\overline{\mathrm{PF}}=9+d^2$

95. 답 ④

[해설]

쌍곡선 $x^2-y^2=a$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$x_1x-y_1y=a$

초점의 좌표는 $c=\sqrt{a+a}=\sqrt{2a}$에서

$\mathrm{F}(\sqrt{2a},0),\ \mathrm{F'}(-\sqrt{2a},0)$이므로

$\overline{\mathrm{FP}}=\frac{|\sqrt{2a}\cdot x_1-a|}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}},\ \overline{\mathrm{F'Q}}=\frac{|-\sqrt{2a}\cdot x_1-a|}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}}$

한편, 점 $(x_1,\ y_1)$이 쌍곡선 위의 점이므로

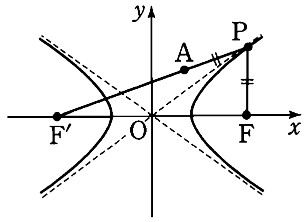
${x_1}^2-{y_1}^2=a$

$\therefore\ \overline{\mathrm{FP}}\cdot\overline{\mathrm{F'Q}}=\frac{|-2a{x_1}^2+a^2|}{{x_1}^2+{y_1}^2}$

$=\frac{a\,|-2{x_1}^2+a|}{2{x_1}^2-a}=a$

96. 답 ⑤

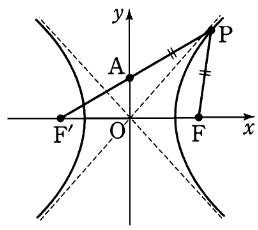
[해설]



ㄱ. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{b}{a}x$이다. (참)

ㄴ. $\overline{PF'}-\overline{PF}=\overline{PF'}-\overline{PA}=\overline{AF'}=2a$ (참)

ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 점 A가 y축 위에 있다고 하자.



삼각형 AF′O에서

$\overline{AF'}=2a$, $\overline{F'O}=\sqrt{a^2+b^2}$

이므로

$\overline{AO}=\sqrt{3a^2-b^2}$

이때, 직선 AF′의 기울기는

$\frac{\sqrt{3a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$이고

점근선의 기울기 $\frac{b}{a}$보다 작아야 한다.

$\frac{\sqrt{3a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}<\frac{b}{a}$에서 양변을 제곱하면

$\frac{3a^2-b^2}{a^2+b^2}<\frac{b^2}{a^2}$

$\frac{3a^2-b^2}{a^2+b^2}-\frac{b^2}{a^2}<0$, $\frac{(3a^2-b^2)a^2-(a^2+b^2)b^2}{(a^2+b^2)a^2}<0$

$\frac{(3a^2+b^2)(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)a^2}<0$

$\therefore\ a<b$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

97. 답 ④

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$에서 $x^2-2y^2=8$이므로 $y=x+k$를 대입하여 정리하면

$x^2+4kx+2k^2+8=0$ …… ㉠

쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$과 직선 $y=x+k$가 서로 만나지 않으려면 이차방정식 ㉠이 허근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식 $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(2k)^2-(2k^2+8)=2k^2-8<0$

$k^2<4$, $(k+2)(k-2)<0$

$\therefore -2<k<2$

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다.

98. 답 ④

[해설]

쌍곡선 $2x^2-y^2+4y=0$에서 $2x^2-(y-2)^2=-4$

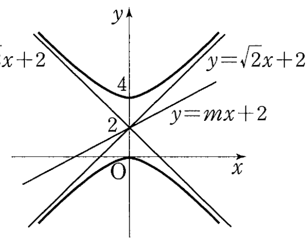
$\therefore\ \frac{x^2}{2}-\frac{(y-2)^2}{4}=-1$

즉, 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=-1$을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=-1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\sqrt{2}x$이므로 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y=\pm\sqrt{2}x+2$이다. (참)

ㄴ. 직선 $y=\sqrt{2}x$는 이 쌍곡선의 점근선과 평행하므로 쌍곡선과의 교점의 개수는 1개다. (거짓)

ㄷ. 점 $(0,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 이 쌍곡선과 만나지 않으려면 $-\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}$이어야 하므로 정수 m은 $-1,\ 0,\ 1$의 3개이다. (참)



따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

참고

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 쌍곡선의 방정식은

$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$

이다. 이 때, 초점은 $(\sqrt{a^2+b^2}+m,\ n)$, $(-\sqrt{a^2+b^2}+m,\ n)$이고, 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{b}{a}(x-m)+n$이다.

99. 답 ④

[해설] 두 점근선의 방정식을 연립하여 풀면 교점의 좌표는 $(1,\ 1)$이므로 주어진 쌍곡선을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 쌍곡선을 C라 하자.

이때, 원점은 $(-1,\ -1)$로 옮겨진다.

그러면 쌍곡선 C는 점 $(-1,\ -1)$을 지나고 두 직선 $y=3x$, $y=-3x$를 점근선으로 하는 쌍곡선이므로 쌍곡선 C의 방정식은

$x^2-\frac{y^2}{9}=a$

로 놓을 수 있다. 이 쌍곡선이 점 $(-1,\ -1)$을 지나므로 $a=\frac{8}{9}$ 즉, 쌍곡선 C의 방정식은 $x^2-\frac{y^2}{9}=\frac{8}{9}$이므로 원래의 쌍곡선의 방정식은

$(x-1)^2-\frac{(y-1)^2}{9}=\frac{8}{9}$

$y=0$을 대입하면 $x=0$ 또는 $x=2$이므로 두 교점 중에서 원점이 아닌 점은 $P(2,\ 0)$이다.

또한 점 P에서 주어진 쌍곡선에 접하는 접선은 점 $(1,\ -1)$에서 쌍곡선 C에 접하는 접선을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 점 $(1,\ -1)$에서의 쌍곡선 C의 접선의 방정식을 먼저 구하면

$1\cdot x-\frac{(-1)\cdot y}{9}=\frac{8}{9}$ $\quad\therefore 9x+y=8$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$9(x-1)+(y-1)=6$ $\quad\therefore 9x+y=16$

100. 답 ⑤

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{18}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm 3x$이다.

ㄱ. $a=-4,\ b=0$이면 교점이 0개다. (참)

ㄴ. $a=3,\ b>0$이면 점근선과 평행이므로 교점이 1개다. (참)

ㄷ. $a=\frac{1}{3},\ b<0$이면 교점이 2개다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

101. 답 ④

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 초점의 좌표를 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c=\sqrt{9+16}=5$

이므로 $F(5,\ 0)$, $F'(-5,\ 0)$이다.

이 쌍곡선에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{9\cdot 4-16}$, 즉 $y=2x\pm 2\sqrt{5}$

제 1사분면에서 쌍곡선에 접하는 접선 l의 y절편은 음수이므로 l의 방정식은

$2x-y-2\sqrt{5}=0$

$\therefore\ \overline{FP}=\frac{|2\cdot 5-0-2\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}-2$

$\overline{F'Q}=\frac{|2\cdot(-5)-0-2\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}+2$

$\therefore\ \overline{FP}+\overline{F'Q}=4\sqrt{5}$

102. 답 ③

[해설]

ㄱ. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{b}{a}x$이므로 쌍곡선 $x^2-y^2=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm x$이다, (참)

ㄴ. 쌍곡선의 두 점근선과 평행한 직선은 모두 그 쌍곡선과 한 점에서 만나며, 쌍곡선과 접할 수 없다. (거짓)

ㄷ. $y^2=4px\,(p\neq 0)$과 $x^2-y^2=1$을 연립하면

$x^2-4px-1=0$ …… ㉠

이때, 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4p^2+1>0$

이므로 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 포물선 $y^2=4px$와 쌍곡선 $x^2-y^2=1$은 항상 두 점에서 만난다. (참)

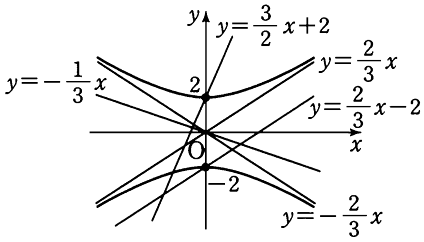
그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

103. 답 ③

[해설]

$4x^2-9y^2=-36$에서 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=-1$

꼭짓점의 좌표가 $(0,\ 2)$, $(0,\ -2)$이고 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{2}{3}x$이므로 쌍곡선의 그래프는 다음 그림과 같다.



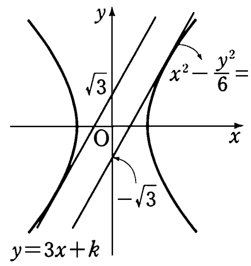
따라서 위의 그림과 같이 직선 $f(x)=\frac{2}{3}x-2$는 쌍곡선과 한 개의 점에서 만나고, 직선 $g(x)=-\frac{1}{3}x$는 쌍곡선과 만나지 않으며 직선 $h(x)=\frac{3}{2x}+2$는 쌍곡선과 두 개의 점에서 만난다.

$\therefore a+2b+3c=1+0+6=7$

104. 답 ②

[해설]

$\begin{cases} y=3x+k & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-\frac{y^2}{6}=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$



㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$x^2-\frac{(3x+k)^2}{6}-1=0$

$6x^2-9x^2-6kx-k^2=0$

$3x^2+6kx+k^2+6=0$

…… ㉢

$M\cap N\neq\varnothing$이려면 ㉢이 실근을 가져야한다.

x에 대한 이차방정식 ㉢의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9k^2-3(k^2+6)=6(k^2-3)\geqq 0$

$\therefore\ k\geqq\sqrt{3}$ 또는 $k\leqq-\sqrt{3}$

따라서 구하는 양수 k의 값의 범위는

$k\geqq\sqrt{3}$

105. 답 ①

[해설]

쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$2x-\frac{3y}{3}=1\quad\therefore\ y=2x-1$

이 접선의 x절편은 $\frac{1}{2}$, y절편은 -1이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{4}$

106. 답 8

[해설]

쌍곡선 $2x^2-y^2=1$ 위의 점 $A(5,\ 7)$에서의 접선의 방정식은

$10x-7=1$ …… ㉠

쌍곡선 $2x^2-y^2=1$ 위의 점 $B(-1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$-2x-y=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=-\frac{1}{4},\ y=-\frac{1}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{2}\right)$이므로

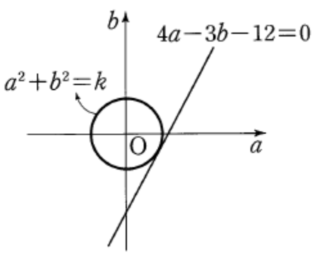
$\frac{1}{ab}=8$

107. 답 169

[해설] 쌍곡선 $3x^2-4y^2=-1$ 위의 점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $-3x-4y=-1$, 즉 $3x+4y=1$

이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면

$m\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=-1$에서 $m=\frac{4}{3}$이다.



따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=\frac{4}{3}x-4$

조건에서 점 $(a,\ b)$가 이 직선을 지나므로

$4a-3b-12=0$

이때, $a^2+b^2=k$로 놓으면 오른쪽 그림과 같이 직선 $4a-3b-12=0$과 원 $a^2+b^2=k$가 접할 때 k는 최소가 된다.

$\frac{|-12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\sqrt{k}\quad \therefore k=\frac{144}{25}$

$\therefore m+n=25+144=169$

108. 답 ④

[해설] 쌍곡선 $xy=8$ 위의 한 점 $P(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$

$xy=8$에서 y를 소거하고 정리하면

$mx^2-(mx_1-y_1)x-8=0$ …㉠

점 P가 접점이므로 방정식 ㉠은 중근을 갖는다.

즉, ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(mx_1-y_1)^2+32m=0$

ㄱ. 점 $P(x_1,\ y_1)$은 쌍곡선 위의 점이므로

$x_1y_1=8$, 즉 $x_1=\frac{8}{y_1}$(참)

ㄴ. $x_1y_1=8$을 $(mx_1-y_1)^2+32m=0$에 대입하여 정리하면

$(mx_1+y_1)^2=0$

$\therefore m=-\frac{y_1}{x_1}$ (거짓)

ㄷ. $y-y_1=-\frac{y_1}{x_1}(x-x_1)$에서

$y_1x+x_1y=2x_1y_1=16$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

109. 답 ③

[해설]

접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x-y_1y=4$

이 직선이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$2x_1-y_1=4$ …… ㉠

또, 점 $(x_1,\ y_1)$은 쌍곡선 $x^2-y^2=4$위의 점이므로

${x_1}^2-{y_1}^2=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$3{x_1}^2-16x_1+20=0$

$(3x_1-10)(x_1-2)=0$

$\therefore\ x_1=2$또는 $x_1=\frac{10}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면

$y_1=0$또는 $y_1=\frac{8}{3}$

$\therefore P(2,\ 0),\ Q\left(\frac{10}{3},\ \frac{8}{3}\right)$

이 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$y=2x-4$

따라서 직선 PQ와 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times4=4$

참고

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$ 밖의 한 점 $(a,\ b)$에서 쌍곡선에 그은 접선의 방정식은 다음과 같은 방법으로 구한다.

(1) 구하는 접선의 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$로 놓고, 공식을 이용하여 접선의 방정식 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=\pm1$을 구한다.

(2) (1)에서 구한 접선이 점 $(a,\ b)$를 지나고, 점 $(x_1,\ y_1)$이 쌍곡선위에 있음을 이용하여 접점의 좌표 $(x_1,\ y_1)$을 구한다.

(3) (2)에서 구한 접점의 좌표 $(x_1,\ y_1)$을 (1)에서 구한 접선의 방정식에 대입한다.

110. 답 ⑤

[해설]

접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{20m^2-4}$

점 $P(a,\ b)$는 접선 위의 점이므로

$b=ma\pm\sqrt{20m^2-4}$

$b-ma=\pm\sqrt{20m^2-4}$

양변을 제곱하면

$b^2-2abm+a^2m^2=20m^2-4$

$(a^2-20)m^2-2abm+b^2+4=0$ …… ㉠

m에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근을 $m_1,\ m_2$라 하면 두 접선이 수직이므로 $m_1m_2=-1$이다. 즉, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{b^2+4}{a^2-20}=-1,\ b^2+4=-a^2+20$

$\therefore\ a^2+b^2=16$

따라서 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 4인 원이므로 그 길이는 8π이다.

111. 답 ①

[해설]

좌표평면에서 두 정점으로부터의 거리의 차가 일정한 점들의 집합은 쌍곡선이다.

두 정점이 x축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식을

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ b>0)$이라 하면

$2a=2 \qquad \therefore\ a=1$

또, $\mathrm{F}(\sqrt{5},\ 0)$, $\mathrm{F}'(\sqrt{5},\ 0)$에서

$b^2=c^2-a^2=5-1=4 \qquad \therefore$ b =2

그러므로 조건을 만족하는 쌍곡선의 방정식은

$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

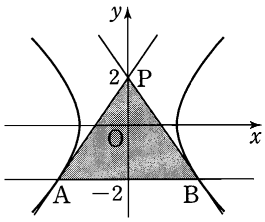
이때, 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x-\dfrac{y_1y}{4}=1$

이고, 이 접선이 점 $\mathrm{P}(0,\ 2)$를 지나므로

$-\dfrac{2y_1}{4}=1 \qquad \therefore y_1=-2$

또, 점 $(x_1,\ y_1)$은 쌍곡선 ㉠ 위의 점이므로



${x_1}^2-\dfrac{{y_1}^2}{4}=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

$y_1=-2$를 ㉡에 대입하면

${x_1}^2=2 \qquad \therefore x_1=\pm\sqrt{2}$

$\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ -2)$, $\mathrm{B}(\sqrt{2},\ -2)$라 하면 삼각형 PAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times4=4\sqrt{2}$

112. 답 ③

[해설] 점 $P(a,\ b)$를 지나는 접선을 $y=m(x-a)+b$로 놓고, $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$과 연립하면

$(1-4m^2)x^2+8m(am-b)x-4\{(am-b)^2+1\}=0$

이때, $\dfrac{D}{4}=0$이므로 $(am-b)^2+1-4m^2=0$

이 식을 m에 대하여 정리하면

$(a^2-4)m^2-2abm+b^2+1=0 \ \cdots$㉠

㉠의 두 근은 두 접선의 기울기이고, 두 접선은 서로 수직이므로 두 근의 곱은 -1이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{b^2+1}{a^2-4}=-1 \qquad \therefore a^2+b^2=3$ (단, $a\neq\pm2b$)

따라서 $P(a,\ b)$가 나타내는 도형의 길이는 $2\sqrt{3}\pi$이다.

참고

점 $P(a,\ b)$는 점근선 $y=\pm\sqrt{2}x$ 위의 점이 아니므로 $a\neq\pm2b$이다.

113. 답 13

[해설] 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=8$,

$\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QF}'}=8$

이고, 주어진 조건에서 $\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{QF}'}=3$이므로

$\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{PF}}=8+\overline{\mathrm{QF}}+8-\overline{\mathrm{PF}'}$

$=16-(\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{QF}'})$

$=16-3$

$=13$

114. 답 ④

[해설] $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$에서 $c^2=5+4=9$이므로 $c=\pm3$

따라서 $F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$이므로

$\overline{PF}=\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{PF'}=\sqrt{8^2+(-4)^2}=4\sqrt{5}$

$\therefore \overline{PF}\cdot\overline{PF'}=2\sqrt{5}\cdot4\sqrt{5}=40$

115. 답 60

[해설] 두 점근선이 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+y=0$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}x-y=0$이므로 쌍곡선의 방정식은 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+y\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}x-y\right)=k$

$\therefore \dfrac{1}{3}x^2-y^2=k$

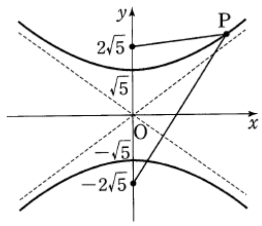
이 쌍곡선이 점 $(-2\sqrt{3},\ 3)$을 지나므로

$\dfrac{1}{3}\cdot(-2\sqrt{3})^2-3^2=k \qquad \therefore k=-5$

그러므로 쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{x^2}{15}-\dfrac{y^2}{5}=-1$

따라서 초점의 좌표는 $(0,\ \pm\sqrt{15+5})$

즉 $F(0,\ 2\sqrt{5})$, $F'(0,\ -2\sqrt{5})$이다.



$\overline{PF}=a$, $\overline{PF'}=b$로 놓으면 $\triangle PFF'$의 둘레의 길이가 $10\sqrt{5}$이므로

$4\sqrt{5}+a+b=10\sqrt{5}$

$\therefore a+b=6\sqrt{5} \ \cdots$㉠

또, 쌍곡선의 정의에 의하여

$|a-b|=2\sqrt{5}\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $|\overline{PF}^2-\overline{PF'}^2|=6\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=60$

116. 답 ④

[해설] $F(3,\ 0)$으로 놓으면 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{AC}-\overline{AF}=2$, $\overline{BF}-\overline{BC}=2$

두 식을 변끼리 빼면

$\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AF}-\overline{BF}=0$ … ㉠

그런데 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 20이므로

$\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{BF}-\overline{AF}=20$ … ㉡

㉠－㉡을 하면 $-2\overline{BF}=-20$

$\therefore \overline{BF}=10,\ \overline{BC}=8$

117. **답** 19

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{(y-4)^2}{18}=1$의 중심이 원점에 오도록 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 쌍곡선의 방정식은

$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{18}=1$

이 쌍곡선의 점근선의 방정식이 $y=\pm 3x$이므로 이 직선을 다시 y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y=\pm 3x+4$

따라서 이 두 점근선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times 4=\frac{16}{3}$

$\therefore\ a+b=3+16=19$

118. **답** ③

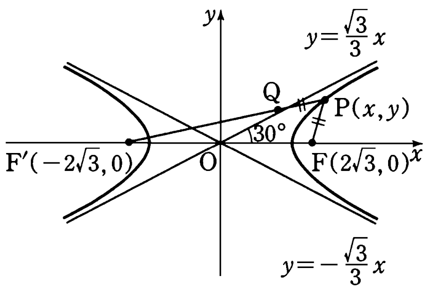
[해설]

다음 그림에서 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=6$이므로

$\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{QP}}-\overline{\mathrm{PF}}=6$

그런데 조건에서 $\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{PF}}$이므로

$\overline{\mathrm{F'Q}}=6$



이때, 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$이므로

점근선이 x축과 이루는 각의 크기는 $30°$이다.

$x\to\infty$일 때, $\angle\mathrm{PF'F}\to\frac{\pi}{6}$이다.

즉, 점 Q가 나타내는 도형은 점 F′을 중심으로 하고 반지름의 길이가 6이며 중심각의 크기가 $60°$인 부채꼴의 호이다.

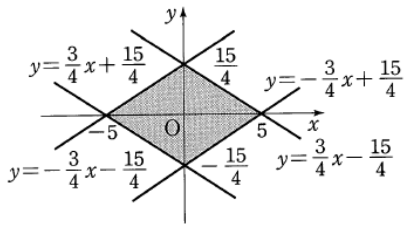
따라서 점 Q가 나타내는 도형 전체의 길이는

$6\cdot\frac{\pi}{3}=2\pi$

119. **답** ⑤

[해설] 쌍곡선 $9x^2-16y^2=144$, 즉 $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$에 대하여 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{3}{4}x$이고 $c^2=4^2+3^2=5^2$이므로 초점의 좌표는 $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$이다.

따라서 만들어지는 도형은 다음 그림과 같은 마름모이다.



$\therefore$ (구하는 도형의 넓이) $=\frac{1}{2}\times 10\times\frac{30}{4}=\frac{75}{2}$

120. **답** 32

[해설]

접선 l의 방정식은

$-6x-2y=32,\ 3x+y=-16$ …… ㉠

원점을 지나면서 ㉠과 수직인 직선의 방정식은

$-x+3y=0,\ x-3y=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\mathrm{H}\left(-\frac{24}{5},\ -\frac{8}{5}\right)$

또한, 쌍곡선 $x^2-y^2=32$와 ㉡의 교점은 $\mathrm{Q}(6,\ 2)$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{OH}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{\left(-\frac{24}{5}\right)^2+\left(-\frac{8}{5}\right)^2}\times\sqrt{6^2+2^2}$

$=\frac{8\sqrt{10}}{5}\times 2\sqrt{10}$

$=32$

121. **답** ③

[해설] 쌍곡선 $3x^2-4y^2=48$의 점근선의 방정식은

$3x^2-4y^2=0$에서 $\sqrt{3}x\pm 2y=0$

점 P의 좌표를 $P(x_1,\ y_1)$이라 하면

$\overline{PQ}\cdot\overline{PR}=\frac{|\sqrt{3}x_1-2y_1|}{\sqrt{3+4}}\cdot\frac{|\sqrt{3}x_1+2y_1|}{\sqrt{3+4}}=\frac{|3x_1^2-4y_1^2|}{7}$

그런데 $P(x_1,\ y_1)$은 쌍곡선 위의 점이므로

$3x_1^2-4y_1^2=48$

따라서 구하는 값은 $\frac{48}{7}$이다.

122. **답** ④

[해설] 원점 O와 점 P를 연결하면 삼각형의 중선연결정리에 의하여

$\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2=2(\overline{OP}^2+\overline{OF}^2)=2(\overline{OP}^2+9)$

그러므로 $\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2$의 최솟값은

$2(8+9)=34$

123. **답** ③

쌍곡선 $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$에서 초점의 좌표는 $\mathrm{C}(-5,\ 0)$, $\mathrm{D}(5,\ 0)$

또, 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{AC}-\overline{AD}=2\times3$

$\therefore \overline{AC}=\overline{AD}+6$ ⋯⋯ ㉠

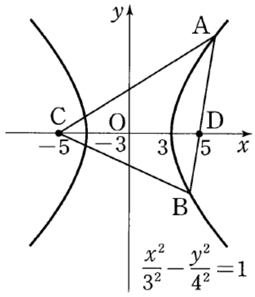
$\overline{BD}-\overline{BD}=2\times3$

$\therefore \overline{BC}=\overline{BD}+6$ ⋯⋯ ㉡

$\triangle ABC$의 둘레의 길이가 28이므로

$\overline{AC}+\overline{CB}+\overline{AB}=28$

㉠, ㉡을 이 식에 대입하면



$\overline{AC}+\overline{CB}+\overline{AB}=(\overline{AD}+6)+(\overline{BD}+6)+\overline{AB}=28$

$\therefore\ 2\overline{AB}=16\ (\because \overline{AD}+\overline{BD}=\overline{AB})$

$\therefore \overline{AB}=8$

124. 답 ③

[해설] 점 P는 두 점 $A(2,0)$, $B(-2,0)$을 초점으로 하고 주축의 길이가 2인 쌍곡선 위의 점이다.

초점이 x축 위에 있으므로 점 P의 자취의 방정식은

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$로 놓을 수 있다.

초점의 좌표가 $(\pm2,0)$이므로

$a^2+b^2=2^2$ ⋯⋯ ㉠

또, 주축의 길이가 2이므로

$2a=2$ ⋯⋯ ㉡

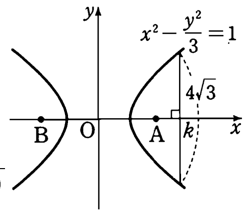
㉠, ㉡에서 $a^2=1,\ b^2=3$

$\therefore\ x^2-\frac{y^2}{3}=1$

이때, $x=k$를 대입하여 정리하면

$y=\pm\sqrt{3(k^2-1)}$

이므로 선분 Q_1Q_2의 길이는 $2\sqrt{3(k^2-1)}$이다.



조건에서 $2\sqrt{3(k^2-1)}=4\sqrt{3}$

$\therefore k=\sqrt{5}\ (\because k>0)$

125. 답 ①

[해설] 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{3}{4}x$이고 점 P의 좌표를 $P(x_1,\ y_1)$이라 하면 점 P를 지나는 직선은 $y-y_1=\pm\frac{3}{4}(x-x_1)$이고 교점 Q와 R를 구하면 $\mp\frac{3}{4}x-y_1=\pm\frac{3}{4}(x-x_1)$에서

$$\begin{cases} x=2\left(\frac{x_1}{4}-\frac{y_1}{3}\right) \\ y=-\frac{3}{2}\left(\frac{x_1}{4}-\frac{y_1}{3}\right)\end{cases},\quad \begin{cases} x=2\left(\frac{x_1}{4}+\frac{y_1}{3}\right) \\ y=\frac{3}{2}\left(\frac{x_1}{4}+\frac{y_1}{3}\right)\end{cases}$$

$p=\frac{x_1}{4}-\frac{y_1}{3},\ q=\frac{x_1}{4}+\frac{y_1}{3}$이라 하면 $pq=1$이고

평행사변형의 넓이는 $\left|2p\times\frac{3}{2}q-2q\times\left(-\frac{3}{2}p\right)\right|=6pq=6$

126. 답 ①

[해설]

쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$2x-\frac{3y}{3}=1\quad\therefore\ y=2x-1$

이 접선의 x절편은 $\frac{1}{2}$, y절편은 -1이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{4}$

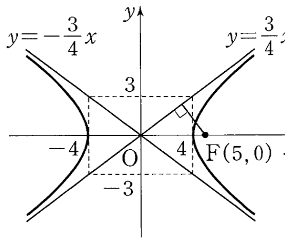
127. 답 ③

[해설]

$9x^2-16y^2=144$에서 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 초점의 좌표를 $(\pm c,\ 0)$이라 하면

$c^2=16+9=25$이므로 초점의 좌표는 $(\pm5,\ 0)$ 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{3}{4}x$



따라서 초점 $(5,\ 0)$에서 점근선에 $3x-4y=0$에 이르는 거리는

$\frac{|3\times5-4\times0|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$

128. 답 38

[해설]

쌍곡선 $2x^2-y^2=4$에서 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$이므로 쌍곡선의 두 초점의 좌표는

$F(\sqrt{6},\ 0),\ F'(-\sqrt{6},\ 0)$

삼각형 $PF'F$의 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{6}\cdot b=12\quad\therefore\ b=2\sqrt{6}$

점 $P(a,\ b)$가 쌍곡선 $2x^2-y^2=4$위의 점이므로

$2a^2-24=4,\ a^2=14$

$\therefore\ a=\sqrt{14}$

$\therefore\ a^2+b^2=14+24=38$

129. 답 ⑤

[해설]

쌍곡선 $3x^2-y^2=27$에서

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$

$c=\sqrt{9+27}=6$이므로 주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는 $F(6,0),\ F'(-6,0)$이다.

점 P의 좌표를 (a,b)라 하면 삼각형 PFF'의 넓이가 $6\sqrt{21}$이므로

$\frac{1}{2}\cdot12\cdot b=6\sqrt{21}$

$\therefore b=\sqrt{21}$

또, 점 $P(a,b)$가 쌍곡선 $3x^2-y^2=27$위의 점이므로

$3a^2-21=27,\ 3a^2=48$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$

130. 답 ②

[해설]

$x^2+y^2 \leqq 8$인 원의 내부와 경계선을 영역으로 하고

$\frac{x^2}{6}-y^2 \geqq 1$에서 이 쌍곡선 $\frac{x^2}{6}-y^2=1$의 초점 $(\sqrt{7},\ 0)$을 대입하면 부등식을 만족시키므로 연립부등식을 만족시키는 영역은 원의 내부이면서 쌍곡선의 초점을 포함하는 부분의 공통 영역이다. (단, 경계선도 포함한다.)

따라서 연립부등식의 영역을 옳게 나타낸 것은 ②이다.

131. 답 16

[해설]

쌍곡선 $2x^2-2y^2=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}x$, 즉 $y=\pm x$ ...... ㉠

쌍곡선 $2(x-3)^2-2(y-1)^2=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm(x-3)+1$

즉, $y=x-2$, $y=-x+4$ ...... ㉡

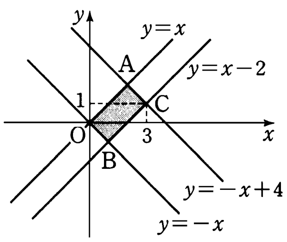
두 직선 $y=x$, $y=-x+4$의 교점의 좌표는 $\mathrm{A}(2,\ 2)$이므로 오른쪽 그림에서

$\overline{\mathrm{OA}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}$이므로

직사각형 OBCA의 넓이 S는

$S=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4$

$\therefore\ S^2=4^2=16$



132. 답 ⑤

[해설] $3x^2-y^2=3 \Leftrightarrow x^2-\frac{y^2}{3}=1$

따라서 기울기가 2인 접선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{2^2-3}=2x\pm1$

x좌표가 양수인 쌍곡선 위의 점에서 직선 $y=2x+9$까지의 거리의 최솟값은 두 직선 $y=2x-1$과 $y=2x+9$ 사이의 거리이다. 따라서 직선 $y=2x+9$ 위의 임의의 점 $(0,\ 9)$에서 직선 $2x-y-1=0$에 이르는 거리는 $\frac{|0-9-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$

133. 답 ①

[해설] 곡선 $x^2-\frac{y^2}{8}=1$ $(x\geq 0)$에서

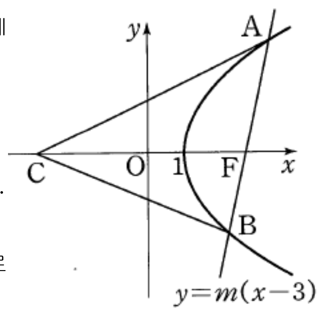
$\overline{AC}-\overline{AF}=2$ ... ㉠

$\overline{BC}-\overline{BF}=2$ ... ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}=4$ ... ㉢

㉢에서 $\overline{AB}=12$이므로

$\overline{AC}+\overline{BC}=16$



134. **답 ④**

쌍곡선 $4x^2-y^2=3$위의 점 $\mathrm{P}(-1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$-4x-y=3\quad\therefore\ y=-4x-3$

이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{4}$이므로

기울기가 $\frac{1}{4}$이고 점 $\mathrm{P}(-1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{4}(x+1)\quad\therefore\ y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$

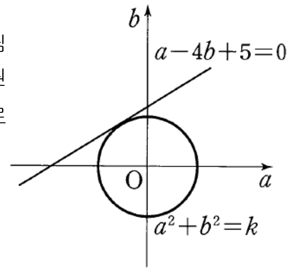
주어진 조건에서 점 $(a,\ b)$가 이 직선 위의 점이므로

$b=\frac{1}{4}a+\frac{5}{4}$, 즉 $a-4b+5=0$

이 때, $a^2+b^2=k$로 놓으면 오른쪽 그림과 같이 직선 $a-4b+5=0$과 원 $a^2+b^2=k$가 접할 때 k는 최소가 되므로

$\frac{|0-0+5|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\sqrt{k}\quad\therefore\ k=\frac{25}{17}$

따라서 a^2+b^2의 최솟값은 $\frac{25}{17}$이다.



135. 답 90

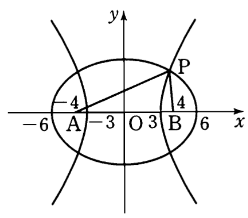
[해설]

타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$에서

$c=\sqrt{36-20}=4$ 이므로

두 초점의 좌표는

$\mathrm{A}(-4,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 0)$



또 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$에서

$c=\sqrt{9+7}=4$이므로 두 초점의 좌표는

$\mathrm{A}(-4,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 0)$

즉, 타원과 쌍곡선의 초점은 A, B로 서로 일치한다,

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=2\times6=12$ ...... ㉠

쌍곡선의 정의에 의하여

$|\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{PB}}|=2\times3=6$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{\mathrm{PA}}=9$, $\overline{\mathrm{PB}}=3$ 또는 $\overline{\mathrm{PA}}=3$, $\overline{\mathrm{PB}}=9$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=90$

136. 답 11

[해설]

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=5$ ...... ㉠

$\overline{\mathrm{QF'}}-\overline{\mathrm{QF}}=5$ ...... ㉡

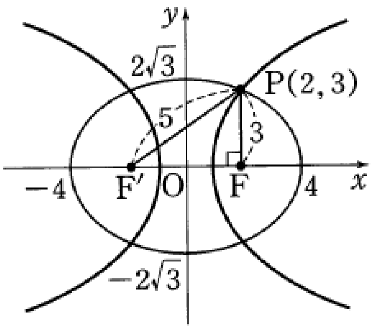
$\triangle$ PF′Q에서 $\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{QF'}}+\overline{\mathrm{PQ}}=32$ ...... ㉢

㉢ −㉠ −㉡에서 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}=32-5-5$

$2\overline{\mathrm{PQ}}=22\quad\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=11$

137. 답 ⑤

[해설]



점 P와 점 F의 x좌표가 같으므로

$\overline{PF}=3$, $\overline{PF'}=\sqrt{\{2-(-2)^2\}+3^2}=5$

타원의 정의에 의하여 $2\sqrt{A}=8$에서 $A=16$

$2^2=16-B$이므로 $B=12$

또, 쌍곡선의 정의에 의하여

$2\sqrt{C}=5-3=2$에서 $C=1$

$2^2=1+D$이므로 $D=3$

$\therefore AD-BC=36$

138. 답 ②

[해설] 타원의 정의에 의하여 $\overline{OB}=\overline{AC}=2\sqrt{5}$ 이므로

$a^2=(2\sqrt{5})^2=20$

따라서 직각삼각형 OBC에서 $\overline{OC}=\sqrt{36-20}=4$이므로

$b^2=16$

따라서 점 D의 x좌표는 $\sqrt{a^2+b^2}=6$이다.

한편, 직각삼각형 OAC에서 $\overline{OA}=\sqrt{20-16}=2$

$\therefore \overline{AD}=\overline{OD}-\overline{OA}=6-2=4$

참고

주어진 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$과 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 대하여

항상 $\overline{OB}=\overline{AC}$, $\overline{OD}=\overline{BC}$가 성립한다.

139. 답 ⑤

[해설]

쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{8}=1$에서 $c=\sqrt{1+8}=3$이고 x축의 양의 방향과 점 $(1, 0)$에서 만난다.

ㄱ. $a(s)=\frac{t-0}{s-3}$에서

$s\to1+0$이면 $t\to+0$ 이므로

$\lim_{s\to1+0} a(s)=0$ (참)

ㄴ. 쌍곡선의 점근선의 방정식이

$y=\pm2\sqrt{2}x$이므로 오른쪽 그림

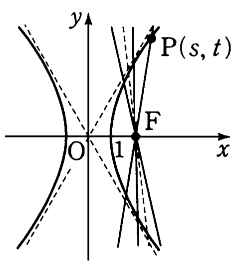
에서 $\lim_{s\to\infty} a(s)=2\sqrt{2}$ (참)

ㄷ. 초점 F의 좌표는 $(3, 0)$이므로

오른쪽 그림에서

$\lim_{s\to3+0} a(s)=\infty$

$\lim_{S\to3-0} a(s)=-\infty$



$\therefore \lim_{s\to3}\frac{1}{a(s)}=0$ (참)

따라서 보기 중 옳음 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

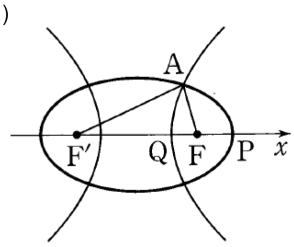
140. 답 34

[해설] (타원의 장축의 길이)

$=\overline{FA}+\overline{F'A}$

(쌍곡선의 주축의 길이)$=|\overline{FA}-\overline{F'A}|$

$=\overline{F'A}-\overline{FA}$



$\therefore \overline{PQ}=\frac{1}{2}\{\overline{FA}+\overline{F'A}-(\overline{F'A}-\overline{FA})\}=\overline{FA}$

$=\sqrt{(5-0)^2+(5-8)^2}=\sqrt{34}$

$\therefore \overline{PQ}^2=34$

141. 답 ①

[해설] 쌍곡선 위의 한 점 $P(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$x_1x-\frac{y_1y}{3}=1$

초점 $F(2,\ 0)$을 지나고 직선 PF에 수직인 직선의 방정식은

$y=-\frac{x_1-2}{y_1-0}(x-2)$

두 직선의 교점의 x좌표는

$3(1-x_1x)=(x_1-2)(x-2)$

$3-3x_1x=x_1x-2x_1-2x+4$

$2(2x_1-1)x=2x_1-1 \quad \therefore x=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 도형의 방정식은 $x=\frac{1}{2}$이다.

142. 답 ②

[해설]

주축의 길이가 2인 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ b>0)$이라 하면

$2a=2 \qquad \therefore a=1$

또, 이 쌍곡선의 점근선의 방정식이 $y=\pm2x$이므로

$b=2a \qquad \therefore b=2$

구하는 쌍곡선의 방정식은 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$

$\therefore\ y^2=4x^2-4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

점 $\mathrm{A}(10, 0)$에서 ㉠에 이르는 거리를 d라 하면

$d=\sqrt{(x-10)^2+y^2}=\sqrt{(x-10)^2+4x-4}$

$=\sqrt{5x^2-20x+96}$

$=\sqrt{5(x-2)^2+76}$

따라서 d가 최소가 될 때, 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 x좌표는 2이다.

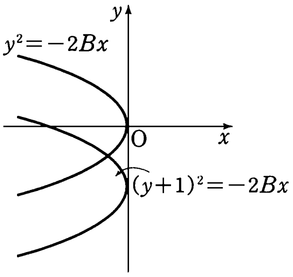
143. 답 ②

[해설] ㄱ. $y^2+2y+1+2Bx=0$을 변형하면

$(y+1)^2=-2Bx$ 이므로

이 곡선은 포물선 $y^2=-2Bx$ 를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

또, $B>0$이므로 포물선 $(y+1)^2=-2Bx$ 를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



따라서 제 2, 3사분면을 지나는 포물선을 나타낸다. (거짓)

ㄴ. $A\left(x+\frac{B}{A}\right)^2+(y+1)^2=\frac{B^2}{A}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(x+\frac{B}{A}\right)^2}{\frac{B^2}{A^2}}+\dfrac{(y+1)^2}{\frac{B^2}{A}}=1$

이때, $\frac{B^2}{A}<0$이므로 집합 S는 주축이 x축과 평행한 쌍곡선을 나타낸다. (참)

ㄷ. $A\left(x+\frac{B}{A}\right)^2+(y+1)^2=\frac{B^2}{A}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(x^2+\frac{B}{A}\right)^2}{\frac{B^2}{A^2}}+\dfrac{(y+1)^2}{\frac{B^2}{A}}=1$

$A>B>1$에서 $0<\frac{B^2}{A^2}<\frac{B^2}{A}$이므로 집합 S는 장축이 y축과 평행한 타원을 나타낸다. (거짓)

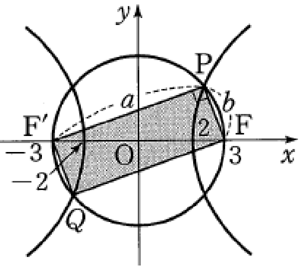
그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

144. 답 ④

[해설] 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점의 좌표를 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$이라 하면 $c^2=4+5=9$ $\quad\therefore c=3$

따라서 두 점 F와 F'은 각각 지름의 양 끝점인 두 점 A, B와 일치한다.

오른쪽 그림에서 사각형 $APBQ$는 직사각형이다.



$\overline{PF'}=a$, $\overline{PF}=b$ $(a>b)$라 하면 피타고라스의 정리와 쌍곡선의 정의에 의하여 $a^2+b^2=6^2$, $a-b=4$ … ㉠

위의 두 식을 연립하면

$a^2-4a-10=0$ $\qquad\therefore a=2+\sqrt{14}$ $(\because a>0)$

또, ㉠에서 $b=-2+\sqrt{14}$

따라서 구하는 사각형 $APBQ$의 넓이는

$ab=(2+\sqrt{14})(-2+\sqrt{14})=10$

145. 답 68

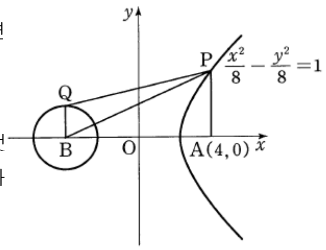
[해설] 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$의 초점이 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$이므로 원의 중심과 점 A가 쌍곡선의 초점이다.

원의 중심을 $B(-4,\ 0)$이라 하면

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PB}-\overline{PA}=4\sqrt{2}$

이때, 한 점 P에 대하여 $\overline{PQ}$의 최댓값과 최솟값은 세 점 Q, B, P가 한 직선에 있을 때이므로



$\overline{PB}-\overline{QB}-\overline{PA}\le\overline{PQ}-\overline{PA}\le\overline{PB}+\overline{QB}-\overline{PA}$에서

$4\sqrt{2}-\sqrt{2}\le\overline{PQ}-\overline{PA}\le4\sqrt{2}+\sqrt{2}$

$3\sqrt{2}\le\overline{PQ}-\overline{PA}\le5\sqrt{2}$

$\therefore M^2+m^2=(5\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2=68$

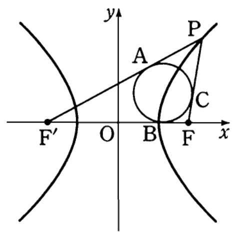
146. 답 ⑤

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{3a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$의 초점 F의 x좌표를 $c(c>0)$라 하면

$c^2=3a^2+a^2=4a^2$이므로 두 초점 F, F′의 좌표는 각각 $(2a,\ 0)$, $(-2a,\ 0)$이다.

오른쪽 그림과 같이 삼각형 FPF′에 내접하는 원의 세 접점을 각각 A, B, C라 하면



쌍곡선의 정의에서

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=$ (주축의 길이)

이므로

$(\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{F'A}})-(\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{FC}})=2\sqrt{3}a$

그런데 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PC}}$, $\overline{\mathrm{F'A}}=\overline{\mathrm{F'B}}$, $\overline{\mathrm{FB}}=\overline{\mathrm{FC}}$이므로

$\overline{\mathrm{F'B}}-\overline{\mathrm{FB}}=2\sqrt{3}a$

이때, 점 B의 x좌표를 상수 k라 하면

$(k+2a)-(2a-k)=2\sqrt{3}a$ $\quad\therefore k=\sqrt{3}a$

그런데 점 B의 x좌표가 구하는 원의 중심의 x좌표와 같으므로 구하는 값은 $\sqrt{3}a$이다.

147. 답 ①

[해설] 기울기가 m이고 점 P를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=m(x-1)$

이므로 직선과 쌍곡선의 교점 A, B의 x좌표는

방정식 $9x^2-16(mx-m+2)^2-1=0$의 두 근이다.

$A(\alpha,\ m\alpha-m+2)$, $B(\beta,\ m\beta-m+2)$로 놓으면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{32m(m-2)}{9-16m^2}$

Q는 선분 AB의 중점이므로

$a=-\dfrac{16m(m-2)}{9-16m^2}$

$b=-\dfrac{16m^2(m-2)}{9-16m^2}-m+2=\dfrac{-9m+18}{9-16m^2}$

$\therefore \lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{a}{mb}=\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{-16m(m-2)}{m(-9m+18)}=\dfrac{16}{9}$

148. 답 ④

[해설] 접선의 기울기를 m이라 할 때,

(i) $m\neq 0$인 경우

기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{m^2-2}$ 이고 이 직선에 수직이면서 초점을 지나는 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{m}(x-\sqrt{3})$

즉, $mx-y=\pm\sqrt{m^2-2}$ 이고 $x+my=\sqrt{3}$

두 식의 각 변을 제곱하여 더하면

$(m^2+1)(x^2+y^2)=m^2+1$

따라서 구하는 도형의 방정식은 $x^2+y^2=1$ … ㉠

(ii) $m=0$인 경우

초점에서 점 $P(1,\ 0)$을 지나는 접선에 내린 수선의 발을 $Q(1,\ 0)$은 도형 ㉠ 위에 있다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 도형의 방정식은 $x^2+y^2=1$

149. 답 ⑤

[해설] ㄱ. 점근선의 방정식은

$x^2-2y^2=0$에서 $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$

이므로 두 점근선의 기울기는 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이다. (거짓)

ㄴ. 점 $P(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$x_1x-2y_1y=1$

$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$와 $x_1x-2y_1y=1$을 연립하여 풀면

$x=\dfrac{1}{x_1\mp\sqrt{2}y_1},\ y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}x_1\mp 2y_1}$

$p=x_1-\sqrt{2}y_1,\ q=x_1+\sqrt{2}y_1$이라고 할 때, 교점의 좌표는

$A\left(\dfrac{1}{p},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}p}\right),\ B\left(\dfrac{1}{q},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}q}\right)$

$\therefore \overline{OA}\cdot\overline{OB}=\sqrt{\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{2p^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{q^2}+\dfrac{1}{2q^2}}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{pq}$

$=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{x_1^2-2y_1^2}=\dfrac{3}{2}$ (참)

ㄷ. 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{p+q}{2pq},\ \dfrac{q-p}{2\sqrt{2}pq}\right)$이고 $pq=1$이므로

$\dfrac{p+q}{2pq}=\dfrac{p+q}{2}=\dfrac{1}{2}\{(x_1-\sqrt{2}y_1)+(x_1+\sqrt{2}y_1)\}=x_1$

$\dfrac{q-p}{2\sqrt{2}pq}=\dfrac{q-p}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\{(x_1+\sqrt{2}y_1)-(x_1-\sqrt{2}y_1)\}=y_1$

그러므로 선분 AB의 중점은 P이다. (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

1. 답 ④	2. 답 ④	3. 답 ③	4. 답 ③
5. 답 ③	6. 답 ②	7. 답 20	8. 답 ①
9. 답 ③	10. 답 ⑤	11. 답 ⑤	12. 답 ⑤
13. 답 ⑤	14. 답 ④	15. 답 ①	16. 답 ①
17. 답 ③	18. 답 ④	19. 답 ③	20. 답 7
21. 답 ②	22. 답 ④	23. 답 ①	24. 답 59
25. 답 ①	26. 답 ⑤	27. 답 ④	28. 답 ③
29. 답 ④	30. 답 ④	31. 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$	32. 답 ③
33. 답 ④	34. 답 ③	35. 답 ⑤	36. 답 ⑤
37. 답 ②	38. 답 25	39. 답 ⑤	40. 답 ④
41. 답 ②	42. 답 ②	43. 답 ④	44. 답 ⑤
45. 답 50	46. 답 ④	47. 답 ③	48. 답 ⑤
49. 답 ②	50. 답 ③	51. 답 32	52. 답 ②
53. 답 20	54. 답 16	55. 답 15	56. 답 96
57. 답 30	58. 답 ④	59. 답 ④	60. 답 ⑤
61. 답 27	62. 답 ②	63. 답 20	64. 답 ④
65. 답 ③	66. 답 ⑤	67. 답 10	68. 답 ⑤
69. 답 25	70. 답 ⑤	71. 답 ①	72. 답 ①
73. 답 5	74. 답 ②	75. 답 ①	76. 답 ②
77. 답 ③	78. 답 45	79. 답 ⑤	80. 답 ③
81. 답 -5	82. 답 ③	83. 답 36	84. 답 ①
85. 답 ②	86. 답 ②	87. 답 ①	88. 답 ③
89. 답 97	90. 답 ②	91. 답 ⑤	92. 답 ②
93. 답 ④	94. 답 51	95. 답 ①	96. 답 ②
97. 답 53	98. 답 ①	99. 답 ②	100. 답 ⑤
101. 답 ④	102. 답 ⑤	103. 답 ①	104. 답 2
105. 답 ⑤	106. 답 ⑤	107. 답 ②	108. 답 ①
109. 답 ②	110. 답 ⑤	111. 답 ①	112. 답 20
113. 답 ②	114. 답 ③	115. 답 ④	116. 답 ③
117. 답 18	118. 답 ③	119. 답 ③	120. 답 ①
121. 답 ②	122. 답 ③	123. 답 ③	124. 답 ③
125. 답 ③	126. 답 26	127. 답 ④	128. 답 ⑤
129. 답 ②	130. 답 24	131. 답 ①	132. 답 ②
133. 답 ①	134. 답 ①	135. 답 18	136. 답 84
137. 답 20	138. 답 14	139. 답 ③	140. 답 ①
141. 답 ⑤	142. 답 ③	143. 답 557	144. 답 5
145. 답 ②	146. 답 ③	147. 답 ②	148. 답 ④
149. 답 ⑤	150. 답 ⑤	151. 답 ④	152. 답 17
153. 답 ⑤	154. 답 ③	155. 답 ①	156. 답 23

1. 답 ④

[해설]

ㄱ. 직선 AC와 꼬인 위치에 있는 모서리는

$\overline{BF}$, $\overline{DH}$, $\overline{EF}$, $\overline{EH}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$

이므로 모두 6개다. (참)

ㄴ. $\overline{BD}$와 $\overline{FH}$는 평행하므로 $\overline{BD}$와 $\overline{CH}$가 이루는 각의 크기는 $\overline{FH}$와 $\overline{CH}$가 이루는 각의 크기와 같다.

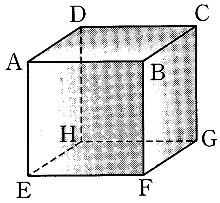
$\triangle CFH$가 정삼각형이므로 $\overline{FH}$와 $\overline{CH}$가 이루는 각의 크기는 60° 이다. (거짓)

ㄷ. 평면 ADG 위의 두 선분 AD, DG에 대하여 $\overline{AD}\perp\overline{CH}$, $\overline{DG}\perp\overline{CH}$ 이므로 (평면 ADG)$\perp\overline{CH}$이다. (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

2. 답 ④

[해설] 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리는 만나지 않고 평행하지 않아야 하므로 모서리 DH, CG, EH, FG의 4개다.

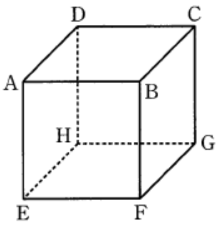


3. 답 ③

[해설] 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 대각선은 CF, DE, CH, DG, HF, EG로 6개다.

모서리가 12개이고, 각 모서리마다 꼬인 위치에 있는 대각선이 각각 6개씩 존재하므로 꼬인 위치에 있는 선분의 쌍의 개수는 12×6이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{12\times6}{12\times12}=\frac{1}{2}$



4. 답 ③

[해설] ㄱ. 직선 CD와 직선 BQ는 평행하지도 않고 만나지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.

ㄴ. 직선 AD와 직선 BC는 평행하지도 않고 만나지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.

ㄷ. 모서리 AC의 중점을 M이라 하면 삼각형 BDM에서

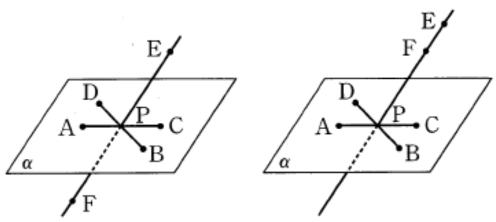
$\overline{BP}:\overline{PM}=\overline{DQ}:\overline{QM}=2:1$

따라서 $\overline{BD}//\overline{PQ}$이므로 꼬인 위치에 있지 않다.

그러므로 두 직선이 꼬인 위치에 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

5. 답 ③

[해설] 조건을 만족하도록 여섯 개의 점 A, B, C, D, E, F를 공간에 나타내면 다음과 같다.



한 직선 위에 있지 않은 3개의 점이 1개의 평면을 결정하므로 6개의 점으로 만들 수 있는 평면의 최대 개수는 ${}_6C_3$이다.

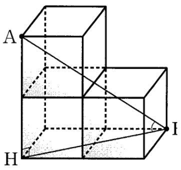
이때, 네 점 A, B, C, D와 A, C, E, F와 B, D, E, F는 한 평면 위에 있으므로 한 평면만 결정한다.

따라서 구하는 평면의 개수는

${}_6C_3-3\times{}_4C_3+3=20-12+3=11$

6. 답 ②

[해설] 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 AB가 밑면과 이루는 각 θ는 $\angle ABH$이다.
각 정육면체는 한 모서리의 길이가 1이므로 직각삼각형 ABH에서



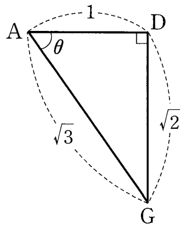
$\overline{BH}=\sqrt{5}$, $\overline{AH}=2$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=3$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

7. 답 20

[해설] $\overline{AB}=\overline{AD}=1$, $\overline{BD}=\sqrt{2}$ 이므로



$\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$

또, 점 F는 $\overline{BD}$의 중점이므로 $\angle BAF=\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

8. 답 ①

[해설] $\overline{\mathrm{AF}}$와 $\overline{\mathrm{BG}}$가 이루는 각은 $\boxed{\overline{\mathrm{DG}}}$와 $\overline{\mathrm{BG}}$ 가 이루는 각과 같다.

$\therefore \alpha=\boxed{\angle\mathrm{BGD}}=\boxed{\angle\mathrm{HCF}}$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{BD}}$와 $\overline{\mathrm{CF}}$가 이루는 각은 $\boxed{\overline{\mathrm{FH}}}$ 와 $\overline{\mathrm{CF}}$가 이루는 각과 같다.

$\therefore \beta=\boxed{\angle\mathrm{CFH}}$ …… ㉡

$\overline{\mathrm{BD}}$와$\overline{\mathrm{CH}}$ 가 이루는 각은$\boxed{\overline{\mathrm{FH}}}$ 와 $\overline{\mathrm{CF}}$가 이루는 각과 같다.

$\therefore \gamma=\boxed{\angle\mathrm{CHF}}$ …… ㉢

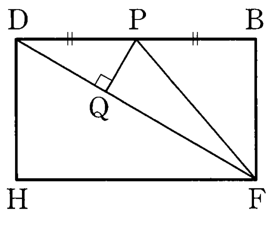
㉠, ㉡, ㉢에 의하여 삼각형 CHF의 세 내각의 크기의 합은 π이므로 $\alpha+\beta+\gamma=\boxed{\pi}$ 이다.

9. 답 ③

[해설] ㄱ. $\overline{AC}\perp\overline{DB}$, $\overline{AC}\perp\overline{BF}$에서 $\overline{AC}\perp$(평면 DBF)이므로 직선 AC는 평면 DBF 위의 임의의 직선과 수직이다. (참)

ㄴ. 점 Q는 대각선 DF 위에 있으므로 $\overline{QA}=\overline{QC}$

즉, $\triangle QAC$는 이등변삼각형이다. 또, $\overline{PQ}\perp\overline{AC}$이므로$\overline{AP}=\overline{CP}$이고, 점 P는 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점이다.

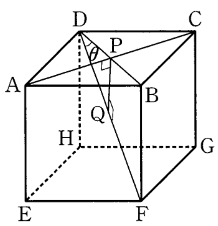


오른쪽 그림에서

$\triangle DPF=\dfrac{1}{2}\triangle DBF$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2a}\cdot a\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a^2$ (참)

ㄷ. $\angle BDF=\theta$라 하면



$\sin\theta=\dfrac{\overline{BF}}{\overline{DF}}=\dfrac{a}{\sqrt{3}a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\triangle DPQ$에서 $\overline{PQ}=\overline{DP}\sin\theta$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$

$\overline{PQ}\ge 4\sqrt{6}$ 에서 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}a\ge 4\sqrt{6}$ 이므로 $a\ge 24$

즉, 선분 PQ의 길이가 $4\sqrt{6}$ 이상이 되기 위한 a의 최솟값은 24이다. (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

참고

꼬인 위치에서 두 직선 사이의 최단 거리는 공통수선의 길이이다.

10. 답 ⑤

[해설] [해설] $\overline{EH}\,/\!/\,\overline{AD}$이고

$\overline{AD}\perp$(면 $CGHD$)이므로

$\triangle ADG$에서 $\overline{AD}=1$, $\overline{DG}=\sqrt{2}$, $\overline{AG}=\sqrt{3}$

이고 $\angle ADG=90^\circ$ 이므로

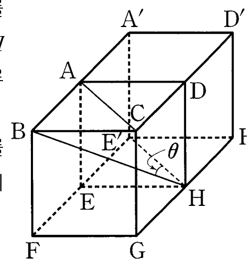
$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore 60\cos^2\theta=60\cdot\dfrac{1}{3}=20$

11. 답 ⑤

[해설] 오른쪽 그림과 같이 두 정육면체를 붙여 직육면체를 만들면 두 선분 AC, BH가 이루는 각은 두 선분 $E'H$, BH가 이루는 각과 같다.

두 선분 $E'H$, BH가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\triangle BHE'$에서 제이코사인법칙에 의하여



$\cos\theta=\dfrac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=0$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \sin\theta=1$

12. 답 ⑤

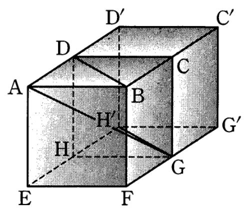
[해설] 그림과 같이 두 정육면체를 붙여 직육면체를 만들면 두 선분 AG, BD가 이루는 각은 두 선분 AG, GH′이 이루는 각과 같다.

정육면체의 한 변의 길이를 a, 두 선분 AG, GH′이 이루는 각의 크기를 θ라 하고 $\triangle$AGH′에서 제이코사인 법칙을 사용하면

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{AG}}^2+\overline{\mathrm{GH'}}^2-\overline{\mathrm{AH'}}^2}{2\overline{\mathrm{AG}}\cdot\overline{\mathrm{GH'}}}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}a)^2+(\sqrt{2}a)^2-(\sqrt{5a^2})}{2\cdot\sqrt{3}a\cdot\sqrt{2}a}$$

$$=0$$

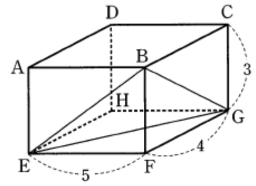


$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{2}$

따라서 두 선분이 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{2}$이다.

13. 답 ⑤

[해설]



두 선분 CH, BE가 평행하므로 선분 BE와 선분 EG가 이루는 예각의 크기는 선분 CH와 선분 EG가 이루는 예각의 크기 γ와 같다.

$\angle BEG = \boxed{\gamma}$ … ㉠

두 선분 AC, EG가 평행하므로 선분 EG와 선분 BG가 이루는 예각의 크기는 선분 AC와 선분 BG가 이루는 예각의 크기 β와 같다.

$\angle EGB = \boxed{\beta}$ … ㉡

두 선분 AH, BG가 평행하므로 선분 AF와 선분 AH가 이루는 예각의 크기는 선분 AF와 선분 BG가 이루는 예각의 크기 α와 같다.

이때, $\triangle AFH$와 $\triangle BEG$가 합동이므로 각 GBE의 크기는 각 HAF의 크기와 같다.

$\angle GBE = \angle HAF = \boxed{\alpha}$… ㉢

삼각형 BEG의 내각의 크기의 합은 π이므로 ㉠, ㉡, ㉢에서

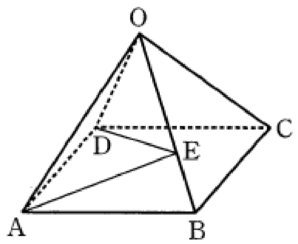
$\alpha+\beta+\gamma=\pi$

$\therefore \cos(\alpha+\beta+\gamma)=-1$

$\therefore$ (가) γ, (나) β, (다) α

14. 답 ④

[해설]



두 선분 AD, BC가 평행하므로 선분 AE와 선분 BC가 이루는 각은 선분 AE와 선분 AD가 이루는 각과 같다.

$\triangle ABE$에서 $\angle ABE = \frac{\pi}{3}$이고, $\overline{AB}=3$, $\overline{BE}=1$이므로 제이코사인 법칙에 의하여

$\overline{AE}^2 = 3^2+1^2-2\cdot3\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=7$

$\therefore \overline{AE}=\sqrt{7}$

$\triangle ODB$에서 $\overline{OD}=3$, $\overline{OB}=3$, $\overline{DB}=3\sqrt{2}$이므로

$\triangle ODB$는 $\angle DOB=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

$\triangle ODE$에서 $\angle DOE=\frac{\pi}{2}$이고, $\overline{OD}=3$, $\overline{OE}=2$이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{DE}^2=3^2+2^2=13$

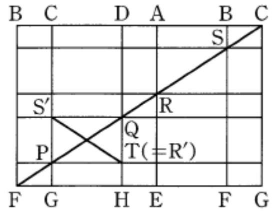
$\therefore \overline{DE}=\sqrt{13}$

따라서 $\triangle ADE$에서 $\angle DAE=\theta$이므로 제이코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{3^2+(\sqrt{7})^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot3\cdot\sqrt{7}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{14}$$

15. 답 ①

[해설]



위 그림에서 $\overline{FG}=3+12+3+12+3=33$, $\overline{CG}=11$

$\triangle CFG \backsim \triangle QPT$이고, $\overline{PT}=12$이므로

$\overline{FG}:\overline{CG}=\overline{PT}:\overline{TQ}$

$33:11=12:\overline{TQ}$ $\quad\therefore \overline{TQ}=4$

또한, 직각삼각형 PTQ에서

$\overline{PQ}=\sqrt{12^2+4^2}=4\sqrt{10}$

이때, 정육면체에서 선분 SR를 평면 $CDHG$ 위로 평행이동한 선분을 $S'R'$이라 하면 선분 PQ와 선분 $R'S'$이 이루는 각의 크기가 θ이다.

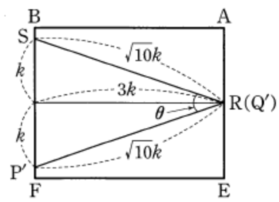
따라서 직사각형 $PTQS'$의 넓이는

$\overline{PT}\cdot\overline{QT}=\frac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{S'R'}\cdot\sin\theta$

$12\cdot4=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{10}\cdot4\sqrt{10}\cdot\sin\theta$

$\therefore \sin\theta=\frac{3}{5}$

다른 풀이



위 그림에서 $\overline{FQ}=33$, $\overline{CG}=11$이므로 $\overline{PQ}$와 $\overline{RS}$의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.

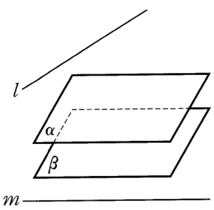
$\overline{PQ}$를 $\square ABFE$로 평행이동한 선분을 $\overline{P'Q'}$이라 하면

$\frac{1}{2}\times2k\times3k=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}k\times\sqrt{10}k\times\sin\theta$

$\therefore \sin\theta=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

16. 답 ①

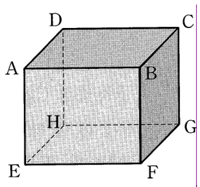
[해설]



ㄱ. 그림과 같이 두 직선 l, m에 모두 평행한 두 평면은 서로 평행하다. (참)

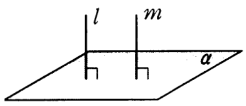
ㄴ. (반례) 직선 AB와 직선BF는 수직이지만 직선AB와 꼬인 위치인 직선DH는 직선 BF와 수직이 아니다. (거짓)

ㄷ. (반례) 직선AB와 평면BFGC는 수직이지만 직선AB와 꼬인 위치인 직선 DH는 평면BFGC와 수직이 아니다. (거짓)



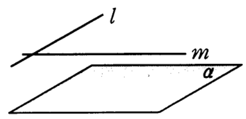
17. 답 ③

[해설] ㄱ.



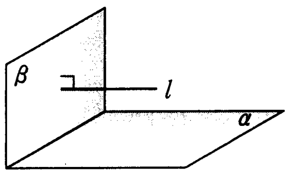
∴ 참

ㄴ.



∴ 거짓

ㄷ.



∴ 참

18. 답 ④

[해설] $\overline{AB}=2$, $\overline{BG}=2\sqrt{2}$, $\overline{AG}=2\sqrt{3}$, $\overline{AB}\perp\overline{BG}$이므로 점 B에서 선분 AG에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\triangle ABG$의 넓이에서

$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BG}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AG}\cdot\overline{BI}$

$\therefore \overline{BI}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

다른 풀이

$\overline{AB}=2$, $\overline{BG}=2\sqrt{2}$, $\overline{AG}=2\sqrt{3}$이고

$\angle ABG=90^\circ$ 이므로 $\angle AGB=\theta$라 하면

$\sin\theta=\frac{\overline{AB}}{\overline{AG}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 점 B에서 $\overline{AG}$에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{BI}=\overline{BG}\sin\theta=2\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

19. 답 ③

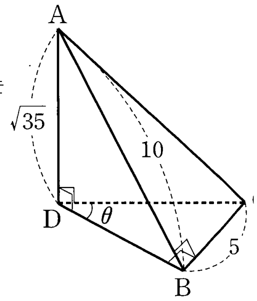
[해설] 사면체 $ABCD$에서

$\overline{AD}\perp$(평면 BCD), $\overline{BC}\perp\overline{BD}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AB}\perp\overline{BC}$

즉, $\triangle ABC$는 직각삼각형이므로

$\overline{AC}=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$



또한, $\overline{AD}\perp$(평면 BCD) 이므로

$\overline{BD}\perp\overline{AD}$, $\overline{CD}\perp\overline{AD}$

따라서 평면 ABD와 평면 ACD가 이루는 각 θ는

$\theta=\angle BDC$

이때, $\triangle BCD$는 직각삼각형이므로

$\sin\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=\frac{5}{\overline{CD}}$

그런데 $\triangle ACD$가 직각삼각형이므로

$\overline{CD}=\sqrt{(5\sqrt{5})^2-(\sqrt{35})^2}=3\sqrt{10}$

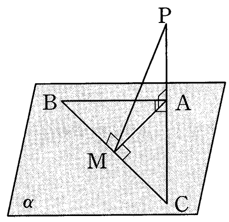
$\therefore \sin\theta=\frac{5}{3\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{6}$

20. 답 7

[해설] 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PQ}\perp\overline{AB}$이므로 직각삼각형 PQO에서 $\overline{PQ}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

또, 직각삼각형 AQP에서 $\overline{AP}=\sqrt{(2\sqrt{6})^2+5^2}=7$

21. 답 ②



[해설] 점P에서 직선BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면 삼수선의 정리에 의해

$\overline{\mathrm{AM}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\angle\mathrm{A}=90^\circ$ 이므로 점M은 선분BC 의 중점이다.

$\overline{\mathrm{BC}}=6$이므로

$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{MC}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}=3$

$\overline{\mathrm{PA}}=4$이므로 직각삼각형PAM에서

$\overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{AM}}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

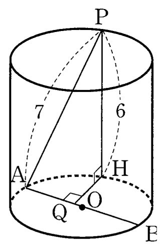
22. 답 ④

[해설] (평면 $EFGH$)$\perp\overline{AE}$, $\overline{AI}\perp\overline{FH}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{EI}\perp\overline{FH}$

$\triangle EFH$에서 $\frac{1}{2}\times1\times2=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\overline{EI}$이므로 $\overline{EI}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore \overline{AI}=\sqrt{2^2+\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{2\sqrt{30}}{5}$

23. 답 ①



[해설] 밑면인 원의 중심을 O, 반지름의 길이를 r라 하자.

$\overline{PH}$와 밑면이 수직이고 $\overline{HQ}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PQ}\perp\overline{AB}$이다.

$\triangle PHQ$와 $\triangle PQA$가 직각삼각형이므로

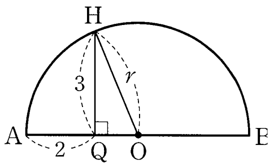
$\overline{PQ}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$

$\overline{AQ}=\sqrt{7^2-(3\sqrt{5})^2}=2$

또, $\triangle HQO$에서 $r^2=3^2+(r-2)^2$

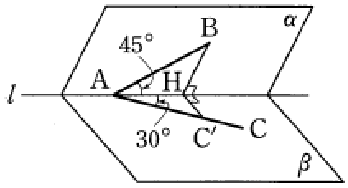
$\therefore r=\frac{13}{4}$

$\therefore \overline{AB} = 2r = \dfrac{13}{2}$



24. 답 59

[해설]



위의 그림에서 $\overline{AH} = a$라 하면

$\overline{AB} = \dfrac{a}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}a$

$\overline{BH} = a\tan 45^\circ = a$

$\overline{AC'} = \dfrac{a}{\cos 30^\circ} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}a$

$\overline{C'H} = a\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}a$

$\triangle BHC'$에서 $\angle BHC' = 30^\circ$ 이므로 제이코사인법칙에 의하여

$\overline{BC'}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{C'H}^2 - 2\overline{BH} \cdot \overline{C'H}\cos 30^\circ$

$= a^2 + \dfrac{1}{3}a^2 - 2 \cdot a \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{3}a^2$

$\triangle ABC'$에서 $\angle BAC' = \theta$이므로 제이코사인법칙에 의하여

$\cos\theta = \dfrac{\overline{AB}^2 + \overline{AC'}^2 - \overline{BC'}^2}{2\overline{AB} \cdot \overline{AC'}}$

$= \dfrac{(\sqrt{2}a)^2 + \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}a\right)^2 - \dfrac{1}{3}a^2}{2 \cdot \sqrt{2}a \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}}a} = \dfrac{3\sqrt{6}}{8}$

$\therefore \cos^2\theta = \dfrac{27}{32}$

$\therefore p + q = 32 + 27 = 59$

25. 답 ①

[해설] 구하고자 하는 최댓값은 $\overline{PA}$ 또는 $\overline{PB}$이고,

$\overline{PC} \perp \alpha$, $\overline{AB} \perp \overline{OC}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PO} \perp \overline{AB}$ …… ㉠

$\therefore \overline{PO} = \sqrt{\overline{CO}^2 + \overline{PC}^2}$

$= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9}$

$= \sqrt{25} = 5$

또한, 삼각형POA는 ㉠에 의하여 직각삼각형이므로

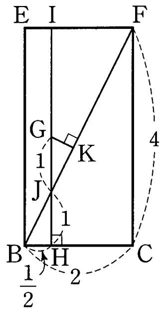
$\overline{PA} = \sqrt{\overline{PO}^2 + \overline{AO}^2}$

$= \sqrt{5^2 + 1^2}$

$= \sqrt{26}$

26. 답 ⑤

[해설] 점P와 선분 AD의 평면 BCFE 위로의 정사영을 각각 G, 선분 HI라 하면 그림과 같이 나타낼 수 있다.



이때, 선분BF와 선분HI의 교점을 J라 하면 $\dfrac{1}{2} : 2 = \overline{HJ} : 4$ 에서

$\overline{HJ} = 1$이므로 $\overline{GJ} = 1$

또한, 점G에서 선분BF에 내린 수선의 발을 K라 하면

$\overline{BJ} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$이므로 $\overline{GK} : 1 = \dfrac{1}{2} : \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 에서

$\overline{GK} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

따라서, $\overline{PG} \perp$(평면BCFE), $\overline{GK} \perp \overline{BF}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PK} \perp \overline{BF}$

즉, 점P에서 선분 BF까지의 거리는 $\overline{PK}$이고,

$\overline{PG} = \overline{AH} = \sqrt{1^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\overline{PK} = \sqrt{\overline{PG}^2 + \overline{GK}^2}$

$= \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}$

$= \dfrac{\sqrt{95}}{10}$

27. 답 ④

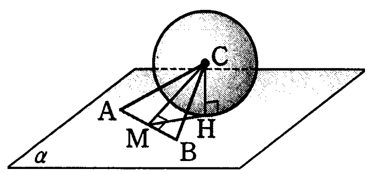
[해설] 구의 중심 C에서 평면 a에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CH} \perp a$ …… ㉠

또, 선분 AB의 중점을 M이라 하면 삼각형 CAB는 정삼각형이므로

$\overline{CM} \perp \overline{AB}$ …… ㉡

㉠과 ㉡에 의하여 삼수선의 정리에 의해 $\overline{AB} \perp \overline{HM}$이므로 두 평면 CAB, a가 이루는 각의 크기는 $\angle CMH$이다.



$\therefore \cos\theta = \cos(\angle CMH)$

$= \dfrac{\overline{MH}}{\overline{CM}}$

$= \dfrac{\sqrt{\overline{CM}^2 - \overline{CH}^2}}{\overline{CM}}$

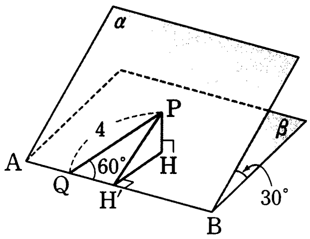
$$= \frac{\sqrt{(\overline{AC}\sin 60^\circ)^2 - 1^2}}{\overline{AC}\sin 60^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

28. 답 ③

[해설]
점 P에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 PH의 길이가 구하는 거리이다.
한편, 점 H에서 선분 AB에 내린 수선을 발을 H′이라 하면 삼수선의 정리에 의해

$\overline{PH'} \perp \overline{AB}$



이므로 두 직각삼각형 PQH′, PH′H에서

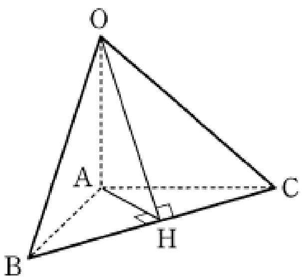
$$\overline{PH} = \overline{PH'}\sin 30^\circ$$
$$= \overline{PQ}\sin 60^\circ \times \sin 30^\circ$$
$$= 4 \times \sin 60^\circ \times \sin 30^\circ$$
$$= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

29. 답 ④

[해설] $\overline{OA} \perp \overline{AB}$, $\overline{OA} \perp \overline{AC}$이므로

$\overline{OA} \perp (\text{평면 } ABC)$

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{OH} \perp \overline{BC}$이다.



따라서 점 P가 H일 때, 즉 $\overline{OH} + \overline{AH}$가 구하는 최솟값이다.
한편, $\overline{AB} = 2$, $\overline{AC} = 2\sqrt{3}$이므로

$\overline{BC} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

이고, $\triangle ABC$의 넓이는

$\frac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{BC} \times \overline{AH}$

$\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{AH}$

$\therefore \overline{AH} = \sqrt{3}$

이때, $\triangle OAH$는 직각삼각형이므로

$\overline{OH} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$

$\therefore \overline{OP} + \overline{AP} \geq \overline{OH} + \overline{AH} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

따라서 $\overline{OP} + \overline{AP}$의 최솟값은 $3\sqrt{3}$이다.

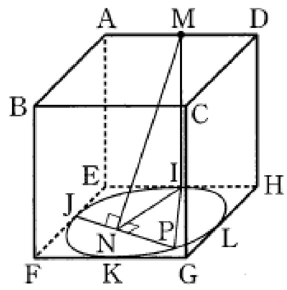
30. 답 ④

[해설] 점 M, I가 각각 선분 AD, EH의 중점이므로

$\overline{MI} \perp (\text{평면 } EFGH)$ … ㉠

또, 점 M에서 현 JP에 내린 수선의 발을 N이라 하면 $\overline{MN} \perp \overline{JP}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{IN} \perp \overline{JP}$ … ㉡



이때, 선분 IN은 평면 $EFGH$에 포함되고 ㉠이므로

$\overline{MI} \perp \overline{IN}$

즉, 삼각형 MIN은 직각삼각형이다.

$\therefore \overline{IN} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2^2} = \frac{3}{2}$

한편, 각 IPJ는 호 IJ에 대한 원주각이므로 크기가 45°이다.

따라서 $\overline{NP} = \overline{IN} = \frac{3}{2}$이므로

$\overline{IP} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

참고

삼각형 IJP의 외접원은 반지름의 길이가 1이므로 사인법칙

$\frac{\overline{IJ}}{\sin(\angle IPJ)} = 2R$ (R는 외접원의 반지름의 길이)

를 이용할 수 있다.

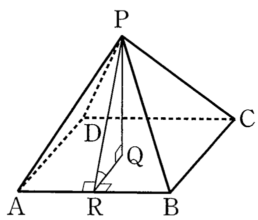
즉, $\overline{IJ} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $R = 1$이므로

$\frac{\sqrt{2}}{\sin(\angle IPJ)} = 2$, $\sin(\angle IPJ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \angle IPJ = 45^\circ$

31. 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

[해설] 두 평면 PAB, $ABCD$의 교선이 AB이고, 모서리 AB의 중점을 R라 하면 $\overline{PR} \perp \overline{AB}$이다. 또, 점 P에서 면 $ABCD$에 내린 수선의 발을 Q라 하면 점 Q는 정사각형 $ABCD$의 대각선의 교점이므로 $\overline{QR} \perp \overline{AB}$이다.



따라서 두 면 PAB, $ABCD$가 이루는 각의 크기 θ는 $\angle PRQ$의 크기와 같다.

한편, $\overline{PR} = \overline{PA}\sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$,

$\overline{QR} = \frac{1}{2}\overline{AD} = 1$이므로 $\cos\theta = \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

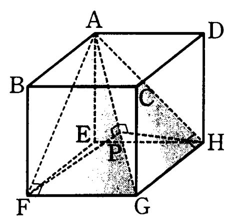
32. 답 ③

[해설] $\overline{FG}$는 평면 ABFE와 수직이므로

$\overline{AF} \perp \overline{FG}$

또, $\overline{HG}$는 평면 AEHD와 수직이므로

$\overline{AH} \perp \overline{HG}$



따라서 정육면체의 한 모서리의 길이를 1이라 하고, 점 F에서 $\overline{AG}$에 내린 수선의 발을 P라 하면 직각삼각형 AFG의 넓이에서

$$\frac{1}{2}\times\overline{AF}\times\overline{FG}$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{AG}\times\overline{FP}$$

이므로

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\overline{FP}$$
$$\therefore\ \overline{FP}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

그런데 두 직각삼각형 AFG, AHG는 합동이므로 점 H에서 $\overline{AG}$에 내린 수선의 발도 P이고, $\overline{HP}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이다.

따라서 두 평면 AFG와 AHG가 이루는 각의 크기는 $\overline{FP}$, $\overline{HP}$가 이루는 각의 크기가 같다.

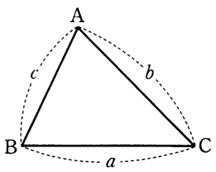
$\overline{FH}=\sqrt{2}$이므로 삼각형 PFH에서 제이코사인법칙에 의해

$$\cos\theta=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=-\frac{1}{2}$$
$$\therefore\ \cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

참고 제이코사인법칙

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$



33. 답 ④

[해설] 사면체 ABCD에서 $\overline{AD}\perp$ (평면 BCD), $\overline{BC}\perp\overline{BD}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$

따라서 △ABC는 직각삼각형이므로

$$\overline{AC}=\sqrt{24^2+7^2}$$
$$=\sqrt{625}=25$$

또한, $\overline{AD}\perp$ (평면 BCD)이므로

$\overline{BD}\perp\overline{AD}$, $\overline{CD}\perp\overline{AD}$

따라서 평면 ABD는 평면 ACD각 이루는 각 θ는

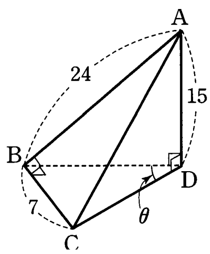
$\theta=\angle BDC$

이때, 삼각형 BCD는 직각삼각형이므로

$$\sin\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=\frac{7}{\overline{CD}}$$

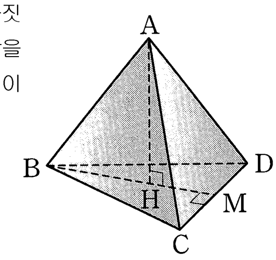
이때, 직각삼각형 ACD에서

$$\overline{CD}=\sqrt{25^2-15^2}$$
$$=\sqrt{400}=20$$
$$\therefore\ \sin\theta=\frac{7}{20}$$



34. 답 ③

[해설] 정사면체에 한 변의 길이를 a, 꼭짓점 A에서 밑면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 △BCD의 무게중심이므로



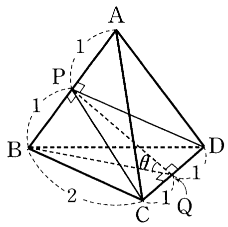
$$\overline{BH}=\frac{2}{3}\overline{BM}$$
$$=\frac{2}{3}\times\overline{BC}\times\sin60^\circ$$
$$=\frac{2}{3}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$
$$\therefore\ \cos\theta=\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

35. 답 ⑤

[해설] 정사면체 $ABCD$에서 점 P가 $\overline{AB}$의 중점이면 $\overline{AB}\perp\overline{CP}$, $\overline{AB}\perp\overline{DP}$이므로 $\overline{AB}\perp$(평면 PCD) 이다.

이때, $\overline{CD}$의 중점을 Q라 하면

$\angle BQP=\theta$이고 △PBQ는 직각삼각형이므로 $\cos\theta=\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}$



$\overline{BQ}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$, $\overline{PQ}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$

$$\therefore\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

36. 답 ⑤

[해설] 직선 OH는 밑면 ABCD와 수직이므로

$\overline{OH}\perp\overline{BH}$, $\overline{OH}\perp\overline{EH}$

따라서, 두 평면 OBH와 OEH가 이루는 각 θ에 대하여

$\theta=\angle BHE$

이때, $\overline{BH}=\sqrt{1^2+2^2}$

$\overline{EH}=\sqrt{1^2+2^2}$

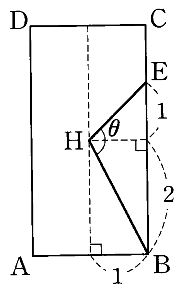
$=\sqrt{5}$

$\overline{EH}=\sqrt{1^2+1^2}$

$=\sqrt{2}$

$\therefore|\cos\theta|$

$$=\left|\frac{\overline{BH}^2+\overline{EH}^2-\overline{BE}^2}{2\overline{BH}\cdot\overline{EH}}\right|$$
$$=\left|\frac{-2}{2\sqrt{10}}\right|$$
$$=\frac{\sqrt{10}}{10}$$



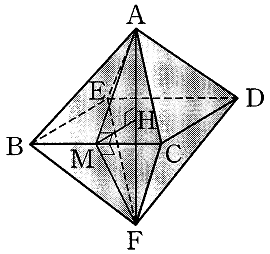
37. 답 ②

[해설] 정팔면체의 한 변의 길이를 $2a$, 변 BC의 중점을 M이라하면 △ABC, △FCB는 정삼각형이므로

$\overline{AM}\perp\overline{BC}$, $\overline{FM}\perp\overline{BC}$

그러므로 두 선분 AM, FM이

이루는 각의 크기가 θ이다.



한편,

$\overline{AM} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BM}^2}$

$= \sqrt{(2a)^2 - a^2}$

$= \sqrt{3}\,a$

마찬가지로

$\overline{FM} = \sqrt{3}\,a$

선분 AF와 평면 BCDE가 만나는 점을 H라 하면 $\overline{AH} \perp \overline{MH}$이므로

$\overline{AF} = 2\overline{AH}$

$= 2\sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{MH}^2}$

$= 2\sqrt{(\sqrt{3})^2 - a^2}$

$= 2\sqrt{2}\,a$

따라서 △AMF에서 제이코사인 법칙을 이용하면

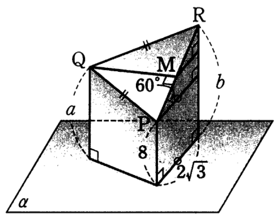
$$\cos\theta = \frac{\overline{AM}^2 + \overline{FM}^2 - \overline{AF}^2}{2\overline{AM}\cdot\overline{FM}}$$

$$= \frac{3a^2 + 3a^2 - 8a^2}{2\cdot\sqrt{3}\,a\cdot\sqrt{3}\,a}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

38.* 답 *25

[해설] 세 원기둥의 밑면의 반지름의 길이가 모두 같으므로 삼각형 QRP가 이등변삼각형이려면 세 원기둥의 높이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루어야 하고, 이때 $\overline{QP} = \overline{QR}$이다.



또, 선분 PR의 중점을 M이라 하면 점 Q를 지나고 평면 α와 평행한 평면 β와 평면 QPR의 교선은 선분 QM이다.

이때, $\overline{QM} \perp \overline{PR}$이므로 두 평면 QPR, β가 이루는 각의 크기는 선분 PR와 평면 α가 이루는 각의 크기는 $60°$와 같다.

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이므로 위의 그림에서 점 P와 점 R의 평면 α로부터의 거리의 차는

$2\sqrt{3}\tan 60°$

$= 2\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$= \sqrt{6}$

따라서 세 원기둥의 높이는 각각 $8, 8+3, 8+6$이므로

$a = 11, b = 14$

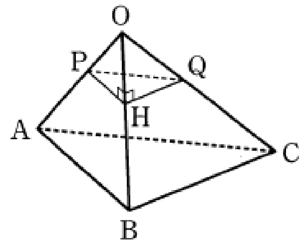
$\therefore\ a + b = 25$

***39.* 답 ⑤**

[해설] $\overline{PH} \perp \overline{OB}$이고, $\overline{QH} \perp \overline{OB}$를 만족하는 점 P, H, Q를 모서리 OA, OB, OC 위에 각각 잡고, $\overline{OH} = a$라 하면

△OPH에서 ∠$AOB = 45°$이므로

$\overline{PH} = a$. $\overline{OP} = \sqrt{2}\,a$



△OQH에서 ∠$BOC = 60°$이므로

$\overline{QH} = \sqrt{3}\,a$, $\overline{OQ} = 2a$

△OPQ에서 ∠$AOC = 90°$이므로

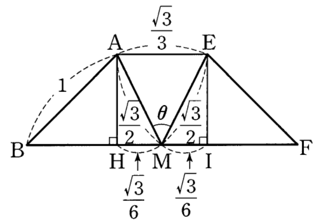
$\overline{PQ} = \sqrt{(\sqrt{2}\,a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{6}\,a$

따라서 △PHQ에서 ∠$PHQ = \theta$이므로 제이코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \frac{a^2 + (\sqrt{3}\,a)^2 - (\sqrt{6}\,a)^2}{2\cdot a\cdot\sqrt{3}\,a} = \frac{-2a^2}{2\sqrt{3}\,a^2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

***40.* 답 ④**

[해설] 정사면체의 한 모서리의 길이를 1이라 하고, 두 꼭짓점 A, E에서 밑면에 내린 수선의 발을 각각 H, I라고 하면 두 점 H, I는 각각 △BCD, △CDF의 무게중심이다. 또한, 선분 CD의 중점을 M이라고 하면 그림과 같이 나타 낼 수 있다.

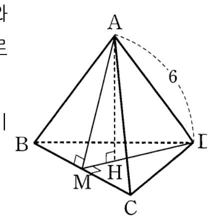


$$\therefore \cos\theta = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\frac{7}{6}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{9}$$

***41.* 답 ②**

[해설] 점 M은 선분 BC의 중점이고 △ABC와 △BCD는 정삼각형이므로



$\overline{AM} \perp \overline{BC}$, $\overline{DM} \perp \overline{BC}$

이고, 두 평면 ABC와 BCD가 이루는 각의 크기는 ∠AMD이다.

$\overline{AM} = \overline{DM} = 6 \times \sin 60° = 3\sqrt{3}$

점 A에서 밑면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 △BCD의 무게중심이므로 $\overline{DH} : \overline{MH} = 2 : 1$

이때, 선분 AM의 △BCD 위로의 정사영은 선분 MH이므로 선분 AM의 평면 BCD 위로의 정사영의 길이는

$\overline{MH} = \frac{1}{3} \times \overline{DM} = 3\sqrt{3} \times \frac{1}{3} = \sqrt{3}$

***42.* 답 ②**

[해설] 그림자의 길이가 6이므로

$\tan 30° = \frac{m}{6}$, $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{m}{6}$

$\therefore m = 2\sqrt{3}$

또한, 그림자의 길이가 0이 되도록 기울이면 막대를 평면 α와 $30°$를

이루도록 기울여야 하므로 정사영의 길이 l은

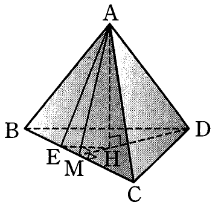
$l = m\cos 30° = 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 3$

43. 답 ④

[해설] 점 A에서 평면 BCD 위에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 AE의 정사영은 선분 HE이다.

이때, 변 BC의 중점을 M이라 하면



$\overline{MH} = \frac{1}{3}\overline{DM}$

$= \frac{1}{3}\overline{CD}\sin 60°$

$= \frac{1}{3}\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \sqrt{3}$

또, 점 E는 변 BC를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$\overline{EM} = \overline{BM} - \overline{BE}$

$= \frac{1}{2}\overline{BC} - \frac{1}{3}\overline{BC}$

$= \frac{1}{2}\times 6 - \frac{1}{3}\times 6 = 1$

따라서 구하는 정사영의 길이는 직각삼각형 EMH에서

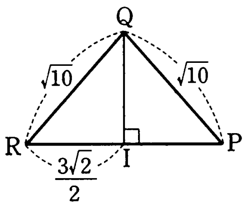
$\overline{EH} = \sqrt{\overline{EM}^2 + \overline{MH}^2}$

$= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$

$= 2$

44. 답 ⑤

[해설] △PQR에서



$\overline{PQ} = \overline{QR}$

$= \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

$\overline{PR} = \sqrt{3^2+3^2}$

$= 3\sqrt{2}$

점 Q에서 $\overline{PR}$에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{QI} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{11}{2}}$

$\therefore\ \triangle PQR = \frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{11}{2}}$

$= \frac{3\sqrt{11}}{2}$

한편, △PQR의 평면 CGHD 위로의 정사영은 △DCG이고

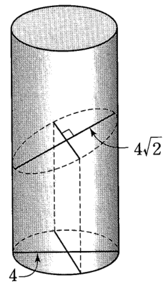
$\triangle DCG = \frac{1}{2}\times 3\times 3 = \frac{9}{2}$이므로

$\frac{3\sqrt{11}}{2}\cos\theta = \frac{9}{2}$에서

$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{11}}{11}$

45. 답 50

[해설] 단축의 길이는 밑면의 지름의 길이와 같으므로



$4\sqrt{2}\cos\theta = 4$에서

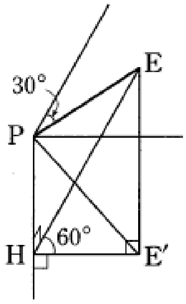
$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore 100\cos^2\theta = 100\times\frac{1}{2}$

$= 50$

46. 답 ④

[해설] 점 E에서 평면 $PCDQ$에 내린 수선의 발을 E', 점 E'에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 PE의 평면 $PCDQ$ 위로의 정사영은 선분 PE'이고, 삼수선의 정리에 의하여 $\angle PHE = 90°$이다.



이때, $\overline{PH} = 2\cos 60° = 1$,

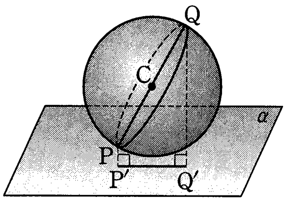
$\overline{EH} = 2\sin 60° = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$이고,

$\overline{E'H} = \overline{EH}\cos 60° = \sqrt{3}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\overline{PE'} = \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{E'H}^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

47. 답 ③

[해설] 정사영의 길이가 최소일 때는 선분 PQ가 평면 α와 60° 의 각을 이룰 때이므로 최솟값은 m은



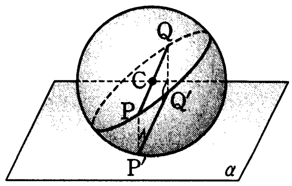
$m = \overline{PQ}\cos 60°$

$= 4\times\frac{1}{2} = 2$

또, 정사영의 길이가 최대일 때는 선분 PQ와 평면 α가 평행일 때이므로 최댓값은 M은

$M = \overline{PQ}\cos 0°$

$= 4\times 1 = 4$



따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$M + m = 4 + 2 = 6$

48. 답 ⑤

[해설]

ㄱ. 선분OA의 중점을 M이라고 하면

$\overline{OA}\perp\overline{BM}$, $\overline{OA}\perp\overline{CM}$

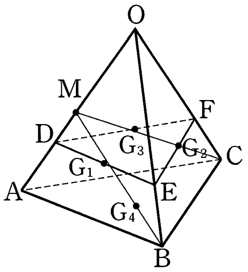
이므로 $\overline{OA}\perp$(평면 BCM)

$\therefore \overline{OA}\perp\overline{G_1G_3}$ (참)

ㄴ. $\overline{G_1G_3}//\overline{BC}$이고, $\overline{G_1G_3} = \frac{1}{3}\overline{BC} = 1$ 이므로 $\overline{G_1G_3}$의 평면 ABC로의 정사영의 길이는 $\overline{G_1G_3} = 1$이다. (참)

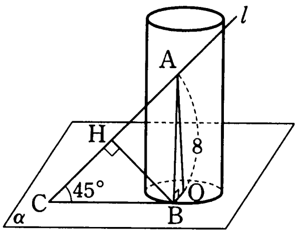
ㄷ. 세 점 G_1, G_2, G_3을 지나는 평면으로

정사면체를 자르면 윗부분은 한모서리의 길이가 2인 정사면체 $O-DEF$가 된다. 또한, 삼각형$G_1G_2G_3$은 정삼각형이므로 G_5는 삼각형DEF의 무게중심이다.
따라서, 세 점 O, G_4, G_5는 한 직선 위에 있다. (참)



49. 답 ②

[해설] 점 A를 지나는 모선을 $\overline{AB}$라 하면 $\overline{AB}$는 평면 α와 수직이다. 이때, 직선 l과 평면 α가 만나는 점을 C라 하면 직선 BC는 원기둥의 밑면에 접하는 접선이 된다.



또, $\overline{OB}\perp\overline{BC}$, $\overline{OB}\perp\overline{AB}$이므로

$\overline{OB}\perp$(평면 ABC)

따라서 점 B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{BH}$는 평면 ABC 위로의 $\overline{OH}$의 정사영이 되므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{OH}\perp\overline{AC}$이고, 점 O에서 직선 l까지의 거리는 선분 OH이다.

$\overline{AB}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$

$\overline{BC}=\dfrac{\overline{AB}}{\tan 45^\circ}=4\sqrt{3}$

$\overline{BH}=\overline{BC}\sin 45^\circ$

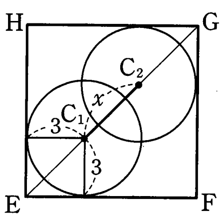
$=4\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{6}$

$\therefore\ \overline{OH}=\sqrt{\overline{BH}^2+\overline{OB}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{6})^2+4^2}=2\sqrt{10}$

50. 답 ③

[해설] 두 구 C_1, C_2를 평면 EFGH에 정사영 시키면 다음 그림과 같다.



두 구를 정사영시켜서 얻은 두 원의 중심 사이의 거리를 x라 하면

$\overline{EG}=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$이므로

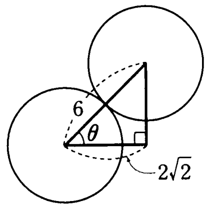
$x=8\sqrt{2}-2\sqrt{3^2+3^2}$

$=8\sqrt{2}-6\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}$

또, 두 구는 서로 외접하므로 오른쪽 그림과 같이 두 구의 중심사이의 거리는 6이다.

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{6}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$



51. 답 32

[해설] 반지름의 길이가 8인 원의 넓이 S는 $S=64\pi$

이때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 60°이므로 정사영의 넓이 S'은 $S'=64\pi\cdot\cos 60^\circ=32\pi$

$\therefore a=32$

52. 답 ②

[해설] $\triangle AGD$의 밑면 $EFGH$ 위로의 정사영은 $\triangle EGH$이다.

정육면체의 한 모서리의 길이가 2이므로

$\triangle AGD=\dfrac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{DG}$ ($\because \angle ADG$는 직각)

$=\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

$\triangle EGH=\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$

평면 AGD와 평면 $EFGH$가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

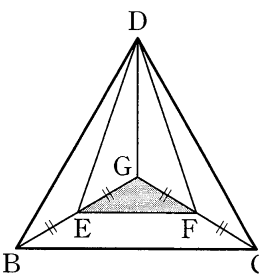
$2=2\sqrt{2}\cos\theta$에서 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\triangle EFG$의 넓이는 2이므로 $\triangle EFG$의 평면 ADG 위로의 정사영의 넓이는 $2\cos\theta=\sqrt{2}$

53. 답 20

[해설] 정사면체의 꼭짓점 A는 밑면의 무게중심 G로, $\overline{AB}$는 $\overline{GB}$로, $\overline{AD}$는 $\overline{GD}$로, $\overline{AB}$의 중점 M은 $\overline{GB}$의 중점 E로, $\overline{AC}$의 중점은 $\overline{GC}$의 중점 F로 각각 정사영된다.

따라서 $\triangle MND$를 밑면 BCD 위로 정사영한 도형은 $\triangle DEF$이다.



이때, $\triangle DEG=\dfrac{1}{2}\triangle DBG$,

$\triangle DFG=\dfrac{1}{2}\triangle DCG$,

$\triangle EFG=\dfrac{1}{4}\triangle BCG$이므로

$\triangle DEF=\dfrac{1}{2}\triangle DBG+\dfrac{1}{2}\triangle DCG+\dfrac{1}{4}\triangle BCG$

$=\dfrac{1}{3}\triangle BCD\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{5}{12}\triangle BCD=\dfrac{5}{12}\times48=20$

54. 답 16

[해설] 직육면체에서 $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$, $\overline{AE}=c$라 하면

직육면체의 부피가 160이므로

$abc=160$ ⋯ ㉠

$\triangle CHF$의 평면 $ABCD$, 평면 $ABFE$ 위로의 정사영의 넓이가 각각 10, 20이므로

$\frac{1}{2}ab=10$, $\frac{1}{2}ac=20$

$\therefore ab=20$, $ac=40$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=5$, $b=4$, $c=8$

따라서 $\triangle CHF$의 평면 $ADHE$ 위로의 정사영의 넓이는

$\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8=16$

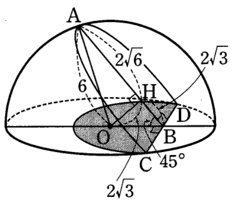
55. 답 15

[해설] 오른쪽 그림에서

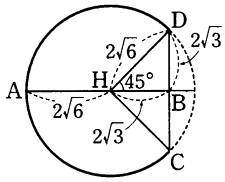
$\overline{AH}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}$

$=2\sqrt{6}$

$\overline{BH}=2\sqrt{3}$



이고, 평면 α와 45°의 각을 이루는 평면으로 반구를 자른 단면은 다음 그림과 같다.



즉, $\overline{BD}=\sqrt{(2\sqrt{6})^2-(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$ 이므로

$\angle DHB=45^\circ$

그런데 단면의 넓이는

$\pi\times(2\sqrt{6})^2\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}=18\pi+12$

따라서 이 단면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 $\sqrt{2}(a+b\pi)$이므로

$\sqrt{2}(a+b\pi)=(18\pi+12)\cos 45^\circ$

$=(18\pi+12)\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

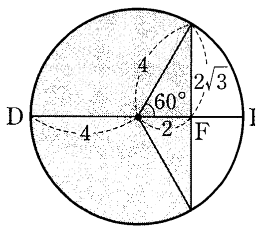
$=\sqrt{2}(9\pi+6)$

$\therefore\ a=6,\ b=9$

$\therefore a+b=15$

56. 답 96

[해설] 점 C에서 밑면에 내린 수선의 발을 F라 하면 단면의 정사영은 오른쪽 그림과 같으므로 정사영의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\sqrt{3}$

$=\frac{32}{3}\pi+4\sqrt{3}$

$\overline{CD}=\sqrt{\overline{DF}^2+\overline{CF}^2}=\sqrt{(4+2)^2+(3\sqrt{5})^2}=9$

단면과 밑면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\frac{\overline{DF}}{\overline{CD}}=\frac{2}{3}$

따라서 단면의 넓이를 S라 하면

$S\cos\theta=\frac{2}{3}S=\frac{32}{3}\pi+4\sqrt{3}$

$\therefore S=\frac{3}{2}\times\left(\frac{32}{3}\pi+4\sqrt{3}\right)=16\pi+6\sqrt{3}$

$\therefore ab=16\times 6=96$

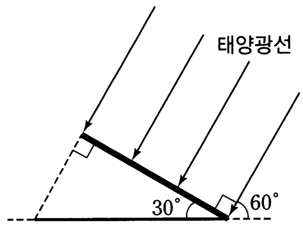
참고 부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

$l=r\theta$, $S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r^2\theta$

57. 답 30

[해설]



태양광선이 위의 그림처럼 판에 수직으로 비춰질 때, 즉 지면과 판이 이루는 각의 크기가 30°이면 그림자의 넓이가 S가 최대가 된다.

판의 넓이는 $4^2-\pi=16-\pi$이므로

$S=\frac{16-\pi}{\cos 30^\circ}$

$=\frac{16-\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=\frac{\sqrt{3}(32-2\pi)}{3}$

$\therefore\ a=32,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=32-2=30$

58. 답 ④

[해설] 점 O 에서 평면 ABC 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 점 H 는 삼각형 ABC 의 무게중심이고, 선분 AB 의 중점을 M 이라 하면

$\overline{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$

$\overline{MH}=\sqrt{3}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 삼각형 OAB 와 삼각형 ABC 가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\frac{\overline{MH}}{\overline{OM}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$

또한, 정삼각형에 내접하는 원의 중심은 정삼각형의 무게중심과 일치하므로 반지름의 길이를 r라 하면

$r=\sqrt{3}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 삼각형 OAB 에 내접하는 원의 삼각형 ABC 위로의 정사영의 넓이를 S라 하면

$S=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\pi\times\cos\theta=\frac{1}{3}\pi\times\frac{1}{3}=\frac{\pi}{9}$

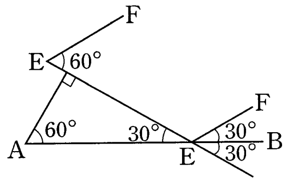
59. 답 ④

[해설] 직사각형 EFGH위의 색칠한 단면의 넓이를 S라 하면

$S\cos 60^\circ = 2^2\pi,\ S\times\frac{1}{2}=4\pi$

$\therefore\ S=8\pi$

또한, 두 직사각형 ABCD, EFGH가 이루는 각은 그림과 같이 나타내면 30° 이다.



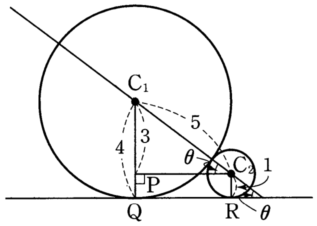
따라서 구하고자 하는 정사영의 넓이 S'은

$S' = 8\pi\cos 30^\circ = 8\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\,\pi$

60. 답 ⑤

[해설] 두 구의 중심C_1, C_2에서 직사각형ABCD에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하자.

두 평면 ABCD, EFGH가 이루는 각을 θ, 점C_2 에서 선분 C_1Q에 내린 수선의 발을 P라 하면



$\overline{PC_1}=\overline{QC_1}-\overline{PQ}$

$=\overline{QC_1}-\overline{RC_2}$

$=4-1=3$

$\overline{C_1C_2}=4+1=5$

에서 $\overline{PC_2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{25-9}=4$ 이므로

$\cos\theta=\frac{4}{5}$

또한, 두 원 S_1, S_2의 넓이는 각각 16π, π이므로

구하고자 하는 정사영의 넓이의 합은

$(16\pi+\pi)\cos\theta=17\pi\times\frac{4}{5}=\frac{68}{5}\pi$

61. 답 27

[해설] 두 평면 OAB, ABC가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

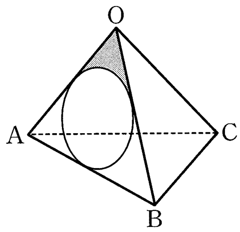
$\overline{OM}=\overline{CM}$, $\overline{CH}:\overline{MH}=2:1$

이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{MH}}{\overline{OM}}$$

$$=\frac{\overline{MH}}{\overline{CM}}=\frac{1}{3}$$

그림과 같이 △OAB에서 어두운 부분을 평면 ABC 위로 정사영시키고, △OBC, △OCA에서도 같은 방법으로 정사영시키면 이들은 서로 겹치지 않고 S_1, S_2, S_3로 둘러싸인 부분과 일치한다.



△OAB에서 내접원의 반지름의 길이를 r이라 하면 정삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}r(6+6+6)=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2$

$\therefore\ r=\sqrt{3}$

따라서 어두운 부분의 넓이는

$\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2-3\pi\right)=3\sqrt{3}-\pi$

이므로 구하는 넓이 S는

$S=(3\sqrt{3}-\pi)\times\cos\theta\times 3$

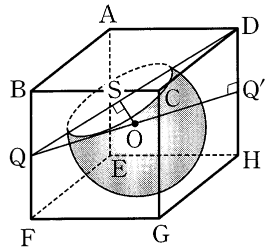
$=(3\sqrt{3}-\pi)\times\frac{1}{3}\times 3$

$=3\sqrt{3}-\pi$

$\therefore\ (S+\pi)^2=(3\sqrt{3})^2=27$

62. 답 ②

[해설] 내접하는 구의 중심을 O, $\overline{DH}$의 중점을 Q′, 점 O에서 $\overline{DQ}$에 내린 수선의 발을 S라 하자.



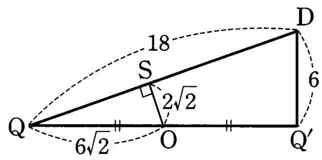
△DQQ′∽△OQS이고

$\overline{DQ'}=6$

$\overline{OQ}=\sqrt{(12\sqrt{2})^2+6^2}=18$

$\overline{OQ}=6\sqrt{2}$

$\overline{OS}=6\sqrt{2}\times\frac{6}{18}=2\sqrt{2}$



구의 반지름의 길이가 6이므로 구를 평면 DPQR로 자른 단면의 반지름의 길이를 r이라 하면

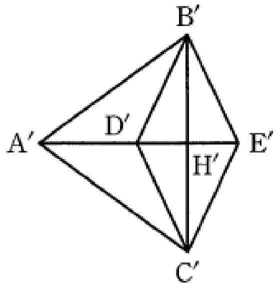
$r^2=6^2-(2\sqrt{2})^2=28$

따라서 단면의 넓이는 28π이다.

63. 답 20

[해설] 정사각형 $BDCE$의 두 대각선의 교점을 H라 하고, 점 A, B, C, D, E, H의 평면 α 위로의 정사영을 각각 A', B', C', D', E', H'이라 하면 평면 ADE와 선분 BC는 수직이므로 네 점 A', D', H', E'은 선분 $B'C'$의 수직이등분선 위에 있다.

따라서 평면 α 위에 그려지는 이등변삼각형과 정사각형의 그림자는 다음 그림과 같다.



평면 α와 직선 BC가 평행하므로

$\overline{B'C'}=\overline{BC}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=4$

평면 α와 평면 $BDCE$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이므로

$\overline{D'H'}=\overline{E'H'}=\overline{EH}cos\frac{\pi}{3}=2\times\frac{1}{2}=1$

평면 α와 직선 AH가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$이고,

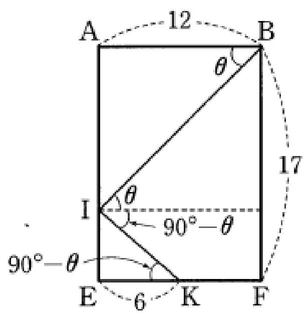
$\overline{AH}=\sqrt{(4\sqrt{7})^2-2^2}=6\sqrt{3}$이므로

$\overline{A'H'}=\overline{AH}cos\frac{\pi}{6}=6\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9$

따라서 평면 α 위에 그려지는 이등변삼각형과 정사각형의 그림자의 넓이 S는 $S=\frac{1}{2}\times4\times(9+1)=20$

64. 답 ④

[해설]



$\overline{AI}=\overline{AB}tan\theta=12\tan\theta\cdots$㉠

$\overline{IE}=\overline{EK}tan(90^\circ-\theta)=\frac{6}{\tan\theta}\cdots$ ㉡

이때, $\overline{AI}+\overline{IE}=17$이므로

$12\tan\theta+\frac{6}{\tan\theta}=17$

$12\tan^2\theta-17\tan\theta+6=0$

$(3\tan\theta-2)(4\tan\theta-3)=0$

$\therefore \tan\theta=\frac{2}{3}$ 또는 $\tan\theta=\frac{3}{4}$

㉠, ㉡에서 $\tan\theta=\frac{2}{3}$이면 $\overline{AI}=8$, $\overline{IE}=9$

$\tan\theta=\frac{3}{4}$이면 $\overline{AI}=9$, $\overline{IE}=8$

이때, $\overline{IE}<\overline{AI}$이므로 $\tan\theta=\frac{3}{4}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$, $\sin\theta=\frac{3}{5}$

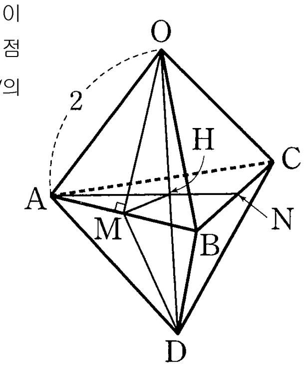
한편, 평면 $BCJI$와 $IJLK$로 원기둥을 자를 때 생기는 두 단면을 각각 X, Y, 그 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면 X, Y를 평면 $EFGH$ 위에 내린 정사영의 넓이는 각각 36π, 18π이므로

$S_1=\frac{36\pi}{\cos\theta}=36\pi\times\frac{5}{4}=45\pi$

$S_2=\frac{18\pi}{\cos(90^\circ-\theta)}=\frac{18\pi}{\sin\theta}=18\pi\times\frac{5}{3}=30\pi$

$\therefore S_1+S_2=45\pi+30\pi=75\pi$

65. 답 ③



[해설] ㄱ. 두 점 O, D를 잇는 직선이 평면 ABC와 만나는 점을 H라 하면 점 H는 $\triangle ABC$의 무게중심이고, $\overline{BC}$의 중점을 N이라 하면

$\overline{AH}=\frac{2}{3}\overline{AN}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\triangle OAH$는 직각삼각형이므로

$\overline{OH}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$\therefore \triangle OAH=\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{OH}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 $\triangle OAD$의 넓이는 $2\times\triangle OAH=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (참)

ㄴ. $\overline{OM}=\overline{DM}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$, $\overline{OD}=2\overline{OH}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$이므로

$\triangle OMD$에서 제이코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=-\frac{7}{9}$ (거짓)

ㄷ. $\triangle OAB$와 $\triangle ABC$가 이루는 각의 크기를 α라 하면

$\cos\alpha=\frac{\overline{MH}}{\overline{OM}}=\frac{1}{3}$

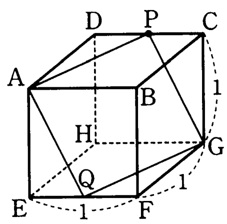
한편, $\triangle OAB$의 내접원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 내접원의 넓이는 $\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{\pi}{3}$

따라서 $\triangle OAB$에 내접하는 원을 평면 ABC에 정사영한 도형의 넓이는 $\frac{\pi}{3}cos\alpha=\frac{\pi}{9}$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

66. 답 ⑤

[해설] 그림과 같이 잘린 단면은 평행사변형 AQGP이다.



이때, $\overline{\mathrm{CP}}=x$라 하면 $\overline{\mathrm{DP}}=1-x$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{1^2+(1-x)^2}$

$= \sqrt{x^2-2x+2}$

$\overline{PG} = \sqrt{x^2+1}$

$\overline{AG} = \sqrt{1^2+1^2+1^2}$

$= \sqrt{3}$

$\therefore \cos(\angle APG) = \dfrac{\overline{AG}^2+\overline{PG}^2-\overline{AP}^2}{2\cdot\overline{AG}\cdot\overline{PG}}$

$= \dfrac{3+(x^2+1)-(x^2-2x+2)}{2\sqrt{3}\sqrt{x^2+1}}$

$= \dfrac{x+1}{\sqrt{3x^2+3}}$

$\sin(\angle AGP) = \sqrt{1-\cos^2(\angle AGP)}$

$= \sqrt{1-\dfrac{x^2+2x+1}{3x^2+3}}$

$= \sqrt{\dfrac{2x^2-2x+2}{3x^2+3}}$

$\therefore \square AQGP = 2\triangle AGP$

$= 2\times\dfrac{1}{2}\times\overline{AG}\times\overline{GP}\times\sin(\angle AGP)$

$= \sqrt{3}\times\sqrt{x^2+1}\times\sqrt{\dfrac{2x^2-2x+2}{3x^2+3}}$

$= \sqrt{2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}}$

따라서 $x=\dfrac{1}{2}$일 때 평행사변형 AQGP의 넓이의 최솟값은 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$이다.

***67.* 답** 10

[해설] 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overline{PA}=4\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{OP}=4\sqrt{3}\,sin60^\circ=6$

또, $\overline{OA}=4\sqrt{3}\,cos60^\circ=2\sqrt{3}$

$\therefore \overline{OQ}=2\sqrt{3}\,tan45^\circ=2\sqrt{3}$

$\triangle OPQ$에서 제이코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{6^2+(2\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot6\cdot2\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

$\triangle APO$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times6\times2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

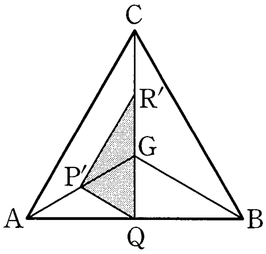
따라서 삼각형 APO 평면 β 위로의 정사영의 넓이는

$6\sqrt{3}\,cos\theta=6\sqrt{3}\times\dfrac{5\sqrt{3}}{9}=10$

***68.* 답** ⑤

[해설] 꼭짓점 O의 평면 ABC 위로의 정사영은 $\triangle ABC$의 무게중심이다.

또, 점 P, R의 평면 ABC 위로의 정사영은 각각 $\overline{AG}$, $\overline{CG}$의 중점이다.



오른쪽 그림과 같이 $\triangle PQR$의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는

$\triangle P'QR'=\triangle GR'P'+\triangle GP'Q$

$=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}\triangle ABC+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}\triangle ABC$

$=\dfrac{1}{6}\triangle ABC=\dfrac{1}{6}\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

한편, $\triangle PQR$에서 $\overline{PR}=\overline{PQ}=1$, $\overline{PR}\,/\!/\,\overline{AC}$, $\overline{PQ}\,/\!/\,\overline{OB}$, $\overline{BO}\perp\overline{AC}$이므로 $\angle QPR=90^\circ$

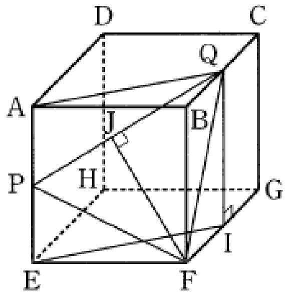
따라서 $\triangle PQR$는 직각이등변삼각형이므로

$\triangle PQR=\dfrac{1}{2}\times1\times1=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\triangle P'QR'}{\triangle PQR}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{6}}{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

***69.* 답** 25

[해설] 점 Q에서 평면 $EFGH$에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼각형 PQF의 평면 $EFGH$로의 정사영은 삼각형 EFI이다. 정육면체의 한 모서리의 길이를 $2a$라 하면



$\overline{AQ}=\overline{QF}=\overline{PF}$

$=\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5}\,a$

$\overline{PQ}=\sqrt{a^2+(\sqrt{5}\,a)^2}=\sqrt{6}\,a$

이때, 점 F에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 J라 하면 삼각형 PQF는 $\overline{PF}=\overline{QF}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{FJ}=\sqrt{(\sqrt{5}\,a)^2-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}a$

따라서 두 삼각형 PQF, EFI의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면

$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\,a\cdot\dfrac{\sqrt{14}}{2}a=\dfrac{\sqrt{21}}{2}a^2$

$S_2=\dfrac{1}{2}\cdot2a\cdot a=a^2$

평면 PQF와 평면 $EFGH$가 이루는 각의 크기가 θ이므로

$\cos\theta=\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{a^2}{\dfrac{\sqrt{21}}{2}a^2}=\dfrac{2}{\sqrt{21}}$

$\cos^2\theta=\dfrac{4}{21}$

$\therefore m+n=21+4=25$

***70.* 답** ⑤

[해설]

ㄱ. $\overline{AB}\cos\theta=\overline{A'B}$ 이면 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$ 이고, $\overline{AA'}\perp\beta$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{A'B}\perp\overline{BC}$

따라서, 삼각형 $A'BC$는 직각삼각형이다. (참)

ㄴ. 선분BC의 중점을 M이라고 하면 무게중심 G는

$\overline{AG}:\overline{GM}=2:1$ 을 만족한다.

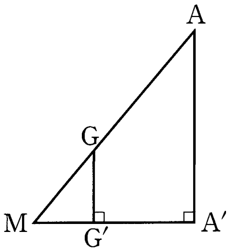
또한, 삼각형 $A'BC$에서 선분 $A'M$은 중선이고, 그림과 같이 점 G의 정사영을 G'이라고 하면

$\triangle AMA' \backsim \triangle GMG'$ 이므로

$\overline{A'G'}:\overline{G'M}=2:1$

따라서, G′은 삼각형 A′BC 의 무게 중심이다. (참)

ㄷ. 삼각형 ABC를 한 변의 길이가 2인 정삼각형이라고 하면



$\overline{AM}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\therefore \overline{A'M}=\sqrt{3}\cos\theta$

또한, ∠B와 ∠C는 예각이므로 삼각형 A′BC가 둔각삼각형이 되려면 ∠A′가 둔각이어야 한다.

즉, $\overline{A'B}^2+\overline{A'C}^2<\overline{BC}^2$ 이어야 하므로

$(1+3\cos^2\theta)+(1+3\cos^2\theta)<4$, $6\cos^2\theta<2$

$\therefore \cos^2\theta<\frac{1}{3}$ (참)

***71.* 답 ①**

[해설] 정삼각형 PBC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 $\triangle PBC$의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2=\frac{1}{2}r(4+4+4)$ $\qquad \therefore r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\triangle PBC$의 평면 $ABCD$ 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{1}{4}\times 4^2=4$이므로

두 평면 PBC, $ABCD$가 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면

$4\sqrt{3}\cos\theta_1=4$ $\qquad \therefore \cos\theta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$

두 평면 PBC, QBC가 이루는 각의 크기를 θ_2라 하면 두 점 P, Q에서 변 BC에 내린 수선의 발 H는 일치하며 $\triangle PHQ$에 $\overline{PH}=\overline{QH}=2\sqrt{3}$, $\overline{PQ}=4$이므로 제이코사인법칙에 의하여

$\cos\theta_2=\frac{12+12-16}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$

따라서 정사영 T_1, T_2, T_3의 넓이는 각각

$S_1=\pi\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot\cos\theta_1=\pi\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$

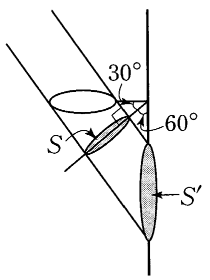
$S_2=S_1\cos\theta_1=\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{9}\pi$

$S_3=S_2\cos\theta_2=\frac{4}{9}\pi\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{27}\pi$

$\therefore \frac{S_2+S_3}{S_1}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$

***72.* 답 ①**

[해설] 그림과 같이 태양광선과 수직인 평면은 골대와 30° 를 이루므로 평면에 비친 그림자의 넓이를 S라고 하면



$S'=40^2\pi\cos30^\circ$

$=800\sqrt{3}\pi(cm^2)$

또한, 평면은 벽면과 60° 를 이루므로 구하고자 하는 벽면의 골대의 그림자의 넓이를 S'이라고 하면

$S'\cos60^\circ=800\sqrt{3}\pi$

$S'\times\frac{1}{2}=800\sqrt{3}\pi$

$\therefore S'=1600\sqrt{3}\pi(cm^2)$

***73.* 답** 5

[해설] 점 $A(-3,\ 1,\ -3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점 P 좌표는 $P(-3,\ -1,3)$

점 $B(1,\ 4,\ -6)$을 zx평면에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $Q(1,\ -4,\ -6)$

선분 PQ를 2 : 1 로 외분하는 점 R의 좌표는

$R\left(\frac{2\cdot1-1\cdot(-3)}{2-1},\ \frac{2\cdot(-4)-1\cdot(-1)}{2-1},\ \frac{2\cdot(-6)-1\cdot3}{2-1}\right)$

$\therefore R(5,\ -7,\ -15)$

$\therefore abc=525$

***74.* 답 ②**

[해설] 점 $P(a,\ b,\ c)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $P_1(a,\ -b,\ -c)$

$\overline{PP_1}=6$에서 $\sqrt{(2b)^2+(2c)^2}=6$

$\therefore b^2+c^2=9$ ⋯ ㉠

점 $P_1(a,\ -b,\ -c)$ 를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점은 $P_2(-a,\ -b,\ -c)$

$\overline{P_1P_2}=8$에서 $\sqrt{4a^2}=8$

$\therefore a^2=16$ ⋯ ㉡

점 $P_2(-a,\ -b,\ -c)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점은 $P_3(a,\ b,\ c)$

$\therefore \overline{P_2P_3}=2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

㉠, ㉡에서 $\overline{P_2P_3}=2\sqrt{a^2+b^2+c^2}=2\sqrt{9+16}=10$

***75.* 답 ①**

[해설]

yz평면에서 두 점 P, B를 지나는 직선의 방정식은

$y+\boxed{\frac{z}{3\sqrt{3}}}=1$

따라서 점 E의 좌표는 $E\left(0,\ \boxed{1-\frac{t}{3}},\ \sqrt{3}t\right)$이고,

점 F는 점 E와 z축에 대하여 대칭이므로

$F\left(0,\ \boxed{-1+\frac{t}{3}},\ \sqrt{3}t\right)$

또한, $\overline{AQ}\perp\overline{EF}$이므로 $\overline{AQ}=\sqrt{1+3t^2}$에서 삼각형 AEF의 넓이를 $S(t)$라하면

$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{EF}\times\overline{AQ}$

$=\frac{1}{2}\times2\left(1-\frac{t}{3}\right)\times\sqrt{1+3t^2}$

$=\boxed{\frac{3-t}{3}}\sqrt{1+3t^2}$

참고

x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

76. 답 ②

[해설]

점 P의 좌표를 $P(a,\ b,\ c)$라 하면

$P_1(a,\ b, -c),\ P_2(-a, -b, c)$

따라서

$\overline{P_1P_2} = \sqrt{\{a-(-a)\}^2 + \{b-(-b)\}^2 + \{(-c)-c\}^2}$

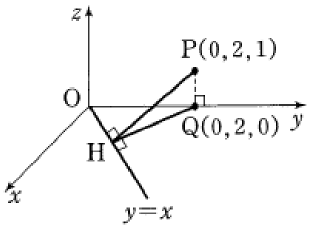
$= 2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$= 2\overline{OP}$

이므로 $\overline{OP} = \dfrac{1}{2}\overline{P_1P_2}$

77. 답 ③

[해설] 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 Q라 하면



$\overline{PQ} \perp (xy\text{평면}),\ \overline{PH} \perp \overline{OH}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{QH} \perp \overline{OH}$

$\triangle OHQ$에서 $\angle HOQ = 45^\circ$ 이므로

$\overline{QH} = \overline{OH}$

따라서 $\overline{OQ} = 2$이므로 $\overline{QH} = \sqrt{2}$

$\triangle PHQ$에 피타고라스의 정리를 적용하면

$\overline{PH} = \sqrt{\overline{PQ}^2 + \overline{QH}^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

78. 답 45

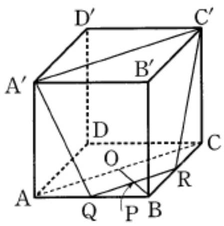
[해설] 모서리 $A'C'$의 중점은 $M(0,\ 0,\ 2)$이고

$\overline{PA'}^2 = \left(\dfrac{1}{2}-1\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}+1\right)^2 + 4 = \dfrac{13}{2}$

$\overline{PC'}^2 = \left(\dfrac{1}{2}+1\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}-1\right)^2 + 4 = \dfrac{13}{2}$

$\therefore \overline{PA'} = \overline{PC'}$

즉, $\triangle PA'C'$은 이등변삼각형이고, M이 밑변 $A'C'$의 중점이므로



$\overline{PM} \perp \overline{A'C'}$

$\overline{PM} = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+4} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ \overline{A'C'} = 2\sqrt{2}$

문제의 평면과 모서리 $AB,\ BC$의 교점을 각각 $Q,\ R$라 하면

$\overline{QR} \,/\!/\, \overline{A'C'} \,/\!/\, \overline{AC}$에서

$\dfrac{\overline{QR}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{OB}-\overline{OP}}{\overline{OB}},$

$\overline{AC} = 2\sqrt{2},\ \overline{OB} = \sqrt{2}$

$\therefore \overline{QR} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$

$\therefore S = \dfrac{1}{2}\overline{PM}(\overline{A'C'} + \overline{QR}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \times (2\sqrt{2} + \sqrt{2}) = \dfrac{9}{2}$

$\therefore 10S = 10 \times \dfrac{9}{2} = 45$

다른 풀이

문제의 조건에서 $\overline{OP} = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \overline{AC} = 2\sqrt{2}$

삼각형의 중점연결정리에 의하여 $\overline{QR} = \sqrt{2}$

$\therefore \square AQRC = \dfrac{1}{2}(2\sqrt{2} + \sqrt{2}) \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{2}$

평면 $A'QRC'$과 평면 ABC가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta = \dfrac{\overline{MO}}{\overline{OP}} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 9$

$\therefore \sec\theta = 3$

따라서 $S\cos\theta = \dfrac{3}{2}$에서 $S = \dfrac{\dfrac{3}{2}}{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{9}{2}$

$\therefore 10S = 10 \times \dfrac{9}{2} = 45$

79. 답 ⑤

[해설]

$A(a,\ 0,\ 0),\ B(0,\ b,\ 0),\ C(0,\ 0,\ c)$(단, $a>0,\ b>0, c>0$)라고 하면

$\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{13}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \ \dfrac{a^2}{a^2+b^2} = \dfrac{9}{13}$

$13a^2 = 9a^2 + 9b^2,\ 4a^2 = 9b^2$

$\therefore 2a = 3b \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{b}{\sqrt{b^2+c^2}},\ \ \dfrac{b^2}{b^2+c^2} = \dfrac{4}{5}$

$5b^2 = 4b^2 + 4c^2,\ b^2 = 4c^2$

$\therefore b = 2c \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠,㉡에 의하여 $A(3k,\ 0,\ 0),\ B(0,\ 2k,\ 0),\ C(0,\ 0,\ k)$라 하고, 점 O에서 선분 AB까지의 거리를 h라 하면 삼각형 OAB에서

$\dfrac{1}{2} \times 3k \times 2k = \dfrac{1}{2} \times h \times \sqrt{(3k)^2 + (2k)^2}$

$6k^2 = h\sqrt{13}\,k \qquad \therefore h = \dfrac{6k}{\sqrt{13}}$

또한, 점 C에서 선분 AB까지의 거리를 d라 하면

$d = \sqrt{k^2 + \left(\dfrac{6k}{\sqrt{13}}\right)^2} = \dfrac{7k}{\sqrt{13}}$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{h}{d} = \dfrac{\dfrac{6k}{\sqrt{13}}}{\dfrac{7k}{\sqrt{13}}} = \dfrac{6}{7}$

80. 답 ③

[해설]

ㄱ. $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$이라 하면 삼각형 OAP에서

$\tan a = \tan 60^\circ = \dfrac{b}{a},\ \sqrt{3} = \dfrac{b}{a}$

$\therefore\ b = \sqrt{3}\,a$ (참)

ㄴ. $\overline{\mathrm{OQ}} = 2$이므로

$b = \overline{\mathrm{OQ}}\cos 30^\circ = 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3$

또, $\overline{\mathrm{OP}} = 2$이므로

$\sin a = \dfrac{b}{\overline{\mathrm{OP}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ a = 60°$ (참)

ㄷ. $\angle \mathrm{QOP} = 30°$ 이므로 삼각형 OPQ에서

$\cos 30° = \dfrac{\overline{\mathrm{OP}}^2 + \overline{\mathrm{OQ}}^2 - \overline{\mathrm{PQ}}^2}{2 \times \overline{\mathrm{OP}} \times \overline{\mathrm{OQ}}}$

$= \dfrac{(a^2+b^2)+(b^2+c^2)-(a^2+c^2)}{2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}}$

$= \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

그런데 $\mathrm{A}(a, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, b, 0)$이라 하면 두 삼각형 OAP와 OBQ에서

$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$ 이므로

$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

81. 답 -5

[해설] 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 $Q(a,\ 0,\ 0)$에 대하여

$\overline{PQ} = \sqrt{b^2+c^2} = 3\sqrt{5}$

$\therefore b^2+c^2 = 45\ \cdots$ ㉠

점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 $R(0,\ b,\ 0)$에 대하여

$\overline{PR} = \sqrt{a^2+c^2} = 5$

$\therefore a^2+c^2 = 25\ \cdots$ ㉡

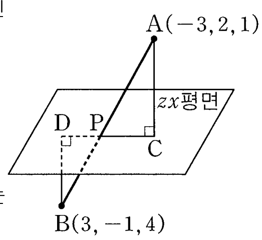
또한, 점 P에서 z축에 내린 수선의 발 H의 좌표가 $H(0,\ 0,\ -3)$이므로 $c=-3$

㉠, ㉡에서 $a=4,\ b=-6$ $(\because a>0,\ b<0)$

$\therefore P(4,\ -6,\ -3)$ $\qquad \therefore a+b+c=-5$

82. 답 ③

[해설] 두 점 $A,\ B$에서 zx평면에 내린 수선의 발을 각각 $C,\ D$라 하면



$\overline{AC} = 1,\ \overline{BD} = 1$

이때, $\triangle ACP \backsim \triangle BDP$이므로

$\overline{AP} : \overline{BP} = \overline{AC} : \overline{BD} = 2 : 1$

따라서 점 P는 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$P\left(\dfrac{2\cdot3+1\cdot(-3)}{2+1},\ \dfrac{2\cdot(-1)+1\cdot2}{2+1},\ \dfrac{2\cdot4+1\cdot1}{2+1}\right)$

$\therefore P(1,\ 0,\ 3)$

$\therefore \overline{OP} = \sqrt{1^2+0+3^2} = \sqrt{10}$

83. 답 36

[해설] $\overline{AB} = \sqrt{(3-0)^2+(-3-3)^2+(0+3)^2} = 3\sqrt{6}$

$\overline{BC} = \sqrt{(-3-3)^2+(0+3)^2+(3-0)^2} = 3\sqrt{6}$

$\overline{CA} = \sqrt{(0+3)^2+(3-0)^2+(-3-3)^2} = 3\sqrt{6}$

이므로 $\triangle ABC$는 한 변의 길이가 $3\sqrt{6}$인 정삼각형이다.

정사면체 $ABCD$의 모서리 6개의 길이가 모두 같으므로

$\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 = 54$

따라서 $a^2+(b-3)^2+(c+3)^2 = 54\ \cdots$ ㉠

$(a-3)^2+(b+3)^2+c^2 = 54\ \cdots$ ㉡

$(a+3)^2+b^2+(c-3)^2 = 54\ \cdots$ ㉢

㉠ − ㉡을 하면 $6a-12b+6c=0$

$\therefore a-2b+c=0\ \cdots$ ㉣

㉡ − ㉢을 하면 $-12a+6b+6c=0$

$\therefore -2a+b+c=0\ \cdots$ ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $a=b=c$

$\therefore a=b=c=\pm2\sqrt{3}$

$\therefore a^2+b^2+c^2 = (\pm2\sqrt{3})^2+(\pm2\sqrt{3})^2+(\pm2\sqrt{3})^2 = 36$

다른 풀이

$a^2+(b-3)^2+(c+3)^2 = 54\ \cdots$ ㉠

$(a-3)^2+(b+3)^2+c^2 = 54\ \cdots$ ㉡

$(a+3)^2+b^2+(c-3)^2 = 54\ \cdots$ ㉢

㉠ + ㉡ + ㉢을 하면

$3(a^2+b^2+c^2)+3\times18 = 3\times54$

$\therefore a^2+b^2+c^2 = 54-18 = 36$

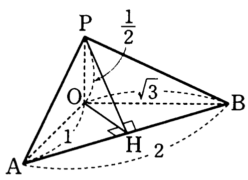
84. 답 ①

[해설]

점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PO} \perp (xy$평면$)$, $\overline{PH} \perp \overline{AB}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여



$\overline{OH} \perp \overline{AB}$

따라서 직각삼각형 OAB에서

$\overline{OA} = 1,\ \overline{OB} = \sqrt{3},\ \overline{AB} = 2$이고

$\triangle OAB = \dfrac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB}$

$= \dfrac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OH}$

이므로

$\dfrac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \dfrac{1}{2} \times 2 \times \overline{OH}$

$\therefore \overline{OH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

한편 $\triangle POH$도 직각삼각형이므로

$\overline{PH} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

따라서 점 P에서 직선 에 이르는 거리는 1이다.

85. 답 ②

[해설]

$\overline{AB} = \sqrt{(b-a)^2+a^2+b^2} = \sqrt{8-2ab}$

$\overline{AB} = \sqrt{b^2+(b-a)^2+a^2} = \sqrt{8-2ab}$

$\overline{AB} = \sqrt{a^2+b^2+(b-a)^2} = \sqrt{8-2ab}$

에서 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ 이므로 $\triangle ABC$는 정삼각형이다.

따라서 $\triangle ABC$의 넓이 S는

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{8-2ab})^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(8-2ab)$

이때, S가 최소가 되려면 ab의 값이 최대가 되어야 한다.

$a>0,\ b>0$이므로

$4=a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$

$\therefore ab\leq 2$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

따라서 ab의 최댓값이 2이므로 S의 최솟값은

$\frac{\sqrt{3}}{4}(8-2\times 2)=\sqrt{3}$

86. 답 ②

[해설]

점 P의 좌표를 $P(a,\ b,\ c)$라 하면

$A(a,\ b,\ 0),\ B(0,\ b,\ c),\ C(a,\ 0,\ c)$이때, 삼각형 ABC는

정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

$\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{b^2+c^2}$

$a^2+c^2=a^2+b^2=b^2+c^2$

$\therefore a^2=b^2=c^2$

이때, 넓이가 $2\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\overline{AB}^2\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times 2a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

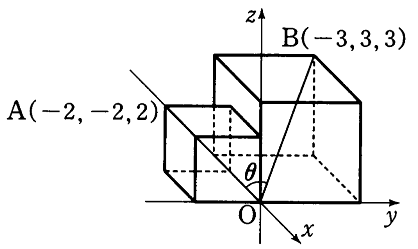
$\therefore a^2=4$

$\therefore \overline{AP}=\sqrt{(a-a)^2+(b-b)^2+(c-0)^2}=\sqrt{c^2}=\sqrt{a^2}=2$

87. 답 ①

[해설]

그림과 같이 점 O를 원점으로 하는 공간좌표에서 점 $A,\ B$의 좌표는 각각 $A(-2,\ -2,\ 2),\ B(-3,\ 3,\ 3)$ 이므로



$\overline{OA}=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+2^2}=2\sqrt{3}$

$\overline{OB}=\sqrt{(-3)^2+3^2+3^2}=3\sqrt{3}$

$\overline{AB}=\sqrt{(-1)^2+5^2+1^2}=3\sqrt{3}$

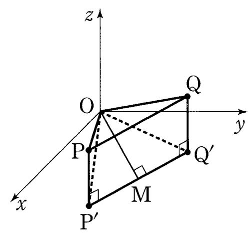
$\therefore \cos\theta=\frac{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-\overline{AB}^2}{2\times\overline{OA}\times\overline{OB}}$

$=\frac{(2\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3})^2-(3\sqrt{3})^2}{2\times 2\sqrt{3}\times 3\sqrt{3}}$

$=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

88. 답 ③

[해설] 두 점 $P',\ Q'$의 좌표는 각각 $P'(5,\ 3,\ 0),\ Q'(3,\ 5,\ 0)$이다.



오른쪽 그림에서 $\overline{PP'}=4,\ \overline{QQ'}=5$

$\overline{P'Q'}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

이므로 사각형 $PP'Q'Q$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(4+5)\times 2\sqrt{2}=9\sqrt{2}$

$\overline{P'Q'}$의 중점을 M이라 하면 M의 좌표는 $(4,\ 4,\ 0)$이고 xy평면 위에서 직선 $P'Q'$의 기울기는 -1, 직선 OM의 기울기는 1이므로 두 직선 $P'Q'$과 OM은 수직이다.

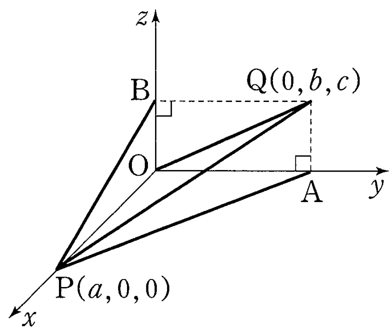
또, 사각형 $PP'Q'Q$는 xy평면과 수직이므로 사각뿔 $OPP'Q'Q$의 높이는 선분 OM의 길이와 같다.

$\overline{OM}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$이므로 구하는 입체의 부피는

$\frac{1}{3}\times 9\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}=24$

89. 답 97

[해설] 두 점 $P,\ Q$의 좌표를 $P(a,\ 0,\ 0),\ Q(0,\ b,\ c)$로 놓으면 점의 yz평면 위로의 정사영은 $O(0,\ 0,\ 0)$이다. 또, 점 Q의 xy평면, zx평면 위로의 정사영을 각각 $A,\ B$라 하면 $A(0,\ b,\ 0),\ B(0,\ 0,\ c)$이다.



이때, 선분 PQ의 xy평면, yz평면, zx평면 위로의 정사영 길이는 각각

$\overline{PA}=\sqrt{a^2+b^2}=8,\ \overline{OQ}=\sqrt{b^2+c^2}=9,\ \overline{PB}=\sqrt{a^2+c^2}=7$

$\therefore \overline{PQ}^2=a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}(\overline{PA}^2+\overline{OQ}^2+\overline{PB}^2)$

$=\frac{1}{2}(8^2+9^2+7^2)=97$

90. 답 ②

[해설] $\triangle OAP=5$이기 위해서는 $\overline{OA}=2$이므로 두 점 $O,\ A$를 지나는 y축과 점 P 사이의 거리가 5이어야 한다. 그러므로 $y=t$ $(0\leq t\leq 2)$일 때, 점 P의 자취는 $x^2+z^2=5^2$인 원이다.

따라서 점 P가 그리는 도형은 밑면의 반지름의 길이가 5이고, 높이가 2인 직원기둥의 옆넓이이므로 구하는 도형의 넓이는

$2\pi\times 5\times 2=20\pi$

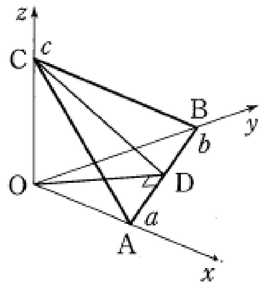
91. 답 ⑤

[해설] ㄱ. $\triangle OAB$의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\frac{1}{2}|a||b|=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{OD}$

$\therefore \overline{OD}=\dfrac{|ab|}{\overline{AB}}=\dfrac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (참)

ㄴ. $\triangle OCD$에 피타고라스의 정리를 적용하면



$\overline{CD}=\sqrt{\overline{OC}^2+\overline{OD}^2}=\sqrt{c^2+\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}}$ (참)

ㄷ. $\overline{OC}\perp(xy$평면$)$, $\overline{OD}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{CD}\perp\overline{AB}$

$\therefore S^2=\dfrac{1}{4}\overline{AB}^2\cdot\overline{CD}^2$

$=\dfrac{1}{4}(a^2+b^2)\cdot\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}$

$=\dfrac{1}{4}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

또한, $S_1^2=\dfrac{1}{4}a^2b^2$이고, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$의 넓이를 각각 S_2, S_3이라 하면

$S_2^2=\left(\dfrac{1}{2}|b||c|\right)^2=\dfrac{1}{4}b^2c^2$, $S_3^2=\left(\dfrac{1}{2}|c||a|\right)^2=\dfrac{1}{4}c^2a^2$

$\therefore S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

참고

ㄷ에서 $\overline{CD}\perp\overline{AB}$임을 다음과 같이 보일 수도 있다.

$\overline{OC}\perp\overline{AB}$이므로 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ …㉠

$\overline{OD}\perp\overline{AB}$이므로 $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ … ㉡

$\therefore \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})\cdots\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$\therefore \overline{CD}\perp\overline{AB}$

또한, 넓이에 관한 식도 다음과 같이 구할 수 있다.

$\overrightarrow{AB}=(-a,\ b,\ 0)$, $\overrightarrow{AC}=(-a,\ 0,\ c)$이므로

$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)-a^4}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

92. **답** ②

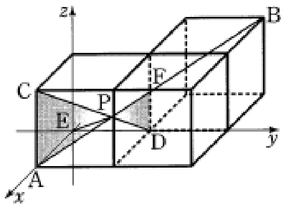
[해설]

점 E가 좌표공간의 원점에 놓이도록 입체도형을 놓으면

$A(6,0,0)$, $B(-6,12,6)$, $C(6,0,6)$, $D(0,6,0)$

이다. 또, 두 선분 AB와 CD가 한 점 P에서 만나므로 네 점 A, B, C, D는 한 평면 위에 있다.

선분 AB의 중점을 F라 하면 $\overline{AC}=2\overline{FD}$이고,



$\triangle PDF \backsim \triangle PCA$이므로 점 P는 선분 CD를 $2:1$를 내분하는 점이다.

$\therefore P\left(\dfrac{2\times0+1\times6}{2+1},\ \dfrac{2\times6+1\times0}{2+1},\ \dfrac{2\times0+1\times6}{2+1}\right)$

즉, $P(2,\ 4,\ 2)$이므로 선분 EP의 길이는

$\overline{EP}=\sqrt{2^2+4^2+2^2}=2\sqrt{6}$

93. **답** ④

[해설] $\triangle ABC$에서 두 점 M, N은 각각 두 변 AB, AC의 중점이므로 삼각형의 중점연결정리에 의하여

$\overline{MN}\,/\!/\,\overline{BC}$, $\overline{MN}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$

또한, $\triangle OBC$에서 두 점 B', C'은 각각 두 변 OB, OC의 중점이므로 삼각형의 중점연결정리에 의하여

$\overline{B'C'}\,/\!/\,\overline{BC}$, $\overline{B'C'}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$

즉, 사각형 $B'C'NM$은 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같으므로 평행사변형이다.

구하는 평행사변형의 넓이는 $\triangle MB'C'$의 넓이의 두 배이다.

$\triangle MB'C'$에서 $M(-1,\ -2,\ 3)$, $B'(-1,\ -2,\ 1)$, $C'(0,\ 2,\ 0)$이므로

$\overline{MB'}=2$, $\overline{MC'}=\sqrt{26}$, $\overline{B'C'}=\sqrt{18}$

$\angle MB'C'=\theta$라 하고, $\triangle MB'C'$에 제이코사인법칙을 적용하면

$\cos\theta=\dfrac{4+18-26}{2\times2\times\sqrt{18}}=-\dfrac{1}{\sqrt{18}}$

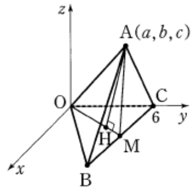
$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{18}}$

$\therefore \triangle MB'C'=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{18}\times\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{18}}=\sqrt{17}$

따라서 사각형 $B'C'NM$의 넓이는 $2\sqrt{17}$이다.

94. **답** 51

[해설] 모서리 BC의 중점을 M이라 하면 정사면체의 성질에 의하여 꼭짓점 A에서 $\overline{OM}$에 내린 수선의 발을 $\triangle OBC$의 무게중심이다.



$A(a,\ b,\ c)$에서 $\overline{OM}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 OM과 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기가 60°이므로

$a=\overline{OH}\cos60^\circ$

$b=\overline{OH}\cos30^\circ$

$c = \overline{AH} = \sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{HM}^2}$

그런데 $\overline{OM} = \overline{AM} = 3\sqrt{3}$ 이고 H가 $\triangle OBC$의 무게중심이므로

$\overline{OH} = \frac{2}{3}\overline{OM} = 2\sqrt{3}$

$\overline{HM} = \frac{1}{3}\overline{OM} = \sqrt{3}$

$\therefore a = \sqrt{3},\ b = 3,\ c = 2\sqrt{6}$

$\therefore 3a^2 + 2b^2 + c^2 = 9 + 18 + 24 = 51$

95. 답 ①

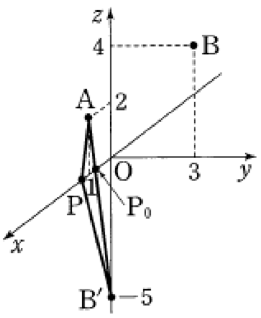
[해설] $B'(0,\ 0,\ -5)$라 하면

$\overline{PB}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{OP}^2 + 25$이고

$\overline{PB'}^2 = \overline{PO}^2 + 25$이므로

$\overline{PB} = \overline{PB'}$

이때, 오른쪽 그림과 같이 직선 AB'과 x축의 교점을 P_0이라 하면



$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PB'}$

$\geq \overline{AB'} = \overline{AP_0} + \overline{P_0B'}$

이므로 동점 P가 P_0의 위치에 올 때, $\overline{AP} + \overline{PB}$가 최소가 된다.

따라서 구하는 최솟값은 $\overline{AB'} = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}$

96. 답 ②

[해설]

원점 O에 대하여 $\overline{OB} = 1$이므로 점 $C(0,\ 0,\ -1)$에 대하여

$\overline{PB} = \overline{PC}$

$\therefore \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PC} \geq \overline{AC}$

$= \sqrt{1^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10}$

97. 답 53

[해설]

xy평면 위에 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원을 C_1이라 하면 점 $B(1, 0, 0)$은 원 C_1 위의 점이다.

점 A와 원 위의 한 점 D를 지나는 직선이 z축 위의 점 P'을 지나면

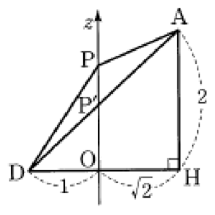
$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{PD} \geq \overline{AP'} + \overline{P'D} = \overline{AD}$

점 $A(1, 1, 2)$를 xy평면에 내린 수선의 발은 $H(1, 1, 0)$이므로

$\overline{OH} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\therefore \overline{AD} = \sqrt{2^2 + (1 + \sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{7 + 2\sqrt{2}}$



따라서 $a = 7,\ b = 2$이므로

$a^2 + b^2 = 7^2 + 2^2 = 53$

98. 답 ①

[해설]

점 P의 좌표는 $P(6, 0, 2)$, 점 Q의 좌표는 $Q(2, 2, 6)$이고, 점 P를 평면 $BFGC$에 대하여 대칭이동한 점을 P'이라 하면 $P'(6, 12, 2)$

이때, 평면 $BFGC$ 위의 임의의 점 R에 대하여

$\overline{PR} + \overline{QR} = \overline{P'R} + \overline{QR} \geq \overline{P'Q}$

$= \sqrt{(6-2)^2 + (12-2)^2 + (2-6)^2}$

$= 2\sqrt{33}$

99. 답 ②

[해설] 두 점 A, B의 z좌표가 모두 양수이므로 두 점 A, B는 두 xy평면을 기준으로 같은 쪽에 존재한다.

$A(1,\ 2,\ 3)$의 xy평면에 대한 대칭점을 A'이라 하면

$A'(1,\ 2,\ -3)$이고 $\overline{AP} = \overline{A'P}$이다.

선분 $A'B$와 xy평면의 교점을 P'이라 하면

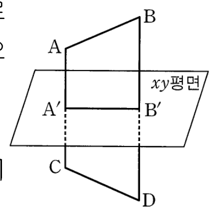
$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{A'P'} + \overline{BP'} = \overline{A'B}$

따라서 $\overline{AP} + \overline{BP}$의 최솟값은

$\overline{A'B} = \sqrt{16 + 16 + 16} = 4\sqrt{3}$

100. 답 ⑤

[해설] 선분 AB가 yz평면과 평행하므로 $A(a,\ -2,\ 2\sqrt{2})$, $B(a,\ 2,\ 2\sqrt{2})$로 놓으면



$\overline{AB} = \sqrt{0^2 + (2+2)^2 + 0^2} = 4$

삼각형 OAB의 무게중심의 x좌표가 4이므로

$\frac{0 + a + a}{3} = 4 \quad \therefore a = 6$

또, $\overline{OA} = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{3}$이고 $\overline{OA} = \overline{OB}$이므로

삼각형 OAB의 높이는

$\sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{11}$

따라서 삼각형의 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{11} \times 4 = 4\sqrt{11}$

101. 답 ④

[해설] 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$P\left(\frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 1}{2+1},\ \frac{2 \cdot 8 + 1 \cdot 2}{2+1},\ \frac{2 \cdot 11 + 1 \cdot 2}{2+1}\right)$

$\therefore P(3,\ 6,\ 8)$

두 점 A, B를 xy평면으로 정사영시킨 점의 좌표를 각각 A', B'이라 하면 $A'(1,\ 2,\ 0)$, $B'(4,\ 8,\ 0)$이다.

$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(4-1)^2 + (8-2)^2} = 3\sqrt{5}$

점 P의 z좌표가 8이므로 삼각형 $A'B'P$의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times 8 = 12\sqrt{5}$

102. 답 ⑤

[해설] 선분 AB가 yz평면과 평행하므로 $A(a,\ -2,\ 2\sqrt{2})$, $B(a,\ 2,\ 2\sqrt{2})$로 놓으면

$\overline{AB} = \sqrt{0^2 + (2+2)^2 + 0^2} = 4$

삼각형 OAB의 무게중심의 x좌표가 4이므로

$\frac{0+a+a}{3}=4 \quad \therefore a=6$

또, $\overline{OA}=\sqrt{6^2+(-2)^2+(2\sqrt{2})^2}=4\sqrt{3}$ 이고 $\overline{OA}=\overline{OB}$이므로

삼각형 OAB의 높이는

$\sqrt{(4\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{11}$

따라서 삼각형의 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{11}\times 4=4\sqrt{11}$

103. 답 ①

[해설]

점 A를 원점으로 놓고, 점 B의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면 점 B의 xy평면, yz평면, zx평면 위로 정사영된 점은 각각

$(a,\ b,\ 0),\ (0,\ b,\ c),\ (a,\ 0,\ c)$이므로

$\sqrt{a^2+b^2}=3,\ \sqrt{b^2+c^2}=4,\ \sqrt{a^2+c^2}=5$

$a^2+b^2=9,\ b^2+c^2=16,\ a^2+c^2=25$

위 세 식의 각 변을 더하면

$2(a^2+b^2+c^2)=50$

$a^2+b^2+c^2=25$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
$=\sqrt{25}=5$

104. 답 2

[해설]

주어진 조건을 만족하는 점 R가 나타내는 도형은 선분 PQ를 지름으로 하

는 구면 위의 점이다.

따라서 구의 중심의 좌표는 (2, 2, 2)이고, 반지름의 길이 r는

$r=\frac{1}{2}\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{2}$

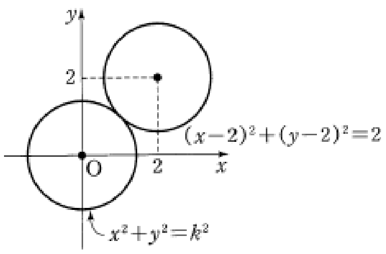
이므로 구의 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=2$

따라서 xy평면 위로 정사영한 도형의 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=2$

이므로 $a^2+b^2=k^2$이 라고 하면



위의 그림과 같이 두 원

$x^2+y^2=k^2,\quad (x-2)^2+(y-2)^2=2$

가 서로 외접할 때, k^2은 최솟값을 갖는다.

즉, $k+\sqrt{2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ 에서

$k=\sqrt{2} \qquad \therefore k^2=2$

105. 답 ⑤

[해설]

선분 AB가 xy평면과 평행하므로

$A(-2,\ 2\sqrt{3},\ k),\ B(2,\ 2\sqrt{3},\ k)$

라 하자.

이때, $\overline{AB}=\sqrt{(2+2)^2+0^2+0^2}=4$

따라서 삼각형 OAB의 무게중심의 z좌표가 4이므로

$\frac{0+k+k}{3}=4 \qquad \therefore k=6$

또, $\overline{AB}=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2+6^2}=2\sqrt{13}$ 이고, $\overline{OA}=\overline{OB}$이므로

삼각형 OAB의 높이 h는

$h=\sqrt{(2\sqrt{13})^2-2^2}=4\sqrt{3}$

따라서 삼각형 OAB의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 4=8\sqrt{3}$

106. 답 ⑤

[해설] ㄱ. xy평면에 대한 대칭이동은 z좌표의 부호가 바뀌므로

$A'(-1,\ 3,\ -4)$ (참)

ㄴ. yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 $H(0,\ -1,\ 5)$ (참)

ㄷ. zx평면이 선분 AB를 $m:n$으로 내분한다고 하면 선분 AB와

zx평면이 만나는 점을 $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점이고, 이 점은

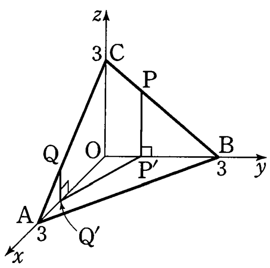
zx평면 위의 점이므로 y좌표가 0이다.

즉, $\frac{-m+3n}{m+n}=0$에서 $m=3n$

$\therefore m:n=3:1$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

107. 답 ②



[해설]

$\triangle AOC \backsim \triangle AQ'Q$이므로

점 Q'의 좌표는 $Q'(2,\ 0,\ 0)$

$\triangle BOC \backsim \triangle BP'P$이므로 점 P'의 좌표는 $P'(0,\ 1,\ 0)$

삼각형 $OP'Q'$은 직각삼각형이므로 구하는 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$

108. 답 ①

[해설]

$\overline{OA}=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

$\overline{OB}=\sqrt{2^2+(-2)^2+2^2}=2\sqrt{3}$

이므로

$\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{AD}:\overline{BD}=1:2$

즉, 점D는 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$D\left(\frac{1\cdot 2+2\cdot 1}{1+2},\ \frac{1\cdot(-2)+2\cdot 1}{1+2},\ \frac{1\cdot 2+2\cdot 1}{1+2}\right)$

$\therefore D\left(\frac{4}{3},\ 0,\ \frac{4}{3}\right)$

$\therefore a+b+c=\frac{4}{3}+0+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

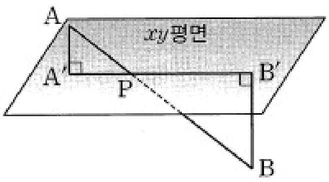
109. 답 ②

[해설]

선분 AB가 xy평면과 만나는 점을 P, 두 점 A, B에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}:\overline{BP} &= \overline{AA'}:\overline{BB'}\\ &= m:n\\ &= 3:6\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{m}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$



110. 답 ⑤

[해설]

t초 후의 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $P(t,\ 1,\ 0)$, $Q(0,\ t,\ 1)$이므로 선분 PQ를 $2:1$로 외분하는 점 의 좌표는

$$R\left(\frac{2\times 0-1\times t}{2-1},\ \frac{2\times t-1\times 1}{2-1},\ \frac{2\times 1-1\times 0}{2-1}\right)$$

즉, $R(-t,\ 2t-1,\ 2)$

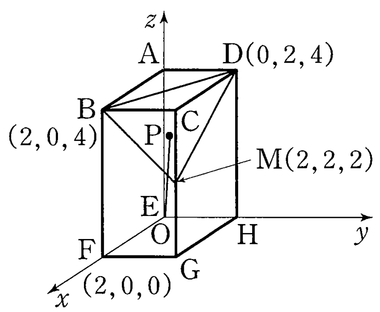
$$\therefore \overline{OR}=\sqrt{(-t)^2+(2t-1)^2+2^2}=\sqrt{5t^2-4t+5}$$

$$=\sqrt{5\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{21}{5}}$$

따라서 $t=\frac{2}{5}$일 때 $\overline{OR}$의 최솟값은 $\sqrt{\frac{21}{5}}=\frac{\sqrt{105}}{5}$이다.

111. 답 ①

[해설] 점 E를 원점으로 하는 공간좌표를 도입하면 $B(2,\ 0,\ 4)$, $M(2,\ 2,\ 2)$, $D(0,\ 2,\ 4)$이므로 삼각형 BMD의 무게중심 P의 좌표는 $\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{10}{3}\right)$



따라서 삼각형 BMD의 무게중심으로부터 점 E까지의 거리는

$$\overline{EP}=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{16}{9}+\frac{100}{9}}=\frac{2\sqrt{33}}{3}$$

112. 답 20

[해설]

평면 α가 xy평면이라 하면 세구가 평면 α위에 있으므로 세 구의 중심을 각각

$A(a_1,\ b_1,\ 9)$, $B(a_2,\ b_2,\ 15)$, $C(a_3,\ b_3,\ 36)$

으로 놓으면 세 구의 방정식은

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-9)^2=9^2$$

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-15)^2=15^2$$

$$(x-a_3)^2+(y-b^2_{3)}+(z-36)^2=36^2$$

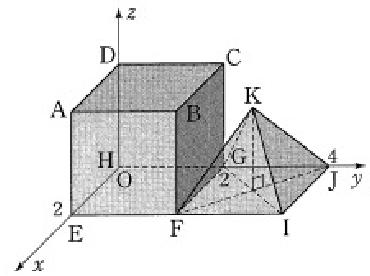
이때, $\triangle ABC$의 무게중심으로부터 평면 α까지의 거리는 의 무게중심의 z좌표와 같으므로

$$\frac{9+15+36}{3}=20$$

113. 답 ②

[해설]

꼭짓점 H를 좌표공간의 원점에 놓고 선분 EH, HG, HD를 각각 x축, y축, z축위에 놓으면



$E(2,\ 0,\ 0)$, $H(0,\ 0,\ 0)$, $G(0,\ 2,\ 0)$이고 위의 그림에서 점 K의 좌표는 $K(1,\ 3,\ \sqrt{2})$

따라서 삼각형 KHE의 무게중심 L은

$$L\left(\frac{1+0+2}{3},\ \frac{3+0+0}{3},\ \frac{\sqrt{2}+0+0}{3}\right)$$

즉, $L\left(1,\ 1,\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $G(0,\ 2,\ 0)$이므로

$$\overline{GL}=\sqrt{1^2+(1-2)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$$

114. 답 ③

[해설]

조건 (가)에 의하여 점 $\mathrm{B}(a,\ b,\ 0)\ (b>0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{AB}}=1$이므로

$$\overline{\mathrm{OB}}^2=a^2+b^2=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=(a-1)^2+b^2=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠ − ㉡에서 $2a-1=0$이므로 $a=\frac{1}{2}$

$$b=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ (\because b>0)$$

$$\therefore \mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$$

또 조건 (나)에 의하여 사면체 OABC는 정사면체이므로 점 $\mathrm{C}(p,\ q,\ r)(r>0)$라 하면 점 C의 xy평면 위로의 정사영 $\mathrm{C}'(p,\ q,\ 0)$은 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표와 같으므로

$$p=\frac{1+\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{2},\ q=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

그런데 $\overline{OC}=1$이므로

$$p^2+q^2+r^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+r^2=1,\ r^2=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \frac{\sqrt{6}}{3}(\because r>0)$$

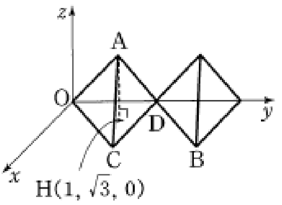
따라서 삼각형 OBC의 무게중심 $(x,\ y,\ z)$는

$$x=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{3},\ y=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{9},\ z=\frac{\sqrt{6}}{9}$$

$$\therefore\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{2\sqrt{3}}{9},\ \frac{\sqrt{6}}{9}\right)$$

115. 답 ④

[해설]



정사면체의 한 모서리의 길이를 $2a$라 하면

$\mathrm{C}=(\sqrt{3}a,\ a,\ 0)$, $\mathrm{D}=(0,\ 2a,\ 0)$

또, 점 $\mathrm{H}(1,\ \sqrt{3},\ 0)$이 삼각형 OCD의 무게중심이므로

$$\frac{\sqrt{3}a}{3}=1,\quad \frac{a+2a}{3}=\sqrt{3}$$

$$\therefore\ a=\sqrt{3}$$

이때, $\mathrm{OH}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$이므로

$$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{2}$$

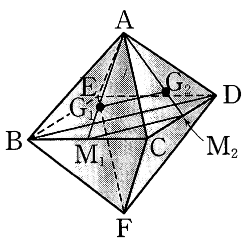
$$\therefore\ \mathrm{A}(1,\ \sqrt{3},\ 2\sqrt{2})$$

점 B는 점 C를 y축의 방향으로 $2\sqrt{3}$만큼 평행이동한 것이므로 $\mathrm{B}(3,\ 3\sqrt{3},\ 0)$

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-1)^2+(3\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+(-2\sqrt{2})^2}$$
$$=2\sqrt{6}$$

116. 답 ③

[해설] 오른쪽 그림에서 삼각형 ABC, ACD의 두 무게중심을 각각 $\mathrm{G_1,\ G_2,\ G_3}$라 하고, 두 변 BC, CD의 중점을 각각 $\mathrm{M_1,\ M_2}$라 하면

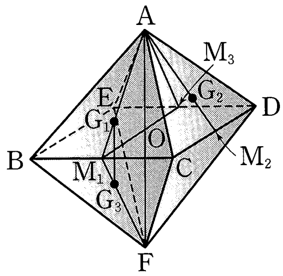


$$\overline{\mathrm{G_1G_2}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{M_1M_2}}$$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}$$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

또, 삼각형 BFC의 무게중심을 $\mathrm{G_3}$라 하고, 선분 AF와 평면 BCDE가 만나는 점을 O라 하면

$$\overline{\mathrm{AM_1}}=\overline{\mathrm{AB}}\sin 60^\circ$$
$$=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

선분 ED의 중점을 $\mathrm{M_3}$라 하면



$$\overline{\mathrm{M_1O}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{M_1M_3}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{CD}}$$
$$=\frac{1}{2}\times 6=3$$

이므로

$$\overline{\mathrm{G_1G_3}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{AF}}$$
$$=\frac{1}{3}\times 2\overline{\mathrm{AO}}$$
$$=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{\overline{\mathrm{AM_1}}^2-\overline{\mathrm{M_1O}}^2}$$
$$=\frac{1}{3}\times 2\times\sqrt{(3\sqrt{3})^2-3^2}$$
$$=\frac{1}{3}\times 2\times\sqrt{18}=2\sqrt{2}$$

또한, $\overline{\mathrm{AF}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$이므로 $\overline{\mathrm{G_1G_2}}\perp\overline{\mathrm{G_1G_3}}$

같은 방법으로 생각하면 구하는 입체는 한 모서리의 길이가 $2\sqrt{2}$인 정육면체이므로 부피 V는

$$V=(2\sqrt{2})^3=16\sqrt{2}$$

117. 답 18

[해설] 주어진 조건을 만족하는 구의 방정식은

$(x-4)^2+(y+3)^2+z^2=6^2$

이고, 구의 반지름의 길이는 6이다.

삼각형 CPQ의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{CP}\times\overline{CQ}\times\sin(\angle PCQ)=18\sin(\angle PCQ)$$

그런데 $\sin(\angle PCQ)\le 1$이므로 구하는 넓이의 최댓값은 18이다.

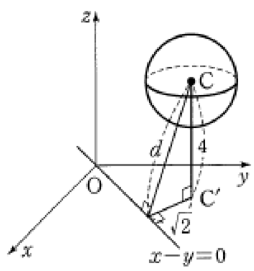
118. 답 ③

[해설]

$x^2+y^2+z^2-2x-6y-8z+25=0$에서

$(x-1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=1$이므로 중심 C의 좌표는 $C(1,\ 3,\ 4)$이

다.



점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 C'이라 하면 $C'(1,\ 3,\ 0)$이고

점 $C'(1,\ 3,\ 0)$에서 직선 $x-y=0$까지의 거리는

$$\frac{|1-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

따라서 삼수선의 정리에 의하여 중심 C에서 직선 $x-y=0$까지의 거리 d는

$$d=\sqrt{(\sqrt{2})^2+4^2}=3\sqrt{2}$$

119. 답 ③

[해설]

구의 방정식을 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$으로 놓고 네 점을 대입하면

$D=0,\ A+B=-2,\ A+C=-8,\ B=6$

$\therefore\ A=-8,\ B=6,\ C=0,\ D=0$

이 값을 대입하면

$x^2+y^2+z^2-8x+6y=0$

$(x-4)^2+(y+3)^2+z^2=5^2$

이때, 구의 반지름의 길이는 5이므로 삼각형 $O'PQ$의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\overline{O'P}\times\overline{O'Q}\times\sin(\angle PO'Q)$

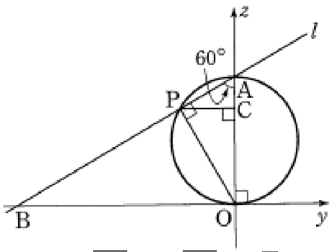
$=\frac{1}{2}\times5\times5\times\sin(\angle PO'Q)\leq\frac{1}{2}\times5\times5$

따라서 $\triangle O'PQ$의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{2}$이다.

120. 답 ①

[해설]

직선 l과 xy평면과의 교점을 B라고 하면 주어진 조건을 다음과 같이 나타낼
수 있다.



이 때, $\overline{OA}=2$이므로 $\overline{AP}=1$, $\overline{OP}=\sqrt{3}$에서

$\frac{1}{2}\times2\times\overline{CP}=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\quad\therefore\overline{CP}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

또한, $\overline{AP}=1$이므로 $\overline{AC}=\frac{1}{2}$, $\overline{OC}=\frac{3}{2}$

따라서 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$x^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4},\quad z=\frac{3}{2}$

$\therefore\frac{a}{b}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}$

121. 답 ②

[해설]

구와 x축의 교점의 좌표를 $(a,0,0)$라 하면 x축이 구의 접선이므로 구의 중심의 x좌표는 a가 된다. 마찬가지로 구는 세 좌표축과 접하므로 y축과의 교점은 $(0,a,0)$, z축과의 교점은 $(0,0,a)$가 된다.

따라서 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=6$

이고, 이 구는 점 $(a,0,0)$을 지나므로

$a^2+a^2=6,\ 2a^2=6$

$a^2=3\quad\therefore a=\sqrt{3}\ (\because a>0)$

따라서 원점에서 구의 중심 (a,a,a)까지의 거리는

$\sqrt{a^2+a^2+a^2}=\sqrt{3a^2}=3$

122. 답 ③

[해설]

점 $(1,2,3)$를 지나고, 평면, 평면, 평면에 동시에 접하는 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2$

이 구가 점 $(1,2,3)$를 지나므로 대입하면

$(1-a)^2+(1-a)^2+(2-a)^2=a^2$

$2a^2-8a+6=0$

$a^2-4a+3=0$

$(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

따라서 두 구의 중심의 좌표는 $(1,1,1)$, $(3,3,3)$이므로 중심사의 거리는

$\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{3}$

123. 답 ③

[해설] 점 $(2,\ 2,\ 4)$를 지나고 xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하는 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2$

이 구가 점 $(2,\ 2,\ 4)$를 지나므로

$a^2-8a+12=0,\ (a-2)(a-6)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=6$

따라서 두 구의 중심의 좌표는 $(2,\ 2,\ 2)$, $(6,\ 6,\ 6)$

이므로 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(6-2)^2+(6-2)^2+(6-2)^2}=4\sqrt{3}$

124. 답 ③

[해설] 구의 반지름의 길이를 r라 하면 구의 중심의 좌표는 $(r,\ r,\ r)$이므로 구의 방정식은

$(x-r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2=r^2$

구가 점 $(4,\ 2,\ 2)$를 지나므로

$(4-r)^2+(2-r)^2+(2-r)^2=r^2$

$r^2-8r+12=0,\ (r-2)(r-6)=0$

$\therefore r=2$ 또는 $r=6$

즉, 두 구의 중심의 좌표는 $P(2,\ 2,\ 2)$, $Q(6,\ 6,\ 6)$이고 점 P, Q의 yz평면으로의 정사영을 각각 P', Q'이라 하면

$P'(0,\ 2,\ 2)$, $Q'(0,6,\ 6)$

$\therefore\overline{P'Q'}=\sqrt{0+4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

125. 답 ③

[해설]

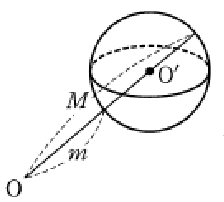
$\overline{AB}=\sqrt{(4-1)^2+(1-4)^2}=3\sqrt{2}$

$\overline{BC}=\sqrt{1^2+(4-3)^2+(1-3)^2}=\sqrt{6}$

$\overline{CA}=\sqrt{4^2+(1-3)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{6}$

따라서 삼각형 ABC는 선분 CA가 빗변인 직각삼각형이고, 구의 반지름

길이가 $\sqrt{6}$ 이므로 구의 중심은 선분 의 AC중점이다. 즉, 구의 중심의 좌표를O'이라 하면 $O'(2,\ 2,\ 2)$이므로



$M=\sqrt{2^2+2^2+2^2}+\sqrt{6}=2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

$m=\sqrt{2^2+2^2+2^2}-\sqrt{6}=2\sqrt{3}-\sqrt{6}$

$\therefore Mm=(2\sqrt{3}+\sqrt{6})(2\sqrt{3}-\sqrt{6})=6$

126. 답 26

[해설] xy평면에 접하고 반지름의 길이가 r인 구의 중심의 좌표를 $(a,\ b,\ r)$로 놓을 수 있으므로 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-r)^2=r^2$

이 구가 두 점 $A,\ B$를 지나므로

$a^2+b^2+(1-r)^2=r^2$에서

$a^2+b^2+1-2r=0\ \cdots$ ㉠

$a^2+(1-b)^2+(2-r)^2=r^2$에서

$a^2+(1-b)^2+4-4r=0\ \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡을 하면

$2b-1-3+2r=0\qquad \therefore b=2-r$

이것을 ㉠에 대입하면 $a^2=-r^2+6r-5$

$a^2\ge 0$에서 $r^2-6r+5\le 0$

$(r-1)(r-5)\le 0$

$\therefore 1\le r\le 5$

$\therefore M^2+m^2=5^2+1^2=26$

127. 답 ④

[해설]

xy평면, yz평면, zx평면에 접하는 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2\ (a>0)$

으로 놓을 수 있다.

이때, 구 S_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하면 중심의 좌표는 $(r_n,\ r_n,\ r_n)$이다. 또, 두 구 $S_n,\ S_{n+1}$의 중심 사이의 거리와 반지름의 길이와 합이 같아야 하므로

$$r_n+r_{n+1}=\sqrt{(r_n-r_{n+1})^2+(r_n-r_{n+1})^2+(r_n-r_{n+1})^2}$$

$$r_n+r_{n+1}=\sqrt{3}(r_n-r_{n+1})$$

$$\therefore\ r_{n+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}r_n=(2-\sqrt{3})r_n$$

따라서 구의 겉넓이의 총합은

$$\frac{4\times 1^2\times\pi}{1-(2-\sqrt{3})^2}=\frac{4\pi}{4\sqrt{3}-6}=\frac{2\pi}{2\sqrt{3}-3}=\frac{4\sqrt{3}+6}{3}\pi$$

128. 답 ⑤

[해설] 구의 중심을 C라 하면 C의 좌표는 $(-2,\ 0,\ 1)$이고 구의 반지름의 길이는

$\overline{CA}=\sqrt{(-2-2)^2+(0+k)^2+(1-3)^2}=\sqrt{k^2+20}$

이므로 구의 방정식은

$(x+2)^2+y^2+(z-1)^2=k^2+20$

구와 yz평면이 만나서 생기는 도형의 방정식은 $x=0$일 때이므로

$2^2+y^2+(z-1)^2=k^2+20,\ y^2+(z-1)^2=k^2+16$

따라서 구하는 도형은 반지름의 길이가 $\sqrt{k^2+16}$인 원이므로 그 넓이는 $(k^2+16)\pi$이다.

즉, $(k^2+16)\pi=40\pi$이므로 $k^2=24$

129. 답 ②

[해설] 중심이 $(2,\ 5,\ 2)$인 구의 방정식을 $(x-2)^2+(y-5)^2+(z-2)^2=r^2$으로 놓으면 두 구의 중심 사이의 거리가 반지름의 길이의 합과 같을 때 두 구가 외접하므로

$\sqrt{(4-2)^2+(1-5)^2+(-2-2)^2}=r+3$

$\therefore r=3$

구 $(x-2)^2+(y-5)^2+(z-2)^2=3^2$이 yz평면에 의하여 잘린 단면의 방정식은

$(0-2)^2+(y-5)^2+(z-2)^2=3^2$

$(y-5)^2+(z-2)^2=5$

따라서 구하는 원의 넓이는 5π이다.

130. 답 24

[해설]

반구 $(x-5)^2+(y-4)^2+z^2=9$, $z\geq 0$의 중심은 $C(5,4,0)$이고, 이 반구와 평면 α가 접하므로 반구와 평면 α의 접점을 P라 하면

$\overline{CP}\perp\alpha$

또한, 평면 α는 y축을 포함하고 있으므로 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PH}$와 y축도 수직이다.

따라서 $\triangle CPH$는 $\angle P=90^\circ$인 직각삼각형이고,

$\overline{CP}=3$, $\overline{CH}=5$이므로 $\overline{PH}=4$이다.

이때, 평면 α와 xy평면이 이루는 각 θ의 크기는 $\angle CHP$와 같으므로

$$\cos\theta=\frac{4}{5}$$

$$\therefore 30\cos\theta=30\cdot\frac{4}{5}=24$$

131. 답 ①

[해설]

구 $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+z^2=1$ 과 yz평면이 만나서 생기는 도형의 방정식은 구의 방정식에 $x=0$을 대입하면

$$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+z^2=1\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

이때, ㉠과 직선 $\frac{1}{2}y+az=1$은 한 점에서 만나므로 원의 중심에서 직선까지의 거리는 반지름의 길이 1이다. 즉,

$$\frac{\left|-\frac{1}{4}-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+a^2}}=1,\ \frac{5}{4}=\sqrt{\frac{1}{4}+a^2}$$

$$\frac{25}{16}=\frac{1}{4}+a^2,\ a^2=\frac{21}{16}$$

$$\therefore a=\frac{\sqrt{21}}{4}\quad(\because a>0)$$

132. 답 ②

[해설]

구 $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$이 xy평면과 만나서 생기는 도형의 방정식은 $z=0$을 대입하면

$x^2+y^2+ax+by+d=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

조건 ㈎에 의하여 ㉠이 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$

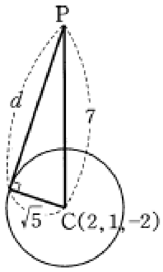
즉, $x^2+y^2-4x-2y+4=0$과 일치해야 하므로

$a=-4,\ b=-2,\ d=4$

또한, 구의 중심을 $C(2,\ 1,\ e)$라 하면 조건 ㈏에 의하여

$\overline{CP}=|5-e|=7$

$\therefore e=-2$ 또는 $e=12$



(i) $e=12$이면 구의 방정식은

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-12)^2=145$

그런데 점 $P(2,\ 1,\ 5)$는 구의 내부의 점이므로 접선이 존재하지 않는다.

(ii) $e=-2$이면 구의 방정식은

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=5$

따라서 구의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 접선의 길이를 d라 하면

$d=\sqrt{7^2-(\sqrt{5})^2}$
$\ =2\sqrt{11}$

133. 답 ①

[해설]

도형의 방정식이 $(x-2)^2+(y+1)^2=2,\ z=0$이므로 구 C의 중심은 $C(2,\ -1,\ a)$이다.

구의 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$이므로 도형 위의 한 점 $(1,\ 0,\ 0)$에서 구의 중심

까지의 거리는

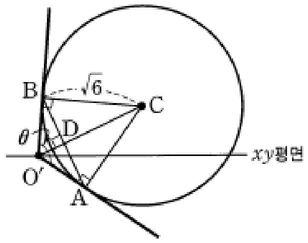
$\sqrt{(2-1)^2+(-1)^2+a^2}=\sqrt{6}\qquad a^2+2=6,\ a^2=4$

$\therefore a=2$ 또는 $a=-2$

따라서 구 C의 중심은 $(2,\ -1,\ -2)$ 또는 $(2,\ -1,\ 2)$이다.

구 C의 중심이 $(2,\ -1,\ 2)$일 때, 구 C와 두 평면의 접점을 각각 $A,\ B$라

하고, 선분 AB의 중점을D라 하자.



이때, $O'(0,\ -1,\ 0)$이라 하면

$\overline{O'C}=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=\sqrt{8},\ \overline{O'A}=\sqrt{(\sqrt{8})^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{2}$

이므로 $\overline{CD}=k$라 하면 $\sqrt{6}:k=\sqrt{8}:\sqrt{6}$이므로

$2\sqrt{2}k=6\qquad\therefore k=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

또한, $\overline{AB}=2\overline{AD}=2\sqrt{(\sqrt{6})^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{6}$이므로

$$|\cos\theta|=\left|\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{-2}{4}\right|=\frac{1}{2}$$

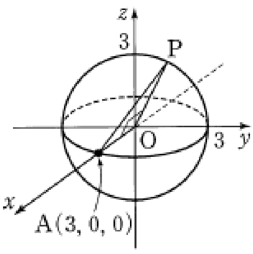
134. 답 ①

[해설]

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 $x_1,\ x_2$라 하면 삼각형 OPQ의 무게중심의 x좌표가 1이므로

$\frac{0+x_1+x_2}{3}=1$

$\therefore\ x_1+x_2=3$



이때, $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3}{2}$이므로 두 점 P, Q의 중점의 x좌표는 $\frac{3}{2}$이다.

그런데, 구의 중심이 원점, 반지름의 길이가 3이므로 중점의 x좌표가 $\frac{3}{2}$이기 위해서는

$0\le x_1\le 3$

즉, 두 점 P, Q는 $x\ge 0$인 반구 위의 점이다.

따라서 점 P가 $y^2+z^2=9$ 위에 있을 때 선분 AP의 길이는 최대가 되므로 최댓값은

$\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OP}}^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

135. 답 18

[해설] 구가 xy평면 위의 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$를 품으므로 구의 중심의 좌표를 $(1,\ 2,\ c)$로 놓으면 구의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-c)^2=86\ \cdots$㉠

이 구가 xy평면과 만나는 교선이 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$이므로 ㉠

에 $z=0$을 대입하면

$(x-1)^2+(y-2)^2=86-c^2=5$

$\therefore c=\pm\sqrt{81}=\pm 9$

$\therefore |z_1|+|z_2|=|9|+|-9|=18$

참고 구라는 공간도형을 쉽게 이해하기 위해서는 평면의 원을 생각해야 한다. 평면에 의하여 생긴 구의 단면은 직선에 의하여 생긴 원의 현으로 보면 적당하다. 이때, 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다는 성질을 구에 적용하여 보자. 구의 단면인 원의 중심에서 이 원에 수직인 직선은 구의 중심을 지난다고 할 수 있을 것이다. 이것으로부터 구의 중심의 좌표는 $(1,\ 2,\ c)$가 됨을 알 수 있다.

136. 답 84

[해설]

$x^2+y^2+z^2=81$ ……㉠

$x^2+(y-5)^2+z^2=56$ ……㉡

㉠-㉡을 계산하여 정리하면

$y=5$

따라서 두 구가 만나는 원은 평면 $y=5$ 위에 있다. 구의 방정식 ㉠에 $y=5$를 대입하면

$x^2+z^2=56$ ……㉢

따라서 두 구가 만나서 생기는 원의 방정식은

$x^2+z^2=56,\ y=5$

이 원 위의 점 $P(x,5,z)$의 xy평면 위로의 정사영은 $P'(x,5,0)$이고, 두 점 $Q,\ R$의 좌표는 각각 $(0,-9,0)$, $(0,9,0)$이므로 삼각형 $QP'R$의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{QR}\cdot|x|=9|x|$

이때, 사면체 $PQP'R$의 높이는 $|z|$이므로 이 사면체의 부피 V는

$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot|z|=3|xz|$

그런데 산술평균과 기하평균의 대소 관계에 의하여

$x^2+y^2=56\geq 2\sqrt{x^2z^2}=2|xz|$ (단, 등호는 $x^2=z^2$일 때 성립)

이므로 $|xz|\leq 28$

$\therefore V=3|xz|\leq 3\cdot 28=84$

따라서 구하는 사면체의 부피의 최댓값은 84이다.

137. 답 20

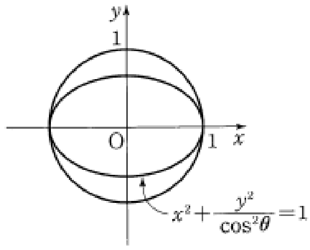
[해설]

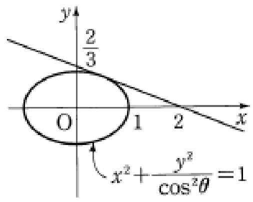
x축을 포함하는 평면 α가 구 $x^2+y^2+z^2=1$과 만나서 생기는 단면은 반지름의 길이가 1인 원이고, 이 원을 xy평면 위로 정사영한 도형은 타원이

며 이 타원의 장축의 길이는 구의 지름의 길이와 같고, 단축의 길이는 $2\cos\theta$이다. 따라서 정사영한 도형의 방정식은

$x^2+\frac{y^2}{\cos^2\theta}=1$

이 타원이 영역 $\{(x,\ y,\ 0)|x+3y-2\leq 0\}$에 포함되게 하려면 $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$인 중 가장 작은 θ가 존재하고, 이때 $\cos\theta$는 최댓값을 갖게 된다.





$\cos\theta$의 값이 최대가 될 때는 타원 $x^2+\frac{y^2}{\cos^2\theta}=1$과 직선 $x+3y-2=0$이 그림과 같이 접하는 경우이다.

즉, 기울기가 $-\frac{1}{3}$인 타원의 접선의 방정식은

$y=-\frac{1}{3}x\pm\sqrt{1^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\cos^2\theta}$

이고, 이 접선의 y절편이 $\frac{2}{3}$이므로

$\sqrt{\frac{1}{9}+\cos^2\theta}=\frac{2}{3}$

따라서 $\cos^2\theta=\frac{1}{3}=M^2$이므로

$60M^2=60\times\frac{1}{3}=20$

138. 답 14

[해설] 두 점 $(10,\ 2,\ 5)$, $(-6,\ 10,\ 11)$이 지름의 양 끝이므로 이 구의 중심의 좌표는

$\left(\frac{10+(-6)}{2},\ \frac{2+10}{2},\ \frac{5+11}{2}\right)$, 즉 $(2,\ 6,\ 8)$

이고, 반지름잉 길이는 위의 중심과 두 점 중 어느 한 점 사이의 거리이므로

$r=\sqrt{(2-10)^2+(6-2)^2+(8-5)^2}=\sqrt{89}$

그러므로 구의 방정식은

$(x-2)^2+(y-6)^2+(z-8)^2=89$

이 구와 z축이 만나는 점의 z좌표는 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$4+36+(z-8)^2=89$

$z^2-16z+15=0$

$(z-1)(z-15)=0$

$\therefore z=1,\ z=15$

따라서 z축과 만나는 두 점 사이의 거리는 $15-1=14$

139. 답 ③

[해설]

좌표공간은 xy평면, yz평면, zx평면에 의해 다음과 같이 8개의 영역으로 나누어진다.

① $x>0,\ y>0,\ z>0$인 영역

② $x>0,\ y>0,\ z<0$인 영역

③ $x>0,\ y<0,\ z>0$인 영역
④ $x>0,\ y<0,\ z<0$인 영역
⑤ $x<0,\ y>0,\ z>0$인 영역
⑥ $x<0,\ y>0,\ z<0$인 영역
⑦ $x<0,\ y<0,\ z>0$인 영역
⑧ $x<0,\ y<0,\ z<0$인 영역

한편, 주어진 구

$C:\ (x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=24$

의 중심은 $(-2,3,4)$이므로 구 C의 중심은 ⑤의 영역에 있다. 따라서 구 C는 ⑤의 영역을 지난다.

또, 구의 반지름의 길이 r는 $r=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$이고,

$|-2|<r,\ |3|<r,\ |4|<r$이므로 구 C는 yz평면, zx평면, xy평면에 의하여 각가 두 부분으로 나누어진다.

따라서 구 C는 ①, ⑦, ⑥의 영역을 지난다.

한편, $\sqrt{(-2)^2+3^2}<r$ 이므로 구 C는 z축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 따라서 ③의 영역을 지난다.

또, $\sqrt{(-2)^2+4^2}<r$ 이므로 구 C는 y축과 서로 다른 두점에서 만난다. 따라서 ②의 영역을 지난다.

하지만, $\sqrt{3^2+4^2}>r$ 이므로 구 C는 x축과 만나지 않는다. 따라서 ⑧의 영역을 지나지 않는다.

또, $\sqrt{(-2)^2+3^2+4^2}>r$ 이므로 원점은 구 C의 외부에 있다. 따라서 ④의 영역을 지나지 않는다.

따라서 구 C가 지나는 영역은 ①, ②, ③, ⑤, ⑥, ⑦의 6개이다.

140. 답 ①

[해설]

$x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-8=0$에서

$y=z=0$을 대입하면 $x^2-2x-8=0,\ (x-4)(x+2)=0$

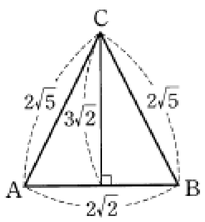
$\therefore A(-2,\ 0,\ 0)\quad (\because a<0)$

$z=x=0$을 대입하면 $y^2+2y-8=0,\ (y+4)(y-2)=0$

$\therefore B(0,\ 2,\ 0)\quad (\because b>0)$

$x=y=0$을 대입하면 $z^2-2z-8=0,\ (z-4)(z+2)=0$

$\therefore C(0,\ 0,\ 4)\quad (\because c>0)$



따라서

$\overline{AB}=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2},\ \overline{BC}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5},$

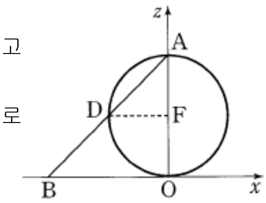
$\overline{CA}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

이므로 삼각형 ABC의 넓이 S는 오른쪽 그림에서

$S=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=6$

141. 답 ⑤

[해설] 구 S의 중심 $(0,\ 0,\ 1)$을 F라 하자. $\triangle OAB$는 직각이등변삼각형이므로 원주각 $\angle OAD=45^\circ$ 이다.



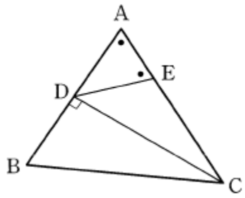
따라서 중심각 $\angle OFD=90^\circ$ 이다.

$\overline{DF}\,/\!/\,\overline{BO}$이므로 $\triangle DFA\backsim\triangle BOA$이고 닮음비는 $1:2$이다.

그러므로 D는 선분 AB의 중점이므로 $D(1,\ 0,\ 1)$이다.

$\triangle CAB$에서 $\overline{CA}=\overline{CB}$이고,

$\overline{AB}\perp\overline{CD}$이므로

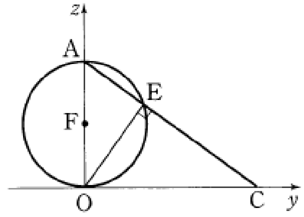


$\sin A=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{20}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

삼각형의 닮음에서

$\overline{AE}:\ \overline{EO}=\overline{OE}:\ \overline{EC}$

$=\overline{AO}:\ \overline{OC}=2:4=1:2$



$\therefore\overline{AE}:\ \overline{EO}:\ \overline{EC}=1:2:4$

E는 선분 AC를 $1:4$로 내분하는 점이므로

$E\left(0,\ \frac{4}{5},\ \frac{8}{5}\right)$

$\therefore\overline{DE}=\sqrt{(0-1)^2+\left(\frac{4}{5}-0\right)^2+\left(\frac{8}{5}-1\right)^2}=\sqrt{2}$

$\triangle ADE$에서 $\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$ 이므로

$\overline{DA}=\overline{DE}\qquad\therefore\alpha=\angle A$

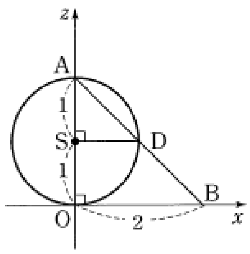
$\therefore\sin\alpha=\sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

142. 답 ③

[해설]

구의 중심이 $S(0,\ 0,\ 1)$이므로 점 D의 좌표는 아래쪽 그림에서 선분 AB의 중심임을 알 수 있다.

$\therefore D(1,\ 0,\ 1)$



같은 방법으로 생각하면 점 E의 좌표는 아래쪽 그림에서

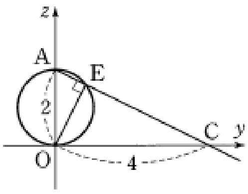
$\overline{AE}:\ \overline{EO}=\overline{OE}:\ \overline{EC}=\overline{AO}:\ \overline{OC}$

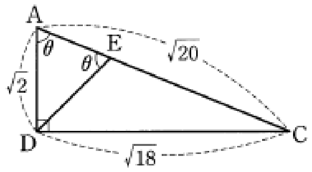
$=2:4=1:2$

즉, $\overline{AE}:\ \overline{EO}:\ \overline{EC}=1:2:4$ 이므로 점 E는 선분 AC를 $1:4$로 내분

하는 점이다.

$\therefore E\left(0,\ \frac{4}{5},\ \frac{8}{5}\right)$





이때, $\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2}$,

$\overline{DE}=\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{5}-1\right)^2}=\sqrt{2}$

이므로 $\overline{DA}=\overline{DE}$ 즉, $\angle AED=\angle DAE=\theta$이고,

삼각형 ADC는 $\angle D$가 90°인 직각삼각형이므로

$\sin\theta=\sin A=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{20}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

143. 답 557

[해설] 중심이 $(4,\ 1,\ 3)$이고 반지름의 길이가 4인 구의 방정식은

$(x-4)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=16$

구의 중심을 C, 접점 T에서 $\overline{PC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

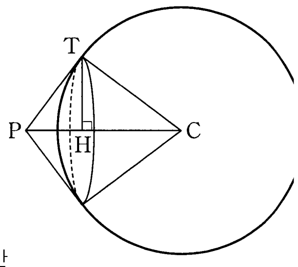
$\overline{PC}=\sqrt{(4-0)^2+(1-1)^2+(3-6)^2}=5$

$\overline{PT}=\sqrt{\overline{PC}^2-\overline{TC}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

$\triangle PTC$의 넓이에서

$\frac{1}{2}\times3\times4=\frac{1}{2}\times5\times\overline{TH}$

$\therefore\overline{TH}=\frac{12}{5}$



$\therefore\overline{PH}=\sqrt{\overline{PT}^2-\overline{TH}^2}$

$=\sqrt{9-\frac{144}{25}}=\frac{9}{5}$

따라서 접점 T가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\overline{TH}$인 원이므로 구하는 입체는 원뿔이고 그 부피는

$\frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{12}{5}\right)^2\times\frac{9}{5}=\frac{432}{125}\pi$

$\therefore a+b=125+432=557$

144. 답 5

[해설] 두 구 $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$,

$(x+1)^2+(y-k)^2+(z-3)^2=9$의 xy평면 위로의 정사영은 각각 두 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$, $(x+1)^2+(y-k)^2=9$이다.

이 두 원이 서로 외접하려면 두 원의 중심 사이의 거리가 두 원의 반지름의 길이의 합과 같아야 한다. 즉,

$\sqrt{(3+1)^2+(2-k)^2}=2+3$

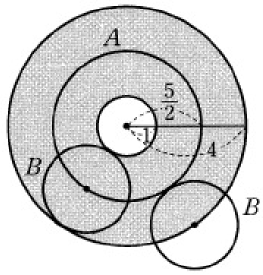
$k^2-4k-5=0$, $(k+1)(k-5)=0$

$\therefore k=5$ 또는 $k=-1$

따라서 양수 k의 값은 5이다.

145. 답 ②

[해설] 집합 A는 중심이 $(0,\ 0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $\frac{5}{2}$인 구를 나타내고, 집합 B는 중심이 $(a,\ b,\ c)$이고 반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$인 구를 나타낸다.



이때, $A\cap B\neq\varnothing$가 되기 위해서는 두 구가 서로 만나야 하므로 B의 중심이 위의 그림의 어두운 부분에 있어야 한다.

따라서 구하는 입체의 부피는

$\frac{4}{3}\pi\cdot4^3-\frac{4}{3}\pi\cdot1^3=84\pi$

146. 답 ③

[해설]

구 $x^2+y^2+z^2=1$의 중심은 원점 $(0,0,0)$이고 반지름의 길이가 1이므로 두 구가 외접할 조건은 두 구의 중심 사이의 거리가 반지름의 길이의 합과 같아야 하다. 즉,

$\sqrt{1^2+2^2+a^2}=1+2$

$a^2=4$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

이때, 접점은 두 점 $(0,0,0)$, $(1,2,2)$를 잇는 선분을 $1:2$로 내분하는 점이므로 접점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot1+2\cdot0}{1+2},\ \frac{1\cdot2+2\cdot0}{1+2},\ \frac{1\cdot2+2\cdot0}{1+2}\right)$

즉, $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$이므로

$b=\frac{1}{3},\ c=\frac{2}{3},\ d=\frac{2}{3}$

$\therefore\ a+b+c+d=2+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$

147. 답 ②

[해설]

구 $C_1:(x-3)^2+(y-4)^2+(z-13)^2=169$ 의 중심은 $A(3,4,13)$이고, 반지름의 길이는 13이다.

이때, xy평면 위에 있는 점 P의 좌표를 $(a,b,0)$이라 하면 두 구 C_1, C_2가 서로 외접할 조건은

$\overline{PA}=\sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2+13^2}$
$=13+1=14$

양변을 제곱하면

$(a-3)^2+(b-4)^2+169=196$

$(a-3)^2+(b-4)^2=27$

따라서 두 구 C_1, C_2가 공통 부분을 가질 조건은

$(a-3)^2+(b-4)^2 \le 27$

이므로 점 P가 존재하는 영역의 넓이는 27π이다.

148. 답 ④

[해설] 구 $x^2+y^2+z^2=64$의 중심은 $A(0,\ 0,\ 0)$이고 반지름의 길이는 8이다.

이 구가 xy평면 위의 점 $P(a,\ b,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 구와 외접할 조건은

$\overline{PA}=\sqrt{a^2+b^2+0}=8+1=9$

양변을 제곱하면 $a^2+b^2=81$

따라서 두 구가 공통 부분을 가질 조건은

$\overline{PA}\le 9$, 즉 $a^2+b^2\le 81$

이므로 점 P가 존재하는 영역의 넓이는 81π이다.

149. 답 ⑤

[해설]

두 구

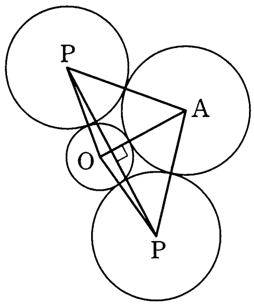
$x^2+y^2+z^2=1$

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$

의 중심이 각각 $O(0,0,0)$,

$A(2,-1,2)$이므로 두 구의 중심 사이의 거리 d는

$d=\overline{OA}=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$



이고, 두 구의 반지름의 길이가 각각

$r_1=1,\ r_2=2$ 이므로

$d=r_1+r_2=3$

따라서 두 구는 외접한다.

조건을 만족하는 점 의 자취는 선분 로부터 일정한 거리에 있는 점의 자취, 즉 원을 나타낸다.

그림에서

$\overline{OR}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

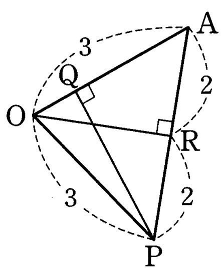
이므로

$\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{5}=\frac{1}{2}\times3\times\overline{PQ}$

에서 $\overline{PQ}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$

따라서 점 P의 자취는 반지름의 길이가 $\frac{4\sqrt{5}}{3}$인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$2\pi\times\frac{4\sqrt{5}}{3}=\frac{8\sqrt{5}}{3}\pi$



150. 답 ⑤

[해설]

두 구

$C_1: x^2+y^2+z^2=4,\ C_2: (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=9$

의 중심각은 각각 $(0,0,0)$, (a,b,c)이므로

$d(a,b,c)=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

ㄱ. $d(1,2,3)=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$ (참)

ㄴ. 두 구 C_1, C_2의 반지름의 길이는 각각 2, 3이므로

$d(a,b,c)=5=2+3$

따라서 두 구는 서로 외접하므로 한 점에서 만난다. (참)

ㄷ. $d(a,b,c)=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3$이라 하면

$a^2+b^2+c^2=3^2$

이므로 점 (a,b,c)가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길 이가 3인 구이고, 그 부피는 $\frac{4}{3}\pi\times3^3=36\pi$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

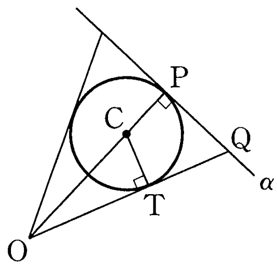
참고 구의 겉넓이와 부피

반지름의 길이가 r인 구의 겉넓이를 S, 부피를 V라 하면

$S=4\pi r^2,\quad V=\frac{4}{3}\pi r^3$

151. 답 ④

[해설] 주어진 구는 중심이 $(3,\ 3,\ 3)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원이다. 이때, 원점 O에서 가장 먼 거리에 있는 점 P까지의 거리 $\overline{OP}$는



$\overline{OP}=\overline{OC}+\overline{PC}=\sqrt{3^2+3^2+3^2}+\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

원점 O에서 구면에 접선을 그어 접점을 T, 접선과 평면 α의 교점을 Q라 하면 구에 가려 평면 α에 빛이 닿지 않는 부분은 오른쪽 그림과 같이 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{PQ}$인 원의 내부이다.

$\overline{OT}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{CT}^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

한편, $\triangle OTC \backsim \triangle OPQ$이므로 $\overline{OT}:\ \overline{TC}=\overline{OP}:\ \overline{PQ}$

$\therefore 2\sqrt{6}:\ \sqrt{3}=4\sqrt{3}:\ \overline{PQ}$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{6}$

따라서 구하는 부분의 넓이는 $\pi\times(\sqrt{6})^2=6\pi$

152. 답 17

[해설] 평면 α를 xy평면으로 생각하면 구의 반지름의 길이는 구의 중심의 z좌표이다. 두 구 C_1, C_2가 외접하므로 중심 사이의 거리 반지름의 길이의 합과 같다.

두 구 C_1, C_2의 중심을 O_1, O_2라 하면 두 구의 반지름의 길이는 각각 5, 15이므로 오른쪽 그림에서

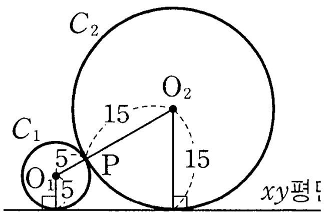
$\overline{O_1P}:\ \overline{PO_2}=5:\ 15\ =1:\ 3$

즉, 점 P는 선분 O_1O_2를 $1:3$으로 내분하는 점이고, 두 점 O_1, O_2의 z좌표가 각각 5, 15이므로 점 P의 z좌표는

$\dfrac{1\times15+3\times5}{1+3}=\dfrac{15}{2}$

따라서 점 P와 평면 α 사이의 거리는 $\dfrac{15}{2}$이므로

$a+b=2+15=17$



153. 답 ⑤

[해설] 구 $(x-6)^2+(y-8)^2+(z-2)^2=40$이 xy평면과 만나서 생기는 도형의 방정식은

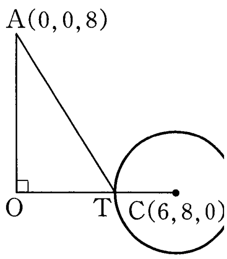
$(x-6)^2+(y-8)^2=36$, $z=0$

즉, 중심이 $C(6,\ 8,\ 0)$이고 반지름의 길이가 6인 원이다.

점 $A(0,\ 0,\ 8)$에서 xy평면에 내린 수선의 발은 원점 O이고, $\overline{OC}$와 원의 교점을 T라 하면 선분 AP의 길이의 최솟값은 $\overline{AT}$이다.

$\overline{OT}=\overline{OC}-\overline{TC}=10-6=4$

$\therefore \overline{AT}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OT}^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$



154. 답 ③

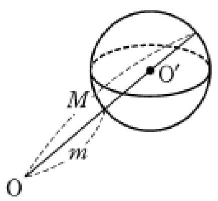
[해설]

$\overline{AB}=\sqrt{(4-1)^2+(1-4)^2}=3\sqrt{2}$

$\overline{BC}=\sqrt{1^2+(4-3)^2+(1-3)^2}=\sqrt{6}$

$\overline{CA}=\sqrt{4^2+(1-3)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{6}$

따라서 삼각형 ABC는 선분 CA가 빗변인 직각삼각형이고, 구의 반지름 길이가 $\sqrt{6}$ 이므로 구의 중심은 선분 의 AC중점이다. 즉, 구의 중심의 좌표를O'이라 하면 $O'(2,\ 2,\ 2)$이므로



$M=\sqrt{2^2+2^2+2^2}+\sqrt{6}=2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

$m=\sqrt{2^2+2^2+2^2}-\sqrt{6}=2\sqrt{3}-\sqrt{6}$

$\therefore Mm=(2\sqrt{3}+\sqrt{6})(2\sqrt{3}-\sqrt{6})=6$

155. 답 ①

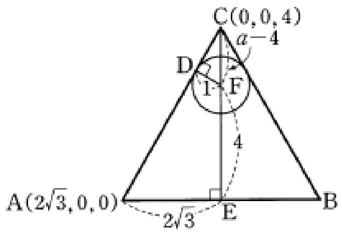
[해설]

$x^2+y^2+z^2-8z+15=0$에서

$x^2+y^2+(z-4)^2=1$

이므로 중심은 $(0,0,4)$이고, 반지름의 길이는 1인 구이다.

또, $x^2+y^2=12$는 중심이 $(0,0)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 원이므로 주어진 조건을 나타내면 그림과 같다.



이때, $\triangle CDF$와 $\triangle CEA$는 서로 닮음이므로

$(a-4):\sqrt{a^2+(2\sqrt{3})^2}=1:2\sqrt{3}$

$\sqrt{a^2+12}=2\sqrt{3}(a-4)$

$a^2+12=12(a-4)^2$

$a^2+12=12a^2-96a+192$

$11a^2-96a+180=0$

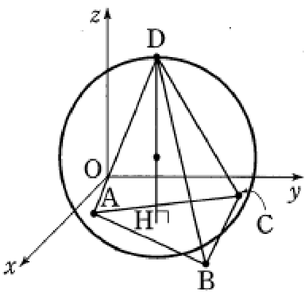
$(a-6)(11a-30)=0$

$\therefore\ a=6\ (\because\ a>4)$

156. 답 23

[해설] 구의 방정식 $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=386$을 표준형으로 고치면 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=400$

이므로 이 구는 중심이 $(1,\ 2,\ 3)$이고 반지름의 길이가 20이다.



세 점 A, B, C가 xy평면 위에 있으므로 사면체 $ABCD$의 부피가 최대일 때는 위의 그림에서 점 D가 xy평면으로부터 가장 멀리 떨어질 때이다.

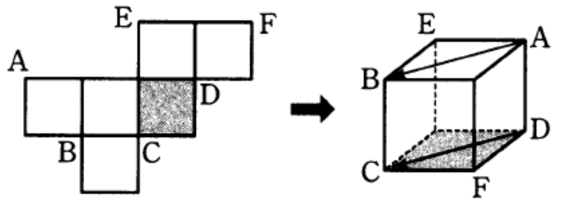
따라서 사면체 $ABCD$의 높이의 최댓값은 $20+3=23$

1. 답 ②	2. 답 $\sqrt{3}$	3. 답 ②	4. 답 ①
5. 답 ②	6. 답 ④	7. 답 ②	8. 답 ④
9. 답 26	10. 답 ③	11. 답 ⑤	12. 답 ②
13. 답 ⑤	14. 답 ⑤	15. 답 $\frac{4}{13}$	16. 답 5
17. 답 ④	18. 답 ③	19. 답 15	20. 답 48
21. 답 ①	22. 답 ①	23. 답 ④	24. 답 ⑤
25. 답 ②	26. 답 ①	27. 답 ⑤	28. 답 7
29. 답 ②	30. 답 91	31. 답 ③	32. 답 ①
33. 답 ③	34. 답 ②	35. 답 ③	36. 답 20
37. 답 ②	38. 답 ①	39. 답 6	40. 답 ③
41. 답 ①	42. 답 ④	43. 답 ②	44. 답 ①
45. 답 ①	46. 답 ⑤	47. 답 ①	48. 답 ②
49. 답 ⑤	50. 답 ⑤	51. 답 ②	52. 답 ②
53. 답 ③	54. 답 12	55. 답 ④	56. 답 30
57. 답 ②	58. 답 32	59. 답 ②	60. 답 48
61. 답 ④	62. 답 ⑤	63. 답 9	64. 답 14
65. 답 ①	66. 답 ②	67. 답 ④	68. 답 ③
69. 답 ②	70. 답 ⑤	71. 답 ④	72. 답 ⑤
73. 답 ②	74. 답 ①	75. 답 ②	76. 답 ⑤
77. 답 ②	78. 답 ②	79. 답 ④	80. 답 ②
81. 답 ③	82. 답 20	83. 답 ③	84. 답 12
85. 답 ⑤	86. 답 ②	87. 답 164	88. 답 ③
89. 답 3	90. 답 5	91. 답 ①	92. 답 ④
93. 답 ②	94. 답 ①	95. 답 ①	96. 답 ④
97. 답 ①	98. 답 ①	99. 답 ④	100. 답 500
101. 답 ①	102. 답 ②	103. 답 ③	104. 답 ⑤
105. 답 ④	106. 답 ③	107. 답 ②	108. 답 ④
109. 답 20	110. 답 ③	111. 답 ④	112. 답 ③
113. 답 ①	114. 답 ⑤	115. 답 ②	116. 답 12
117. 답 ③	118. 답 ⑤	119. 답 ①	120. 답 ①
121. 답 ①	122. 답 ②	123. 답 ③	124. 답 7
125. 답 ④	126. 답 ⑤	127. 답 ④	128. 답 ⑤
129. 답 98	130. 답 ④	131. 답 ①	132. 답 25
133. 답 ①	134. 답 ⑤	135. 답 ②	136. 답 ⑤
137. 답 ③	138. 답 43	139. 답 ②	140. 답 ①
141. 답 ③	142. 답 ①	143. 답 ①	144. 답 ③
145. 답 ④	146. 답 ⑤	147. 답 12	148. 답 ⑤
149. 답 ②	150. 답 ②	151. 답 ②	152. 답 ④
153. 답 ③	154. 답 ④	155. 답 ⑤	156. 답 ①
157. 답 ④			

1. 답 ②

[해설]

어두운 면을 밑면으로 하여 원래의 정육면체를 만들면 아래의 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $\overrightarrow{AB}$와 같은 것은 $\overrightarrow{DC}$이다.

2. 답 $\sqrt{3}$

[해설] $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AG}$

$\therefore\ |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{FG}|=|\overrightarrow{AG}|$

$=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

3. 답 ②

[해설] $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BA}$

$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{BA}$

$=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})-\overrightarrow{BA}$

$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}$

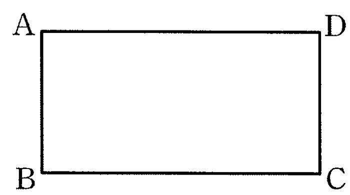
4. 답 ①

[해설] $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ 이므로

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$



5. 답 ②

[해설] 오른쪽 그림과 같이 보조선을 그으면

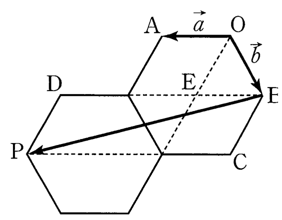
$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DP}$ 이고

$\overrightarrow{BD}=3\vec{a}$

$\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OE}=\vec{a}+\vec{b}$

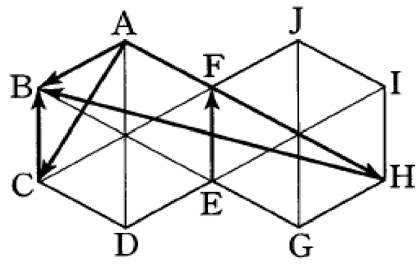
$\therefore\ \overrightarrow{BP}=3\vec{a}+\vec{a}+\vec{b}$

$=4\vec{a}+\vec{b}$



6. 답 ④

[해설]



$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BG}$

$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{HB}$

따라서 $\triangle ABH$에서

$|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{BG}|=|\overrightarrow{HB}|$

$=\sqrt{3^2+1^2-2\cdot3\cdot1\cdot\cos120^{\circ}}=\sqrt{13}$

7. 답 ②

[해설] $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=-\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$ 이므로

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+2\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=(-\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}+2\vec{b})=3\vec{b}$

다른 풀이

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ 임을 이용할 수도 있다.

8. 답 ④

[해설] $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BC}$ 이므로

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

이때, $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}=\overline{BC}=2$ 이고 $\angle ABC=120°$ 이므로

제이코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{BC}cos120°$

$\quad =2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=12$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

따라서 벡터 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AC}$ 의 크기는

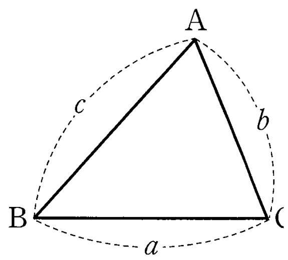
$|\overrightarrow{AC}|=\overline{AC}=2\sqrt{3}$

참고 제이코사인법칙

삼각형 ABC 에서

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$



9. 답 26

[해설] 정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 할 때

() 크기가 a 인 서로 다른 벡터는

$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{EA}$

의 6 개이다.

() 크기가 $\sqrt{2}a$ 인 서로 다른 벡터는

$\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{FA},\ \overrightarrow{BE},\ \overrightarrow{EB},\ \overrightarrow{AH},\ \overrightarrow{HA},\ \overrightarrow{DE},\ \overrightarrow{ED}$

의 12 개이다.

() 크기가 $\sqrt{3}a$ 인 서로 다른 벡터는

$\overrightarrow{AG},\ \overrightarrow{GA},\ \overrightarrow{BH},\ \overrightarrow{HB},\ \overrightarrow{CE},\ \overrightarrow{EC},\ \overrightarrow{DF},\ \overrightarrow{FD}$

의 8 개이다.

따라서 구하는 서로 다른 벡터의 개수는

$6+12+8=26$ (개)

10. 답 ③

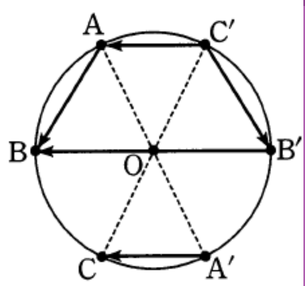
[해설]

세 점 $A,\ B,\ C$ 와 세 점 $A',\ B',\ C'$이 각각 중심 O에 대칭이므로

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'C}-\overrightarrow{C'B'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{C'A}-\overrightarrow{C'B'}$

$=\overrightarrow{C'B}-\overrightarrow{C'B'}$

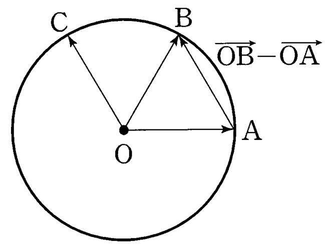
$=\overrightarrow{B'B}=2\overrightarrow{OB}$



11. 답 ⑤

[해설]

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ 이므로 다음 그림과 같다.



이 때, $|\overrightarrow{OC}|=6$ 이므로 삼각형 OAB는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이다. 따라서 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$이므로 부채꼴 AOB 의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{\pi}{3}$$
$$=6\pi$$

12. 답 ②

[해설]

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}$

$\quad =\overrightarrow{AQ}$

$\quad |\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{AQ}|=1$

즉, $\overline{AQ}=1$이므로 점 Q가 그리는 도형은 중심이 A이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

따라서 점 Q가 나타내는 도형의 길이는 2π이다.

13. 답 ⑤

[해설] ㄱ. $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DE}$

$\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BE}$ (참)

ㄴ. $\overline{AC}>\overline{EF},\ \overline{AF}>\overline{EF}$ 이므로

$|\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{EF}|,\ |\overrightarrow{AF}|>|\overrightarrow{EF}|$

$\therefore\ |\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{AF}|>2|\overrightarrow{EF}|$ (참)

ㄷ. 선분 CF 의 중점을 M 이라 하면

$\overline{AC}+\overline{AF}>2\overline{AM}$

이때, $\overline{AM}>\overline{EF}$ 이므로

$|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}|=2|\overrightarrow{AM}|>2|\overrightarrow{EF}|$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

14. 답 ⑤

[해설] ㄱ. 사각형 $ACDF$는 직사각형이므로

$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$ (참)

ㄴ. 정육각형의 외접원의 중심을 O라 하면 □$OABC$는 마름모이므로

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

$\therefore \overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BO}=2(\vec{b}-\vec{a})$ (참)

ㄷ. $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{FD}=\overrightarrow{AC}$이므로 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FD}=2\overrightarrow{FD}$

또, $\angle DEF=120°$ 이므로 $\triangle DEF$에서

$\overline{DF}^2=2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cos120°=12$

$\therefore \overline{DF}=2\sqrt{3}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FD}|=2|\overrightarrow{FD}|=4\sqrt{3}$ (참)
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15. 답 $\frac{4}{13}$

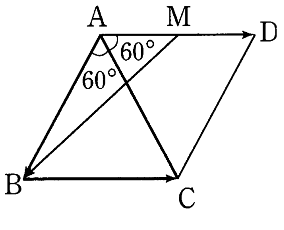
[해설] $3\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a}$ …… ㉠, $2\vec{x}-3\vec{y}=\vec{b}$ …… ㉡
㉠×3+㉡×2 를 하면
$13\vec{x}=3\vec{a}+2\vec{b}$
$\therefore \vec{x}=\frac{3}{13}\vec{a}+\frac{2}{13}\vec{b}$
㉠×2−㉡×3 을 하면
$13\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}$
$\therefore \vec{y}=\frac{2}{13}\vec{a}-\frac{3}{13}\vec{b}$
$\therefore \vec{x}+\vec{y}=\left(\frac{3}{13}\vec{a}+\frac{2}{13}\vec{b}\right)+\left(\frac{2}{13}\vec{a}-\frac{3}{13}\vec{b}\right)$
$=\frac{5}{13}\vec{a}-\frac{1}{13}\vec{b}$
따라서 $k=\frac{5}{13}$, $l=-\frac{1}{13}$
$k+l=\frac{4}{13}$

16. 답 5

[해설] $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(\vec{a}-\vec{b})-(2\vec{a}+\vec{b})$
$=-\vec{a}-2\vec{b}$
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(4\vec{a}+m\vec{b})-(2\vec{a}+\vec{b})$
$=2\vec{a}+(m-1)\vec{b}$
이때, 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 가 평행하려면
$2\vec{a}+(m-1)\vec{b}=t(-\vec{a}-2\vec{b})$
를 만족시키는 실수 t 가 존재해야 한다.
따라서 $2\vec{a}+(m-1)\vec{b}=-t\vec{a}-2t\vec{b}$ 에서
$2=-t$, $m-1=-2t$
$\therefore$ $t=-2$, $m=5$

17. 답 ④

[해설]
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$인 점 D를 잡고 $\overline{AD}$ 의 중점을 M이라 하면



$\left|\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right|$
$=\left|\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right|$
$=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}|$
$=|\overrightarrow{MB}|$
$=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AM}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AM}\cos 120^\circ}$
$=\sqrt{2^2+1^2-2\cdot 2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}$
$=\sqrt{7}$

18. 답 ③

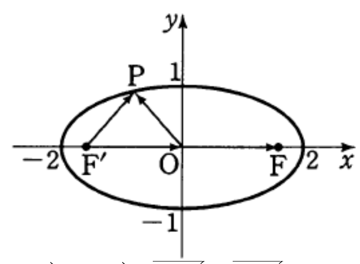
[해설] 점 A, B, P가 일직선 위에 있으므로
$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$
인 0이 아닌 실수 k가 존재한다.
$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=-2\vec{a}+t\vec{b}-\vec{a}=-3\vec{a}+t\vec{b}$
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$
$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$에서 $-3\vec{a}+t\vec{b}=k(\vec{b}-\vec{a})$ … ㉠
$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$이므로 $k=3$, $t=3$

참고

㉠에서 아무 조건도 없다면 그 다음 결론을 낼 수 없다. 다음을 보자.
$k\vec{a}+l\vec{b}=m\vec{a}+n\vec{b} \Leftrightarrow k=m,\ l=n$ … ㉡
이런 것은 행렬에서도 볼 수 있다. (물론 다른 분야에도 많이 있다.)
$pA+qE=rA+sE \Leftrightarrow p=r,\ q=s$ … ㉢
㉡, ㉢의 결론에는 모두 문제가 있다. ㉡에서는 두 벡터가 평행이 아니라는 조건 ($\vec{a}\not\parallel\vec{b}$)이 필요하고 ㉢에서는 행렬 A가 단위행렬 E의 실수배가 아니라는 조건($A\neq kE$)이 필요하다. 이러한 조건이 없는데도 불구하고 그런 결론을 내리는 것은 명백한 오류이다.

19. 답 15

[해설]



$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{F'O}=\overrightarrow{F'P}$이므로
$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}|=1$ 에서 $|\overrightarrow{F'P}|=1$
한편, $\overline{F'P}+\overline{PF}=4$이므로
$\overline{PF}=4-\overline{F'P}=4-1=3=k$
$\therefore 5k=15$

20. 답 48

[해설]
A_i를 꼭짓점으로 하는 정팔각형의 대각선의 교점을 O라 하면 삼각형 OA_1A_3는 직각삼각형이 되고 $\overline{A_1O}=3$이다.
$\overline{A_iB_i}$의 중점을 P_i라 하면 $\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_i}=2\overrightarrow{PP_i}$이다. 또, P_i를 꼭짓점으로 하는 정팔면체의 대각선의 교점을 O'이라 하면
$\sum_{i=1}^{8}\overrightarrow{O'P_i}=\vec{0}$이다.
$\therefore \sum_{i=1}^{8}\left(\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_i}\right)$

$$= 2\sum_{i=1}^{8}\overrightarrow{P_1P_i}$$

$$= 2\sum_{i=1}^{8}(\overrightarrow{O'P_i} - \overrightarrow{O'P_1})$$

$$= -2(8\overrightarrow{O'P_1})\ (\because \sum_{i=1}^{8}\overrightarrow{O'P_i} = \vec{0})$$

$$= -2(8\overrightarrow{OA_1}) = -16\overrightarrow{OA_1}$$

따라서 크기는 48이다.

21. 답 ①

[해설] $\triangle ABC$의 무게중심을 G라 하면

$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$

에서 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}| = 3|\overrightarrow{PG}|$

따라서 $|\overrightarrow{PG}|$가 최대일 때 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}|$가 최대이다.

한편, 무게중심 G는 중선 AD를 $2:1$로 내분하는 점이고 $\overline{AO} < \overline{DO}$이므로 G에서 가장 멀리 떨어진 점은 P_1이다.

참고

$\triangle ABC$의 무게중심을 G라 하면 임의의 점 P에 대하여

$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$

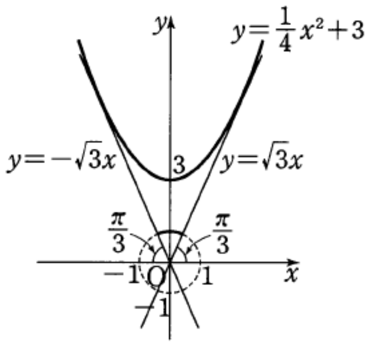
가 성립한다. 이때, 점 P는 정해져 있는 정점이 아니라 임의의 점이라는 사실이 더 중요하다. 즉, P가 삼각형의 내부에 있으나 외부에 있으나 아무상관없이 성립한다는 것이다. 흔히 좌표평면의 원점 O에 대해서만 위의 식이 성립하는 것으로 생각하는 경향이 있는데 점 P는 세 꼭짓점 중의 어느 것일수도 있다.

22. 답 ①

[해설]

$\overrightarrow{OB} = \left|\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}\right| = \frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OA}|} = 1$

이므로 $\overrightarrow{OB}$는 $\overrightarrow{OA}$와 방향이 같고 크기가 1인 벡터이다.



그림에서 포물선 $y = \frac{1}{4}x^2 + 3$에 접하고, 원점을 지나는 직선을 $y = ax$라 하면

$\frac{1}{4}x^2 + 3 = ax,\ x^2 - 4ax + 12 = 0$

$$\frac{D}{4} = 4a^2 - 12 = 0,\ a^2 = 3\ \therefore a = \pm\sqrt{3}$$

따라서 접하는 두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$이므로 점 B가 나타내는 도형의 길이는 부채꼴의 중심각의 크기와 호의 길이의 관계로부터

$$1 \cdot \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

23. 답 ④

[해설]

두 직선 OB와 EF는 서로 평행하고 $\overline{OB} = 2\overline{EF}$이므로

$2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{GB}$

$= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{GB}$

$= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CO}$

$\therefore |\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GB}| = \left|\frac{1}{2}\overrightarrow{CO}\right| = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

24. 답 ⑤

[해설]

$\vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$이므로

$\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{d}$

$$= \vec{a} + 2\vec{b} + 3(\vec{b} + \vec{c})$$

$$= \vec{a} + 5\vec{b} + 3\vec{c}$$

주어진 식은

$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{a} + 5\vec{b} + 3\vec{c}$

이때, 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$는 서로 평행하지 않으므로

$$x = 1,\ y = 5,\ z = 3$$

$$\therefore x + y + z = 9$$

25. 답 ②

[해설]

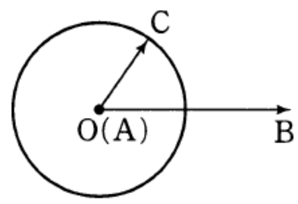
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \overrightarrow{BC}$

$= \vec{a} + (\vec{c} - \vec{b}) = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

26. 답 ①

[해설]

구의 중심 O가 점 A에 일치하도록 구를 평행이동시키면 다음과 같다.



따라서 $|\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB}|$의 최댓값은 세 점 O, B, C가 일직선 위에 있으면서 $\overrightarrow{AB}$가 평면 α위에 있는 원의 지름의 길이가 될 때이다.

$\therefore |\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}| \le |\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OC}| = |3\overrightarrow{OC}| = 3 \times 2 = 6$

27. 답 ⑤

[해설]

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$라 하면

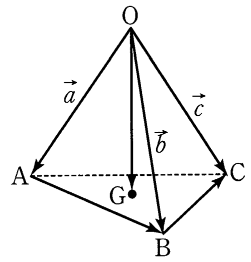
$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$이므로

$\vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

$\vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

따라서

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$



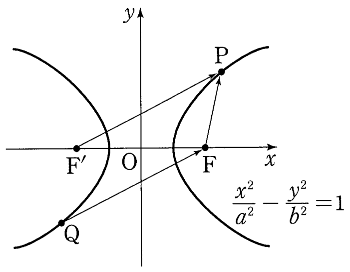
$=\frac{1}{3}\{\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\}$

$=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

이므로 $x+y+z=1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=2$

28. 답 7

[해설]



쌍곡선은 원점에 대하여 대칭이므로

$\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{F'P}$

그러므로

$|\overrightarrow{FP}-\overrightarrow{QF}|=|\overrightarrow{FP}-\overrightarrow{F'P}|$

$=|\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{PF'}|=|\overrightarrow{FF'}|$

$=10$

초점을 $F(k,\ 0)\ (k>0)$이라 하면

$k=5$ …… ㉠

또, 쌍곡선의 정의에 의하여

$||\overrightarrow{FP}|-|\overrightarrow{QF}||=||\overrightarrow{FP}|-|\overrightarrow{F'P}||$

$=2a=6$

$\therefore a=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$b^2=k^2-a^2$

$=5^2-3^2=16$

$\therefore b=4$

$\therefore a+b=7$

29. 답 ②

[해설] $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ 이므로 $5\vec{w}=-4\vec{u}+3\vec{v}$ 이다.

즉, $\vec{w}=-\frac{4}{5}\vec{u}+\frac{3}{5}\vec{v}$ 이므로

$l=-\frac{4}{5},\ w=\frac{3}{5}$

$\therefore\ l+m=-\frac{1}{5}$

30. 답 91

[해설] $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

$\therefore\ 100p+10q+r=100-10+1=91$

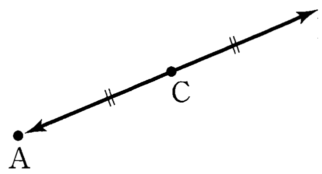
31. 답 ③

[해설] ㄱ. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=0$

$\therefore\ \overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CB}$

따라서 세 점 $A,\ B,\ C$는 오른쪽 그림과 같이 한 직선 위에 있다.(참)



ㄴ. ㄱ의 그림에서 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$ 이므로

$|\overrightarrow{AB}|=2|\overrightarrow{AC}|$ (참)

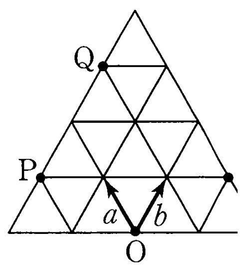
ㄷ. 세 점 $A,\ B,\ C$가 ㄱ의 그림과 같은 위치 관계를 만족시키면 점 D의 위치에 관계없이 주어진 등식이 성립한다.

따라서 삼각형 ABD가 항상 직각삼각형인 것은 아니다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

32. 답 ①

[해설] 오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\vec{a},\ \vec{b}$를 놓으면



$\overrightarrow{OP}=2\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{OQ}=2\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{OR}=2\vec{b}-\vec{a}$

이므로

$s\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OQ}=s(2\vec{a}-\vec{b})+t(2\vec{a}+\vec{b})$

$=(2s+2t)\vec{a}+(-s+t)\vec{b}$

$\therefore\ 2\vec{b}-\vec{a}=(2s+2t)\vec{a}+(-s+t)\vec{b}$

이 때, 두 벡터 $\vec{a},\ \vec{b}$는 서로 평행하지 않으므로

$-1=2s+2t,\ 2=-s+t$

두 식을 연립항 풀면

$s=-\frac{5}{4},\ t=\frac{3}{4}$

$\therefore\ s+t=-\frac{1}{2}$

33. 답 ③

[해설] $2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$ 에서

$2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$

$\therefore\ \overrightarrow{PC}=-3\overrightarrow{PA}$

따라서 세 점 $P,\ A,\ C$는 한 직선 위에 있고

$\overline{AP}:\overline{PC}=1:3$ … ㉠

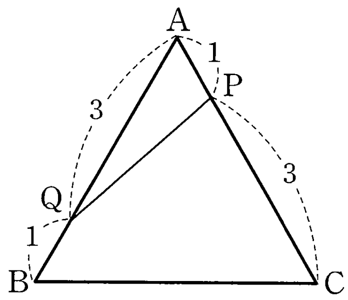
또, $\overrightarrow{QA}+2\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{BC}$ 에서

$\overrightarrow{QA}+2\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{QB}$

따라서 세 점 $Q,\ A,\ B$는 한 직선 위에 있고

$\overline{BQ}:\overline{QA}=1:3$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 점삼각형 ABC에서 두 점 $P,\ Q$의 위치는 다음 그림과 같다.



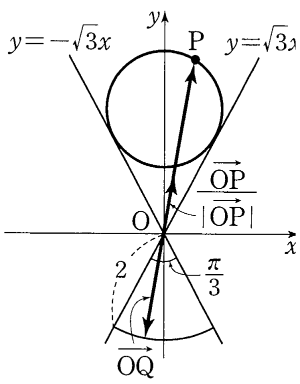
따라서 삼각형 APQ 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 3\times 1\times \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

34. 답 ②

[해설] 벡터 $\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$ 는 벡터 $\overrightarrow{OP}$ 와 방향이 같고 크기가 1 인 단위벡터이므로 벡터 $\overrightarrow{OQ}$ 는 벡터 $\overrightarrow{OP}$ 와 방향이 반대이고 크기가 2 인 벡터이다.

따라서 점 Q 의 자취는 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2 이며 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴의 호이다.



따라서 구하는 자취의 길이는

$2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$

35. 답 ③

[해설] 선분 AB 의 중점이 M_5 이므로 선분 $M_K M_{10-k}$ 의 중점은 M 이다.

$\therefore \overrightarrow{OM_k}+\overrightarrow{OM_{10-k}}=2\overrightarrow{OM_5}(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$\therefore \overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}+\cdots+\overrightarrow{OM_9}$

$=(\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_9})+(\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_8})+(\overrightarrow{OM_3}+\overrightarrow{OM_7})$
$\quad+(\overrightarrow{OM_4}+\overrightarrow{OM_6})+\overrightarrow{OM_5}$

$=2\overrightarrow{OM_5}+2\overrightarrow{OM_5}+2\overrightarrow{OM_5}+2\overrightarrow{OM_5}+\overrightarrow{OM_5}$

$=9\overrightarrow{OM_5}$

이때, $\overline{OM_5}=10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$ 이므로

$|\overrightarrow{OM_5}|=5\sqrt{3}$

$\therefore\ |\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}+\cdots+\overrightarrow{OM_9}|$

$=9|\overrightarrow{OM_5}|=9\times 5\sqrt{3}=45\sqrt{3}$

다른 풀이

$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ 라 하면

$\overrightarrow{OM_1}=\frac{9}{10}\vec{a}+\frac{1}{10}\vec{b}$

$\overrightarrow{OM_2}=\frac{8}{10}\vec{a}+\frac{2}{10}\vec{b}$

$\overrightarrow{OM_3}=\frac{7}{10}\vec{a}+\frac{3}{10}\vec{b}$

$\vdots$

$\overrightarrow{OM_9}=\frac{1}{10}\vec{a}+\frac{9}{10}\vec{b}$ 이므로

$\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}+\cdots+\overrightarrow{OM_9}$

$=\frac{45}{10}\vec{a}+\frac{45}{10}\vec{b}=\frac{9}{2}\vec{a}+\frac{9}{2}\vec{b}=\frac{9}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

이때, 선분 AB 의 중점을 M 이라 하면

$\overline{OM}=10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

$\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}|=2\overline{OM}=10\sqrt{3}$

$\therefore\ |\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}+\cdots+\overrightarrow{OM_9}|$

$\quad=\frac{9}{2}|\vec{a}+\vec{b}|=\frac{9}{2}\times 10\sqrt{3}=45\sqrt{3}$

36. 답 20

[해설] (나)의 n 대신에 0을 대입하면

$\overrightarrow{OX_1}=\overrightarrow{OX_0}+\frac{1}{2}\overrightarrow{X_0A}+\frac{1}{4}\overrightarrow{X_0B}$

$=\overrightarrow{OO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}=(9,\ 12)$

(나)의 n 대신에 $n-1$을 대입하면

$\overrightarrow{OX_n}=\overrightarrow{OX_{n-1}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{X_{n-1}A}+\frac{1}{4}\overrightarrow{X_{n-1}B}$

(나)와 이것을 변끼리 빼면

$\overrightarrow{OX_{n+1}}-\overrightarrow{OX_n}=(\overrightarrow{OX_n}-\overrightarrow{OX_{n-1}})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{X_nA}-\overrightarrow{X_{n-1}A})$

$+\frac{1}{4}(\overrightarrow{X_nB}-\overrightarrow{X_{n-1}B})$

$\overrightarrow{X_nX_{n+1}}=\overrightarrow{X_{n-1}X_n}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AX_{n-1}}-\overrightarrow{AX_n})+\frac{1}{4}(\overrightarrow{BX_{n-1}}-\overrightarrow{BX_n})$

$=\overrightarrow{X_{n-1}X_n}+\frac{1}{2}\overrightarrow{X_nX_{n-1}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{X_nX_{n-1}}$

$=\overrightarrow{X_{n-1}X_n}-\frac{1}{2}\overrightarrow{X_{n-1}X_n}-\frac{1}{4}\overrightarrow{X_{n-1}X_n}$

$=\frac{1}{4}\overrightarrow{X_{n-1}X_n}$

$\therefore|\overrightarrow{X_nX_{n+1}}|=\frac{1}{4}|\overrightarrow{X_{n-1}X_n}|$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

$\therefore|\overrightarrow{X_{n-1}X_n}|=|\overrightarrow{X_0X_1}|\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=|\overrightarrow{OX_1}|\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$=\sqrt{9^2+12^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=15\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}|\overrightarrow{X_{n-1}X_n}|=\frac{15}{1-\frac{1}{4}}=20$

37. 답 ②

[해설] $\overrightarrow{AB}\ /\!/\ \overrightarrow{CD}$ 이므로 $\overrightarrow{CD}=m\overrightarrow{AB}$($m$ 은 0 이 아닌 실수)이어야 한다.

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})-\overrightarrow{AC}$

$\quad=(\vec{a}+2\vec{b})+(4\vec{a}+k\vec{b})-(k\vec{a}+6\vec{b})$

$\quad=(5-k)\vec{a}+(k-4)\vec{b}$

따라서 $(5-k)\vec{a}+(k-4)\vec{b}=m\vec{a}+2m\vec{b}$ 이므로

$5-k=m,\ \ k-4=2m$

즉, $2(5-k)=k-4$ 이므로

$10-2k=k-4,\ \ 3k=14$

$\therefore\ k=\dfrac{14}{3}$

38. 답 ①

[해설]

$\overrightarrow{OP}=\vec{a}+2\vec{b},\ \ \overrightarrow{OQ}=3\vec{a}-k\vec{b}$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\\&=(3\vec{a}-k\vec{b})-(\vec{a}+2\vec{b})\\&=2\vec{a}-(k+2)\vec{b}\end{aligned}$$

두 벡터 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{PQ}$가 서로 평행하므로 상수 m에 대하여

$$m\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{PQ}$$

$$m\vec{a}+2m\vec{b}=2\vec{a}-(k+2)\vec{b}$$

$$\therefore m=2,\ \ k=-6$$

39. 답 6

[해설] $(\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c})\,/\!/\,(3\vec{a}+k\vec{b}+l\vec{c})$ 이려면

$3\vec{a}+k\vec{b}+l\vec{c}=t(\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c})$ 를 만족시키는 실수 t 가 존재해야 한다.

이때, 세 벡터 $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ 중 어느 두 벡터도 서로 평행하지 않으므로

$3=t,\ \ k=3t,\ \ l=-t$

$\therefore\ \ k=9,\ \ l=-3$

$\therefore\ \ k+l=6$

40. 답 ③

[해설] $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \ \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ 라 하면

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=x\,\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=(x-1)\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=3\,\overrightarrow{OB}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=-\vec{a}+2\vec{b}$

세 점 $P,\ Q,\ R$가 한 직선 위에 있기 위해서는 $\overrightarrow{PQ}=t\,\overrightarrow{PR}$를 만족시키는 실수 $t(t\neq 0)$가 존재하야 한다.

즉, $(x-1)\vec{a}-\vec{b}=-t\,\vec{a}+2t\,\vec{b}$ 이어야 한다.

그런데 두 벡터 $\vec{a},\ \vec{b}$ 는 서로 평행이 아니므로

$\begin{cases}x-1=-t\\-1=2t\end{cases}$

$\therefore\ \ t=-\dfrac{1}{2},\ \ x=\dfrac{3}{2}$

41. 답 ①

[해설]

세 점 $A,\ B,\ C$가 일직선 위에 있으므로

$$l\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\ \text{(단, } l\text{은 실수)}$$

한편,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}\\&=2\vec{b}-\vec{a}\end{aligned}$$

이므로

$$l(2\vec{b}-\vec{a})=3\vec{a}+k\vec{b}$$

$$-l\vec{a}+2l\vec{b}=3\vec{a}+k\vec{b}$$

두 벡터 $\vec{a},\ \vec{b}$가 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로

$$l=-3,\ \ 2l=k$$

$$\therefore k=-6$$

42. 답 ④

[해설] 점 O 를 시점으로 하는 위치벡터를 잡으면

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{3}$

따라서 점 P 는 $\boxed{\mathrm{AC}}$ 를 $1:\boxed{2}$ 로 내분하는 점이다.

$\therefore$ (가) AC, (나) 2

다른 풀이

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}$

$\therefore 2\overrightarrow{\mathrm{PA}}=-\overrightarrow{\mathrm{PC}}$

즉 세 점 A, C, P 는 오른쪽 그림과 같이 일직선 위에 있으며 $2\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PC}}$ 이고, 두 점 A, C 는 점 P 의 반대쪽에 있다.

따라서 점 P 는 선분 AC 를 1 : 2 로 내분하는 점이다.

43. 답 ②

[해설] 점 O 를 시점으로 하는 위치벡터를 잡으면

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 에서 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-2(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$\therefore 3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

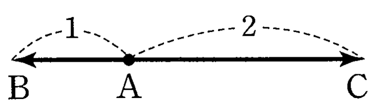
$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$

따라서 점 A 는 선분 BC 를 $1:\boxed{2}$ 로 $\boxed{\text{내분}}$하는 점이다.

$\therefore$ (가) 2, (나) 내분

다른 풀이

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 를 만족시키는 세 점 A, B, C 의 위치 관계는 다음 그림과 같다.



따라서 점 A 는 선분 BC 를 1 : 2 로 내분하는 점이다.

44. 답 ①

[해설] $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$의 위치벡터를 각각 $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d},\ \vec{e},\ \vec{f}$ 라 하면

$P,\ Q,\ R$의 위치벡터는 각각 $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \dfrac{\vec{c}+\vec{d}}{2},\ \dfrac{\vec{e}+\vec{f}}{2}$

$L,\ M,\ N$의 위치벡터는 각각 $\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\ \dfrac{\vec{d}+\vec{e}}{2},\ \dfrac{\vec{f}+\vec{a}}{2}$

이때, 두 무게중심 $G,\ H$의 위치벡터를 각각 $\vec{g},\ \vec{h}$라 하면

$\vec{g}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\dfrac{\vec{c}+\vec{d}}{2}+\dfrac{\vec{e}+\vec{f}}{2}\right)=\dfrac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f})$

$\vec{h}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\dfrac{\vec{d}+\vec{e}}{2}+\dfrac{\vec{f}+\vec{a}}{2}\right)=\dfrac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f})$

따라서 육각형의 모양이 어떻든, 두 삼각형의 모양이 어떻든 관계없이 항상 두 무게중심은 일치한다.

45. 답 ①

[해설] 점 O 를 시점으로 하는 위치벡터를 잡으면

$3\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$ 에서

$3(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})+2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

$6\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$

$\therefore \overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}}{2}$

따라서 점 P 는 선분 $\boxed{\text{AB}}$ 를 $\boxed{1}$: 1 로 내분하는 점이다.

∴ (가) AB, (나) 1

다른 풀이

벡터 $\overrightarrow{BC}$ 를 점 P 를 시점으로 하는 벡터로 나타내면

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}$ 이므로

$3\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$ 에서

$3\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}$

$\therefore \overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PB}$

따라서 점 P 는 선분 AB 의 중점이다.

46. 답 ⑤

[해설]

세 점 A, B, C는 한 직선 l위에 있으므로 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ (k는 실수)가 성립한다.

$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OC}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}=2m\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

따라서 $1-k=2m$, $k=\dfrac{1}{2}$이므로 $m=\dfrac{1}{4}$

47. 답 ①

[해설]

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$

점 D는 선분 BM을 $1:2$로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}\\&=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{b}\right)\\&=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{DC}&=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\\&=\vec{b}-\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}\right)\\&=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}\end{aligned}$$

48. 답 ②

[해설]

변 BC의 중점을 M이라 하면

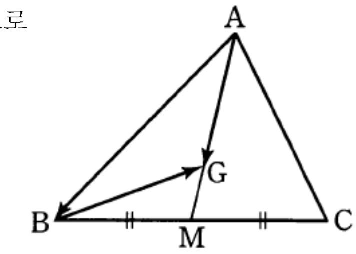
$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AB}$

$=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{AB}$

$=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

따라서, $m=-\dfrac{2}{3}$, $n=\dfrac{1}{3}$이므로

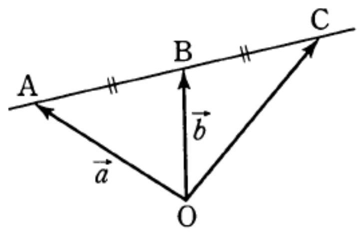
$m+n=-\dfrac{1}{3}$



49. 답 ⑤

[해설]

점 C는 선분 AB를 2 : 1 로 외분하는 점이므로



$\overrightarrow{OC}=\dfrac{2\cdot\vec{b}-1\cdot\vec{a}}{2-1}=2\vec{b}-\vec{a}$

50. 답 ⑤

[해설]

ㄱ. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$에서

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$

$\overrightarrow{PC}=-2\overrightarrow{PA}$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $\overrightarrow{PC}=-2\overrightarrow{PA}$이므로 점 P는 선분 AC 위에 있고, $\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PA}$이며 두 벡터 $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PA}$는 방향이 반대이다.

그러므로 점 P는 선분 AC를 1 : 2 로 내분한다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 $\overline{PC}=2\overline{PA}$이므로

$\triangle PAB$: $\triangle PBC=$ 1 : 2 (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

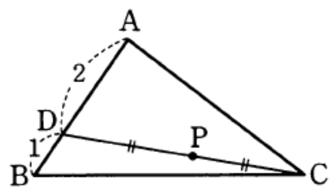
51. 답 ②

[해설]

ㄱ. $-\overrightarrow{PC}=\dfrac{\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}}{3}$

선분 AB를 2 : 1 로 내분하는 점을 D라 하면

$-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD}$



따라서 직선 PC는 선분 AB를 2 : 1 로 내분한다.(거짓)

ㄴ. $\overline{PD}=\overline{PC}$이므로

$\triangle ABC$: $\triangle ABP$ = 2 : 1 (참)

ㄷ. $\triangle APC=\dfrac{1}{2}\triangle ADC$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\triangle ABC=\dfrac{1}{3}\triangle ABC$

이므로 $\triangle ABC$: $\triangle APC$ = 3 : 1 (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

52. 답 ②

[해설]

N은 선분 BC를 2:1로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

그러므로

$$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AN}$$

$$=\frac{1}{3}s\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{b} \quad \cdots\cdots ㉠$$

또, $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{a}$이므로

$$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AM}+(1-t)\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{1}{2}t\vec{a}+(1-t)\vec{b} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{1}{2}t=\frac{1}{3}s,\ 1-t=\frac{2}{3}s$$

$$\therefore s=\frac{3}{4},\ t=\frac{1}{2}$$

따라서 ㉠에 이 값을 대입하면

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

53. 답 ③

[해설] $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\vec{b}$ 로 놓으면 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=3\vec{b}$ 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{BD}}=t(\vec{a}+3\vec{b})$ (단, t 는 실수)

세 점 P, Q, C 는 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ (단, k 는 실수)

즉, $\vec{a}-\vec{b}=k(\overrightarrow{\mathrm{BQ}}-\vec{b})$

$\vec{a}-\vec{b}=k\{t(\vec{a}+3\vec{b})-\vec{b}\}$

$\vec{a}-\vec{b}=k\{t\vec{a}+(3t-1)\vec{b}\}$

$\vec{a}-\vec{b}=kt\vec{a}+k(3t-1)\vec{b}$

$\therefore\ 1=kt,\ -1=k(3t-1)$

그런데 $k\neq 0$ 이므로

$$\frac{1}{k}=t=1-3t$$

$$\therefore\ t=\frac{1}{4},\ k=4$$

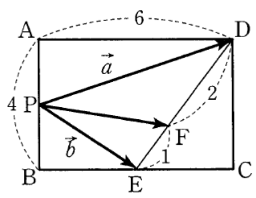
따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, 즉 $\overrightarrow{\mathrm{QC}}=3\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ 이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|:|\overrightarrow{\mathrm{QC}}|=1:3$

$$\therefore\ \frac{|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{QC}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}=3$$

54. 답 12

[해설] $\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{PE}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{PD}}+2\overrightarrow{\mathrm{PE}}=\vec{x}$ 라 하면 $\vec{x}=\vec{a}+2\vec{b}$ 이므로



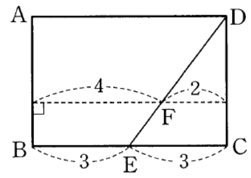
$$\frac{1}{3}\vec{x}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$$

선분 DE 를 2:1 로 내분하는 점을 F 라 하면

$$\frac{1}{3}\vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{PF}}$$

$$\therefore\ |\vec{x}|=3|\overrightarrow{\mathrm{PF}}|$$

$|\overrightarrow{\mathrm{PF}}|$의 최솟값은 오른쪽 그림의 점 F 에서 변 AB 에 내린 수선의 길이인 4 이다.



따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{PD}}+2\overrightarrow{\mathrm{PE}}|$, 즉 $|\vec{x}|$ 의 최솟값은

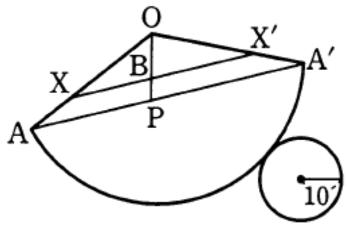
$3\times 4=12$

55. 답 ④

[해설]

$$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}=\frac{2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AO}}{3}$$

이므로 점 B는 선분 OP를 2 : 1 로 내분하는 점이다.



원뿔의 전개도에서 L은 $\overline{AA'}$이고 $\overline{OA}$와 $\overline{OA'}$을 2 : 1 로 내분하는 점을 각각 X, X'이라 하면 점 B가 나타내는 도형은 선분 XX'이다. 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$30\times\theta=2\pi\times 10$에서 $\theta=\frac{2\pi}{3}$이므로 삼각형 OAA'에서

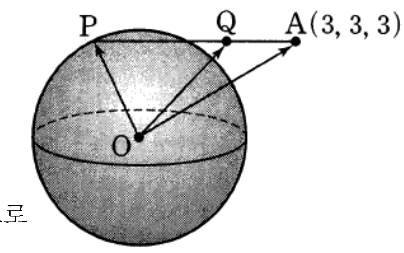
$$\frac{\overline{AA'}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=\frac{30}{\sin\frac{\pi}{6}}\quad\therefore\ \overline{AA'}=30\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \overline{XX'}=\frac{2}{3}\overline{AA'}=20\sqrt{3}$$

56. 답 30

[해설]

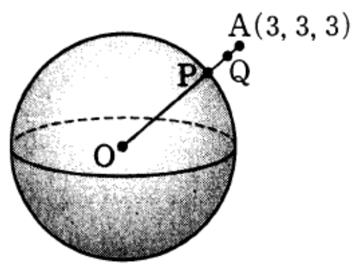
선분 AP를 1 : 2 로 내분하는 점을 Q 라고 할 때,



$$\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}$$

이 때, $|\overrightarrow{OP}|=3$, $|\overrightarrow{OA}|=3\sqrt{3}$ 으로 일정하므로

$|\overrightarrow{OQ}|$의 값이 최대가 되는 것은 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OA}$의 방향이 같을 때이다.



$$\overline{PQ}=\frac{2}{3}\overline{PA}=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-3)=2\sqrt{3}-2$$

$$|\overrightarrow{OQ}|=3+(2\sqrt{3}-2)=1+2\sqrt{3}$$

따라서 $a=1$, $b=2$이므로

$10(a+b)=10(1+2)=30$

57. 답 ②

[해설] 벡터 $\vec{b}$ 는 벡터 $\vec{a}$ 와 방향이 반대이므로

$\vec{b}=k\vec{a}$ (단, $k<0$)

의 꼴로 나타낼 수 있다.

이 때, $|\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}=3$ 이므로

$|\vec{b}|=|k||\vec{a}|=3|k|=9$

에서 $k=-3$ ($\because k<0$)

$\therefore \vec{b}=-3(-2,\ 1,\ 2)=(6,\ -3,\ -6)$

$\therefore x+y+z=6-3-6=-3$

58. 답 32

[해설]

$2\vec{a}-2\vec{b}=\vec{c}$이므로 $(4-2x,\ 8)=(-4,\ y)$

따라서 $x=4,\ y=8$이므로 $xy=32$

59. 답 ②

[해설] 벡터 $\vec{a}$ 와 방향이 같은 벡터는 $k\vec{a}$ ($k>0$)의 꼴이다.

$|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|=k|\vec{a}|=1$ 이어야 하므로

$k=\dfrac{1}{|\vec{a}|}$

이 때, $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{9}=3$ 이므로

$k=\dfrac{1}{3}$

따라서 벡터 $\vec{a}$ 와 방향이 같고 크기가 1 인 벡터는

$\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\dfrac{1}{3}\vec{a}=\dfrac{1}{3}(2,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{2})=\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$

이므로 구하는 벡터의 y 성분은 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

참고

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ 과 방향이 같은 단위벡터는

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}(a_1,\ a_2,\ a_3)$$

$$=\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\ \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\ \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\right)$$

60. 답 48

[해설] 벡터 $\vec{a}$ 와 방향이 같은 벡터는 $k\vec{a}$ ($k>0$)의 꼴이다.

$|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|=k|\vec{a}|=10$ 이어야 하므로

$k=\dfrac{10}{|\vec{a}|}$

이 때 $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ 이므로

$k=\dfrac{10}{5}=2$

따라서 구하는 벡터는 $2\vec{a}=(6,\ 8)$ 이므로 모든 성분의 곱은

$6\times 8=48$

61. 답 ④

[해설] 선분 AB 를 2 : 3 으로 외분하는 점 C 의 위치벡터는

$\dfrac{2\vec{b}-3\vec{a}}{2-3}=3\vec{a}-2\vec{b}$

$\therefore p+q=3+(-2)=1$

62. 답 ⑤

[해설] $2\vec{a}-\vec{b}=2(2,\ -3)-(1,\ -2)$

$=(4,\ -6)-(1,\ -2)=(3,\ -4)$

$\therefore |2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$

63. 답 9

[해설] $a+1=2$ 에서 $a=1$

$2b-1=5$ 에서 $b=3$

$4b=2c+2$ 에서 $c=5$

$\therefore a+b+c=9$

64. 답 14

[해설] $\overrightarrow{OA}=(-1,\ 2,\ 3)$, $\overrightarrow{OB}=(5,\ 6,\ 7)$ 이므로

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(5,\ 6,\ 7)-(-1,\ 2,\ 3)=(6,\ 4,\ 4)$

$\therefore p+q+r=6+4+4=14$

65. 답 ①

[해설] 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 평행하려면 $\vec{b}=k\vec{a}$ 를 만족시키는 k 가 존재해야 하므로

$(9,\ q,\ 3)=k(3,\ 0,\ p)$

이 때 $9=3k$, $q=0$, $3=kp$ 이어야 하므로

$k=3$, $p=1$

$\therefore p+q=1+0=1$

66. 답 ②

[해설]

$\vec{a}+t\vec{b}=(-4,\ -2,\ 2)+t(1,\ 3,\ -2)=(t-4,\ 3t-2,\ -2t+2)$

$\therefore |\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(t-4)^2+(3t-2)^2+(-2t+2)^2}$

$=\sqrt{14t^2-28t+24}$

$=\sqrt{14(t-1)^2+10}\geq\sqrt{10}$

따라서 $|\vec{a}+t\vec{b}|$ 는 $t=1$ 일 때, 최솟값 $\sqrt{10}$ 을 갖는다.

$\therefore \alpha\beta=1\times\sqrt{10}=\sqrt{10}$

67. 답 ④

[해설] $\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}=(2,\ 1)-2(3,\ 2)+(0,\ 4)=(-4,\ 1)$

$\therefore |\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{(-4)^2+1^2}=\sqrt{17}$

68. 답 ③

[해설]

$2\vec{a}-\vec{b}=2\left(\dfrac{1}{2}x^2,\ 2,\ \dfrac{y}{2}\right)-(-y^2,\ -2,\ -x)$

$=(x^2+y^2,\ 6,\ x+y)=(10,\ 6,\ 2)$

따라서 $x^2+y^2=10,\ x+y=2$이므로

$$2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)=2^2-10=-6$$

$\therefore xy=-3$

69. 답 ②

[해설] $3(\vec{a}-2\vec{x})+2(\vec{x}-\vec{b})=2\vec{a}-\vec{b}-2\vec{x}$ 에서

$$3\vec{a}-6\vec{x}+2\vec{x}-2\vec{b}=2\vec{a}-\vec{b}-2\vec{x}$$

$$-2\vec{x}=-\vec{a}+\vec{b}$$

$$\therefore \vec{x}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$$

$\vec{a}-\vec{b}=(-2,\ 1,\ 4)-(-4,\ 3,\ 0)=(2,\ -2,\ 4)$ 이므로

$$\vec{x}=\frac{1}{2}(2,\ -2,\ 4)=(1,\ -1,\ 2)$$

70. 답 ⑤

[해설] $\vec{x}+\vec{y}=(3,\ 6,\ 2)$ …… ㉠ , $-\vec{x}+2\vec{y}=(3,\ 0,\ 4)$ …… ㉡

㉠+㉡ 을 하면

$$3\vec{y}=(6,\ 6,\ 6)$$

$$\therefore \vec{y}=(2,\ 2,\ 2)$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\vec{x}=(3,\ 6,\ 2)-(2,\ 2,\ 2)=(1,\ 4,\ 0)$$

$$\therefore \vec{x}-\vec{y}=(1,\ 4,\ 0)-(2,\ 2,\ 2)$$

$$=(-1,\ 2,\ -2)$$

71. 답 ④

[해설] $|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{AB}|$ 이므로 $|\overrightarrow{AB}|=5$ 이어야 한다.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

$$=(-\sin\theta,\ 0,\ a)-(2\sin\theta,\ 3\cos\theta,\ 0)$$

$$=(-3\sin\theta,\ -3\cos\theta,\ a)$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-3\sin\theta)^2+(-3\cos\theta)^2+a^2}$$

$$=\sqrt{9(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+a^2}$$

$$=\sqrt{9+a^2}=5$$

따라서 $9+a^2=25$ 이어야 하므로

$$a=4\,(\because a>0)$$

72. 답 ⑤

[해설]

$\vec{p}+\vec{q}=(1,\ 2,\ 3)$ …… ㉠

$\vec{p}-\vec{q}=(3,\ -2,\ 1)$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 변변 더하면

$$2\vec{p}=(4,\ 0,\ 4)$$

$$\therefore \vec{p}=(2,\ 0,\ 2)$$

또, ㉠과 ㉡을 변변 빼면

$$2\vec{q}=(-2,\ 4,\ 2)$$

$$\therefore \vec{q}=(-1,\ 2,\ 1)$$

이 때,

$$\vec{p}+2\vec{q}=(2,\ 0,\ 2)+(-1,\ 2,\ 1)$$

$$=(0,\ 4,\ 4)$$

이므로

$$|\vec{p}+2\vec{q}|=\sqrt{0^2+4^2+4^2}$$

$$=4\sqrt{2}$$

73. 답 ②

[해설]

$\overrightarrow{AD}//\overrightarrow{BC}$이므로

$\overrightarrow{BC}=t\overrightarrow{AD}$ (t는 실수)

즉, $(a,\ b+1,\ b-2)=t(2,-1,\ 2)=(2t,\ -t,\ 2t)$ 이므로

$a=2t$ …… ㉠, $b+1=-t$ …… ㉡, $b-2=2t$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $t=-1,\ b=0$이므로 $a=-2$

$$\therefore a+b=-2$$

74. 답 ①

[해설]

$C(2,\ 3,\ -4)$ 이므로

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

$=(2,\ 3,\ -4)-(1,\ 2,3)=(1,\ 1,-7)$

$\therefore |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{1^2+1^2+(-7)^2}=\sqrt{51}$

75. 답 ②

[해설] $P(x,\ 2x-1)$ 이라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x+2,\ 2x-5),\ \ \overrightarrow{BP}=(x-4,\ 2x-1)$

$\therefore |\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|=|(2x-2,\ 4x-6)|$

$$=\sqrt{(2x-2)^2+(4x-6)^2}$$

$$=\sqrt{20x^2-56x+40}$$

$$=2\sqrt{5x^2-14x+10}$$

$$=2\sqrt{5\left(x-\frac{7}{5}\right)^2+10-\frac{49}{5}}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 이다.

76. 답 ⑤

[해설]

$\overrightarrow{OA}=(1,\ -1,\ 0),\ \overrightarrow{OB}=(0,\ -1,\ 1),\ \overrightarrow{OC}=(1,\ 0,\ 1)$ 이므로

$\overrightarrow{OP}=a(1,\ -1,0)+b(0,\ -1,\ 1)+c(1,\ 0,\ 1)=(1,\ -1,\ 1)$

에서 $(a+c,\ -a-b,\ b+c)=(1,\ -1,\ 1)$

$$\therefore a+c=1,\ -a-b=-1,\ b+c=1$$

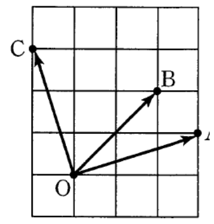
이것을 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{2}$$

$$\therefore a+b+c=\frac{3}{2}$$

77. 답 ②

[해설] 오른쪽 그림과 같이 점 O 를 시점(원점)으로 하는 좌표평면



을 잡으면 세 점 A, B, C 의 위치벡터는 각각

$\overrightarrow{OA}=(3,\ 1)$, $\overrightarrow{OB}=(2,\ 2)$

$\overrightarrow{OC}=(-1,\ 3)$

이다. 이때, $\overrightarrow{OC}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}$ 이어야 하므로

$(-1,\ 3)=p(3,\ 1)+q(2,\ 2)=(3p+2q,\ p+2q)$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$3p+2q=-1$, $p+2q=3$

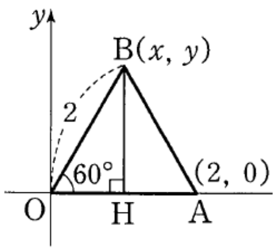
$\therefore\ p=-2$, $q=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ p+q=\dfrac{1}{2}$

78. 답 ②

[해설] $|\overrightarrow{OB}|=2$ 이므로 정삼각형 OAB 의 한 변의 길이는 2 이다.

B$(x,\ y)$ 라 하면 오른쪽 그림의 직각삼각형 OHB 에서



$x=\overline{OH}=2\cos 60^\circ=2\times\dfrac{1}{2}=1$

$y=\overline{BH}=2\sin 60^\circ=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\therefore$ B$(1,\ \sqrt{3})$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,\ \sqrt{3})-(2,\ 0)=(-1,\ \sqrt{3})$

따라서 $a=-1$, $b=\sqrt{3}$ 이므로

$a+b=-1+\sqrt{3}$

79. 답 ④

[해설]

원점 O를 시점으로 하고 M을 종점으로 하는 벡터를 $\overrightarrow{m}$이라 하면

$\overrightarrow{m}=(1,\ -2,\ 5)$

이때, 선분 AB의 중점이 M이므로

$\overrightarrow{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ 에서

$\vec{a}+\vec{b}=2\overrightarrow{m}$

$=2(1,\ -2,\ 5)$

$=(2,\ -4,\ 10)$

$\therefore x+y+z=2+(-4)+10=8$

80. 답 ②

[해설]

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

$=(1,\ 2,\ 0)+(1,\ 1,\ \sqrt{3})$

$=(2,\ 3,\ \sqrt{3})$

이때,

$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{2^2+3^2+(\sqrt{3})^2}=4$ 이고,

구의 반지름의 길이는 $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{5}$ 이므로

$(x,\ y,\ z)=\dfrac{\sqrt{5}}{4}(2,\ 3,\ \sqrt{3})$

$\therefore xyz=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{5}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{4}$

$=\dfrac{15\sqrt{15}}{32}$

81. 답 ③

[해설]

$B(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $C(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $D(x_3,\ y_3,\ z_3)$라 하면

삼각형 BCD의 무게중심 G는

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

이때, 무게중심이 원점이므로

$\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}=0,\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}=0,\ \dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}=0$

따라서

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DA}$

$=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD})$

$\equiv 3\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$

$=3(1,\ -2,\ 3)-(x_1+x_2+x_3,\ y_1+y_2+y_3,\ z_1+z_2+z_3)$

$=(3,\ -6,\ 9)$

이므로

$a+b+c=3+(-6)+9$

$=6$

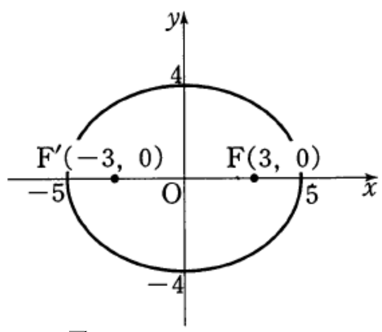
82. 답 20

[해설]

$\vec{x}$의 종점과 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 종점 사이의 거리의 합이 일정하므로 $\vec{x}$의 종점은 타원이다. 즉, 이 타원의 장축의 길이가 10이고, 초점의 좌표가 $F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$이다.

이 때,. $\sqrt{5^2-3^2}=4$이므로 타원의 방정식은

$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$



그러므로 $|\vec{x}|$는 원점과 $\vec{x}$의 종점 사이의 거리이므로 그림에서 최댓값은 5, 최솟값은 4이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은 20이다.

83. 답 ③

[해설]

$\overrightarrow{OP}=(x,\ y)$, $\overrightarrow{OQ}=(y,\ x)$이므로

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$

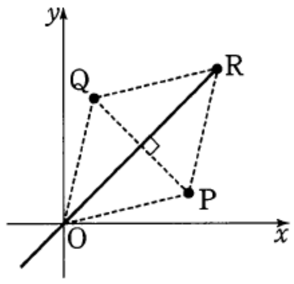
$(x,\ y)+(y,\ x)=(x+y,\ y+x)$

그런데 점 P는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 $x+y=k$라 하면 원과 직선 $x+y=k$가 만나야 하므로

$$\frac{|0+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}} \leq 1$$

$\therefore -\sqrt{2} \leq k \leq \sqrt{2}$

따라서 점 $R(k,\ k)$ $(-\sqrt{2} \leq k \leq \sqrt{2})$가 나타내는 도형은 선분이다.



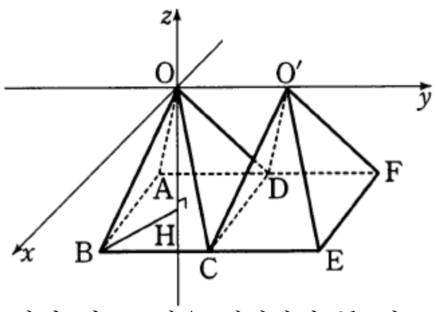
84. 답 12

[해설]

점 O에서 평면 $ABCD$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{BH}=\sqrt{2}$ 이므로

$\overline{OH}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$



이 때, 그림과 같이 좌표공간을 설정하면 두 점 B, F의 좌표는 각각 $B(1,\ -1,\ -\sqrt{2})$, $F(-1,\ 3,\ -\sqrt{2})$ 이므로

$\overrightarrow{OB}=(1,\ -1,\ -\sqrt{2})$, $\overrightarrow{OF}=(-1,\ 3,\ -\sqrt{2})$

$|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}|^2=|(0,\ 2,\ -2\sqrt{2})|^2$

$=0^2+2^2+(-2\sqrt{2})^2=4+8=12$

85. 답 ⑤

[해설]

$\overrightarrow{OP}$는 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각을 이등분하므로 $\angle AOB$의 이등분선과 선분 AB의 교점을 C라 하면

$\overline{AC} : \overline{BC}=\overline{OA} : \overline{OB}=\sqrt{5} : 5\sqrt{5}=1 : 5$

따라서 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{5\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{1+5}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}$이므로

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$에서 $s=5t$

또한, $P(x,\ y)$라고 하면

$(x,\ y)=s(1,\ 2)+t(11,\ -2)$

$=(s+11t,\ 2s-2t)=(16t,\ 8t)$

$(x-2)^2+(y-2)^2=8$에 대입하면

$(16t-2)^2+(8t-2)^2=8$, $320t^2-96t=0$

$t(10t-3)=0 \quad \therefore t=\dfrac{3}{10}$

따라서 $s=\dfrac{3}{2}$이므로 $s+t=\dfrac{9}{5}$

86. 답 ②

[해설]

$|\vec{p}-\vec{a}| \leq 1$ 에서

$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} \leq 1$

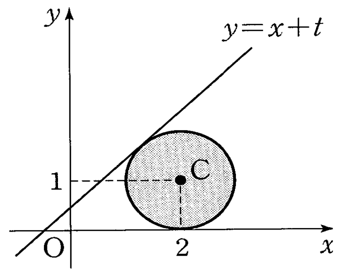
$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2 \leq 1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또, $\vec{p}=s\vec{b}=t\vec{c}$에서

$(x,\ y)=s(1,\ 1)+t(0,\ 1)$

$=(s,\ s+t)$

$\therefore x=s,\ y=s+t$



이때, $y-x=t$, 즉 $y=x+t$이므로 t의 최댓값은 직선 $y=x+t$가 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$에 접할 때이다.

원의 중심 $C(2,\ 1)$과 직선 $x-y+t=0$ 사이의 거리가 1이하이어야 하므로

$$\frac{|2-1+t|}{\sqrt{1^2+1^2}} \leq 1$$

$|t-1| \leq \sqrt{2}$

$\therefore -1-\sqrt{2} \leq t \leq -1+\sqrt{2}$

따라서 t의 최댓값은 $-1+\sqrt{2}$이다.

87. 답 164

[해설]

점D를 좌표공간의 원점으로 하고 선분 DJ를 x축, 선분 DF를 y축으로 하면

$\overline{AB}=\overline{BH}=4$, $\overline{AC}=\overline{GH}=3$

이므로

$D(0,\ 0,\ 0)$, $C(0,\ 3,\ 5)$, $G(8,\ -3,\ 5)$

$\therefore |\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DG}|^2=|(0,\ 3,\ 5)+(8,\ -3,\ 5)|^2$

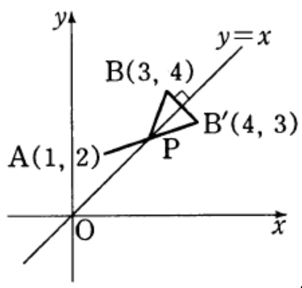
$=|(8,\ 0,\ 10)|^2=8^2+10^2=164$

88. 답 ③

[해설]

ㄱ. $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$ (참)

ㄴ. $|\overrightarrow{AP}|+|\overrightarrow{PB}|=\overline{AP}+\overline{PB}$



이 때, 점 B의 직선 $y=x$에 대한 대칭점을 $B'(4,\ 3)$이라 하면

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PB'} \geq \overline{AB'}$

$=\sqrt{(4-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$ (참)

ㄷ. 선분 AB의 중점이 $M(2,\ 3)$이므로

$\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\overrightarrow{OM}$

$\therefore |\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}|$

$=|2\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$

$= 2\left|\overrightarrow{OP} - \dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}\right|$

$= 2|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}|$

$= 2|\overrightarrow{MP}|$

이 때, $|\overrightarrow{MP}|$의 최솟값은 점 M과 직선 $x-y=0$사이의 거리이다.
즉,

$$\frac{|2-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

89. 답 3

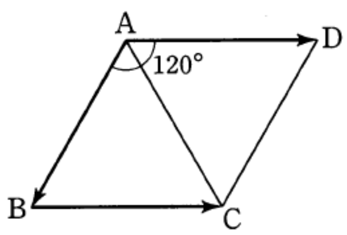
[해설] $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 30^\circ = 2\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3$

90. 답 5

[해설] $\vec{a}\cdot\vec{b} = (-1)\cdot(-2)+2\cdot 0+3\cdot 1 = 5$

91. 답 ①

[해설] $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$인 점 D를 잡으면



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$= |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos 120^o$

$= 2\times 2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2$

92. 답 ④

[해설] $\sin\angle BAC = \dfrac{3}{5}$에서 $\triangle ABC$가 예각삼각형이므로

$\cos\angle BAC = \sqrt{1-\sin^2\angle BAC} = \sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \dfrac{4}{5}$

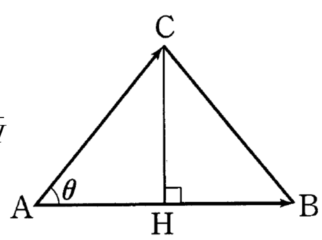
$\therefore\ \overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC$

$= \overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos\angle BAC$

$= 4\cdot 5\cdot\dfrac{4}{5} = 16$

93. 답 ②

[해설] 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABC는 $\overline{AC} = \overline{BC}$인 이등변삼각형이므로



$\overline{AH} = \dfrac{1}{2}\overline{AB}$

또, $\angle CAH = \theta$라 하면 $\overline{AC}\cos\theta = \overline{AH}$
이므로

$\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}$

$= |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta = \overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos\theta$

$= \overline{AB}\cdot\overline{AH} = \dfrac{1}{2}\overline{AB}^2$

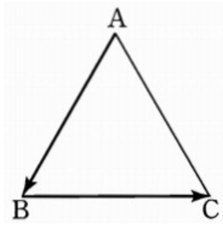
94. 답 ①

[해설] $\vec{a}+\vec{b} = (-1+2,\ 3+1) = (1,\ 4)$

$\therefore \vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = (-1,\ 3)\cdot(1,\ 4) = -1+12 = 11$

95. 답 ①

[해설] 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$가 이루는 각의 크기가 120°이므로



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos 120^\circ$

$= 4\times 4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -8$

96. 답 ④

[해설] $\overrightarrow{OA}\circ\overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|\cos\theta = 3\cdot 3\cos\theta \le \dfrac{9}{2}$

에서 $\cos\theta \le \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \dfrac{\pi}{3} \le \theta \le \dfrac{5}{3}\pi$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 3이고 중심각의 크기가 $\dfrac{4}{3}\pi$인 부채꼴의 호이므로 구하는 도형의 길이는

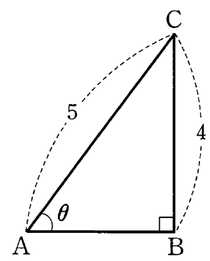
$3\times\dfrac{4}{3}\pi = 4\pi$

97. 답 ①

[해설] $\overrightarrow{BA}\circ\overrightarrow{BC} = 0$이므로 $\angle ABC = 90^\circ$이다.

또, $|\overrightarrow{AC}| = 5$, $|\overrightarrow{BC}| = 4$이므로 $\overline{AC} = 5$, $\overline{BC} = 4$이다.

따라서 오른쪽 그림의 직각삼각형 ABC에서



$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2-4^2} = 3$

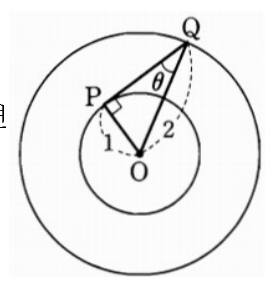
$\angle CAB = \theta$라 하면 $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$

$\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta$

$= 3\cdot 5\cdot\dfrac{3}{5} = 9$

98. 답 ①

[해설] $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ} = 0$이므로 $\angle OPQ = 90^\circ$



$\therefore\ \overline{PQ} = \sqrt{2^2-1^2} = \sqrt{3}$

두 벡터 $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QO}$가 이루는 각을 θ라 하면 오른쪽 그림에서

$\overrightarrow{QO}\cdot\overrightarrow{QP} = |\overrightarrow{QO}||\overrightarrow{QP}|\cos\theta$

$= |\overrightarrow{QO}||\overrightarrow{QP}|\times\dfrac{|\overrightarrow{QP}|}{|\overrightarrow{QO}|}$

$= |\overrightarrow{QP}|^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$

$\therefore\ \overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-\overrightarrow{QO}\cdot\overrightarrow{QP}=-3$

99. 답 ④

[해설] ㄱ. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$

이때, $|\overrightarrow{AG}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$ 이므로

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{AG}|=\sqrt{14}\neq$ (정수)

따라서 정수가 아니다.

ㄴ. $\overline{CD}\perp\overline{BC}$, $\overline{CD}\perp\overline{CG}$ 이므로

$\overline{CD}\perp\square BFGC$

따라서 직선 CD 와 직선 BG 는 서로 수직이다.

$\therefore\ \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BG}=0=$ (정수)

ㄷ. 점 D 에서 직선 FH 에 내린 수선의 발이 H 이므로

$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FH}=|\overrightarrow{FH}|^2=(\sqrt{10})^2=10$

$\therefore\ \overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{FH}=-\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FH}=-10=$ (정수)

따라서 보기에서 값이 정수인 것은 ㄴ, ㄷ 이다.

다른 풀이

ㄴ. $\overline{CD}\perp\overline{BF}$, $\overline{CD}\perp\overline{FG}$ 이므로

$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{CD}\cdot(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FG})$

$=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{FG}$

$=0+0=0$

100. 답 500

[해설] 점 P 의 좌표를 $P(x, y, z)$ 라 하면

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x+2, y-2, z-3)$

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=(x-4, y-1, z+5)$

이므로

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$

$=(x+2)(x-4)+(y-1)(y-1)+(z-3)(z+5)\leq 0$

$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2\leq 25$

따라서 점 P 의 자취는 중심이 $(1, 1, -1)$ 이고 반지름의 길이가 5 인 구의 경계와 그 내부이므로 점 P 가 존재하는 영역의 부피는

$V=\frac{4}{3}\pi\times 5^3=\frac{500}{3}\pi$

$\therefore\ \frac{3V}{\pi}=500$

참고

공간 위의 두 정점 A, B 와 동점 P 에 대하여

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}<0$

이면 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$ 가 이루는 각의 크기는 둔각이므로 점P 의 자취는 선분 AB 를 지름의 양 끝점으로 하는 구의 내부이다.

101. 답 ①

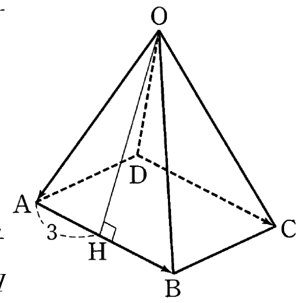
[해설] $\angle CAB=\theta$라 하면 $|\vec{a}|=1$이므로

$\vec{p}\circ\vec{a}=|\vec{p}||\vec{a}|\cos\theta=|\vec{p}|\cos\theta=\overline{AB}$

마찬가지로 $\vec{p}\circ\vec{b}=\overline{AD}$

$\therefore\ \vec{p}=\overline{AB}\circ\vec{a}+\overline{AD}\circ\vec{b}=(\vec{p}\circ\vec{a})\vec{a}+(\vec{p}\circ\vec{b})\vec{b}$

102. 답 ②



[해설] $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$이므로 $\angle OAB=\theta$라 하면

$\overrightarrow{OA}\circ\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OA}\circ\overrightarrow{AB}$

$=-\overrightarrow{AO}\circ\overrightarrow{AB}$

$=-|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta$

한편, 삼각형 OAB는 이등변삼각형이므로 꼭짓점 O에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}\perp\overline{AB}$, $\overline{AB}=6$이므로

$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=3$

$\therefore\ \overrightarrow{OA}\circ\overrightarrow{DC}=-|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta$

$=-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AO}|\cos\theta$

$=-\overline{AB}\times\overline{AH}=-18$

103. 답 ③

[해설] $P(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})$

$=(x,\ y-1)\cdot(x-2,\ y-3)$

$=x^2-2x+y^2-4y+3$

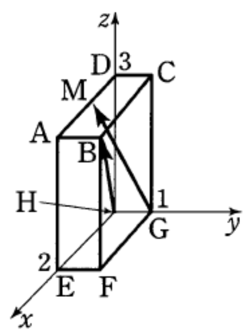
$=(x-1)^2+(y-2)^2-2=0$

$\therefore (x-1)^2+(y-2)^2=2$

따라서 점 P는 중심이 $(1,\ 2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원 위의 점이므로 점 P가 나타내는 도형의 길이는 $2\sqrt{2}\pi$이다.

104. 답 ⑤

[해설] H를 원점으로 하고 $\overline{HE}$, $\overline{HG}$, $\overline{HD}$를 각각 x축, y축, z축 위에 놓으면 $B(2,\ 1,\ 3)$, $G(0,\ 1,\ 0)$, $M(1,\ 0,\ 3)$ 이므로



$\overrightarrow{HB}=(2,\ 1,\ 3)$

$\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{HM}-\overrightarrow{HG}$

$=(1,\ 0,\ 3)-(0,\ 1,\ 0)=(1,\ -1,\ 3)$

$\therefore \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{GM}=(2,\ 1,\ 3)\cdot(1,\ -1,\ 3)=2+(-1)+9=10$

105. 답 ④

[해설] $\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$이므로

$\vec{a}\circ\vec{c}+\vec{b}\circ\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})\circ\vec{c}=2\vec{c}\circ\vec{c}=2|\vec{c}|^2$

106. 답 ③

[해설] 선분 BC위의 점 D에 대하여 $\overrightarrow{OD}$는

$\overrightarrow{OD} = (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$

로 나타낼 수 있고, 세 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$는 서로 수직이므로

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$

$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} \cdot \{(1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}\}$

$= (1-t)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$

107. 답 ②

[해설] $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - |\overrightarrow{AB}|^2 = 3 - 2^2 = -1$

108. 답 ④

[해설] 정사면체의 한 모서리의 길이를 l이라 하면

$a = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60^o = \frac{1}{2}l^2$

$b = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = |\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{CA}|\cos 120^o = -\frac{1}{2}l^2$

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$이므로

$c = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{BD}|\cos 90^o = 0$

$\therefore$ $b < c < a$

109. 답 20

[해설] 점 $P(x,\ y,\ z)$라 하면

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = (x,\ y,\ z) \cdot (10,\ 0,\ 0) = 10x$

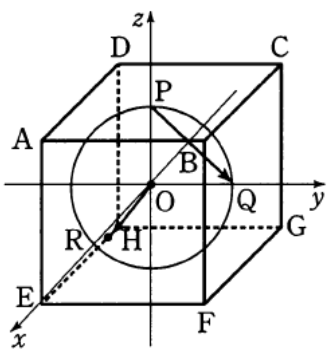
한편, 점 P가 중심이 $(1,\ 2,\ 3)$, 반지름의 길이가 2인 구 위의 점이므로 x의 값의 범위는

$1 - 2 \leq x \leq 1 + 2$ $\therefore -1 \leq x \leq 3$

따라서 $-10 \leq 10x \leq 30$에서 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA}$의 최댓값과 최솟값의 합은 20이다.

110. 답 ③

[해설] 그림과 같이 점 O를 원점으로 하고 x축, y축, z축을 각각 $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{AE}$와 평행하게 잡으면 $P(0,\ 0,\ 1)$, $Q(0,\ 1,\ 0)$이므로



$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (0,\ 1,\ 0) - (0,\ 0,\ 1) = (0,\ 1,\ -1)$

또, $E(1,\ -1,\ -1)$ 이므로

$\overrightarrow{OR} = \frac{\overrightarrow{OE}}{|\overrightarrow{OE}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ -1,\ -1)$

$\therefore$ $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OR} = (0,\ 1,\ -1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ -1,\ -1) = 0$

111. 답 ④

[해설] $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{AB} \perp \overline{BD}$이므로

$\overline{AB} \perp$ (평면 BCD) $\cdots$ ㉠

이때 $\overline{AH} \perp \overline{CD}$이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{BH} \perp \overline{CD}$ $\cdots$ ㉡

한편, ㉠에서 $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BD} = 0$이므로

$\overrightarrow{AH} \circ \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}) \circ \overrightarrow{BD}$

$= \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BH} \circ \overrightarrow{BD}$

$= \overrightarrow{BH} \circ \overrightarrow{BD}$

이때, ㉡에서 삼각형 BHD는 직각삼각형이므로 $\angle DBH = \theta$라 하면

$\overrightarrow{AH} \circ \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BH} \circ \overrightarrow{BD}$

$= |\overrightarrow{BH}||\overrightarrow{BD}|\cos\theta$

$= |\overrightarrow{BH}|^2$

한편, ㉠에서 삼각형 ABH는 $\angle ABH = \frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$\overline{BH} = \sqrt{\overline{AH}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

$\therefore$ $\overrightarrow{AH} \circ \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{BH}|^2 = 4^2 = 16$

112. 답 ③

[해설] $\angle AOP = \theta$라 하면

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|\cos\theta = 2 \cdot 1 \cdot \cos\theta = 2\cos\theta$

ㄱ. $\cos\theta$의 최댓값이 1이므로 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$의 최댓값은 2이다.(참)

ㄴ. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}$에서 $2\cos\theta = \frac{2}{3}$ $\therefore \cos\theta = \frac{1}{3}$

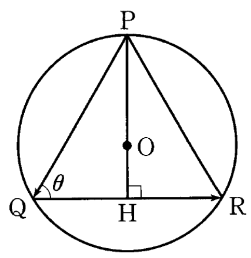
그러므로 θ는 2개의 값을 가지므로 점 P도 2개다. (참)

ㄷ. $0 \leq \theta \leq \pi$일 때, θ가 커지면 $\cos\theta$의 값은 감소하므로 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$의 값도 감소한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

113. 답 ①

[해설]



점 P에서 선분 QR에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 PQR는 $\overline{PQ} = \overline{PQ}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{PH} \perp \overline{QR}$, $\overline{QH} \perp \overline{HR}$

이때, $\angle PQR = \theta$라하면

$\overline{PQ}\cos\theta = \overline{QH}$이므로

$\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{QR} = |\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{QR}|\cos(\pi - \theta) = -\overline{PQ} \cdot \overline{QR}\cos\theta = -2\overline{QH} \times \overline{QH}$

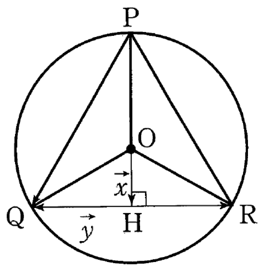
$= -2\overline{QH}^2$

한편, $0 \leq \overline{QH} \leq 1$이므로

$\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{QR} = -2\overline{QH}^2 \geq -2$

따라서 $\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{QR}$의 최솟값은 -2이다.

다른 풀이



원의 중심 O에서 변 QR에 내린 수선의 발을 H라 하고

$\overrightarrow{OH}=\vec{x},\ \overrightarrow{HQ}=\vec{y}$

라 하면

$\overrightarrow{OP}=-\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|},\ \overrightarrow{OQ}=\vec{x}+\vec{y},\ \overrightarrow{OQ}=\vec{x}-\vec{y}$

이때, $\vec{x}\circ\vec{y}=0$이므로

$$\overrightarrow{PQ}\circ\overrightarrow{QR}=(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})\circ(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OQ})$$
$$=\left\{\left(1+\frac{1}{|\vec{x}|}\right)\vec{x}+\vec{y}\right\}\cdot(-2\vec{y})=-2\vec{y}\circ\vec{y}$$
$$=-2|\vec{y}|^2\geq-2$$

따라서 구하는 최솟값은 -2이다.

114. 답 ⑤

[해설] $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c}$라 하면

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$$\overrightarrow{AH}=\frac{\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\{-\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\}$$

$$=\frac{1}{3}(-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$$\therefore \overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AH}=\frac{1}{9}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$$=\frac{1}{9}(-3|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2))-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a})$$

그런데 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=3$,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=3\times3\times\cos60^\circ=\dfrac{9}{2}$이므로

$$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AH}=\frac{1}{9}(-27+9+9-9+9-9)=-2$$

115. 답 ②

[해설] 선분 EF의 중점을 M이라고 하면 두 선분 GM과 EF는 서로 수직이다. 또한, 직선 HI는 직선 MI와 수직이다. 따라서 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{GM}\perp$(평면 $EBCF$)이고 $\overline{HI}\perp\overline{MI}$이므로 $\overline{GI}\perp\overline{HI}$

이 때, $\overline{GM}=\sqrt{5}$, $\overline{MI}=\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{GI}=\sqrt{7}$ 이고

삼각형 GHI는 $\angle HIG=90^o$인 직각삼각형이므로

$$\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GI}=|\overrightarrow{GH}||\overrightarrow{GI}|\cos(\angle HGI)=|\overrightarrow{GI}|^2=7$$

116. 답 12

[해설]점 H를 원점으로 하고, 반직선 HE, HG, HD를 각각 x축, y축, z축의 양의 방향으로 하는 좌표공간을 설정하면

$A(4,\ 0,\ 8)$, $B(4,\ 4,\ 8)$, $D(0,\ 0,\ 8)$

$E(4,\ 0,\ 0)$, $F(4,\ 4,\ 0)$, $G(0,\ 4,\ 0)$

이므로 네 점 P, Q, R, S, T의 좌표는 각각

$P(4,\ 0,\ 6)$, $Q(4,\ 2,\ 8)$, $R(2,\ 0,\ 8)$

$S(2,\ 4,\ 0)$, $T(3,\ 1,\ 8)$

이 때, $\overrightarrow{TP}=(1,\ -1,\ -2)$, $\overrightarrow{QS}=(-2,\ 2,\ -8)$ 이므로

$$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{QS}=(1,\ -1,\ -2)\cdot(-2,\ 2,\ -8)$$
$$=-2+2+16=12$$

117. 답 ③

[해설] $\overrightarrow{OP}=(a,\ b)$, $\overrightarrow{OQ}=(c,\ d)$라 하면

$\overrightarrow{OP'}=(a+3,\ b+1)$, $\overrightarrow{OQ'}=(c+3,\ d+1)$

ㄱ. $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP'}=(a,\ b)-(a+3,\ b+1)=(-3,\ -1)$

이므로

$$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP'}|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}\quad (참)$$

ㄴ. $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=(a,\ b)-(c,\ d)=(a-c,\ b-d)$

$\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ'}=(a+3,\ b+10-(c+3,\ d+1)=(a-c,\ b-d)$

이므로

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ'}$

$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ'}|$ (참)

ㄷ. (반례) $\overrightarrow{OP}=(1,\ 1)$, $\overrightarrow{OQ}=(1,\ 2)$일 때,

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=1\cdot1+1\cdot2=3$

그런데 $\overrightarrow{OP'}=(4,\ 2)$, $\overrightarrow{OQ'}=(4,\ 3)$이므로

$\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OQ'}=4\cdot4+2\cdot3=22$

$$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\neq\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OQ'}\quad (거짓)$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

118. 답 ⑤

[해설] ㄱ. $\overline{AB}\perp\overline{CD}$ 이므로 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ (참)

ㄴ. $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=2\cdot2\cdot\cos60^\circ=2$ 이므로

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=1$ (참)

ㄷ. $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ 이므로

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD})$$
$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot(2\cdot2\cdot\cos60^\circ)=2\ (참)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

다른 풀이

ㄷ. 점 M 에서 선분 AD 에 내린 수선의 발 H 는 선분 AD 의 중점이다.

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AD}=\overline{AH}\cdot\overline{AD}=1\cdot2=2$

119. 답 ①

[해설] $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}$ 이므로

$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE})$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BE}$

이때, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=2\cdot2\cdot\cos60^\circ=2$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}=0$

$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BE}=2\cdot2\cdot\cos120^\circ=-2$

이므로

$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CE}=2+0+0-2=0$

120. 답 ①

[해설] $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$라 하면

$\overrightarrow{AE}=t\vec{d}$, $\overrightarrow{AF}=(1-t)\vec{d}$ (t는 실수)

사각형 $ABCD$가 평행사변형이므로

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{b}+\vec{d}$

$\therefore \overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}=t\vec{d}-(\vec{b}+\vec{d})=-\vec{b}-(1-t)\vec{d}$

$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC}=(1-t)\vec{d}-(\vec{b}+\vec{d})=-\vec{b}-t\vec{d}$

$\angle BAD=60^\circ$ 이므로

$\vec{b}\cdot\vec{d}=|\vec{b}||\vec{d}|\cos60^\circ=\frac{1}{2}$

$\therefore \overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=\{-\vec{b}-(1-t)\vec{d}\}\cdot(-\vec{b}-t\vec{d})$

$=|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{d}+t(1-t)|\vec{d}|^2=-t^2+t+\frac{3}{2}$

$=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

따라서 내적 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}$의 값이 최대일 때의 t의 t의 값은

$t=\frac{1}{2}$

121. 답 ①

[해설] $|\vec{a}-2\vec{b}|=6$ 의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=36$

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ 이므로

$2^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\cdot3^2=36$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=1$

122. 답 ②

[해설] $|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=9-4\vec{a}\cdot\vec{b}+16=9$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=4$

$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})$

$=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=36+4\times4+4=56$

$\therefore |2\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{14}$

123. 답 ③

[해설] $\vec{a}\cdot(2\vec{b}+3\vec{c})+\vec{b}\cdot(3\vec{c}-2\vec{a})$

$=2\vec{a}\cdot\vec{b}+3\vec{a}\cdot\vec{c}+3\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=3\vec{a}\cdot\vec{c}+3\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=3(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=3(1,\ 2,\ 3)\cdot(-3,4,\ 1)$

$=3(-3+8+3)=24$

124. 답 7

[해설] $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})-\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=2-2(-1)+3=7$

125. 답 ④

[해설] $|\vec{b}|=1$ 이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos30^\circ=|\vec{a}|\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{a}|$

$|\vec{a}-\sqrt{3}\vec{b}|^2=(\vec{a}-\sqrt{3}\vec{b})\cdot(\vec{a}-\sqrt{3}\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2-2\sqrt{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+3|\vec{b}|^2$

$=|\vec{a}|^2-3|\vec{a}|+3=7$

$\therefore\ |\vec{a}|^2-3|\vec{a}|-4=0$, $(|\vec{a}|-4)(|\vec{a}|+1)=0$

$\therefore\ |\vec{a}|=4\ \ (\because |\vec{a}|>0)$

126. 답 ⑤

[해설] 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 수직이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 이다.

$|3\vec{a}-2\vec{b}|=(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})$

$=9|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=9\cdot3^2+0+4\cdot1^2=85$

$\therefore |3\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{85}$

127. 답 ④

[해설] $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하면 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점이 P이므로

$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

따라서 $|\overrightarrow{AP}|^2=\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)\circ\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)$

$=\frac{4}{9}|\vec{a}|^2+\frac{4}{9}\vec{a}\circ\vec{b}+\frac{1}{9}|\vec{b}|^2$

$=\frac{4}{9}\times6^2+\frac{4}{9}\times9+\frac{1}{9}\times12^2$

$=16+4+16$

$=36$

이므로 $|\overrightarrow{AP}|=6$

128. 답 ⑤

[해설] $|\vec{a}-\vec{b}|=6$이므로

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$36=16-2\vec{a}\cdot\vec{b}+25$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{5}{2}$

$\therefore (\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=3|\vec{a}|^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2$

$=3\times16+5\times\frac{5}{2}-2\times25=\frac{21}{2}$

129. 답 98

[해설] $|\overrightarrow{BC}|=15$이므로

$|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|=15$

양변을 제곱하면

$|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=225$

$|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2=225$

$225-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+196=225$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=98$

130. 답 ④

[해설] $9x^2-18x+7=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=\frac{18}{9}=2$, $\alpha\beta=\frac{7}{9}$ ⋯ ㉠

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$에서

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2$

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\{|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2\}$

$=\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2-1)$ ($\because |\overrightarrow{AB}|=1$)

$=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-1\}$

$=\frac{13}{18}$ ($\because$ ㉠)

131. 답 ①

[해설] $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(k,\ 2,\ -3)-(1,\ 1,\ -1)$

$=(k-1,\ 1,\ -2)$

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(1,\ 1,\ -1)\cdot(k-1,\ 1,\ -2)$

$=k-1+1+2=0$

$\therefore k=-2$

132. 답 25

[해설] 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 벡터의 내적의 정의에서

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

주어진 조건에서 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|$이므로

$\cos\theta=\pm1$, 즉 $\theta=0$ 또는 $\theta=\pi$

$\therefore \vec{a}\parallel\vec{b}$

따라서, 실수 k에 대하여 $\vec{a}=k\vec{b}=(k,\ 0,\ k)$이고, $|\vec{a}|=5\sqrt{2}$, 즉 $|\vec{a}|^2=50$이므로

$k^2+0+k^2=50$ $\quad\therefore k^2=25$

$\therefore x^2+y^2=k^2+0=25$

133. 답 ①

[해설] $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$로 놓으면

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\vec{c}-\vec{a}$

또한,

$|\overrightarrow{AB}|^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$

$|\overrightarrow{AC}|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2$

이것을 $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2$에 대입하면

$|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2+|\vec{c}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$

$-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$\therefore \vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

그런데 $\vec{c}-\vec{b}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BC}$이므로

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$

134. 답 ⑤

[해설] ㄱ. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$에서 $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{c}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=0$

$\therefore$ $\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-|\vec{c}|^2$ (참)

ㄴ. $|\vec{a}-\vec{c}|^2+|\vec{b}-\vec{c}|^2-(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$

$=-2(\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c})+2|\vec{c}|^2$

$=2|\vec{c}|^2+2|\vec{c}|^2=4|\vec{c}|^2$ (참)

ㄷ. $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{b}-\vec{c}|=|\vec{c}-\vec{a}|=1$ 이면 ㄴ의 결과에 의하여

$2-(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)=4|\vec{c}|^2$ ⋯ ㉠

$2-(|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)=4|\vec{a}|^2$ ⋯ ㉡

$2-(|\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2)=4|\vec{b}|^2$ ⋯ ㉢

㉠+㉡+㉢에서 $6=6(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)$

$\therefore$ $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=1$

㉠, ㉣에서 $2-(1-|\vec{c}|^2)=4|\vec{c}|^2$

$\therefore |\vec{c}|^2=\frac{1}{3}$

따라서 $|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=\frac{1}{3}$ 이므로 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ이다.

135. 답 ②

[해설] $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라 하면

$\overline{OA}\perp\overline{BC}$에서 $\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}$ ⋯ ㉠

마찬가지로

$\overline{OB}\perp\overline{AC}$에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ ⋯ ㉡

$\overline{OC}\perp\overline{AB}$에서 $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ ⋯ ㉣

그런데

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}|\vec{a}||\vec{b}|$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos60^\circ=\frac{1}{2}|\vec{b}||\vec{c}|$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos60^\circ=\frac{1}{2}|\vec{c}||\vec{a}|$

이므로 ㉣에서

$\frac{1}{\sqrt{2}}|\vec{a}||\vec{b}| = \frac{1}{2}|\vec{b}||\vec{c}| = \frac{1}{2}|\vec{c}||\vec{a}|$

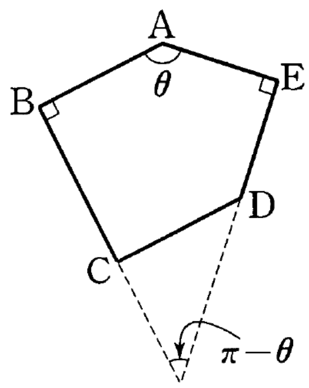
$\therefore |\vec{b}| = |\vec{a}|,\ |\vec{c}| = \sqrt{2}|\vec{a}|$

$\therefore \overline{OA} : \overline{OB} : \overline{OC} = |\vec{a}| : |\vec{b}| : |\vec{c}| = 1 : 1 : \sqrt{2}$

136. 답 ⑤

[해설]ㄱ. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AM}$이므로 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$ 와 $\overrightarrow{AM}$ 은 평행하다. (참)

ㄴ.



$\angle B = \angle E = 90^\circ$ 이므로 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AE}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\overrightarrow{BC}$와 $\overrightarrow{ED}$가 이루는 각의 크기는 $\pi-\theta$이다.

따라서

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|\cos\theta$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED} = |\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{ED}|\cos(\pi^\circ-\theta)$

$= -|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{ED}|\cos\theta$

이때, $\overline{AB}=\overline{BC},\ \overline{AE}=\overline{ED}$이므로

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$ (참)

ㄷ. $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED} + |\overrightarrow{ED}|^2$,

$|\overrightarrow{BE}|^2 = |\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}|^2$

$= |\overrightarrow{AB}|^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} + |\overrightarrow{AE}|^2$

이때, $\overline{AB}=\overline{BC},\ \overline{AE}=\overline{ED}$이고, 'ㄴ'에 의해

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$ 가 성립하므로

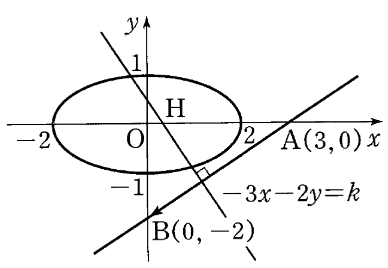
$|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|^2 = |\overrightarrow{BE}|^2$

$\therefore |\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}| = |\overrightarrow{BE}|$ (참)

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

137. 답 ③

[해설]



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(0,-2)-(3,0)=(-3,-2)$

타원 위의 점을 $P(x,y)$라 하면

$\overrightarrow{OP}\circ\overrightarrow{AB}=(x,y)\circ(-3,-2)=-3x-2y$

타원의 방정식은 $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$이므로 $-3x-2y=k$라 하면 k의 값은 타원과 이 직선이 만날 때의 값이다.

한편, 기울기가 $-\frac{3}{2}$인 접선의 방정식은

$y=-\frac{3}{2}x\pm\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2\times 2^2+1^2}=-\frac{3}{2}x\pm\sqrt{10}$

이므로 k의 값의 범위는 $-\sqrt{10}\le-\frac{k}{2}\le\sqrt{10}$

$\therefore -\sqrt{40}\le k\le\sqrt{40}$

따라서 $\overrightarrow{OP}\circ\overrightarrow{AB}$의 값 중 정수는

$-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6$ 으로 13개다.

138. 답 43

[해설]$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+|\overrightarrow{DC}|^2$

이 때,

$|\overrightarrow{AB}|^2=3^2=9$

$|\overrightarrow{DC}|^2=\overline{AC}^2+\overline{DA}^2$

$=3^2+4^2=25$

또, $\overline{AB}\perp\overline{AD}$에서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ 이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$

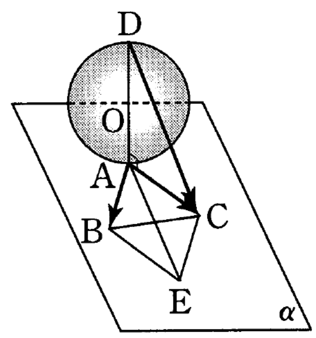
$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60^o$ $(\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0)$

$=3\cdot3\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+|\overrightarrow{DC}|^2=9+2\times\frac{9}{2}+25=43$

다른 풀이



그림과 같이 두 선분 AB, AC를 두 변으로 하는 평행사변형의 또 다른 꼭짓점을 E라 하면 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CE}$이므로

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DE}$

선분 AD는 구의 중심을 지나므로 선분 AD는 구의 지름이고,

$\overline{AD}=2\times2=4$

또, $\overline{AD}\perp\alpha$이므로 $\overline{AD}\perp\overline{AE}$이고,

$\overline{AE}=2\times3\cos\frac{\pi}{6}=3\sqrt{3}$

따라서 직각삼각형 DAE에서

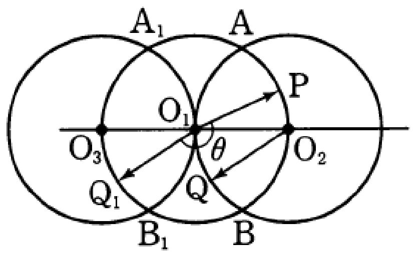
$\overline{DE}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2=4^2+(3\sqrt{3})^2=43$

$\therefore |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}|^2=|\overrightarrow{DE}|^2=\overline{DE}^2=43$

139. 답 ②

[해설]그림과 같이 선분 O_1O_2의 연장선 위에 O_3를 잡고 반지름의 길이가 1인 원을 그려 원 O_1과 만나는 점을 각각 A_1, B_1이라 하

자.



이 때, $\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1Q_1}$인 점 Q_1을 잡고 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_1Q_1}$이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_1Q_1}$

$=|\overrightarrow{O_1P}|\,|\overrightarrow{O_1Q_1}|\cos\theta$

$=\cos\theta$ ...... ㉠

이 때, 네 삼각형 O_1O_2A, O_1BO_2, $O_1A_1O_3$, $O_1O_3B_1$이 정삼각형이므로

$$\frac{\pi}{3}\le\theta\le\pi$$

따라서 ㉠은 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 최댓값 $\frac{1}{2}$, $\theta=\pi$일 때 최솟값 -1을 가지므로

$M+m=\frac{1}{2}+(-1)=-\frac{1}{2}$

140. 답 ①

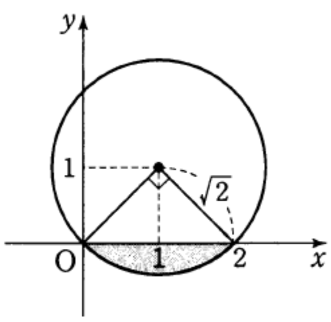
[해설] $A(x,\ y)$라고 하면 $|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$ 이므로

$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{p}=(x,\ y)\cdot(1,\ 0)=x=1$

$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{q}=(x,\ y)\cdot(0,\ 1)=y=1$

에서 $A(1,\ 1)$이다.

또한 $|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$ 이므로 점 B가 나타내는 도형은 중심이 $(1,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이다.



따라서 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$이고 원과 x축으로 둘러싸인 도형 중에서 작은 부분은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 도형의 넓이는

$\pi(\sqrt{2})^2\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$

$=\frac{\pi}{2}-1$

141. 답 ③

[해설] $\cos\theta=\dfrac{1\cdot(-1)+2\cdot 0}{\sqrt{1^2+2^2}\ \sqrt{(-1)^2+0^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

142. 답 ①

[해설] $AB=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 4\\ 1 & k & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k & -1\\ -2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2k+6 & 7\\ -k+3 & 3k+5\end{pmatrix}$

연립일차방정식 $AB\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$이 $x=y=0$ 이외의 해를 가지려면

$AB=\begin{pmatrix}-2k+6 & 7\\ -k+3 & 3k+5\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$(-2k+6)(3k+5)-7(-k+3)=0$

$3(k-3)(2k+1)=0$

이때, k는 정수이므로 $k=3$

$k=3$일 때,

$BA=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -1 & 4\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -6 & 9\\ 7 & 11 & 1\\ 0 & 5 & 10\end{pmatrix}$

에서 $\vec{a}=(-7,\ 7,\ 0)$, $\vec{b}=(-6,\ 11,5)$

$\vec{d}=(u,\ v,\ w)$가 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 각각 수직이므로

$\vec{a}\cdot\vec{d}=-7u+7v=0$

$\vec{b}\cdot\vec{d}=-6u+11v+5w=0$

두 식을 연립하여 풀면

$v=u,\ w=-u$ ⋯ ㉠

이므로 $\vec{d}=(u,\ u,\ -u)$이다. $\vec{d}$는 단위벡터이므로

$|\vec{d}|^2=u^2+u^2+(-u)^2=1$에서 $3u^2=1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$u^2-v^2+w^2=u^2-u^2+(-u)^2=u^2=\frac{1}{3}$

143. 답 ①

[해설] $\vec{a}\cdot\vec{b}=2x-2-3x+3=0$

$-x+1=0$ $\quad\therefore\ x=1$

144. 답 ③

[해설] $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^o$

$=|\vec{a}|\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}|\vec{a}|$

그런데 $|\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{13}$이므로

$|\vec{a}-3\vec{b}|^2=13$

$(\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})=13$

$|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=13$

$|\vec{a}|^2-3|\vec{a}|+9=13$

$|\vec{a}|^2-3|\vec{a}|-4=0$

$(|\vec{a}|-4)(|\vec{a}|+1)=0$

$\therefore |\vec{a}|=4\ (\because|\vec{a}|>0)$

145. 답 ④

[해설] $|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{3}$에서

$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(\vec{a}+2\vec{b})\circ(\vec{a}+2\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\circ\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=5+4\vec{a}\circ\vec{b}=3$

$\therefore\ \vec{a}\circ\vec{b}=-\frac{1}{2}$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\vec{a}\circ\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\cos\theta=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \theta=\frac{2}{3}\pi$

146. 답 ⑤

[해설] $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{17}$

$|\vec{b}|=\sqrt{a^2+(-4)^2+0}=\sqrt{17}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot1+(-3)\cdot(-4)+2\cdot0=14$

$\therefore \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{14}{\sqrt{17}\sqrt{17}}=\frac{14}{17}$

147. 답 12

[해설]두 벡터 $\vec{a}=(9,\ x+1,\ -12)$, $\vec{b}=(-8,\ x,\ 7)$이 수직일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이므로

$9\cdot(-8)+(x+1)x-12\cdot7=0$

$-72+x^2+x-84=0$

$x^2+x-156=0$

$(x-12)(x+13)=0$

$\therefore x=12\ \ (\because x>0)$

148. 답 ⑤

[해설] $|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})\circ(\vec{a}-2\vec{b})$

$=\vec{a}\circ(\vec{a}-2\vec{b})-2\vec{b}\circ(\vec{a}-2\vec{b})$

$=\vec{a}\circ\vec{a}-2\vec{a}\circ\vec{b}-2\vec{b}\circ\vec{a}+4\vec{b}\circ\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\circ\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$\therefore\ \vec{a}\circ\vec{b}=-\frac{7}{4}$

이때, $(2\vec{a})\circ(-\vec{b})=|2\vec{a}||-\vec{b}|\cos\theta=2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$이므로

$-2\circ\left(-\frac{7}{4}\right)=2\cdot\sqrt{7}\cdot3\cdot\cos\theta$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{12}$

149. 답 ②

[해설] $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하면 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기는 $\angle BAC$의 크기과 같다.

$\vec{a}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,-1,0)$,

$\vec{b}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(0,-1,a-1)$이므로

$\cos(\angle BAC)=\cos60^\circ=\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{a^2-2a+2}}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \sqrt{a^2-2a+2}=\sqrt{2}, a^2-2a+2=2,\ a(a-2)=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$0+2=2$

150. 답 ②

[해설] $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-2)-2\cdot k+3\cdot3>0$ 이어야 하므로

$k<\frac{5}{2}$

따라서 구하는 자연수 k 의 개수는 1, 2 의 2 개다.

151. 답 ②

[해설] $|\vec{b}|=x$라 하면

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}x\cdots$ ㉠

$(\vec{a}+\vec{b})\perp(2\vec{a}-\vec{b})$이므로

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=0 \Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=0$

$\Leftrightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=x^2-2\ \cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $x^2-2=\frac{1}{2}x$, $2x^2-x-4=0$

$x>0$이므로 $x=\frac{1+\sqrt{33}}{4}$

$\therefore|\vec{b}|=\frac{1+\sqrt{33}}{4}$

152. 답 ④

[해설] $|t\vec{a}+\vec{b}|^2=t^2|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}t|+|\vec{b}|^2$

$=t^2+t\cos\theta+\frac{1}{4}$

$=\left(t+\frac{\cos\theta}{2}\right)^2+\frac{1-\cos^2\theta}{4}$

$|t\vec{a}+\vec{b}|$의 최솟값이 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로

$\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{4}}=\frac{\sin\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

에서 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\le\theta\le90^\circ$이므로 $\theta=60^\circ$

153. 답 ③

[해설] $\vec{a}-2\vec{b}=(-2,2,1)-2(-1,0,2)=(0,2,-3)$

$2\vec{a}+k\vec{b}=2(-2,2,1)+k(-1,0,2)$

$=(-4-k,\ 4,\ 2+2k)$

이 때, $\vec{a}-2\vec{b}$ 와 $2\vec{a}+k\vec{b}$ 가 수직이므로

$(0,2,-3)\cdot(-4-4k,4,2+2k)$

$=0+8-3(2+2k)=0$

$8-6-6k=0$

$\therefore\ k=\frac{1}{3}$

154. 답 ④

[해설] 조건 (가)에서 $x^2+y^2+z^2=1\ \cdots$㉠

조건 (가), (나)에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=x=\cos120^\circ=-\frac{1}{2}\ \cdots$㉡

조건 (가), (다)에서 $\vec{b}\cdot\vec{c}=z=\cos120^\circ=-\frac{1}{2}\ \cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{4}+y^2+\frac{1}{4}=1\qquad\therefore y^2=\frac{1}{2}$

155. 답 ⑤

[해설] 점 $P(x,\ y,\ 0)$이라 하면 $x^2+y^2=1$ ⋯ ㉠

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y}{\sqrt{(\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{3})^2+(\frac{2}{3})^2}\ \sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{1}{3}x+\frac{2}{y}$$

$\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=k$로 놓으면 ㉠에서 $x^2+y^2=1$이므로 k의 최댓값은 직선 $x+2y-3k=0$이 원 $x^2+y^2=1$에 접할 때이다. 즉,

$$\frac{|0+2\cdot 0-3k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=1$$

$|3k|=\sqrt{5}$ $\qquad$ $\therefore\ k=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

따라서 k의 최댓값은 $\frac{\sqrt{5}}{3}$이다.

156. 답 ①

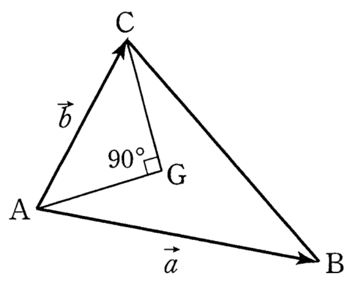
[해설] $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ 라 하면

$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ 이고

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$ 이므로

$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AC}$

$=\frac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b})$



이때, $\overrightarrow{GA}\perp\overrightarrow{GC}$ 이므로 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CG}=0$ 이다.

$\therefore\ \overrightarrow{GA}\perp\overrightarrow{CG}=\frac{1}{9}(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$

$=\frac{1}{9}(\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{b})$

$=\frac{1}{9}(|\vec{a}|^2-|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta-2|\vec{b}|^2)$

$=\frac{1}{9}(3^2-3\cdot 2\cdot\cos\theta-2\cdot 2^2)$

$=\frac{1}{9}(1-6\cos\theta)=0$

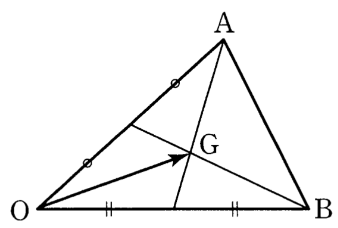
$\therefore\ \cos\theta=\frac{1}{6}$

참고

$\triangle OAB$ 의 무게중심을 G 라 하면

$$\overrightarrow{OG}=\frac{2\times\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+1\times\overrightarrow{OA}}{2+1}$$

$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$



157. 답 ④

[해설] $\vec{x}\cdot\vec{y}=(t+1)(t^2+kt+1)+t^2(-t-k)$

$=t^2+(k+1)t+1$

에서 $f(t)=t^2+(k+1)t+1$로 놓으면

ㄱ. $t=0$이면 $f(0)=1\neq 0$이므로 모든 실수 t에 대하여 $\vec{x}$, $\vec{y}$가 수직이되게 하는 k가 무수히 존재한다고 할 수 없다. (거짓)

ㄴ. $\vec{x}$, $\vec{y}$가 수직일 때, $f(t)=t^2+(k+1)t+1=0$이 되는 실수 t가 존재하려면 이차방정식 $f(t)=0$이 실근을 가져야 하므로

$D=(k+1)^2-4\geq 0$에서 $k\leq -3$ 또는 $k\geq 1$

따라서 k가 임의의 자연수일 때, $\vec{x}$, $\vec{y}$가 수직이 되는 실수 t가 항상 존재한다. (참)

ㄷ. 모든 실수 t에 대하여 $\vec{x}$, $\vec{y}$가 항상 수직이 되지 않으려면 항상 $f(t)>0$이어야 하므로

$D=(k+1)^2-4<0$에서 $-3<k<1$

따라서 정수 k는 -2, -1, 0 의 3개다. (참)

그러므로 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

1. 답 ⑤	2. 답 7	3. 답 ②	4. 답 ②
5. 답 ②	6. 답 ②	7. 답 ③	8. 답 150
9. 답 ①	10. 답 ⑤	11. 답 11	12. 답 ②
13. 답 ⑤	14. 답 12	15. 답 ②	16. 답 ②
17. 답 ②	18. 답 ④	19. 답 ②	20. 답 ②
21. 답 ②	22. 답 ②	23. 답 ③	24. 답 ③
25. 답 ③	26. 답 ①	27. 답 ②	28. 답 ④
29. 답 ④	30. 답 ①	31. 답 ②	32. 답 ①
33. 답 ③	34. 답 ②	35. 답 ⑤	36. 답 ①
37. 답 40	38. 답 ②	39. 답 ②	40. 답 13
41. 답 ⑤	42. 답 216	43. 답 ①	44. 답 19
45. 답 20	46. 답 ③	47. 답 135	48. 답 ①
49. 답 ②	50. 답 ①	51. 답 ②	52. 답 ②
53. 답 ⑤	54. 답 ③	55. 답 ②	56. 답 ③
57. 답 ③	58. 답 ④	59. 답 ③	60. 답 ④
61. 답 ③	62. 답 ④	63. 답 ①	64. 답 ③
65. 답 18	66. 답 ④	67. 답 ①	68. 답 15
69. 답 ②	70. 답 ①	71. 답 ③	72. 답 96
73. 답 3	74. 답 ②	75. 답 24	76. 답 11
77. 답 ⑤	78. 답 ③	79. 답 16	80. 답 ③
81. 답 ③	82. 답 ⑤	83. 답 ②	84. 답 ③
85. 답 ①			

1. 답 ⑤

[해설] $2x=\dfrac{y-1}{2}=-z-3 \;\Leftrightarrow\; x=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+3}{-2}$

이므로 구하는 직선은 점 $(-1,\ 2,\ 3)$ 을 지나고 방향벡터가 $(1,\ 4,\ -2)$ 인 직선이다.

따라서 이 직선의 방정식은

$x+1=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{-2}$

이 직선의 방정식에 $x=1$ 을 대입하면

$1+1=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{-2}$

$\therefore\ y=10,\ z=-1$

$\therefore\ a+b=10-1=9$

2. 답 7

[해설] 직선 $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+1}{k}=\dfrac{z-3}{3}$ 과 z 축의 교점의 좌표를 $(0,\ 0,\ \beta)$ 로 놓고 주어진 직선의 방정식에 대입하면

$\dfrac{0+2}{2}=\dfrac{0+1}{k}=\dfrac{\beta-3}{3}$

$\therefore\ k=\alpha=1,\ \beta=6$

$\therefore\ \alpha+\beta=7$

3. 답 ②

[해설] 직선이 x 축, y 축, z 축의 양의 방향과 각각 $45°,\ 60°,\ 120°$ 를 이루므로 방향벡터는

$(\cos 45°,\ \cos 60°,\ \cos 120°)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

구하는 직선은 점 $(0,\ 1,\ -2)$ 를 지나고, 방향벡터가 $(\sqrt{2},\ 1,\ -1)$ 이므로 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{\sqrt{2}}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$

$x=\sqrt{2},\ y=a,\ z=b$ 를 대입하면

$1=a-1=-b-2$

$\therefore\ a=2,\ b=-3 \qquad \therefore\ a+b=-1$

4. 답 ②

[해설] $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$ 이고 $\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$ 이므로 구하는 직선의 방정식은 $\vec{x}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})+t(\vec{c}-\vec{a})$

5. 답 ②

[해설] $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$

$=(1,2,3)-(1,0,-1)$

$=(0,2,4)$

이므로 직선의 방향벡터는

$\vec{d}=(0,2,4)$

이때, 이 직선이 점 $D(2,1,3)$을 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$x=2,\ \dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{4}$

이 직선이 zx평면과 만나는 점은 $y=0$이므로 대입하면

$x=2,\ \dfrac{0-1}{2}=\dfrac{z-3}{4}$

$\therefore\ x=2, y=0, z=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(2,0,1)$이다.

6. 답 ②

점 $(1,-2,3)$에서 y축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(0,-2,0)$이므로 직선 l이 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,-2,0)$이다.

따라서 직선 l은 두 점 $(1,-2,3), (0,-2,0)$을 지나는 직선이므로 직선 l의 방정식은 $\dfrac{x-0}{1-0}=\dfrac{z-0}{3-0},\ y=-2$

$\therefore\ z=3x,\ y=-2$

7. 답 ③

[해설] $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{DG}$

$=(1,\ 2,\ 3)-(-1,\ 1,\ 2)$

$=(2,\ 1,\ 1)$

또, 점 E의 좌표는 $(1,\ 2,\ 3)$이므로 구하는 직선 CE의 방정식은

$\dfrac{x-1}{2}=y-2=z-3$

$x=3$일 때, $y=3,\ z=4$이므로

$a+b=3+4=7$

8. 답 150

[해설] 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 1,\ 3)$, $\mathrm{B}\ (-1,\ 3,\ -1)$ 의 yz 평면에 대한 대칭점을 각각 A', B'이라 하면

$\mathrm{A}'(-2,\ 1,\ 3)$, $\mathrm{B}'(1,\ 3,\ -1)$

이때, 직선 l과 yz평면에 대하여 대칭인 직선은 두 점 A′, B′ 을 지나므로 그 직선의 방정식은

$$\frac{x+2}{1+2}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-3}{-1-3}$$

$\therefore\ \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{-4}$ 이 zx평면과 만나는 점의 y좌표는 0 이므로

$$\frac{x+2}{3}=\frac{0-1}{2}=\frac{z-3}{-4}$$

$\therefore x=-\frac{7}{2},\ z=5$

따라서 $a=-\frac{7}{2},\ b=0,\ c=5$이므로

$$100(a+b+c)=100\left(-\frac{7}{2}+0+5\right)=150$$

***9.* 답 ①**

[해설] $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,2,3)-(2,-2,4)=(-1,4,-1)$

$\overline{OA}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2}{2},\frac{-2}{2},\frac{4}{2}\right)$

$\therefore\ (1,-1,2)$

그러므로 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{-1}$$

이때, 이 직선이 점$(2,a,b)$를 지나므로 대입하면

$$\frac{2-1}{-1}=\frac{a+1}{4}=\frac{b-2}{-1}$$

$\therefore\ a=-5,\ b=3$

$\therefore\ a+b=-2$

***10.* 답 ⑤**

[해설] ㄱ. $F(2,\ 2,\ 2)$이므로 $\overrightarrow{OF}$의 중점은 $M(1,\ 1,\ 1)$

또, $\overrightarrow{OF}\perp\pi$이므로 평면 π는 점 M을 지나고 $\overline{OM}$에 수직이다.

$\therefore 1\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)+1\cdot(z-1)=0$

$\therefore x+y+z=3\ \cdots$ ㉠ (참)

ㄴ. 직선 AE의 방정식은 $x=2,\ y=0$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $z=1$

따라서 $\overline{AE}$와 π의 교점은 $H(2,\ 0,\ 1)$

그런데 $A(2,\ 0,\ 0),\ E(2,\ 0,\ 2)$이므로 점 H는 $\overline{AE}$의 중점이다. (참)

ㄷ. 같은 방법으로 하면 평면 π는 $\overline{AB},\ \overline{BC},\ \overline{CG},\ \overline{DE},\ \overline{GD}$와 각각 중점에서 만난다.

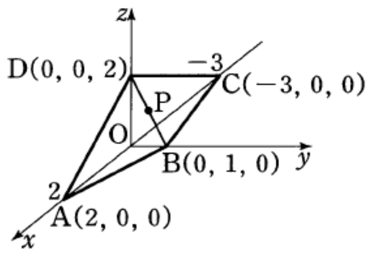
따라서 이들 6개의 중점을 연결하는 도형은 정육각형이다. (참)

그러므로 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

***11.* 답 11**

[해설] 직선 BD의 방정식은

$$\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2},\ x=0$$



직선 위의 임의의 점 P의 좌표를 $P(0,\ 1-t,\ 2t)$로 놓으면

$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2$

$=(-2)^2+(1-t)^2+(2t)^2+3^2+(1-t)^2+(2t)^2$

$=10t^2-4t+15$

$=10\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{73}{5}$

$t=\frac{1}{5}$ 일 때, $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2$의 값은 최소이고, 그 때의 점 P의 좌표는 $\left(0,\ \frac{4}{5},\ \frac{2}{5}\right)$이다.

$\therefore\ a+b+c=0+\frac{4}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$

$\therefore\ p+q=5+6=11$

***12.* 답 ②**

[해설] $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=t,\ x-1=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{4}=s$로 놓으면

두 직선 위의 점은 각각

$(t,\ 2t,\ 3t),\ (s+1,\ 3s+1,\ 4s+2)$이므로

$t=s+1,\ 2t=3s+1,\ 3t=4s+2$

$\therefore\ t=2,\ s=1$

따라서 교점의 좌표는 $(2,\ 4,\ 6)$이므로

$a+b+c=12$

***13.* 답 ⑤**

[해설] $x-4=\frac{y}{2}=z+1=t$ (t 는 실수)라 하면

직선 $x-4=\frac{y}{2}=z+1$ 위의 임의의 점 $(x,\ y,\ z)$는

$x=t+4,\ y=2t,\ z=t-1$

을 만족한다.

따라서 $(x,\ y,\ z)$가 주어진 구 위에 있다고 하면

$(t+4)^2+(2t)^2+(t-1)^2=17$

$6t^2+6t=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=-1$

이때, 두 교점의 좌표는 각각 $(4,\ 0,\ -1),\ (3,\ -2.,\ -2)$ 이므로 구하는 중점의 좌표는

$\left(\frac{4+3}{2},\ \frac{0-2}{2},\ \frac{-1-2}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{7}{2},\ -1,\ -\frac{3}{2}\right)$

$\therefore\ a+b+c=\frac{7}{2}-1-\frac{3}{2}=1$

***14.* 답 12**

[해설] 구하는 구의 지름의 길이는 두 직선 $x=2y=-2z+8$, $\frac{x+2}{2}=y-2=2-z$사이의 거리와 같다.

그런데 두 직선 $x=2y=-2z+8$, $\frac{x+2}{2}=y-2=2-z$의 방향벡터는 각각 $\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $(2, 1, -1)$이므로 서로 평행하다.

즉, 두 직선이 평행하므로 직선 $x=2y=-2z+8$위의 점 $\mathrm{A}(0, 0, 4)$에서 직선 $\frac{x+2}{2}=y-2=2-z$에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 AH의 길이가 두 직선 사이의 거리이다.

$\frac{x+2}{2}=y-2=2-z=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=2t-2$, $y=t+2$, $z=-t+2$

이므로 $\mathrm{H}(2t-2, t+2, -t+2)$로 놓을 수 있다.

이때, 이 직선의 방향벡터 $\vec{u}=(2, 1, -1)$과

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(2t-2, t+2, -t-2)$는 수직이어야 하므로

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}&=(2, 1, -1)\cdot(2t-2, t+2, -t-2)\\&=4t-4+t+2+t+2=0\end{aligned}$$

$\therefore t=0$

즉, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(-2, 2, -2)$이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

따라서 구하는 구의 반지름의 길이의 최솟값은

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$

이므로 구하는 구의 겉넓이의 최솟값은

$S=4\pi\times(\sqrt{3})^2=12\pi$

$\therefore \frac{S}{\pi}=12$

15. 답 ②

[해설] 직선 $\frac{x-2}{2}=-y=\frac{z-2}{2}$ 가 y 축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기는 이 직선의 방향벡터 $\vec{u}=(2, -1, 2)$ 와 y 축이 이루는 예각의 크기와 같다.

이때, y 축의 방향벡터는 $\vec{y}=(0, 1, 0)$ 이므로

$$\cos\theta=\frac{|2\cdot 0-1\cdot 1+2\cdot 0|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{0^2+1^2+0^2}}=\frac{1}{3}$$

16. 답 ②

두 직선 $x-2=\frac{y+3}{k}=z+3$, $\frac{x}{k}=y=3-z$ 의 방향벡터는 각각 $\vec{a}=(1,k,1)$, $\vec{b}=(k,1,-1)$이므로

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|\vec{a}\circ\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{|k+k-1|}{\sqrt{k^2+2}\sqrt{k^2+2}}=\frac{|2k-1|}{k^2+2}=\frac{1}{2}$$

(ⅰ) $k\geq\frac{1}{2}$일 때, $\frac{2k-1}{k^2+2}=\frac{1}{2}$이므로

$4k-2=k^2+2$, $k^2-4k+4=(k-2)^2=0$

$\therefore\ k=2$

(ⅱ) $k<\frac{1}{2}$일 때, $\frac{-2k+1}{k^2+2}=\frac{1}{2}$이므로

$-4k+2=k^2+2$, $k^2+4k=k(k+4)=0$

$\therefore\ k=-4$ ($\because\ k\neq 0$)

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은

$2-4=-2$

17. 답 ②

[해설] 직선 $4x=3y$, $z=1$은 $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}$, $z=1$이므로 이 직선의 방향벡터 $\vec{d_1}$은 $\vec{d_1}=(3,4,0)$

또, 직선 $1-x=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{2}$은 $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{2}$이므로

이 직선의 방향벡터 $\vec{d_2}$는 $\vec{d_2}=(-1,2,2)$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{|\vec{d_1}\circ\vec{d_2}|}{|\vec{d_1}||\vec{d_2}|}=\frac{|3\cdot(-1)+4\cdot 2+0\cdot 2|}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}}$$

18. 답 ④

[해설] 두 직선 l, m의 방향벡터는 평행하므로 $l /\!/ m$이다.

$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}$를 밑변이라 하면 높이 h는 두 직선 l, m 사이의 거리는 항상 일정하다. 직선 m 위의 한 점 $O(0, 0, 0)$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\frac{x+2}{2}=y-2=\frac{z-4}{-1}=t$

에서 $H(2t-2, t+2, -t+4)$

$\overrightarrow{OH}$와 직선 l이 수직이므로 l의 방향벡터를 $\vec{d}$라 하면

$\overrightarrow{OH}\cdot\vec{d}=2(2t-2)+(t+2)-(-t+4)=0$

$\therefore t=1$

따라서 $H(0, 3, 3)$이므로

$h=\overline{OH}=3\sqrt{2}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot h=6\sqrt{2}$

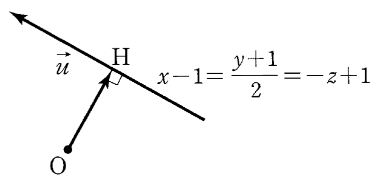
19. 답 ②

$x-1=\frac{y+1}{2}=-z+1=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=t+1$, $y=2t-1$, $z=-t+1$

이므로

$H(t+1,2t-1,-t+1)$이라 하자.



한편, 주어진 직선의 방향벡터는

$\vec{u}=(1,2,-1)$이고

$\overrightarrow{OH}\perp\vec{u}$이므로

$\overrightarrow{OH}\perp\vec{u}=(t+1,2t-1,-t+1)\circ(1,2,-1)=0$

$t+1+2(2t-1)-(-t+1)=6t-2=0$

$\therefore\ t=\frac{1}{3}$

이때, $H\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$이므로

$\overline{OH}=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$

20. 답 ②

[해설] $\overline{AH_1}\perp\alpha$이고 $\overline{H_1H_2}\perp l$이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{AH_2}\perp l$ $\cdots$ ㉠

이때, $H_2(x,y,z)$로 놓으면 $x=y=-\frac{z}{2}=t$에서

$x=t, y=t, z=-2t$

$\therefore\ \overrightarrow{AH_2}=(t-1,t-2,-2t-3)$

또, 직선 l의 방향벡터는

$\vec{d}=(1,1,-2)$

그러므로 ㉠에서

$\overrightarrow{AH_2}\circ\vec{d}=(t-1,t-2,-2t-3)\circ(1,1,-2)$

$=(t-1)+(t-2)+(4t+6)$

$=6t+3=0$

$\therefore\ t=-\frac{1}{2}$

그러므로

$\overline{AH_2}=|\overrightarrow{AH_2}|=\left|\left(-\frac{3}{2},-\frac{5}{2},-2\right)\right|=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2+(-2)^2}$

$=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

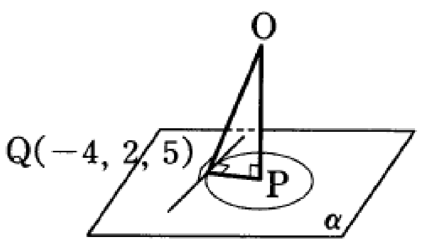
$\therefore\ \overline{H_1H_2}=\sqrt{\overline{AH_2}^2-\overline{AH_1}^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2-3^2}$

$=\frac{\sqrt{14}}{2}$

***21.* 답 ②**

[해설]



평면 α의 법선벡터가 $\vec{h}=(1,\ -2,\ -2)$

이므로 $\overrightarrow{OP}=t\vec{h}=(t,\ -2t,-2t)$

점 P가 평면 α 위의 점이므로

$t-2\cdot(-2t)-2\cdot(-2t)+18=0$

$9t+18=0\qquad\therefore\ t=-2$

$\therefore\ P(-2,\ 4,\ 4)$

한편, $\overrightarrow{PQ}\perp$(접선)에서 $\overrightarrow{PQ}=(-2,\ -2,\ 1)$ 이고,

접선의 방향벡터가 $\vec{d}=\left(1,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{b}\right)$이므로

$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{d}=(-2,\ -2,\ 1)\cdot\left(1,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{b}\right)$

$=-2-\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=0$ …… ㉠

또, $\overrightarrow{OP}\perp\alpha$, $\overrightarrow{PQ}\perp$(접선)이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overrightarrow{OQ}\perp$(접선)

그러므로

$\overrightarrow{OQ}\cdot\vec{d}=(-4,\ 2,\ 5)\cdot\left(1,\frac{1}{a},\ \frac{1}{b}\right)$

$=-4+\frac{2}{a}+\frac{5}{b}=0$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=1$

$\therefore\ a^2+b^2=5$

***22.* 답 ②**

[해설] 구의 중심이 원점 O이므로

$\overrightarrow{OP}=(1,\ 2,\ 3)$은 구에 접하는 평면의 법선벡터이다.

따라서 이 평면은 점 $P(1,\ 2,\ 3)$을 지나므로 구하는 평면의 방정식은

$1\cdot(x-1)+2\cdot(y-2)+3\cdot(z-3)=0$

$\therefore\ x+2y+3z=14$

***23.* 답 ③**

[해설] 주어진 두 직선의 방향벡터는 각각 $(1,\ 1,\ 2)$, $(2,\ -1,\ 1)$이고, 이 두 직선과 모두 수직인 직선의 방향벡터는 $(1,\ p,\ q)$이므로

$(1,\ 1,\ 2)\cdot(1,\ p,\ q)=1+p+2q=0$ … ㉠

$(2,\ -1,\ 1)\cdot(1,\ p,\ q)=2-p+q=0$ … ㉡

㉠+㉡을 하면

$3+3q=0\qquad\therefore q=-1$

이것을 ㉠에 대입하면

$1+p-2=0\qquad\therefore p=1$

이때, 직선 $x=y-a=\frac{z-b}{-1}$가 점 $(2,\ 1,\ -1)$을 지나므로

$2=1-a=\frac{-1-b}{-1}$

$\therefore a=-1,\ b=1$

$\therefore a+b+p+q=-1+1+1-1=0$

***24.* 답 ③**

점$(p,0,-1)$이 구 $x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3$ 위의 점이므로

$p^2+(0-1)^2+(-1+2)^2=3,\ p^2=1$

$\therefore\ p=1\ (\because\ p>0)$

이때, 접하는 평면은 구의 중심$(0,1,-2)$와 접점 $(1,0,-1)$을 지나는 직선에 수직이므로 이 평면의 법선벡터는

$(1,0,-1)-(0,1,-2)=(1,-1,1)$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$1(x-1)-1(y-0)+1(z+1)=0$

$\therefore\ x-y+z=0$

$\therefore\ a+b+c=-1+1+0=0$

***25.* 답 ③**

[해설] 선분 AB 의 중점 M 의 좌표는

$\left(\frac{1-3}{2},\ \frac{2-2}{2},\ \frac{3+1}{2}\right)$, 즉 $(-1,\ 0,\ 2)$

이 때

$\overrightarrow{AB}=(-3,\ -2,\ 1)-(1,\ 2,\ 3)=(-4,\ -4,\ -2)$

이므로 평면은 점 $(-1,\ 0,\ 2)$ 를 지나고 법선벡터가 $(-4,\ -4,\ -2)$ 이다.

따라서 평면의 방정식은

$-4(x+1)-4(y-0)-2(z-2)=0$

$-4x-4y-2z=0$

$\therefore\ 2x+2y+z=0$

이 평면의 방정식에 $y=z=0$ 을 대입하면

$x=0$

따라서 구하는 x 좌표는 0 이다.

26. 답 ①

[해설] 점 $(\alpha, \beta, 6)$ 이 구 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ 위의 점이므로

$(\alpha-1)^2+(\beta-2)^2+(6-3)^2=9$

$(\alpha-1)^2+(\beta-2)^2=0$

$\therefore\ \alpha=1,\ \beta=2$

이 때, 구하는 평면은 구의 중심 $(1, 2, 3)$ 과 접점 $(1, 2, 6)$을 지나는 직선에 수직이므로 이 평면의 법선벡터는

$(1, 2, 3)-(1, 2, 6)=(0, 0, -3)$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$0\cdot(x-1)+0\cdot(y-2)-3(z-6)=0$

$\therefore\ z-6=0$

$\therefore\ a+b+c=0+0-6=-6$

27. 답 ②

[해설] $x=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{3}=t$로 놓으면

$x=t, y=2t+1, z=3t+4$

이므로 이 직선 위의 임의의 점의 좌표는 $(t, 2t+1, 3t+4)$

이 직선의 방향벡터는 $\vec{d}=(1,2,3)$이므로 $\overrightarrow{OH}\circ\vec{d}=0$에서

$\overrightarrow{OH}\circ\vec{d}=(t,2t+1,3t+4)\circ(1,2,3)$

$=t+(4t+2)+(9t+12)=0$

$\therefore\ t=-1$

따라서 점 H의 좌표는 $(-1,-1,1)$이므로

$a+b+c=-1$

28. 답 ④

[해설] $1-x=2y+1=\dfrac{1}{3}z+4$에서

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{z+12}{3}$$

이때, 구하는 평면은 이 직선과 수직이므로 평면의 법선벡터 $\vec{h}$는 이 직선의 방향벡터와 같다. 그러므로

$\vec{h}=\left(-1,\dfrac{1}{2},3\right)$

또, 점 $A(1,0,-2)$를 지나므로 구하는 평면의 방정식은

$(-1)(x-1)+\dfrac{1}{2}(y-0)+3(z+2)=0$

따라서 x축과 만나는 점은 y 좌표와 z좌표가 0이므로 대입하면

$(-1)(x-1)+\dfrac{1}{2}(0-0)+3(0+2)=0$

$\therefore\ x=7$

29. 답 ④

[해설] 삼각형 BCD의 무게중심을 G라 하면

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=(3,0,-3)$에서

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=(1,0,-1)$

한편, $\overrightarrow{AG}$는 밑면 BCD와 수직이므로 구하는 평면의 법선벡터 $\vec{h}$는

$\vec{h}=\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}=(1,0,-1)-(2,1,-3)=(-1,-1,2)$

또, 이 평면은 점 $G(1,0,-1)$을 지나므로 구하는 평면의 방정식은

$(-1)\cdot(x-1)+(-1)\cdot(y-0)+2\cdot(z+1)=0$

$-x-y+2z+3=0$

$x+y-2z-3=0$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=1+4+9=14$

30. 답 ①

[해설] 점 A에서 평면α에 내린 수선의 발을 $H(x,y,z)$라 하면 평면의 법선벡터 $\vec{h}=(1,2,1)$에 대하여

$\overrightarrow{AH}=t\vec{h}$

이므로

$(x-1,y,z-2)=t(1,2,1)$

$\therefore\ x=t+1, y=2t, z=t+2$

점 $H(t+1,2t,t+2)$가 평면 α 위에 있으므로 대입하면

$(t+1)+4t+(t+2)=0$

$\therefore\ t=-\dfrac{1}{2}$

이때, $\overrightarrow{AH}=\left(-\dfrac{1}{2},-1,-\dfrac{1}{2}\right)$이므로

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{AH}$

$=(1,0,2)+3\left(-\dfrac{1}{2},-1,-\dfrac{1}{2}\right)$

$=\left(-\dfrac{1}{2},-3,\dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore\ a+b+c=\left(-\dfrac{1}{2}\right)+(-3)+\dfrac{1}{2}=-3$

31. 답 ②

[해설] 구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 으로 놓으면

점 $\mathrm{A}(2, 0, 0)$ 을 지나므로 $2a+0+0+d=0\quad\therefore\ a=-\dfrac{d}{2}$

점 $\mathrm{B}(0, 3, 0)$ 을 지나므로 $0+3b+0+d=0\quad\therefore\ b=-\dfrac{d}{3}$

점 $\mathrm{C}(0, 0, -3)$ 을 지나므로 $0+0-3c+d=0\quad\therefore\ c=\dfrac{d}{3}$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$-\dfrac{d}{2}x-\dfrac{d}{3}y+\dfrac{d}{3}z+d=0$

이 때 $d=0$ 이면 $a=b=c=0$ 이므로 모순이다.

따라서 $d\neq0$ 이므로

$-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{3}z+1=0$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y-\dfrac{1}{3}z=1$

이 평면이 점 (p, p, p) 를 지나므로

$\dfrac{1}{2}p+\dfrac{1}{3}p-\dfrac{1}{3}p=1$

$\therefore\ p=2$

32. 답 ①

[해설] 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$으로 놓으면 이 평면 위에 세 점$A(1,0,0), B(0,2,0),\ C(0,0,3)$이 있으므로 대입하면

$a+d=0$

$2b+d=0$

$3c+d=0$

$\therefore\ a=-d,\ b=-\frac{1}{2}d,\ c=-\frac{1}{3}d$

그러므로

$-dx-\frac{1}{2}dy-\frac{1}{3}dz+d=0$

$\therefore\ 6x+3y+2z-6=0$

이 평면 위에 점 $D(k,k-1,k-1)$이 있으므로 대입하면

$6k+3(k-1)+2(k-1)-6=0$

$\therefore\ k=1$

33. 답 ③

[해설] 두 평면 $x+y+z+1=0$…… ㉠

$x-y-2z-3=0$…… ㉡

에서 ㉠+㉡을 하면

$2x-z-2=0$

$\therefore\ x=\frac{z+2}{2}$

$2\times$㉠+㉡을 하면

$3x+y-1=0$

$\therefore\ x=\frac{-y+1}{3}$

그러므로 두 평면의 교선 l의 방정식은

$x=\frac{-y+1}{3}=\frac{z+2}{2}$

교선 l과 원점을 포함한 교선 l 위의 두 점 $(0,\ 1,\ -2)$, $(1,\ -2,\ 0)$과 원점 $(0,\ 0,\ 0)$을 지나므로 평면의 방정식의 일반형 $ax+by+cz+d=0$에 대입하여 풀면 구하는 평면의 방정식은 $4x+2y+z=0$ …… ㉢

ㄱ. 점 $(1,\ 0,\ 0)$을 ㉢에 대입하면 성립하므로 ㉢은 이 점을 포함한다. (참)

ㄴ. 두 점 $(0,\ 0,\ 0)$, $(1,\ 1,\ 2)$를 ㉢에 대입하면

$4\times0+2\times0+0=0$

$4\times1+2\times1+2=8\neq0$

이므로 두 점 $(0,\ 0,\ 0)$, $(1,\ 1,\ 2)$를 지나는 직선은 ㉢에 포함되지 않는다. (거짓)

ㄷ. 직선 $x=-y=\frac{z}{-2}$ 위의 서로 다른 두 점을 ㉢에 대입하여 만족하면 주어진 직선은 ㉢에 포함된다.

직선 $x=-y=\frac{z}{-2}$ 위의 서로 다른 두 점 $(0,\ 0,\ 0)$, $(1,\ -1,\ -2)$를 ㉢에 대입하면

$4\times0+2\times0+0=0$, $4\times1+2\times(-1)+(-2)=0$이므로

직선 $x=-y=\frac{z}{-2}$는 평면 ㉢에 포함된다. (참)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

34. 답 ②

[해설] 점 P의 좌표를 $(3,\ t,\ 1)$(t는 실수)로 놓으면

$\overline{OP}=\sqrt{3^2+t^2+1^2}=\sqrt{t^2+10}$

이므로 $t=0$일 때, $\overline{OP}$의 최솟값은 $\sqrt{10}$이다

35. 답 ⑤

[해설] $x+y-z+1=0$…… ㉠

$2x-y-z+3=0$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $3x-2z+4=0$이므로

$x=\frac{2z-4}{3}$ …… ㉢

㉠-㉡을 하면 $-x+2y-2=0$이므로

$x=2y-2$ …… ㉣

㉢과 ㉣에서

$x=2y-2=\frac{2z-4}{3}$

이 직선이 점 $(1,\ a,\ b)$를 지나므로 대입하면

$1=2a-2=\frac{2b-4}{3}$

$\therefore\ a=\frac{3}{2},\ b=\frac{7}{2}$

$\therefore\ ab=\frac{21}{4}$

36. 답 ①

[해설] 교선 $x+3=\frac{y-a}{b}=\frac{z-c}{d}$는 점 $(-3,\ a,\ c)$를 지나고 방향벡터가 $(1,\ b,\ d)$인 직선이다.

(ⅰ) 점 $(-3,\ a,\ c)$가 두 평면 $x-y+z=0$, $2x+y-2z=1$을 모두 지나므로

$-3-a-c=0$, $-6+a-2c+1=0$

위 두 식을 연립하여 풀면

$a=-11$, $c=-8$

(ⅱ) 벡터 $(1,\ b,\ d)$는 두 평면 $x-y+z=0$, $2x+y-2z=1$의 법선벡터와 모두 수직이므로

$(1,\ b,\ d)\cdot(1,\ -1,\ 1)=1-b+d=0$

$(1,\ b,\ d)\cdot(2,\ 1,\ -2)=2+b-2d=0$

위 두 식을 연립하여 풀면

$b=4$, $d=3$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$a+b+c+d=-11+4-8+3=-12$

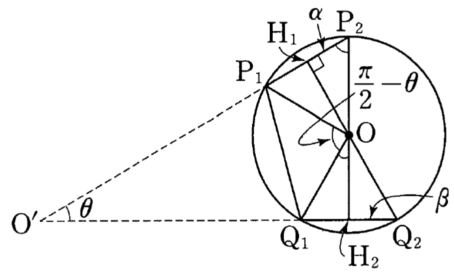
37. 답 40

[해설] 구의 중심 O에서 평면 α,β에 내린 수선의 발을 각각 H_1,H_2라 하자. 구의 중심 O와 두 점 H_1,H_2에 의하여 결정되는 평면과 원 C_1과 만나는 두 점을 각각 P_1,P_2, 원 C_2가 만나는 점을 각각 Q_1,Q_2라 하면 구하는 선분 PQ의 길이는 아래 그림에서 선분 P_1Q_1의 길이이다.

한편 점과 평면 사이의 거리에 의하여

$\overline{OH_1}=\frac{|0+0+0-15|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$

$\overline{OH_2}=\frac{|0+0+0-25|}{\sqrt{1+1+48}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$



그러므로 직각삼각형 P_1OH_1에서 $\angle OP_1H_1 = \frac{\pi}{3}$

또, 직각삼각형 Q_1H_2O에서 $\angle OQ_1H_2 = \frac{\pi}{6}$

한편, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\begin{aligned}\angle P_1OQ_1 &= 2\pi - \angle OP_1O' - \angle OQ_1O' - \theta \\ &= 2\pi - \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \theta \\ &= \frac{\pi}{2} - \theta\end{aligned}$$

또, 두 평면의 법선벡터가 각각 $(1,1,2)$, $(1,-1,-4\sqrt{3})$이므로

$$\cos\theta = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-4\sqrt{3})|}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{1+1+48}} = \frac{4}{5}$$

따라서 $\sin\theta = \frac{3}{5}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{P_1Q_1}^2 &= \overline{OP_1}^2 + \overline{OQ_1}^2 - 2\overline{OP_1} \cdot \overline{OQ_1}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= (5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{3}{5} \\ &= 40\end{aligned}$$

38. 답 ②

평면 $x - 2y + 2z = 5$ 의 법선벡터는 $(1,-2,2)$이고, xy평면의 법선벡터는 $(0,0,1)$이므로 두 법선벡터가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 평면 $x-2y+2z=5$와 xy평면이 이루는 각의 크기는 θ이다. 이때,

$$\cos\theta = \frac{|0+0+2|}{\sqrt{9}\sqrt{1}} = \frac{2}{3}$$

이고, 주어진 원의 넓이는 9π이므로 구하는 정사영의 넓이를 S라 하면

$$S = 9\pi \times \cos\theta = 9\pi \times \frac{2}{3} = 6\pi$$

39. 답 ②

[해설] 평면 $4x + 2y - 4z + 5 = 0$ 의 법선벡터를 $\overrightarrow{h_1}$, xz 평면의 법선벡터를 $\overrightarrow{h_2}$라 하면

$\overrightarrow{h_1} = (4,\ 2,\ -4)$, $\overrightarrow{h_2} = (0,\ 1,\ 0)$

$$\therefore \cos\theta = \frac{|\overrightarrow{h_1} \cdot \overrightarrow{h_2}|}{|\overrightarrow{h_1}||\overrightarrow{h_2}|} = \frac{|4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + (-4) \cdot 0|}{\sqrt{4^2+2^2+(-4)^2}\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{3}$$

40. 답 13

[해설] 구 $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ 는 중심이 $(2,\ 1,\ -2)$ 이고 반지름의 길이가 3 이다.

또 구의 방정식 $x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 6y - 8z = k$ 에서

$(x-5)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = k + 50$

이므로 중심은 $(5,\ 3,\ 4)$ 이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{k+50}$ 이다.

두 구가 점 P 에서 내접 또는 외접할 때, 점 P 를 지나고 두 구에 접하는 평면 α 의 법선벡터는 두 구의 중심을 시점과 종점으로 하는 벡터이다. 따라서 평면 α 의 법선벡터와 xy 평면이 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{h_1}$, $\overrightarrow{h_2}$ 라 하면

$\overrightarrow{h_1} = (5,\ 3,\ 4) - (2,\ 1,\ -2) = (3,\ 2,\ 6)$,

$\overrightarrow{h_2} = (0,\ 0,\ 1)$

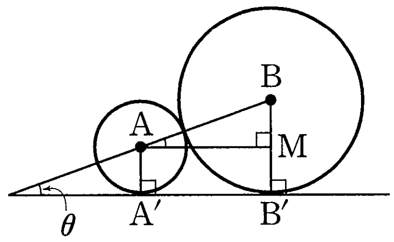
이므로 두 평면이 이루는 예각의 크기 θ 에 대하여

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{h_1} \cdot \overrightarrow{h_2}}{|\overrightarrow{h_1}||\overrightarrow{h_2}|} = \frac{6}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{6}{7}$$

$\therefore\ p + q = 7 + 6 = 13$

41. 답 ⑤

[해설] 두 점 A, B 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′ 이라고 하면 직선 AB 와 직선 A′B′ 이 이루는 각의 크기는 두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기인 θ 와 같다.



위의 그림에서 $\overline{AB} = 2 + 3 = 5$, $\overline{BM} = 3 - 2 = 1$ 이므로

$$\sin\theta = \frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \cos\theta = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

42. 답 216

[해설] 점 P의 좌표를 $P(x,\ y,\ z)$ 라 하면

$Q(x,\ y,\ 0)$, $R(0,\ y,\ z)$, $S(x,\ 0,\ z)$ 이므로

$\overline{PQ} = z$, $\overline{PR} = x$, $\overline{PS} = y$

이 때, $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PS} \perp \overrightarrow{PQ}$이므로

$$\triangle PRS = \frac{1}{2} \times \overline{PR} \times \overline{PS} = \frac{1}{2}xy$$

따라서 사면체 $PQRS$의 부피 V는

$$V = \frac{1}{3}\triangle PRS \times \overline{PQ} = \frac{1}{6}xyz$$

그런데 $\overline{QR} = \sqrt{z^2 + x^2}$, $\overline{QS} = \sqrt{z^2 + y^2}$ 이고, $\overline{QR} = \overline{QS}$ 이어야 하므로 $x = y$

이 때, $x + 2y + 2z = 54$ 에서

$2z = 54 - x - 2y = 54 - 3x$ 이므로

$$V = \frac{1}{6}xyz = \frac{1}{6}x^2z = \frac{1}{12}x^2(54 - 3x) = \frac{1}{4}(-x^3 + 18x^2)$$

이 때, $\frac{dV}{dx} = \frac{1}{4}(-3x^2 + 36x) = 0$에서

$-3x^2 + 36x = 0$

$x(x - 12) = 0$

$\therefore\ x = 12\ (\because\ x \neq 0)$

$x < 12$ 일 때 $\frac{dV}{dx} > 0$ 이고, $x > 12$ 일 때, $\frac{dV}{dx} < 0$ 이므로

V는 $x = 12$ 에서 극대이면서 최대이다.

따라서 구하는 사면체 $PQRS$의 부피의 최댓값은

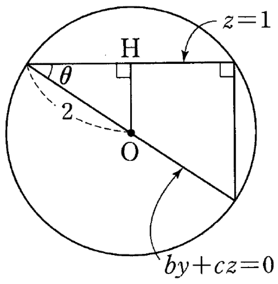
$V=\frac{1}{4}(-12^3+18\times12^2)=36(-12+18)=36\times6=216$

43. 답 ①

[해설] x축을 포함한 평면의 방정식은

$by+cz=0$

한편, S_2의정사영이 $S-1$과 서로 다른 두 점에서 만나므로 아래 그림과 같다.



원점 O에서 평면 $z=1$에 내린 수선의 발을 H라 하고, 두 평면 $z=1$, $by+cz=0$이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

한편, 두 평면 $z=1$, $by+cz=0$의 법선벡터는 각각 $(0,0,1)$, $(0,b,c)$이므로

$\cos\theta=\frac{|0\cdot0+0\cdot b+1\cdot c|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{0^2+b^2+c^2}}=\frac{|c|}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이 식을 정리하면

$4c^2=3(b^2+c^2)$

$3b^2=c^2$

$b=\frac{\sqrt{3}}{3}c \qquad (\because b>0, c>0)$

이때, $\vec{h}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$이므로

$\frac{\vec{h}}{|\vec{h}|}=\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)=\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore\ p+q+r=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

44. 답 19

[해설] 두 평면이 수직이기 위해서는 두 평면의 법선벡터가 수직이어야 한다. 두 평면의 법선벡터가 각각 $(k,\ k,\ k-2)$, $(k,\ -5,\ 2)$ 이므로

$(k,\ k,\ k-2)\cdot(k,\ -5,\ 2)=0$

$k\cdot k+k\cdot(-5)+(k-2)\cdot2=0$

$k^2-3k-4=0$

$(k-4)(k+1)=0$

$\therefore\ k=4\ \ (\because\ k>0\ )$

이 때 평면 $kx-5y+2z+k=0$, 즉 $4x-5y+2z+4=0$ 과 x 축이 만나는 점의 좌표는 $(-1,\ 0,\ 0)$ 이고,

y 축이 만나는 점의 자표는 $\left(0,\ \frac{4}{5},\ 0\right)$ 이고,

z 축이 만나는 점의 좌표는 $(0,\ 0,\ -2)$ 이다.

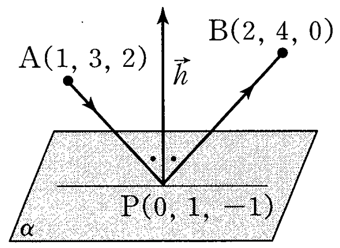
이 때 세 벡터 $\vec{a}=(-1,\ 0,\ 0)$, $\vec{b}=\left(0,\ \frac{4}{5},\ 0\right)$, $\vec{c}=(0,\ 0,\ -2)$ 는 두 벡터끼리 모두 수직이므로 구하는 사면체의 부피 V는

$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{4}{5}\times2=\frac{4}{15}$

$\therefore\ p+q=15+4=19$

45. 답 20

[해설]



세 점 A, B, P 를 지나는 평면은 평면 α 에 수직이다.

이 때, $\overrightarrow{PA}=(1,\ 2,\ 3)$, $\overrightarrow{PB}=(2,\ 3,\ 1)$

그런데 $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|$ 이므로 $\overline{AB}$ 의 중점을 M 이라 하면

$\overrightarrow{PM}\perp\alpha$

이므로 평면 α 의 법선벡터는

$\overrightarrow{PM}=\left(\frac{1+2}{2},\ \frac{2+3}{2},\ \frac{3+1}{2}\right)$

$=\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ 2\right)=\frac{1}{2}(3,\ 5,\ 4)$

따라서 벡터 $(3,\ 5,\ 4)$ 는 평면 α 의 법선벡터이다.

$\therefore\ a=5,\ \ b=4$

$\therefore\ ab=20$

46. 답 ③

[해설] 직선 $\frac{x}{2}=-y+3=1-z$ 의 방향벡터가 $\vec{u}=(2,\ -1,\ -1)$ 이고, yz 평면의 법선벡터가 $\vec{v}=(1,\ 0,\ 0)$ 이므로

$\sin\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

47. 답 135

[해설] 직선 $x-3=\frac{y+1}{\sqrt{2}}=z$ 의 방향벡터가 $\vec{u}=(1,\ \sqrt{2},\ 1)$ 이고, 평면 $x-y+\sqrt{2}z-2=0$ 의 법선벡터가 $\vec{v}=(1,\ -1,\ \sqrt{2})$ 이므로 이 직선과 평면이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$\sin\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|1-\sqrt{2}+\sqrt{2}|}{\sqrt{4}\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$

$\therefore\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{\sqrt{15}}{4} \qquad (\therefore\ 0\le\theta\le90°\ )$

따라서 구하는 정사영의 길이는

$l=12\times\frac{\sqrt{15}}{4}=3\sqrt{15}$

$\therefore\ l^2=(3\sqrt{15})^2=135$

48. 답 ①

[해설] 직선의 방향벡터는 $(2,-1,1)$, 평면의 법선벡터는$(1,2,k)$이므로

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$
$$=\frac{|2\times1+(-1)\cdot2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2+k^2}}$$
$$=\frac{|k|}{\sqrt{6}\sqrt{5+k^2}}=\frac{1}{6}$$

$\frac{k^2}{6(5+k^2)}=\frac{1}{36}$, $6k^2=5+k^2$, $k^2=1$

$\therefore k=1$ ($\because k>0$)

49. 답 ②

[해설] x축의 방향벡터는 $\vec{d}=(1,0,0)$

평면의 법선벡터는 $\vec{h}=(1,2,2)$

그러므로

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{|\vec{d}\circ\vec{h}|}{|\vec{d}||\vec{h}|}$$
$$=\frac{|1+0+0|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{1}{3}$$

$\therefore\ \sin\theta=\frac{1}{3}$

50. 답 ①

[해설] 두 점 A, B 를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-4}{2-4}=\frac{y+3}{a+3}=\frac{z+2}{4+2}$$

이 직선이 z축 위의 점 $(0,0,t)$를 지난다고 하면

$$\frac{0-4}{-2}=\frac{0+3}{a+3}=\frac{t+2}{6}$$
$$2=\frac{3}{a+3}=\frac{t+2}{6}$$

$\therefore a=-\frac{3}{2}$

51. 답 ②

[해설] 직선 $\frac{x-3}{a}=1-y=\frac{z+3}{b}$ 의 방향벡터는

$\vec{u}=(a,\ -1,\ b)$

직선 $x=y=-z$ 의 방향벡터는

$\vec{v}=(1,\ 1,\ -1)$

직선 $x+2=y-2=\frac{z-1}{c}$ 의 방향벡터는

$\vec{w}=(1,\ 1,\ c)$

이때, $\vec{u}\parallel\vec{v}$ 이므로

$\frac{a}{1}=\frac{-1}{1}=\frac{b}{-1}$

$\therefore a=-1,\ b=1$

또, $\vec{u}\perp\vec{w}$ 이므로

$\vec{u}\cdot\vec{w}=a-1+bc=0$

$\therefore c=2$

$\therefore a+b+c=2$

52. 답 ②

[해설] 평면 $x+2y+3z=0$ …… ㉠의 법선벡터는

$\vec{h}=(1,\ 2,\ 3)$

ㄱ. 직선 $x=y=1-z$ 의 방향벡터는 $\vec{u_1}=(1,\ 1,\ -1)$ 이고

$\vec{h}\cdot\vec{u_1}=(1,\ 2,\ 3)\cdot(1,\ 1,\ -1)=1+2-3=0$

$\therefore \vec{h}\perp\vec{u_1}$

또, 직선 위의 점 $(1,\ 1,\ 0)$을 평면 ㉠에 대입하면 만족하지 않으므로 직선과 평면은 평행하다.

ㄴ. $2x=y=1-z$ 의 방향벡터는 $\vec{u_2}=(1,\ 2,\ -2)$ 이고

$\vec{h}\cdot\vec{u_2}=(1,\ 2,\ 3)\cdot(1,\ 2,\ -2)=1+4-6=-1\neq0$

이므로 평면 ㉠과 직선은 만난다.

ㄷ. $2x+4y+6z=1$ 에서 $x+2y+3z=\frac{1}{2}$ 이므로 ㉠과 평행하다.

즉, 만나지 않는다.

따라서 평면 ㉠과 만나는 것은 ㄴ뿐이다.

53. 답 ⑤

[해설] 직선 l 은 방향벡터가 $\vec{a}$ 이고 원점을 지나는 직선이다.

평면 α 는 법선벡터가 $\vec{b}$ 이고, 점 $C(c_1,\ c_2,\ c_3)$ 를 지나는 평면이다.

ㄱ. $\vec{a}\parallel\vec{b}$ 이면 직선 l 의 방향벡터와 평면 α 의 법선벡터가 평행하므로 $l\perp\alpha$ (참)

ㄴ. $\vec{a}\perp\vec{b}$ 이면 직선 l 의 방향벡터와 평면 α 의 법선벡터가 수직이므로 직선 l 은 평면 α 와 평행하거나 포함된다.

이 때, 평면 α 는 $\vec{a}\perp\vec{c}$ 인 점 $C(c_1,\ c_2,\ c_3)$ 를 지나고 직선 l 은 원점을 지나므로 $l\parallel\alpha$ (참)

ㄷ. $\vec{a}\perp\vec{b}$ 이므로 ㄴ에서 직선 l 은 평면 α 와 평행하거나 포함된다.

이 때, $\vec{a}\parallel\vec{c}$ 이므로 $C(c_1,\ c_2,\ c_3)$ 은 직선 l 위의 점이다.

그러므로 직선 l 은 평면 α 에 포함된다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

54. 답 ③

[해설] 직선 $x+1=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}$ 과 yz 평면의 교점의 x 좌표는 0 이므로 직선의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$$0+1=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}$$

$\therefore y=4,\ z=2$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(0,\ 4,\ 2)$이다.

$\therefore a+b+c=0+4+2=6$

55. 답 ②

[해설] $\frac{x-2}{2}=y+3=z-2$에 $z=0$을 대입하면

$\frac{x-2}{2}=y+3=0-2$이므로 $x=-2,\ y=-5$

$\therefore \mathrm{P}(-2,\ -5,\ 0)$

$\frac{x-2}{2}=y+3=z-2$에 $x=0$을 대입하면

$\frac{0-2}{2}=y+3=z-2$이므로 $y=-4,\ z=1$

$\therefore\ Q(0,\ -4,\ 1)$

$\frac{x-2}{2}=y+3=z-2$에 $y=0$을 대입하면

$\frac{x-2}{2}=0+3=z-2$이므로 $x=8,\ z=5$

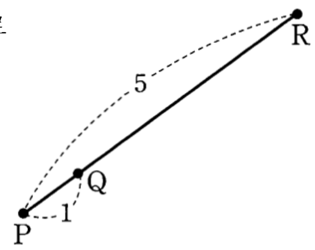
$\therefore\ R=(8,\ 0,\ 5)$

이때, $\overrightarrow{PQ}=(0,\ -4,\ 1)-(-2,\ -5,\ 0)=(2,\ 1,\ 1)$

$\overrightarrow{PR}=(8,\ 0,\ 5)-(-2,\ -5,\ 0)=(10,\ 5,\ 5)=5\overrightarrow{PQ}$

이므로 점 Q는 선분 PR를 1:$\boxed{4}$ 로 $\boxed{\text{내분}}$ 하는 점이다.

∴ (가) 4, (나) 내분



56. 답 ③

[해설] $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=-z-2=t$ (t 는 실수)로 놓으면

$x=2t-1,\ \ y=3t,\ \ z=-t-2$

즉 교점의 좌표를 $(2t-1,\ 3t,\ -t-2)$ 로 놓으면

이 점은 평면 $2x+y+z=8$ 위의 점이므로

$2(2t-1)+3t+(-t-2)=8,\ \ 6t=12$

$\therefore\ t=2$

따라서 교점의 좌표는 $(2\cdot 2-1,\ 3\cdot 2,\ -2-2)$,

즉 $(3,\ 6,\ -4)$ 이므로 구하는 교점의 x 좌표는 3 이다.

57. 답 ③

[해설] $x^2+y^2+z^2+2x-6y-4z=0$에서

$(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=14$

에서 구의 중심은 $C(-1,3,2)$

그러므로, 두 점 $A(1,2,3)$, $C(-1,3,2)$를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y-2}{3-2}=\frac{z-3}{2-3}$

$\therefore\ \frac{x-1}{-2}=y-2=\frac{z-3}{-1}$

이때, xy평면과 만나는 점의 z좌표는 0이므로 대입하면

$\frac{x-1}{-2}=y-2=3$

$\therefore\ x=-5, y=5$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-5,5,0)$이므로

$a+b+c=(-5)+5+0=0$

58. 답 ④

[해설] 평면의 법선벡터를 $\vec{h}$라 하면

$\vec{h}=(1,2,3)$

이고, $\overrightarrow{AH}$는 평면과 수직이므로 $\overrightarrow{AH}=k\vec{h}$($k$는 실수)이다.

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}$

$=(a,b,c)-(1,1,2)=(a-1,b-1,c-2)$

이므로

$(a-1,b-1,c-2)=k(1,2,3)$

$\therefore\ a=k+1, b=2k+1,\ c=3k+2$

즉, $H(k+1,2k+1,3k+2)$이고, 이 점은 주어진 평면 위의 점이므로 대입하면

$(k+1)+2(2k+1)+3(3k+2)+5=0$

$\therefore\ k=-1$

따라서 $H(0,-1,-1)$이므로

$a+b+c=-2$

59. 답 ③

[해설] 구의 중심 $O(0,\ 0,\ 0)$에서 직선

$x-1=\frac{y+1}{2}=\frac{2-z}{3}=t$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$H(t+1,\ 2t-1,\ -3t+2)$

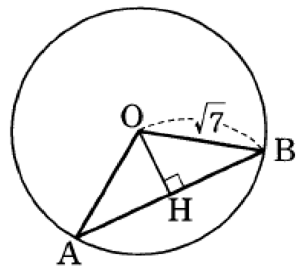
$\overrightarrow{OH}$는 직선의 방향벡터 $\vec{d}=(1,\ 2,\ -3)$가 수직이므로

$\overrightarrow{OH}\cdot\vec{d}=(t+1,\ 2t-1,\ -3t+2)\cdot(1,\ 2,\ -3)$

$=(t+1)+2(2t-1)-3(-3t+2)$

$=14t-7=0$

$\therefore\ t=\frac{1}{2}$



따라서 $\overrightarrow{OH}=\left(\frac{3}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$이므로

$\overline{OH}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

그림에서 $\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}$

$=2\sqrt{7-\frac{10}{4}}=2\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$

60. 답 ④

[해설] xz평면과 만나는 점은 y좌표가 0이므로 대입하면

$1-x=\frac{0-2}{2}=\frac{z-2}{2}$

$\therefore\ x=2, z=0$

그러므로 $A(2,0,0)$

또, yz평면과 만나는 점은 x좌표가 0이므로 대입하면

$1-0=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{2}$

$\therefore\ y=4, z=4$

그러므로 $B(0,4,4)$

이때, $\overline{AB}=\sqrt{2^2+(-4)^2+(-4)^2}=6$

한편, 직선 $1-x=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{2}$와 평면 $x+y+z=0$이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{|(-1)+2+2|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

즉, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

따라서 정사영의 길이는

$\overline{AB}\cos\theta = 6 \times \dfrac{\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6}$

61. 답 ③

[해설] 원점 O 가 구의 중심이고, 두 점 A, B 는 구 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}} = r$

따라서 삼각형 OAB 가 정삼각형이려면 원점 O 에서 직선 $x-1=y+2=z+2$ 에 내린 수선의 발 H 는 선분 AB 의 중점이므로

$\overline{\mathrm{OH}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}r$

이어야 한다.

$x-1=y+2=z+2=t$ (t 는 실수)에서 이 직선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(t+1,\ t-2,\ t-2)$ 로 놓을 수 있다. 이 때

$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{(t+1)^2+(t-2)^2+(t-2)^2} = \sqrt{3t^2-6t+9}$

$= \sqrt{3(t-1)^2+6} \geq \sqrt{6}$

이므로 $\overline{\mathrm{OP}}$ 는 $t=1$ 일 때, 최솟값 $\sqrt{6}$ 을 갖는다.

이 때 $\overline{\mathrm{OH}} = \sqrt{6}$ 이므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}r = \sqrt{6}$

$\therefore\ r = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$

62. 답 ④

[해설] 두 구의 반지름의 길이가 같고, 중심의 좌표가 각각 $\mathrm{P}(3,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{Q}(-5,\ 4,\ 3)$ 이므로 주어진 평면은 선분 PQ 의 중점을 지나고 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ 에 수직이어야 한다.

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{3-5}{2},\ \dfrac{0+4}{2},\ \dfrac{1+3}{2}\right)$, 즉 $(-1,\ 2,\ 2)$

또한 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (-5,\ 4,\ 3)-(3,\ 0,\ 1) = (-8,\ 4,\ 2)$ 이므로

구하는 평면의 방정식은

$-8(x+1)+4(y-2)+2(z-2)=0$

$8x-4y-2z+20=0$

$\therefore\ 4x-2y-z+10=0$

$\therefore\ a+b+c=4-2-1=1$

63. 답 ①

[해설] 두 구의 중심의 좌표는 $C_1(1,\ 2,\ 3)$, $C_2(-3,\ -2,\ -1)$ 이므로 구하는 평면의 법선벡터를 $\vec{h}$ 라 하면

$\vec{h} = \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{OC_1} = (-4,\ -4,\ -4)$

또, 구하는 평면은 $\overline{C_1C_2}$ 의 중점 $(-1,\ 0,\ 1)$ 을 지나므로 구하는 평면의 방정식은

$-4\cdot\{x-(-1)\}-4\cdot(y-0)-4\cdot(z-1)=0$

$\therefore\ x+y+z=0$

64. 답 ③

[해설] 선분 AB 의 중점 M 에서 평면에 내린 수선의 발을 M' 으로 놓으면

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}| = 2|\overrightarrow{PM}| \geq 2|\overrightarrow{MM'}|$

그런데 M 의 좌표는 $(2,\ -1,\ 0)$ 이고, 점 M 과 평면 $x-y+z=0$ 사이의 거리는 선분 MM' 의 길이이므로

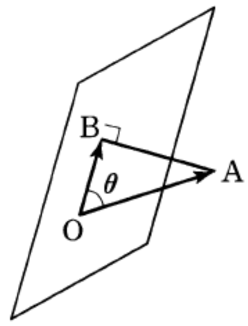
$\dfrac{|2+1+0|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

따라서 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$ 의 최솟값은 $2|\overrightarrow{MM'}| = 2\sqrt{3}$ 이다

65. 답 18

[해설] 원점 O 는 평면 $\sqrt{3}y-z=0$ 위의 점이므로 두 벡터 $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BA}$ 는

서로 수직이다.



점 $A(3,\ 6,\ 0)$ 과 평면 $\sqrt{3}y-z=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|\sqrt{3}\cdot 6-0|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

이고, $\overline{OA} = \sqrt{3^2+6^2+0^2} = 3\sqrt{5}$ 이므로 직각삼각형 OAB 에서

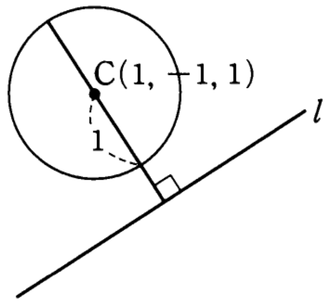
$\overline{OB} = \sqrt{45-27} = 3\sqrt{2}$

$\angle AOB = \theta$ 라 하면 $\cos\theta = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$ 이므로

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overline{OA}\times\overline{OB}\times\cos\theta = \overline{OB}^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18$

66. 답 ④

[해설] 직선 l 을 포함하는 평면이 구의 중심 $C(1,-1,1)$ 을 지날 때 생기는 단면은 다음 그림과 같다.



이때, $x=y=x=t$ 라 하면 직선 l 위의 점은

$P(t,t,t)$ 이고, $C(1,-1,1)$ 에서 직선 l 까지의 거리 d 는

$\sqrt{(t-1)^2+(t+1)^2+(t-1)^2} = \sqrt{3t^2-2t+3}$

$= \sqrt{3\left(t-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{8}{3}}$

에서 $t=\dfrac{1}{3}$ 일 때, $d=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ 이다.

따라서 $m=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}-1$, $M=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}+1$ 이므로

$M+m=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

67. 답 ①

[해설] 구 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$ 의 반지름의 길이가 3 이므로

$|\overrightarrow{CP}|=|\overrightarrow{CQ}|=3$

두 벡터 $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{CQ}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}=|\overrightarrow{CP}||\overrightarrow{CQ}|\cos\theta=9\cos\theta$

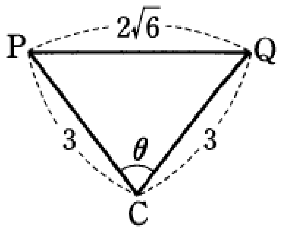
이므로 $\cos\theta$ 의 값이 최소일 때, $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}$ 의 값도 최솟값을 갖는다.

또한, $0\le\theta\le\pi$ 일 때 θ 의 값이 클수록 $\cos\theta$ 의 값이 작아지므로 구와 평면의 교선인 원 S 위의 점 P, Q가 지름의 양 끝점일 때, $\cos\theta$ 의 최솟값을 갖는다.

구의 중심 $C(1,\ 1,\ 1)$ 에서 평면 $x+y+z=6$ 에 이르는 거리는

$\dfrac{|1+1+1-6|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3}$ 이고, 구의 반지름의 길이가 3 이므로 원 S 의 반지름의 길이를 r 라 하면

$r=\sqrt{3^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$



삼각형 CPQ 에서 제이코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{3^2+3^2-(2\sqrt{6})^2}{2\cdot3\cdot3}=-\dfrac{1}{3}$

이므로 구하는 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}$ 의 최솟값은

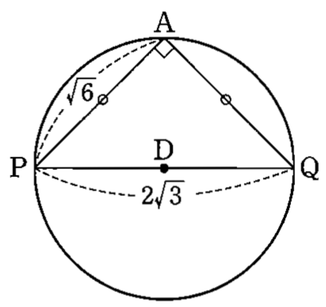
$|\overrightarrow{CP}||\overrightarrow{CQ}|\cos\theta=9\cos\theta=9\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-3$

68. 답 15

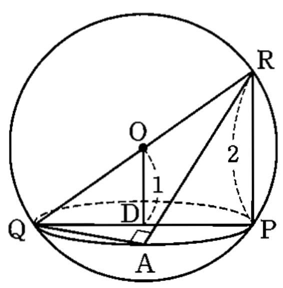
[해설] 구 S의 중심 $(0,0,0)$과 평면 α 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=1$$

이므로 구 S와 평면 α가 만나서 생기는 원 C의 반지름의 길이 r는 $r=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$ 이다 원 C위의 세 점 A, P, Q의 위치관계는 다음과 같다.



또한 원 C의 중심을 D라 하면 다음 그림에서 $\overrightarrow{PR}=2$ 이고 선분 QR는 구 S의 지름임을 알 수 있다.



이때, 점 A는 구위의 점이므로 삼각형 APQ는 $\angle A=90°$인 직각삼각형이다. 즉

$$\overline{AR}=\sqrt{\overline{QR}^2-\overline{QA}^2}$$
$$=\sqrt{16-6}=\sqrt{10}$$

$$\therefore s=\frac{1}{2}\times\overline{AQ}\times\overline{AR}$$
$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{10}=\sqrt{15}$$
$$\therefore s^2=15$$

69. 답 ②

[해설] $x=y=z=s$로 놓으면 $P(s,s,s)$

또, $x-1=y=\dfrac{z}{2}=t$ 로 놓으면 $Q(t+1,t,2t)$

이므로

$\overrightarrow{PQ}=(t-s+1,t-s,2t-s)$

이때, 두 직선 $x=y=z$, $x-1=y=\dfrac{z}{2}$의 방향벡터는 각각

$\overrightarrow{d_1}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{d_2}=(1,1,2)$이므로 선분 PQ의 길이가 최소가 될 때는

$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{d_1}$, $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{d_2}$

$\overrightarrow{PQ}\circ\overrightarrow{d_1}=(t-s+1,t-s,2t-s)\circ(1,1,1)$

$=4t-3s+1=0$ $\cdots$ ㉠

또,

$\overrightarrow{PA}\circ\overrightarrow{d_2}=(t-s+1,t-s,2t-s)\circ(1,1,2)$

$=6t-4s+1=0$ $\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$t=\dfrac{1}{2},s=1$

따라서 구하는 길이의 최솟값은 $t=\dfrac{1}{2}$, $s=1$일 때, $|\overrightarrow{PQ}|$의 크기이므로

$|\overrightarrow{PQ}|=\left|\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

70. 답 ①

[해설] $\vec{x}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

이때, $t+s=1$이므로 $\overrightarrow{OX}=\vec{x}$라 하면 점 X는 두 점 $A(1,1,2)$, $B(0,1,0)$을 지나는 직선 위의 점이다.

그러므로 이 직선의 방정식은

$\dfrac{x-0}{1-0}=\dfrac{z-0}{2-0}$, $y=1$

즉, $x=\dfrac{z}{2}$, $y=1$ $\cdots$ ㉠

또,

$\vec{y}=u\overrightarrow{AC}+v\overrightarrow{BC}$

$=u(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+v(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$=u(0,1,1)+v(1,1,3)$

u,v는 임의의 실수이므로 $\overrightarrow{OY}=\vec{y}$라 하면 점 Y는 두 점 $(0,1,1)$, $(1,1,3)$과 원점 $O(0,0,0)$을 지나는 평면이다.

이때, 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$으로 놓고 대입하면

$d=0$

$b+c+d=0$

$a+b+3c+d=0$

$\therefore\ a=-2c,\ b=-c$

이므로

$-2x-y+z=0$ $\cdots$ ㉡

그러므로, $|\vec{x}-\vec{y}|$의 최솟값은 ㉠과 ㉡의 거리이고, 이 거리는 ㉠ 위의 점 $(1,1,2)$에서 평면 $-2x-y+z=0$사이의 거리이다.
따라서 구하는 최솟값은

$$\frac{|(-2)+(-1)+2|}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

71. 답 ③

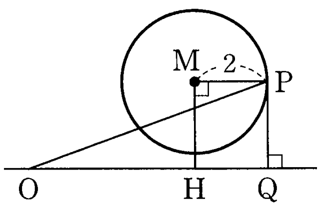
[해설] 구의 중심의 좌표는 $M(0,\ -3,\ 4)$ 이고, 평면 $x+y+2z=0$ 의 법선벡터는 $\vec{h}=(1,\ 1,\ 2)$ 이다.
이 때 $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{0^2+(-3)^2+4^2}=5$,
$|\vec{h}|=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$ 이므로 직선 OM 과 평면 $x+y+2z=0$ 이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\sin\theta=\frac{|0\cdot1-3\cdot1+4\cdot2|}{5\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\therefore \cos\theta=\sqrt{1-\frac{6}{36}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$$

$$\therefore \overline{OH}=\overline{OM}\times\cos\theta=\frac{5\sqrt{30}}{6}$$

이 때, 구 $x^2+(y+3)^2+(z-4)^2=4$ 위의 점 P 에서 직선 OH 에 내린 수선의 발을 Q 라 하면
오른쪽 그림에서



$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OP}$$
$$=|\overrightarrow{OH}|\cdot|\overrightarrow{OP}|\cos\theta$$
$$=\overline{OH}\cdot\overline{OQ}$$
$$\le\frac{5\sqrt{30}}{6}\left(\frac{5\sqrt{30}}{6}+2\right)$$
$$=\frac{125}{6}+\frac{5\sqrt{30}}{3}$$

따라서 구하는 최댓값은 $\frac{125}{6}+\frac{5\sqrt{30}}{3}$ 이다.

$$\therefore\ p+q=\frac{125}{6}+\frac{5}{3}=\frac{135}{6}=\frac{45}{2}$$

72. 답 96

[해설] $P(x,\ y,\ z)$ 라 하면

$$|\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OP}|=|(2,\ 0,\ 2)-2(x,\ y,\ z)|$$
$$=|(2-2x,\ -2y,\ 2-2z)|$$
$$=\sqrt{(2-2x)^2+(-2y)^2+(2-2z)^2}$$
$$=2\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-1)^2}$$

이 때 $\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-1)^2}$ 은 점 $(1,\ 0,\ 1)$ 을 중심으로 하고 구 $x^2+(y-2)^2+(z-2)^2=6$ 위의 점 $P(x,\ y,\ z)$ 를 지나는 구의 반지름의 길이이다.
이 때 점 $(1,\ 0,\ 1)$ 과 구 $x^2+(y-2)^2+(z-2)^2=6$ 의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(1-0)^2+(0-2)^2+(1-2)^2}=\sqrt{6}$$

이므로 $\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-1)^2}$ 의 최댓값은

$$\sqrt{6}+\sqrt{6}=2\sqrt{6}$$

따라서 구하는 $|\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OP}|=2\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-1)^2}$ 의 최댓값은

$$M=2\times2\sqrt{6}=4\sqrt{6}$$

$$\therefore\ M^2=96$$

73. 답 3

[해설] 구 $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=r^2$ 의 중심 $(1,\ -1,\ 0)$ 에서 평면
$x-y+\sqrt{2}z+8=0$ 에 이르는 거리 d 는

$$d=\frac{|1\cdot1-1\cdot(-1)+\sqrt{2}\cdot0+8|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(\sqrt{2})^2}}$$
$$=\frac{10}{\sqrt{4}}=5$$

이 때, 구의 반지름의 길이가 r 이므로 오른쪽 그림에서 선분 PQ 의 길이의 최솟값은

$$d-r=5-r=2$$
$$\therefore\ r=3$$

74. 답 ②

[해설] 구 $x^2+y^2+z^2=1$ 의 중심 $(0,0,0)$에서 평면 $ax-2ay-2az=1$ 사이의 거리가 구의 반지름의 길이 1과 같아야 하므로

$$\frac{|-1|}{\sqrt{a^2+(-2a)^2+(-2a)^2}}=1,\ \sqrt{9a^2}=1$$

$3a=1$ $(\because a>0)$

$$\therefore a=\frac{1}{3}$$

75. 답 24

[해설] 사면체 $OABC$의 모든 면에 내접하는 구의 반지름의 길이를 r라 하면 xz, yz, zx평면에 모두 접하므로 구의 중심은 (r,r,r)이다.
구의 중심 (r,r,r)와 평면 $x+2y+2z=8$ 사이의 거리는 r이므로

$$\frac{|r+2r+2r-8|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|5r-8|}{3}=r$$

$5r-8=3r$ 또는 $5r-8=-3r$

$$\therefore r=1\left(\because r<\frac{8}{3}\right)$$

$$\therefore a=4\pi$$

또한 $A(8,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(0,0,4)$이므로 사면체 $OABC$의 네 꼭짓점을 지나는 구의 방정식을 $x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z=0$이라고 하면 $64+8\alpha=0$, $16+4\beta=0$, $16+4\gamma=0$이므로

$$\alpha=-8,\ \beta=-4,\ \gamma=-4$$
$$x^2+y^2+z^2-8x-4y-4z=0$$
$$(x-4)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=24$$

따라서 사면체 $OABC$의 네 꼭짓점을 지나는 구의 반지름의 길이는 $2\sqrt{6}$ 이므로

$$b=4\pi(2\sqrt{6})^2=96\pi$$

$$\therefore \frac{b}{a}=24$$

76. 답 11

[해설] 평면 α의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 하자.
α가 세 점 $(34,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 17,\ 0)$, $(0,\ 0,\ -17)$을 지나므로
$34a+d=0$, $17b+d=0$, $-17c+d=0$

$\therefore a=-\frac{1}{34}d,\ b=-\frac{1}{17}d,\ c=\frac{1}{17}d$

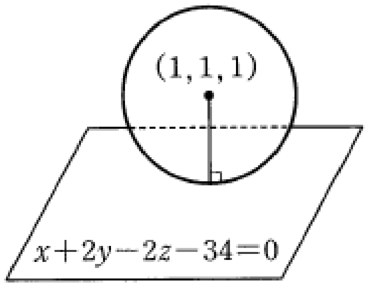
따라서 평면 α의 방정식은

$-\frac{1}{34}dx-\frac{1}{17}dy+\frac{1}{17}dz+d=0$ ⋯ ㉠

$d=0$이면 $a=b=c=0$이므로 $d\neq 0$이다.

㉠의 양변에 $-\frac{34}{d}$를 곱하면

$x+2y-2z-34=0$



구하는 반지름의 길이는 구의 중심 $(1,\ 1,\ 1)$에서 평면 $x+2y-2z-34=0$에 이르는 거리와 같다.

따라서 구하는 구의 반지름의 길이 r는

$r=\frac{|1+2-2-34|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{33}{3}=11$

77. 답 ⑤

[해설] 구 S의 중심 $C(1,\ 0,\ 0)$에서 평면 α까지의 거리 d는

$d=\frac{|2-k|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{|k-2|}{3}$

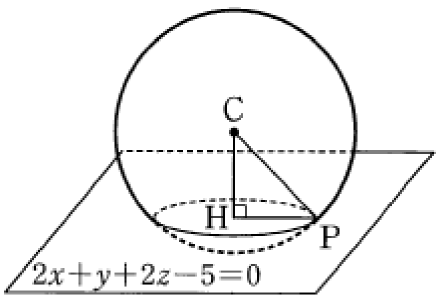
ㄱ. 평면 α와 구 S가 접할 때 교점이 한 개이므로

$\frac{|k-2|}{3}=2$에서 k의 값은 $k=-4$ 또는 $k=8$의 2개다. (참)

ㄴ. d가 반지름의 길이 2보다 클 때, 평면 α와 구 S가 만나지 않으므로

$d=\frac{|k-2|}{3}>2$에서 $k<-4$ 또는 $k>8$ (참)

ㄷ. $k=5$일 때, 구 S와 평면 $2x+y+2z-5=0$의 교선은



위의 그림에서 반지름의 길이가 $\overline{HP}$인 원이다.

$\overline{CH}=\frac{|2-5|}{\sqrt{4+1+4}}=1$

이므로 직각삼각형 CHP에서

$\overline{HP}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$

따라서 구하는 원의 넓이는 3π이다. (참)

그러므로 보기에서 참인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

78. 답 ③

점 $A(1,1,1)$과 평면 $x+2y-2z=31$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|1+2\cdot 1-2\cdot 1-31|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=10$

조건 (가)에서 두 구 C_1, C_2의 부피의 비는 $1:8$, 즉 $1:2^3$이므로 반지름의 길이의 비는 $1:2$이다.

구 C_2와 평면 α의 접점을 B라 하면 조건 (나), (다)에서 구 C_1의 반지름의 길이가 최소일 때에는 오른쪽 그림과 같이 점 A와 구 C_2의 중심 및 점 B가 한 직선 위에 있을 때이다.

이때, 두 구 C_1, C_2의 반지름의 길이를 각각 $r, 2r$라 하면

$\overline{AB}=d=r+2\cdot 2r=5r=10$

$\therefore\ r=2$

따라서 구하는 구 C_1의 반지름의 길이의 최솟값은 2이다.

79. 답 16

[해설] 구 $x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1$의 중심 $(0,\ 1,\ -1)$에서 평면 $2x-3y+6z+d=0$까지의 거리가 반지름의 길이와 같으면 접하므로

$\frac{|0-3-6+d|}{\sqrt{4+9+36}}=1$에서 $|d-9|=7$

$\therefore d=2$ 또는 $d=16$ ⋯ ㉠

또, 구 $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=1$에 대해서도 마찬가지로 생각하면

$\frac{|-2-3-18+d|}{\sqrt{4+9+36}}=1$에서 $|d-23|=7$

$\therefore d=16$ 또는 $d=30$ ⋯㉡

㉠, ㉡에서 $d=16$

80. 답 ③

[해설] 두 구의 중심을 $A(2,\ 0,\ -2)$, $B(5,\ 0,\ 2)$라 하자.

두 구가 만나서 생기는 원을 포함하는 평면은 두 구의 중심 A, B를 지나는 직선에 수직이므로 평면 α의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_1}$이라 하면

$\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{AB}=(3,\ 0,\ 4)$

yz평면의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_2}=(1,\ 0,\ 0)$

이라 할 수 있다.

평면 α와 yz평면이 이루는 각의 크기는 두 법선벡터 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$가 이루는 각의 크기와 같으므로

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{3}{\sqrt{9+16}\sqrt{1}}=\frac{3}{5}$

81. 답 ③

[해설] 두 평면이 평행하므로 법선벡터도 평행하다.

따라서 $\frac{2}{1}=\frac{a}{2}=\frac{b}{-1}$ 이므로

$a=4,\ \ b=-2$

이 때, 평면 $x+2y-z=0$ 은 원점을 지나므로 두 평면 사이의 거리는 원점 $(0,\ 0,\ 0)$ 과 평면 $2x+4y-2z+9=0$ 사이의 거리 d 와 같다.

이 때 $d=\frac{|9|}{\sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}}=\frac{9}{2\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{4}$ 이므로 구하는 반지름의 길이 r 은

$r=\frac{d}{2}=\frac{3\sqrt{6}}{8}$

82. 답 ⑤

[해설] 평면 $x+y+z=1$ 위의 점 $P(0,\ 0,\ 1)$ 을 잡으면 두 평면 사이의 거리는 점 $P(0,\ 0,\ 1)$ 과 평면 $x+y+z-3=0$ 사이의 거리와 같다. 따라서 거리를 d 라 하면

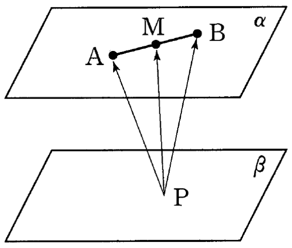
$d=\dfrac{|0+0+1-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

83. 답 ②

[해설] 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$|\overrightarrow{PA}|\overrightarrow{PB}|=|2\overrightarrow{PM}|$

$\quad=2|\overrightarrow{PM}|$



점 M에서 평면 β에 내린 수선의 발이 P일 때, 최솟값을 갖는다.

이때, $\overline{PM}$의 길이의 최솟값은 두 평면 α, β사이의 거리이고, 두 평면 사이의 거리는 평면 α 위의 점$(0,0,0)$과 평면 β사이의 거리이므로 최솟값은

$\dfrac{|0+0-0-3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=1$

따라서 $\angle PMA=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PB}|=2\sqrt{\overline{PM}^2+\overline{MA}^2}$

$\quad=2\sqrt{1^2+1^2}=2\sqrt{2}$

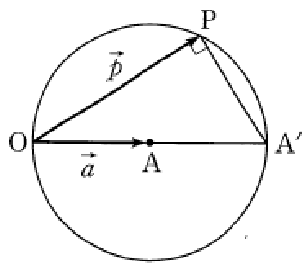
84. 답 ③

[해설] $0=|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{a}|^2-|\vec{a}|^2$

$=|\vec{p}-\vec{a}|^2-|\vec{a}|^2$

$\therefore |\vec{p}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2$, 즉 $|\vec{p}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|$

이것은 중심이 A이고 반지름의 길이가 $|\vec{a}|$인 원의 벡터방정식이므로 개형은 오른쪽 그림과 같다.



85. 답 ①

[해설] $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{x}$로 놓으면

$|2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|=4$

에서 $|2(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})|=4$

즉, $|2(\vec{x}-\vec{a})+(\vec{x}-\vec{b})|=4$에서

$|3\vec{x}-(2\vec{a}+\vec{b})|=4$

$\therefore \left|\vec{x}-\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}\right|=\dfrac{4}{3}$

따라서 점 P는 $\dfrac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b})$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\dfrac{4}{3}$인 원 위의 점이다. 그러므로 원 위의 임의의 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{QR}|$가 항상 일정하게 되는 점 R는 원의 중심뿐이다.