2023 MINIRING CURRICULUM

THIRD STORY

미적분

세번째 이야기. 2021학년도 기출

“

언제나 최선을 다하는 당신이
2023년의 주인공이에요

”

STORY 03

2021학년도 교육청 & 평가원 기출문제

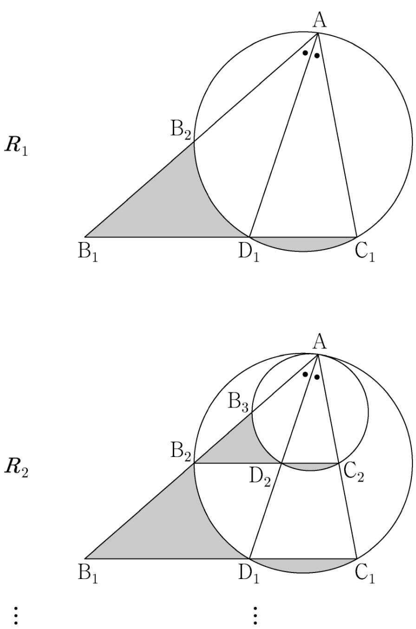
이번주 띵언 | 언제나 최선을 다하는 당신인 2023년의 주인공이에요

001 [2021학년도 6월 가형 20번]

그림과 같이 $\overline{AB_1}=3$, $\overline{AC_1}=2$이고 $\angle B_1AC_1=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. $\angle B_1AC_1$의 이등분선이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 D_1, 세 점 A, D_1, C_1을 지나는 원이 선분 AB_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_2라 할 때, 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 B_2D_1로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1과 호 C_1D_1로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1C_1에 평행한 직선이 두 선분 AD_1, AC_1과 만나는 점을 각각 D_2, C_2라 하자. 세 점 A, D_2, C_2를 지나는 원이 선분 AB_2와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_3이라 할 때, 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 B_3D_2로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2와 호 C_2D_2로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



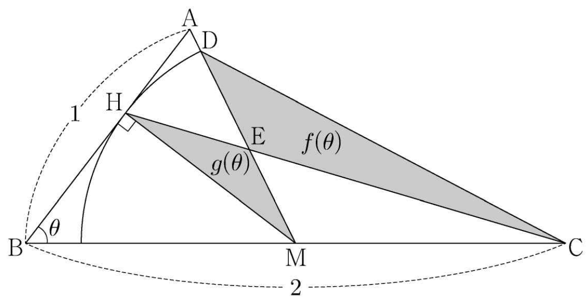
① $\frac{27\sqrt{3}}{46}$ ② $\frac{15\sqrt{3}}{23}$ ③ $\frac{33\sqrt{3}}{46}$ ④ $\frac{18\sqrt{3}}{23}$ ⑤ $\frac{39\sqrt{3}}{46}$

PICK

도형을 옮기거나 다른 곳에 붙이면 더 간단한 도형이 되는 경우가 있다. 특히, 원이나 활꼴의 일부분은 다른 곳에 갖다 붙이기 훨씬 쉽다.

002 [2021학년도 6월 미적분 28번]

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 두 선분 AB, BC에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 점 M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\overline{MH}$인 원이 선분 AM과 만나는 점을 D, 선분 HC가 선분 DM과 만나는 점을 E라 하자. $\angle ABC=\theta$라 할 때, 삼각형 CDE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 MEH의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $80a$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ [4점]



PICK

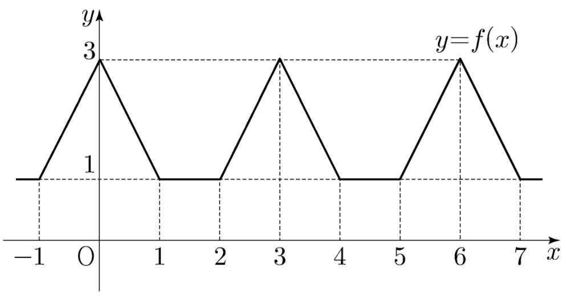
식을 있는 그대로 해석하지 말자. 이 문제는 기하학적인 의미로 판단하는 연습이 필요하다. 단순한 노가다로 f, g를 구하는 것은 이 문제의 핵심이 아니다.

003 **[2021학년도 6월 가형 30번]**

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 $0 \le x < 3$일 때 $f(x)=|x-1|+|x-2|$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{h}\right|$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속인 a의 값 중에서 열린구간 $(-5, 5)$에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ (n은 자연수)라 할 때, $n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}$의 값을 구하시오. [4점]



PICK

절댓값이 왜 씌워져 있는 걸까? 그것이 바로 이 문제의 함정이다. 절댓값을 무시하고 단순히 불연속일 것 같은 점만 찾다가는 이 문제의 함정에 완벽하게 넘어가게 되는 것이다. 주어진 식이 의미하는 바가 무엇인지 차근차근 살펴보자.

004 **[2020학년도 7월 가형 19번]**

실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int_0^x \ln f(t)\,dt$$

일 때, 함수 $g(x)$와 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극값 2를 갖는다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $g'(-x)=g'(x)$이다.

$\int_{-1}^{1}\frac{xf'(x)}{f(x)}dx$의 값은? [4점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

PICK

구하는 값에서 $\frac{f'(x)}{f(x)}$는 $\ln|f(x)|$의 도함수임에 유의하자. 문제에서 구하라고 하는 값이 단순히 상수가 아니라 이와 같은 복잡한 함수 형태일 때는 조금 더 간단한 형태로 바꿔서 문제를 풀어야 한다. 다음 정보도 꼭 확인하자.

$f(x)$가 우함수일 때,

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx,\quad \int_{-a}^{a}xf(x)dx=0$$

$f(x)$가 기함수일 때,

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0,\quad \int_{-a}^{a}xf(x)dx=2\int_0^a xf(x)dx$$

005 [2020학년도 7월 가형 21번]

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2+3}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 함수 $h(x)$ 를

$$h(x)=f(x)-g(x)\ (0<x<4)$$

라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $h(1)=0$

ㄴ. 두 양수 a, $b\ (a<b<4)$ 에 대하여 $\displaystyle\int_a^b h(x)dx$ 의 값이 최대일 때, $b-a=2$ 이다.

ㄷ. $h(x)$ 의 도함수 $h'(x)$ 의 최댓값은 $\dfrac{7}{6}$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

PICK

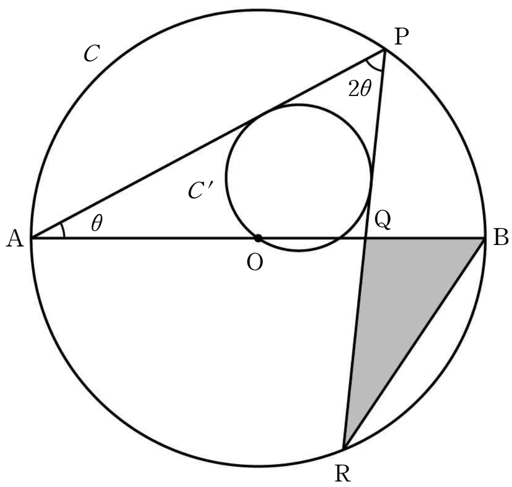
이 문제를 보고 역함수를 직접 구할 생각을 했다면 지금 거울을 보고 스스로에게 사죄하자. 이 문제의 ㄱ을 제외한 나머지 선지는 기하학적인 특징을 이용하여 해결되는 문제이다.

006 [2020학년도 7월 가형 29번]

그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 원 C가 있다. 원 C 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 할 때, 선분 AB 위에 $\angle\mathrm{APQ}=2\theta$를 만족시키는 점을 Q라 하자. 직선 PQ가 원 C와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R라 할 때, 중심이 삼각형 AQP의 내부에 있고 두 선분 PA, PR에 동시에 접하는 원을 C'이라 하자. 원 C'이 점 O를 지날 때, 원 C'의 반지름의 길이를 $r(\theta)$, 삼각형 BQR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{r(\theta)}=a$ 일 때, $45a$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$) [4점]



PICK

- 2θ를 보면 θ 2개로 나누고 싶은 건 일종의 본능이다.
- 사람들은 은근히 사인법칙이 얼마나 힘순찐인지 모른다.
  생각해보자. 한 변의 길이와 각들만 알고 있으면 나머지 변의 길이를 자유자재로 구할 수 있다. 코사인법칙에 비해 이 얼마나 효율적인 공식이 있겠는가. 제발 좀 써!!

007 [2020학년도 7월 가형 30번]

함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$와 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=e^{af(x)}+bf(x)\ (0<x<12)$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, $\cdots$, α_m(m은 자연수)라 할 때, m 이하의 자연수 n에 대하여 α_n은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) n이 홀수일 때, $\alpha_n=n$이다.
> (나) n이 짝수일 때, $g(\alpha_n)=0$이다.

함수 $g(x)$가 서로 다른 두 개의 극댓값을 갖고 그 합이 e^3+e^{-3}일 때, $m\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}g(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=pe^3+qe$이다. $p-q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 정수이다.) [4점]

PICK

7월 교육청 출제위원들은 전체적으로 이상한 취향을 가지고 있는 것 같다. 항상 7월만 더럽게 어려운 문제를 하나씩 섞어놓으니.. 미분하고, 조건 찾고, 그래프 그리고, 어떻게 하다보면 풀리는 문제이다. 많은 조건들을 해석하고, 중간에 놓지만 않으면 분명히 풀리는 문제이다.

008 [2021학년도 9월 미적분 18번]

함수

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x\le 0) \\ \{\ln(1+x^4)\}^{10} & (x>0) \end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)\,dt$$

라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

> ㄱ. $x\le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=0$이다.
> ㄴ. $g(1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$
> ㄷ. $g(a)\ge 1$인 실수 a가 존재한다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

PICK

정적분은 대수적으로도 판단할 수 있지만, 기하적으로도 판단할 수 있는 정말 좋은 친구이다. 그래프의 대칭성이 있다면 정적분은 특히나 더 큰 힘을 발휘한다. 이 문제의 경우도 그러한 대칭성이 문제의 Key가 되어 줄 것이다.
또한, 적분의 크기 관계 비교는 $f(x)<g(x)$이면

$$\int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx$$

임을 활용하면 간단하다. **정적분은 항상 넓이로 생각해보자.**

009 [2021학년도 9월 미적분 20번]

함수 $f(x)=\sin(\pi\sqrt{x})$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt \quad (x \geq 0)$$

이 $x=a$에서 극대인 모든 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $k^2 < a_6 < (k+1)^2$인 자연수 k의 값은? [4점]

① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

PICK

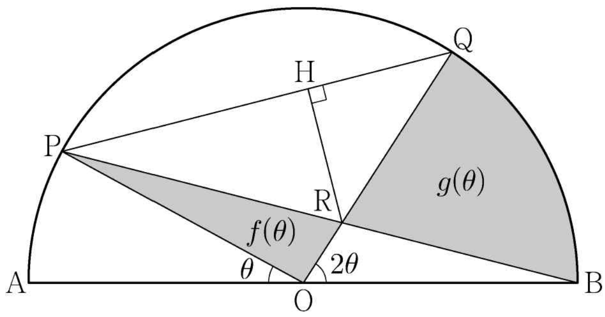
<너무 실수하기 좋은 식>

$$g(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt$$

그대로 미분 때리면 큰일난다. x가 Integral 안에 있으면 미분할 수 없다. $x-t=u$로 치환해서 적분 안에 t만 존재하는 식들의 좋바으로 고쳐보자.

010 [2021학년도 9월 미적분 28번]

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle \mathrm{POA}=\theta$, $\angle \mathrm{QOB}=2\theta$가 되도록 잡는다. 두 선분 PB, OQ의 교점을 R라 하고, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 POR의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 RQ, RB와 호 QB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{\mathrm{RH}}}=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



PICK

굳이 넓이 합을 구하라고 하는 데에는 이유가 있다. 기하학적으로 분석해보라 이 말이다. 식을 있는 대로 구하려고 하지 말고, 조금 더 알기 쉬운 방법으로 구하는 연습을 시도해보자. 물론 그냥 f와 g를 각각 구하는 것도 하나의 방법이긴 하다.

011 [2021학년도 9월 미적분 30번]

다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
> $$-e^{-x+1} \le ax+b \le e^{x-2}$$
> 이 성립한다.

$|M \times m^3| = \dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

PICK

진짜 이 정도로 본질적인 것을 물어보는 문제는 아마 이 세상에 없을 것이다. 그만큼 실수하기도 좋은 문제이다. 어떤 값의 최댓값이나 최솟값은 항상 극단적인 경우에 생긴다는 점을 유념하자.

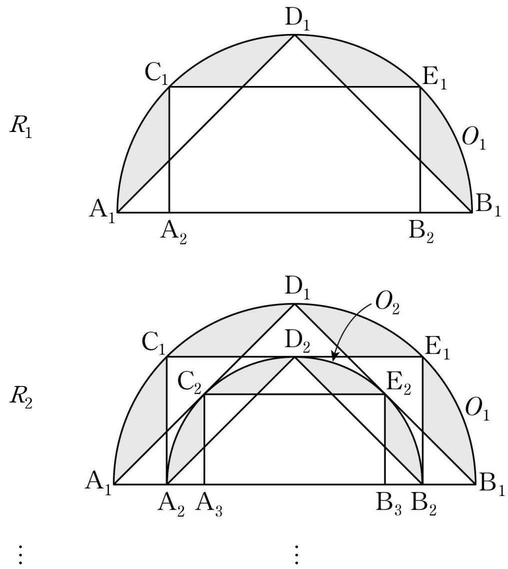
극단적인 경우라 함은 접선, 변곡선, 이중접선, 점근선 등이 해당될 것이다. 이 문제의 정답률이 상당히 낮은 데에는 그러한 극단적인 경우 중 제대로 고려하지 않은 케이스가 존재할 수 있기 때문이며, 또한 계산 자체도 난이도가 있기 때문이다. 문이과 통합 전이라 다소 어려울 수는 있겠지만 본질을 파악하면 매우 간단해지니 잘 생각해보자.

012 [2020학년도 10월 가형 18번]

그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 반원 O_1의 호 A_1B_1을 4등분하는 점을 점 A_1에서 가까운 순서대로 각각 C_1, D_1, E_1이라 하고, 두 점 C_1, E_1에서 선분 A_1B_1에 내린 수선의 발을 각각 A_2, B_2라 하자. 사각형 $C_1A_2B_2E_1$의 외부와 삼각형 $D_1A_1B_1$의 외부의 공통부분 중 반원 O_1의 내부에 있는 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 A_2B_2를 지름으로 하는 반원 O_2를 반원 O_1의 내부에 그리고, 반원 O_2의 호 A_2B_2를 4등분하는 점을 점 A_2에서 가까운 순서대로 각각 C_2, D_2, E_2라 하고, 두 점 C_2, E_2에서 선분 A_2B_2에 내린 수선의 발을 각각 A_3, B_3이라 하자. 사각형 $C_2A_3B_3E_2$의 외부와 삼각형 $D_2A_2B_2$의 외부의 공통부분 중 반원 O_2의 내부에 있는 모양의 도형에 색칠을 하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $4\pi+4\sqrt{2}-16$　② $4\pi+16\sqrt{2}-32$　③ $4\pi+8\sqrt{2}-20$　④ $2\pi+16\sqrt{2}-24$　⑤ $2\pi+8\sqrt{2}-12$

PICK

사실 할 말은 크게 없는 문제이다. 삼각형과 사각형의 한 변의 길이만 잘 구해주면 되는데, 잘 모르겠으면 그냥 x로 두고 적당히 방정식을 세워주면 된다.

013 [2020학년도 10월 가형 20번]

자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{nx}{x^n+1} & (x \neq -1) \\ -2 & (x=-1) \end{cases}$$

일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $n=3$일 때, 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$에서 증가한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이 되도록 하는 n에 대하여 방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. 구간 $(-1, \infty)$에서 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖도록 하는 10 이하의 모든 자연수 n의 값의 합은 24이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

PICK

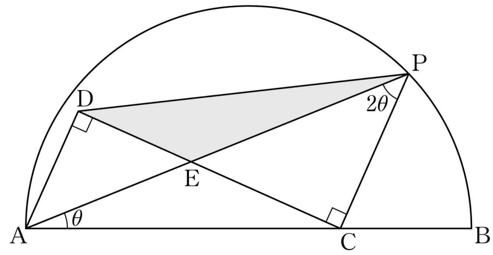
- ㄱㄴㄷ 문제에서 항상 유의할 점은 ㄱ이 ㄴ으로 연계되고, ㄴ이 ㄷ으로 연계될 가능성이 높다는 것이다. 연계된다는 말이 완전히 같은 원리로 풀린다는 말은 아니겠지만, 적어도 비슷한 개념으로 해결될 것임을 암시한다.
- 몫의 미분법을 쓴 후 도함수의 부호를 판단할 때 분모는 신경 쓸 필요가 없다. 어차피 제곱 형태로 나오기 때문이다.

014 [2020학년도 10월 가형 21번]

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P와 선분 AB 위의 점 C에 대하여 $\angle\mathrm{PAC}=\theta$일 때, $\angle\mathrm{APC}=2\theta$이다.

$\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{PCD}=\dfrac{\pi}{2}$인 점 D에 대하여 두 선분 AP와 CD가 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 DEP의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta}$의 값은?

(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$) [4점]



① $\dfrac{5}{9}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ $\dfrac{7}{9}$ ④ $\dfrac{8}{9}$ ⑤ 1

PICK

- 삼각형에서 각의 크기만 알고 있다면 각 변의 길이 구하는 건 일도 아니다. 사인 법칙은 이럴 때 쓰라고 있다는 점을 기억해 두자.
- 삼각형 등에서 각도는 구할 수 있는 만큼만 구하자. 각도를 구할 수 없는 경우도 있다. 이 경우는 길이를 구해야 한다.

015 [2020학년도 10월 가형 30번]

최고차항의 계수가 $k\,(k>0)$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=f(-2)$, $f(0)\neq 0$이다. 함수

$$g(x)=(ax+b)e^{f(x)}\quad (a<0)$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> **(가)** 모든 실수 x에 대하여
> $$(x+1)\{g(x)-mx-m\}\le 0$$
> 을 만족시키는 실수 m의 최솟값은 -2이다.
>
> **(나)** $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx=\int_{-2f(0)}^{1} g(x)dx=\frac{e-e^4}{k}$

$f(ab)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

PICK

- 주어진 식이 직관적으로 잘 안 와닿으면 그래프를 그려보면서 해석해보자. 실수 m의 최솟값이 나타내는 의미가 무엇일지 잘 생각해볼 필요가 있다.
- 치환적분은 잘 활용해야 한다. 특히 이 문제의 경우 치환적분 $\displaystyle\int f'(x)e^{f(x)}dx$의 아이디어를 떠올리지 못하면 풀기 쉽지 않을 것이다.

016 [2021학년도 수능 가형 18번]

실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}$$

라 하자. $(f\circ f)(1)=\dfrac{5}{4}$가 되도록 하는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① $\dfrac{11}{2}$ ② $\dfrac{13}{2}$ ③ $\dfrac{15}{2}$ ④ $\dfrac{17}{2}$ ⑤ $\dfrac{19}{2}$

PICK

범위만 잘 설정해두면 매우 쉬운 문제이다. a^x 꼴의 극한 문제에서는 a의 값을

$a>1$, $a=1$, $-1<a<1$, $a=-1$, $a<-1$

일 때로 나눠야 한다는 사실을 유의하자.

017 [2021학년도 수능 가형 20번]

함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0, 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은? [4점]

> 함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
> $$\int_{-1}^{1} h(x)dx=2,\ \int_{-1}^{1} xh(x)dx=-\frac{1}{32}$$
> 이다.

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

PICK

- 기억해두자. 평가원은 절대 쓸데없는 계산을 시키지 않는다. 뭔가 간단하게 바꿀 수 있거나, 식이 소거되기 때문에 복잡해보이는 식을 출제하는 것이다.
- 식의 값이 함수의 개형을 특정짓는 경우도 있다. 이 문제의 경우가 그런데, 잘 기억해두도록 하자.

018 [2021학년도 수능 가형 28번]

두 상수 $a, b(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x)=(x-a)(x-b)^2$

이라 하자. 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

> **(가)** 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> **(나)** $h'(3)=2$

PICK

미분 가능하지 않아 보이는 게 미분 가능하다고 하면 그냥 미분되는 척 하면 된다. 예를 들어, $(x-1)|h(x)|$이 미분 가능하면 도함수를 $|h(x)|+(x-1)\{|h(x)|\}'$로 두는 것이다.

019 **[2021학년도 수능 가형 30번]**

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)=f(\sin^2 \pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이 때 극댓값이 모두 동일하다.
(나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2)=a+b\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

PICK

최댓값이나 최솟값을 파악할 때는 무리하게 미분하면서 찾으려고 하지 않아도 된다. $\sin^2 \pi x$의 값이 0부터 1까지의 값만을 갖는다는 점을 생각하면 된다.
함수에 따라 극대/극소점의 개수의 한계선이 있을 수 있다. 개수 조건은 은근히 극단적인 케이스를 의미하는 경우가 많으므로 이 점에 유의하여 조건을 해석해보자.

정답 및 해설

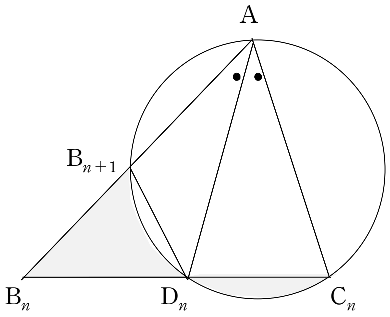
001. ③

① 그림의 재해석

그림 R_n에서 $\angle B_{n+1}AD_n = \angle D_nAC_n$이므로

$$\overline{B_{n+1}D_n} = \overline{D_nC_n}$$

이다. 이때, 두 선분 B_nB_{n+1}, B_nD_n과 호 $B_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 부분과 선분 C_nD_n과 호 C_nD_n으로 둘러싸인 부분의 넓이의 합은 삼각형 $B_nD_nB_{n+1}$의 넓이와 같다.



R_n

② R_1의 넓이 구하기

그림 R_1의 삼각형 AB_1C_1에서 제2코사인법칙에 의하여

$$\therefore \overline{B_1C_1} = \sqrt{3^2 + 2^2 - 2\times 3\times 2\times \cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{7}$$

또한, 삼각형 AB_nC_n에서 각의 이등분선 정리에 의해

$$\overline{AB_1} : \overline{AC_1} = \overline{B_1D_1} : \overline{D_1C_1} = 3:2$$

$$\overline{B_1D_1} = \frac{3\sqrt{7}}{5},\ \overline{D_1C_1} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$$

또한, 따라서, $\angle B_2D_1B_1 = \angle B_2AC_1 = \frac{\pi}{3}$이므로

$$S_1 = \frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{7}}{5}\times\frac{2\sqrt{7}}{5}\times\sin\frac{\pi}{3} = \frac{21\sqrt{3}}{50}$$

③ 공비 구하기

또한, 삼각형 $B_1D_1B_2$에서 제2코사인법칙에 의하여

$$\overline{B_1B_2}^2 = \left(\frac{3\sqrt{7}}{5}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2 - 2\times\frac{3\sqrt{7}}{5}\times\frac{2\sqrt{7}}{5}\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{91}{25} - \frac{42}{25} = \frac{49}{25}$$

이므로 $\overline{B_1B_2} = \frac{7}{5}$이고 $\overline{AB_2} = 3 - \frac{7}{5} = \frac{8}{5}$ 이므로

$$\overline{AB_1} : \overline{AB_2} = 3 : \frac{8}{5} = 1 : \frac{8}{15}$$

이때, 넓이의 비는 $1 : \frac{64}{225}$이므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{21\sqrt{3}}{50}}{1 - \frac{64}{225}} = \frac{27\sqrt{3}}{46}$$

002. 15

$$f(\theta) - g(\theta) = \Delta CDE - \Delta MEH = \Delta CMD - \Delta CMH$$

에서

$$\overline{CM} = 1,\ \overline{DM} = \overline{MH} = \sin\theta$$

이고 삼각형 ABM이 이등변삼각형이므로,

$$\angle AMC = \angle ABC + \angle BAM = \theta + \left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = \frac{\pi+\theta}{2}$$

에서

$$\Delta CMD = \frac{1}{2}\overline{CM}\,\overline{MD}\sin(\angle CMD)$$

$$= \frac{1}{2}\times 1\times\sin\theta\times\sin\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right) = \frac{\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}}{2}$$

이고,

$$\Delta CMH = \frac{1}{2}\overline{CM}\,\overline{MH}\sin(\angle CMH)$$

$$= \frac{1}{2}\times 1\times\sin\theta\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{\sin\theta\cos\theta}{2}$$

이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{\sin\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\right)}{\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{\theta}{2}\left\{\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right\}}{\theta^3}$$

$$= \frac{3}{16}$$

이고 $80a = 15$이다.

003. 331

$f(x)$가 미분 가능한 x에 대하여

$$g(x) = \lim_{h\to 0+}\left|\frac{f(2^{x+h}) - f(2^x)}{h}\right|$$

$$= \left|\lim_{h\to 0+}\frac{f(2^{x+h}) - f(2^x)}{h}\right| = \left|2^x f'(2^x)\times\ln 2\right|$$

이고 연속이다. 이때, $g(x)$가 $x=a$에서 불연속이려면

$$\lim_{x\to a+}\left|2^x f'(2^x)\right| \neq \lim_{x\to a-}\left|2^x f'(2^x)\right|$$

인데, 이를 만족하는 x 중 $(-5, 5)$에 속한 것은

$$2^x = 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ \cdots,\ 31$$

이므로 $n = 21$이고,

$2^x = 1$일 때, $a_1 = 0$이고

$$g(a_1) = \lim_{h\to 0+}\left|\frac{f(2^h) - f(1)}{h}\right| = 0$$

$2^x=2$일 때, $a_2=1$이고

$$g(a_2)=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{f(2^{1+h})-f(2^1)}{h}\right| =\lim_{h\to 0+}\left|\ln 2\times 2^1\times f'(2+h)\right|=4\ln 2$$

$2^x=4$일 때, $a_3=2$이고

$$g(a_3)=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{f(2^{2+h})-f(2^2)}{h}\right|=0$$

$2^x=5$일 때, $a_4=\log_2 5$이고

$$g(a_4)=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{f(2^{\log_2 5+h})-f(2^{\log_2 5})}{h}\right| =\lim_{h\to 0+}\left|\ln 2\times 2^{\log_2 5}\times f'(5+h)\right|=10\ln 2$$

$\cdots$

같은 방식으로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}=\frac{4\ln 2+10\ln 2+16\ln 2+\cdots+58\ln 2}{\ln 2}=310$$

이므로

$$n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}=21+310=331$$

004. ①

$\int_{-1}^{1}\frac{xf'(x)}{f(x)}dx$ 에서 $x=u$, $\frac{f'(x)}{f(x)}=v'$로 두고 부분적분하면

$$\int_{-1}^{1}\frac{xf'(x)}{f(x)}dx=[x\ln f(x)]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\ln f(x)dx \quad \cdots ㉠$$

에서

$$g'(-x)=g'(x)$$

이고 양변을 부정적분하면

$$-g(-x)=g(x)$$

이다. 조건 (가)에 의해 $g'(1)=0$, $g(1)=(2)$이므로

$$\int_{-1}^{1}\ln f(x)dx=g(1)-g(-1)=2g(1)=4$$

$$[x\ln f(x)]_{-1}^{1}=\ln f(1)+\ln f(-1) =g'(1)+g'(-1)=2g'(1)=0$$

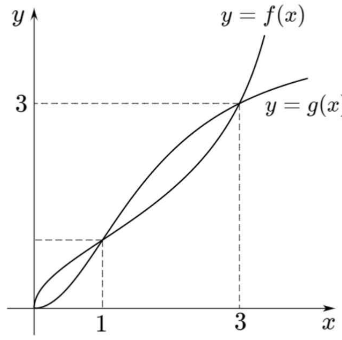
이다. 따라서

$$㉠=0-4=-4$$

005. ②

ㄱ. $f(1)=g(1)=0$이므로 $h(1)=0$ (참)

ㄴ. $0<x<4$에서 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같이 그려진다.



따라서 $\int_a^b h(x)dx$ 이 최대려면 $f(x)\ge g(x)$인 부분을 적분해야 하므로 $a=1$, $b=3$일 때 최댓값을 가진다.

따라서 $b-a=2$이다. (참)

ㄷ. $f'(x)=\frac{24x}{(x^2+3)^2}$, $f''(x)=\frac{-72(x-1)(x+1)}{(x^2+3)^3}$

이므로 $f'(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 가지고,

$f(1)=1$이므로 반대로 $g'(x)=1$이므로 $x=1$에서 극솟값을 가진다.

따라서 $h'(x)$의 최댓값은 $x=1$일 때,

$$h'(1)=f'(1)-\frac{1}{f'(g(1))} =f'(1)-\frac{1}{f'(1)}=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$$

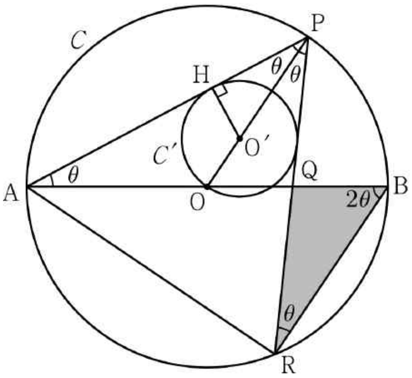
(거짓)

문제의 개연성

$x=1$일 때 $f'(x)$가 최대임을 어떻게 바로 눈치채는가? $f'(x)-g'(x)$의 식을 직접 구하는 것은 너무 무리한 행위이다. 그렇다면 기하적 특성이나 함수 자체의 특성을 이용해서 답을 구할 수 밖에 없다. 'ㄴ' 보기에서 그래프를 그려보면 '혹시나 $x=1$에서..?' 싶은 생각이 들 수 있다. 이때, 혹시 모르니까 도함수를 구해보니 우연히 맞게 된 것이다. 사실 이 점 외에 다른 점에서 최대를 갖는다면 식만 복잡해지고 문제의 개연성이 없어진다.

006. 13

원 C'의 중심을 O′, 원 C'과 선분 PA가 만나는 점을 H라 하자.



삼각형 OPA는 이등변삼각형이므로 $\angle \mathrm{OPA}=\theta$

$r(\theta)=\overline{\mathrm{O'O}}=\overline{\mathrm{O'H}}$이므로 $\overline{\mathrm{PO'}}=2-r(\theta)$

삼각형 O′PH에서 $\angle \mathrm{PHO'}=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{O'H}}}{\overline{\mathrm{PO'}}}=\frac{r(\theta)}{2-r(\theta)}$$

$$r(\theta)=\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}\to 2\theta \ \cdots \ ㉠$$

$\angle \mathrm{PRB}$는 호 BP의 원주각이므로 $\angle \mathrm{PRB}=\theta$

$\angle \mathrm{RBA}$는 호 AR의 원주각이므로 $\angle \mathrm{RBA}=2\theta$

선분 AB가 원 C의 지름이므로 삼각형 ARB는 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{RB}}=4\cos 2\theta$이다.

삼각형 QRB에서 사인법칙에 의하여

$$S(\theta)=\frac{\overline{\mathrm{RB}}^2\sin\theta\sin 2\theta}{2\sin(\pi-3\theta)}$$
$$=\frac{16\cos^2 2\theta\sin\theta\sin 2\theta}{2\sin 3\theta}\to\frac{16}{3}\theta \ \cdots \ ㉡$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{r(\theta)}=\frac{8}{3}$$

따라서 $a=\dfrac{8}{3}$이므로 $45a=120$

근사의 요령

> 구하는 극한이 덧셈이나 뺄셈 등으로 연결되어 있다면, 위 문제처럼 ㉠이나 ㉡ 단계처럼 각 함수의 극한을 그대로 대입해서 쓸 수 없다. 덧셈이나 뺄셈 과정에서 일부 항이 없어질 수 있기 때문이다. 위와 같은 풀이를 쓸 수 있는 것은 식이 나눗셈이나 곱셈으로 연결되어 있거나, 더하거나 빼더라도 추가적으로 생기고 없어지는 항이 없는 경우이다.

007. ⑤

$$g'(x)=f'(x)\{ae^{af(x)}+b\}$$

이고 $g'(x)=0$에서

$$f'(x)=0 \text{ 또는 } ae^{af(x)}+b=0$$

(ⅰ) $f'(x)=0$인 경우

$$f'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x=0$$

$x=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11$

(ⅱ) $ae^{af(x)}+b=0$인 경우

$e^{af(x)}=-\dfrac{b}{a}$를 만족시키는 x의 값이 존재해야 하므로 $\dfrac{b}{a}<0$이다.

조건 (나)와 (ⅰ)에 의하여 n이 짝수일 때 α_n은 방정식 $ae^{af(x)}+b=0$의 실근이다.

$ae^{af(\alpha_n)}+b=0 \ \cdots \ ㉠$

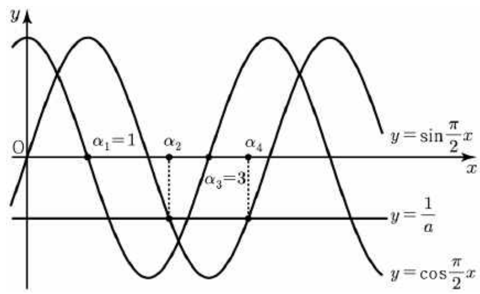
조건 (나)에 의하여 n이 짝수일 때

$e^{af(\alpha_n)}+bf(\alpha_n)=0 \ \cdots \ ㉡$

㉠, ㉡에서 $abf(\alpha_n)-b=0$이고 $f(\alpha_n)=\dfrac{1}{a}$

n이 짝수일 때, $f(\alpha_n)=\dfrac{1}{a}$을 만족시키려면 $-1<\dfrac{1}{a}<0$

그러므로 $a<-1,\ b>0$



열린 구간 $(0,\ 4)$에서 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극소인 서로 다른 α의 개수는 2이다. 함수 $g(x)$의 열린 구간 $(0,\ 4)$에서의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	α_1	$\cdots$	α_2	$\cdots$	α_3	$\cdots$	α_4	$\cdots$	4
$g'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
$g(x)$		↗	e^a+b	↘	0	↗	$e^{-a}-b$	↘	0	↗	

함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=4$에서 극값을 갖지 않고 열린구간 $(0,\ 12)$에서 $g(x+4)=g(x)$를 만족한다.

열린 구간 $(0,\ 12)$에서 함수 $g(x)$가 극댓값을 갖도록 하는 서로 다른 x의 개수와 극솟값을 갖도록 하는 서로 다른 x의 개수는 각각 6이므로 $m=12$

함수 $g(x)$는 열린 구간 $(0,\ 4)$에서 $x=\alpha_1$과 $x=\alpha_3$일때 각각 극댓값 $e^a+b,\ e^{-a}-b$를 갖는다.

함수 $g(x)$의 서로 다른 두 극댓값의 합이 e^3+e^{-3}이므로

$$(e^a+b)+(e^{-a}-b)=e^a+e^{-a}=e^3+e^{-3}$$

a는 음수이므로 $a=-3$

$f(\alpha_2)=f(\alpha_4)=-\dfrac{1}{3}$이고 ㉡에 대입하면

$g(\alpha_2)=e^{-3f(\alpha_2)}+bf(\alpha_2)=e-\dfrac{1}{3}b=0$에서 $b=3e$

$$m\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4} g(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$=12\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}\left\{e^{-3\sin\frac{\pi}{2}x}+3e\sin\frac{\pi}{2}x\right\}\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$\sin\dfrac{\pi}{2}x=t$로 치환하면 $\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}x=\dfrac{dt}{dx}$이고

$\sin\dfrac{\pi}{2}\alpha_3=\sin\dfrac{3}{2}\pi=-1$, $\sin\dfrac{\pi}{2}\alpha_4=-\dfrac{1}{3}$이다.

$$12\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}\left\{e^{-3\sin\frac{\pi}{2}x}+3e\sin\frac{\pi}{2}x\right\}\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$=24\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}(e^{-3t}+3et)\,dt$$

$$=24\left[-\frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{3}{2}et^2\right]_{-1}^{-\frac{1}{3}}$$

$$=8e^3-40e$$

따라서 $p=8$, $q=-40$이므로 $p-q=48$

008. ②

ㄱ. $x\le 0$에서 $f(x)=0$이므로 $f(x)f(1-x)=0$이다.

따라서 $\displaystyle\int_0^x f(t)f(1-t)\,dt=0$이다. (참)

ㄴ. 주어진 식을 다음과 같이 분리하자.

$$\int_0^1 f(t)f(1-t)\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)f(1-t)\,dt$$

$1-t=u$로 치환적분하자. $-dt=du$이므로

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^0 -f(1-u)f(u)\,du$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)\,dt+\int_0^{\frac{1}{2}} f(1-u)f(u)\,du$$

$$=2g\left(\frac{1}{2}\right)$$

(참)

ㄷ. $g'(x)=f(x)f(1-x)$인데,

$0<x<1$에서 $g'(x)>0$이고,

$x\le 0$, $x\ge 1$에서 $g'(x)=0$이므로

$g(a)$는 열린구간 $(0,\ 1)$에서만 증가함수이다.

가장 큰 값을 가질 때인 $g(1)$의 값을 생각해보자.

열린구간 $(0,\ 1)$에서 $f(t)<1$, $f(1-t)<1$이므로

$f(t)f(1-t)<1$이다.

다시 말해,

$$\int_0^1 f(t)f(1-t)\,dt<\int_0^1 1\,dt=1$$

이므로 $g(a)\ge 1$인 a가 존재할 수 없다. (거짓)

대칭성의 활용

> 함수 $f(x)f(1-x)$은 함수 $f(x)$의 모양이 어떤 것이든 $x=\dfrac{1}{2}$에 대해 대칭일 수밖에 없다.
>
> 대칭함수는 대칭축을 기준으로 앞쪽과 뒤쪽의 모양이 완전히 똑같다. 정적분이 결국 넓이 구하기라는 점에 주목하면 보기 ㄴ은 직관적으로 맞다는 것을 알 수 있다.

009. ②

$x-t=u$로 치환하면

$$g(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt=\int_x^0 -(x-u)f(u)\,du$$
$$=x\int_0^x f(u)\,du-\int_0^x uf(u)\,du$$

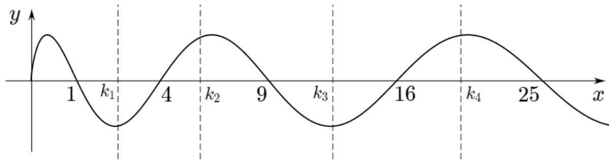
이므로

$$g'(x)=\int_0^x f(u)\,du$$

이다. $g'(x)$가 $x=a$에서 극대려면

$$\lim_{x\to a-}g'(x)>0,\ \lim_{x\to a+}g'(x)<0\ \cdots\ ㉠$$

이어야 한다. 다음은 $y=f(x)$의 그래프이다.



우선 $\displaystyle\int_0^x f(u)\,du=0$이 되는 지점 $x=k_1,\ k_2,\ k_3,\ \cdots$를 그래프 위에 나타내면 다음과 같다.

이 중 ㉠을 만족시키는 것은 $x=k_1,\ k_3,\ k_5,\ \cdots$일 때이다.

$$i^2<k_i<(i+1)^2$$

인데, $a_6=k_{11}$이므로 $11^2<a_6<12^2$이고 $k=11$이다.

010. 23

$f(\theta)+g(\theta)=\Delta\mathrm{OBP}+(\text{부채꼴 OBQ})-2\times\Delta\mathrm{OBR}$

이다.

$$\Delta\mathrm{OBP}=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin(\pi-\theta)=\frac{\sin\theta}{2}$$

$$(\text{부채꼴 OBQ})=\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta=\theta$$

$$\Delta\mathrm{OBQ}=\frac{1^2\times\sin2\theta\times\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\left(\pi-2\theta-\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\sin2\theta\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{5}{2}\theta}$$

$$f(\theta)+g(\theta)\to\frac{\theta}{2}+\theta-2\times\frac{\theta}{5}=\frac{11}{10}\theta$$

한편, $\angle \mathrm{PQR}=\frac{3}{2}\theta$이므로 $\overline{\mathrm{RH}}=\overline{\mathrm{QR}}\sin\frac{3\theta}{2}$이고,

$\overline{\mathrm{QR}}=1-\overline{\mathrm{OR}}$인데, 삼각형 OBR에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\sin(\angle \mathrm{ORB})}=\frac{\overline{\mathrm{OR}}}{\sin(\angle \mathrm{RBO})}$$

이므로

$$\overline{\mathrm{OB}}=1,\ \sin(\angle \mathrm{ORB})=\pi-\frac{5}{2}\theta,\ \sin(\mathrm{RBO})=\frac{\theta}{2}$$

를 대입하면 $\overline{\mathrm{OR}}=\frac{\sin(\theta/2)}{\sin(5\theta/2)}$이므로

$$\overline{\mathrm{QR}}=\frac{\sin(5\theta/2)-\sin(\theta/2)}{\sin(5\theta/2)}\to\frac{4}{5}$$

이고, 따라서

$$\overline{\mathrm{RH}}=\overline{\mathrm{QR}}\sin\frac{3\theta}{2}\to\frac{4}{5}\times\frac{3\theta}{2}=\frac{6}{5}\theta$$

이고,

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{\mathrm{RH}}}=\frac{11\theta/10}{6\theta/5}=\frac{11}{12}$$

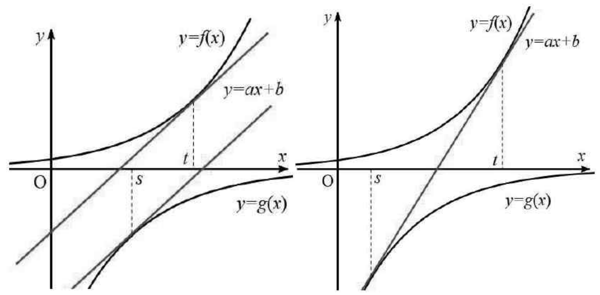
이므로 $p+q=23$

기출 연계의 중요성

이 문제와 **002**번을 비교해보자. 같은 평가원 문제이고, 심지어 같은 년도 6월 문제이다. 이는 평가원에서 기출 연계를 어떻게 하는지 보여주는 단적인 예시라 볼 수 있다.

011. 15

$f(x)=e^{x-2}$, $g(x)=-e^{-x+1}$라고 할 때, $ax+b$가 최댓값 또는 최솟값을 가질 수 있는 경우는 다음과 같다.



I) 왼쪽 그림의 경우

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은 $f'(x)=e^{x-2}$이므로

$y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}$

$y=e^{t-2}x+(1-t)e^{t-2}$

$ab=(1-t)e^{2t-4}$ ⋯ ㉠

이다. ㉠을 t에 대해 미분하면 $(1-2t)e^{2t-4}$이므로, $t=\frac{1}{2}$에서 극값을 가진다.

$t=\frac{1}{2}$일 때, $ab=\frac{e^{-3}}{2}$이다.

또, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(s,\ g(s))$에서의 접선의 방정식은 $g'(x)=e^{-x+1}$이므로

$y=e^{-s+1}(x-s)-e^{-s+1}$

$y=e^{-s+1}x+(-s-1)e^{-s+1}$

$ab=(-s-1)e^{-2s+2}$ ⋯ ㉡

s에 대해 미분하면 $(2s-1)e^{-2s+2}$이므로 마찬가지로 $s=\frac{1}{2}$일 때 극값을 가진다.

$s=\frac{1}{2}$일 때, $ab=-\frac{3}{2}e$이다.

II) 오른쪽 그림의 경우

㉠과 ㉡에서 접선의 기울기가 같으면

$e^{t-2}=e^{-s+1}$, $t-2=-s+1$

$s=-t+3$ ⋯ ㉢

$f(t)-g(s)=(2t-3)e^{t-2}$

$t=\frac{5}{2}$일 때, ㉠(또는 ㉡)에 대입하면 $ab=-\frac{3}{2}e$이다.

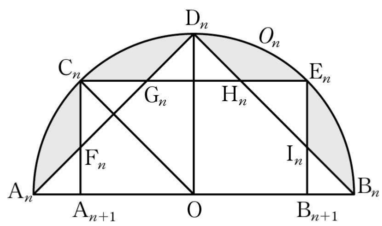
구한 값들 중 최댓값은 $\frac{e^{-3}}{2}$, 최솟값은 $-\frac{3}{2}e$이므로

$$|M\times m^3|=\left|\frac{e^{-3}}{2}\times\left(-\frac{3}{2}e\right)^3\right|=\frac{27}{16}$$

이므로 $p+q=16+27=43$

012. ②

선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 중점을 O, 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n$이 두 선분 $\mathrm{C}_n\mathrm{A}_{n+1}$, $\mathrm{C}_n\mathrm{E}_n$과 만나는 점을 각각 F_n, G_n이라 하고, 선분 $\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n$이 두 선분 $\mathrm{C}_n\mathrm{E}_n$, $\mathrm{E}_n\mathrm{B}_{n+1}$과 만나는 점을 각각 H_n, I_n이라 하자.



반원 O_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하고, n번째 색칠되는  모양의 도형의 넓이를 a_n이라 하자.

두 점 C_n, D_n이 호 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 4등분점이므로

$\angle \mathrm{C}_n\mathrm{OA}_{n+1}=45°$, $\angle \mathrm{A}_n\mathrm{OD}_n=90°$, $\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{A}_n}=\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{B}_n}$

$\angle \mathrm{C}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{O}=90°$ 이므로 $\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n}=\frac{r_n}{\sqrt{2}}$

삼각형 $D_nG_nH_n$ 은 $\overline{D_nG_n}=\overline{D_nH_n}$ 인 직각삼각형이고,

$$\overline{D_nG_n}^2=2(\overline{OD_n}-\overline{A_{n+1}C_n})^2=2\left(r_n-\frac{r_n}{\sqrt{2}}\right)^2=(\sqrt{2}-1)^2{r_n}^2$$

$$\overline{D_nG_n}=(\sqrt{2}-1)r_n$$

$$\Delta D_nG_nH_n=2\times\Delta A_nA_{n+1}F_n$$

두 삼각형 $A_nA_{n+1}F_n$, $B_nB_{n+1}I_n$ 이 합동이므로

$$a_n=(\text{반원 } O_n)-\square C_nA_{n+1}B_{n+1}E_n-2\times\triangle D_nG_nH_n$$
$$=\frac{1}{2}\pi{r_n}^2-\overline{A_{n+1}B_{n+1}}\times\overline{A_{n+1}C_n}-\overline{D_nG_n}^2$$
$$=\frac{1}{2}\pi{r_n}^2-\frac{2r_n}{\sqrt{2}}\times\frac{r_n}{\sqrt{2}}-(\sqrt{2}-1)^2{r_n}^2$$
$$=\left(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-4\right){r_n}^2$$

$r_{n+1}=\frac{1}{2}\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=\overline{A_{n+1}C_n}=\frac{r_n}{\sqrt{2}}$ 이므로

$$a_{n+1}=\left(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-4\right)r_{n+1}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-4\right){r_n}^2$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2\pi+8\sqrt{2}-16$ 이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{2\pi+8\sqrt{2}-16}{1-\frac{1}{2}}=4\pi+16\sqrt{2}-32$$

013. ②

ㄱ. $n=3$일 때, $f'(x)=\frac{-6x^3+3}{(x^3+1)^2}$이고 $(-\infty,\ -1)$에서 $f'(x)>0$이므로 증가한다. (참)

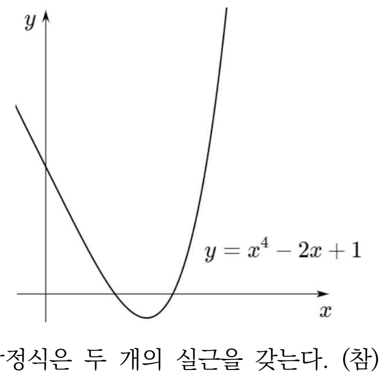
ㄴ. n이 홀수이면 $\lim_{x\to-1}\frac{nx}{x^n+1}$은 발산한다.

n이 짝수이면 $\lim_{x\to-1}\frac{nx}{x^n+1}=-\frac{n}{2}$이므로 $n=4$이다.

방정식 $\frac{4x}{x^4+1}=2$의 실근의 개수를 찾자. 정리한 식인

$$x^4-2x+1=0$$

의 해의 개수를 찾기 위해 $y=x^4-2x+1$의 그래프는 다음과 같이 나타난다.



주어진 방정식은 두 개의 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $f(x)$를 미분하면

$$f'(x)=\frac{n\{(1-n)x^n+1\}}{(x^n+1)^2}$$

인데,

I) $n=1$**이면** 극값 자체가 존재하지 않는다.

II) $n\neq1$**이면**

II-1) n**이 홀수일 때,** $x=\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$ 에서 극점이다.

x의 왼쪽에서 $f'(x)>0$이고 오른쪽에서 $f'(x)<0$이므로 이 점은 극대점이다.

II-2) n**이 짝수일 때,** $x=\pm\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$ 에서 극점이다.

$n=2$이면 $x=\pm1$에서 극값을 가지는데, 그래프를 그리면 $x=-1$에서 극소점을 가지므로 모순.

$n\neq2$이면 극점에서의 x는 -1보다는 크고, 둘 중 하나는 극소이다.

따라서 $n=4,\ 6,\ 8,\ 10$일 때 극솟값을 가지므로 이들 수의 합은 30이다. (거짓)

014. ④

$\angle ACE=90-3\theta$이므로 $\angle ACP=\pi-3\theta$이다.

삼각형 ACP에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{AP}}{\sin(\angle ACP)}=\frac{\overline{CP}}{\sin(\angle PAC)}$$

$$\overline{AP}=2\cos\theta,\ \angle ACP=\pi-3\theta$$

$$\overline{CP}=\frac{2\cos\theta}{\sin(\pi-3\theta)}\times\sin\theta=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin3\theta}\to\frac{2}{3}$$

이므로,

$$\overline{PE}=\frac{\overline{CP}}{\cos2\theta}\to\frac{2}{3}$$

이다.

한편, $\angle DAE=2\theta$이므로, $\angle DAC=2\theta+\theta=3\theta$에서

$$\overline{DE}=\overline{AD}\tan2\theta,\ \overline{AD}=\overline{AC}\cos3\theta$$

인데, 삼각형 ACP에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle APC)}=\frac{\overline{AP}}{\sin(\angle ACP)}$$

$$\overline{AC}=\frac{2\cos\theta}{\sin(\pi-3\theta)}\times\sin2\theta=\frac{2\sin2\theta\cos\theta}{\sin3\theta}\to\frac{4}{3}$$

$$\overline{DE}=\overline{AC}\cos3\theta\tan2\theta\to\frac{8}{3}\theta$$

이다. 따라서 $\angle DEP=\frac{\pi}{2}+\theta$이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PE}\times\overline{DE}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$
$$\to\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{8}{3}\theta\times1=\frac{8}{9}\theta$$

015. 25

① 조건 (가) 해석

$h(x)=g(x)-mx-m$라 하자.

$(x+1)h(x)\le 0$이므로 $x=-1$에서 $h(x)$의 부호가 바뀐다. 따라서 $h(-1)=g(-1)=0$이고, $a=b$이 된다.

또한, m이 최솟값을 가지면 $y=g(x)$가 $y=mx+m$과 접하므로 $g'(-1)=-2$이고,

$g'(-1)=ae^q=-2$ ⋯ ㉠

이 된다.

한편, 문제에서 $f(0)=f(-2)$이므로

$f(x)=k(x+1)^2+q$라고 두자.

② 조건 (나) 해석

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 g(x)dx\\
&=\int_0^1 a(x+1)e^{k(x+1)^2+q}dx\\
&=\int_{k+q}^{4k+q}\frac{a}{2k}e^t dt\ (\because t=k(x+1)^2+q\text{로 치환})\\
&=\frac{a}{2k}(e^{4k+q}-e^{k+q})\\
&=\frac{e^k-e^{4k}}{k}\ (\because ㉠)\\
&=\frac{e-e^4}{k}
\end{aligned}$$

이다. 따라서 $k=1$이다.

$$\int_{-2f(0)}^1 g(x)dx=\int_0^1 g(x)dx$$

이므로

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 g(x)dx-\int_{-2f(0)}^1 g(x)dx\\
&=\int_{-2f(0)}^0 g(x)dx\\
&=\int_{-2f(0)}^0 a(x+1)e^{(x+1)^2+q}dx\\
&=\int_{\{-2f(0)+1\}^2+q}^{q+1}\frac{a}{2}e^t dt\\
&=0
\end{aligned}$$

이고, $q+1=\{-2f(0)+1\}^2+q$이다.

$f(0)\neq 0$이므로 $f(0)=1$이다.

따라서 $q=1$이다.

㉠에 대입하면 $ae^{-1+1}=-2$, $a=-2$

따라서 $a=-2$, $b=-2$, $f(x)=x^2+2x+1$이므로

$f(ab)=f(4)=16+8+1=25$

016. ③

$f(1)=\dfrac{(a-2)+2}{3+1}=\dfrac{a}{4}$이다.

$|a|>4$이면 : $f\left(\dfrac{a}{4}\right)=\dfrac{a-2}{3}\times\dfrac{a}{4}$이므로,

방정식 $\dfrac{a(a-2)}{12}=\dfrac{5}{4}$의 해가 존재하는지 살펴보자.

정리하면 $a^2-2a-15=(a+3)(a-5)=0$이므로 $|a|>4$인 것은 $a=5$이다.

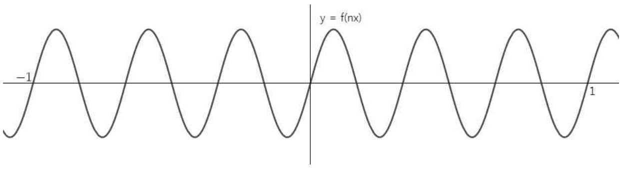
$|a|=4$이면 : $f(1)=1$이다.

$|a|<4$이면 : $f\left(\dfrac{a}{4}\right)=\dfrac{a}{2}$이므로 $\dfrac{a}{2}=\dfrac{5}{4}$이면 $a=\dfrac{5}{2}$이고, $|a|<4$를 만족시킨다.

따라서 모든 a의 값의 합은 $5+\dfrac{5}{2}=\dfrac{15}{2}$이다.

017. 14

아래 그림은 $n=3$일 때 $y=f(nx)$의 그래프이다.

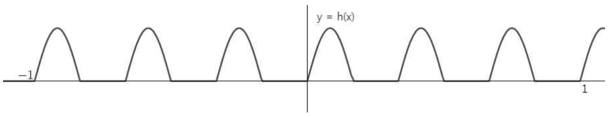


$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2n}}f(nx)dx=\int_0^{\frac{1}{2n}}\pi\sin(2n\pi x)dx=\frac{1}{n}$이므로

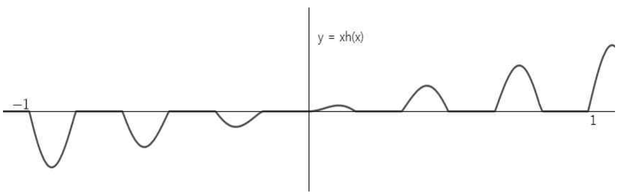
$\displaystyle\int_{-1}^1 h(x)dx=2$이려면 $h(x)=f(nx)g(x)$는

$f(nx)\ge 0$일 때 $g(x)=1$이어서 $h(x)=f(nx)$

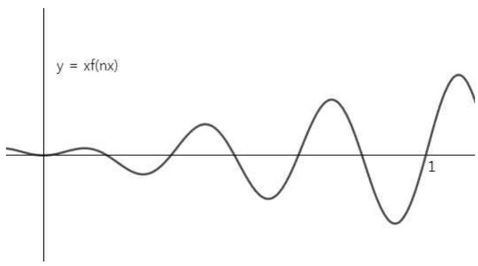
$f(nx)<0$일 때 $g(x)=0$이어서 $h(x)=0$이면 된다.



$y=xh(x)$의 그래프는 다음과 같다.



대칭성을 고려하면 -1에서 1까지 $y=xh(x)$의 정적분은 0에서 1까지 $xf(nx)$의 정적분과 같다.



즉

$$\int_{-1}^{1} xh(x)dx = \int_{0}^{1} xf(nx)dx = \int_{0}^{1} \pi x \sin 2n\pi x dx$$

$$= \left[-\pi x \times \frac{1}{2n\pi} \times \cos 2n\pi x\right]_{0}^{1} + \pi \int_{0}^{1} \cos 2n\pi x dx = -\frac{1}{2n}$$

$$= -\frac{1}{32}$$

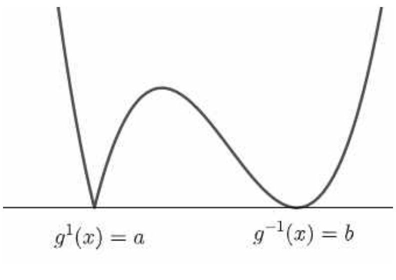
따라서 $n = 16$

ADVICE

> $y = h(x)$의 그래프를 그린 후 이것이 0에서 1까지의 정적분과 같다고 떠올리는 것은 사실 정말 쉽지 않은 아이디어이다. 참조로 기억해두도록 하자. 만약 이게 기억이 나지 않았다면 그냥 무지성으로 전부 적분이라도 해 줘야 한다. 어차피 느낌 오겠지만 항들이 소거된다.
>
> $$\int_{-1}^{-\frac{2n-1}{2n}} \pi x \sin(2n\pi x) dx$$
>
> $$= \left[-\frac{x}{2n}\cos(2n\pi x)\right]_{-1}^{-\frac{2n-1}{2n}} + \int_{-1}^{-2n-1} \frac{\cos(2n\pi x)}{2} dx$$
>
> $$= \left[-\frac{x}{2n}\cos(2n\pi x)\right]_{-1}^{-\frac{2n-1}{2n}}$$
>
> 같은 방식으로 소구간
>
> $$\left(-\frac{2n-2}{2n},\ -\frac{2n-3}{2n}\right),\ \ldots,\ \left(\frac{2n-2}{2n},\ \frac{2n-1}{2n}\right)$$
>
> 에서도 적분해서 전부 더하면
>
> $$\frac{1}{2n}\left\{\left(-1 - \frac{2n-1}{2n}\right) + \cdots + \left(\frac{2n-2}{2n} + \frac{2n-1}{2n}\right)\right\} = -\frac{1}{2n}$$
>
> 이다. 이는 아까 구했던 값과 같은 값이다.

018. 72

$g^{-1}(x)$의 치역이 모든 실수의 집합이므로 $y = |h(x)|$의 그래프는 다음과 같은 모양이다.



함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $h(1) = 0$이어야 한다.

$f(g^{-1}(1)) = 0$에서 $g^{-1}(1) = a$, $g(a) = 1$이므로 $a = 0$

따라서 $f(x) = x(x-b)^2$

$h'(x) = f'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x)$에서 $h'(3) = f'(1) = 8$

$f'(x) = (x-b)^2 + 2x(x-b)$이므로

$(1-b)^2 + 2(1-b) - 8 = b^2 - 4b - 5 = 0$에서

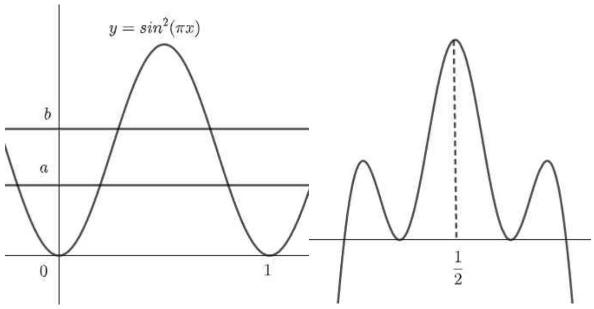
$a < b$이므로 $b = 5$

$f(x) = x(x-5)^2$

$f(8) = 72$

019. 29

$f(x)$가 극대인 x의 값을 a, 극소인 x의 값을 b라 하자. (가)가 성립하려면 $0 < a < b < 1$이어야 하고



$g(x)$의 그래프는 위의 오른쪽 그림과 비슷한 모양이다.

조건 (가), (나)를 만족하려면 $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = f(a) = f(1)$이고

$y = \frac{1}{2}$와 $f(x)$는 서로 접해야 한다. 따라서

$$f(x) = (x-a)^2(x-1) + \frac{1}{2}$$

$g(x)$의 최솟값은 $[0,1]$에서 $f(x)$의 최솟값과 같다.

$f'(x) = (x-a)(3x-a-2)$이므로

$f(0) = -a^2 + \frac{1}{2} = 0$ 이거나 $f\left(\frac{a+2}{3}\right) = 0$이다.

$f\left(\frac{a+2}{3}\right) = \frac{4(a-1)^3}{27} + \frac{1}{2} = 0$에서는 $a = -\frac{1}{2}$이므로

조건에 맞지 않고

$f(0) = -a^2 + \frac{1}{2} = 0$에서 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$이면 조건에 맞는다.

따라서

$$f(x) = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(x-1) + \frac{1}{2}$$

$$f(2) = 5 - 2\sqrt{2}$$

이므로 $a^2 + b^2 = 29$이다.

합성함수 그래프 개형의 추측

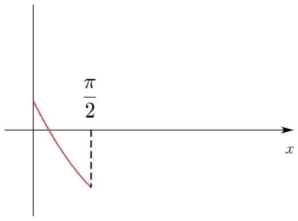
> $y = f(g(x))$의 그래프를 그린다고 가정하자. $g(x)$가 증가하는 방향에서는 $f(x)$를 순방향으로 그려주고, $g(x)$가 감소하는 방향에서는 $f(x)$도 감소하는 방향으로 그려준다. 예를 들어, $y = \sin^2 x - 4\sin x + 1$의 그래프를 그려보자.
>
> **① 속함수의 증감 체크**
>
> 속함수는 $\sin x$이다.

$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$에서는 $\sin x$가 증가한다. ... ㉠

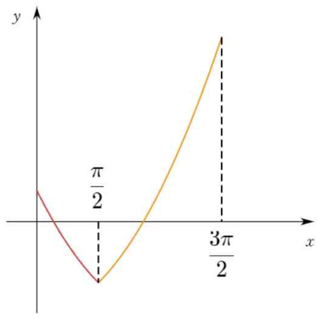
$\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$에서는 $\sin x$가 감소한다. ... ㉡

② 그래프 그리기

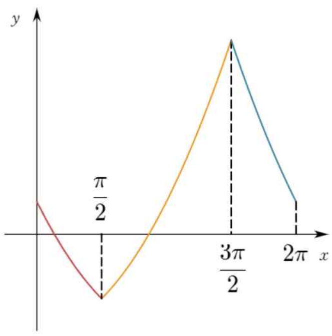
$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서는 $y=f(x)$를 순방향(x가 증가하는 방향)으로 그려준다. $\sin 0=0$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$이므로 $f(x)$의 열린구간 $(0,\ 1)$에 해당하는 모양을 그려주면 된다.



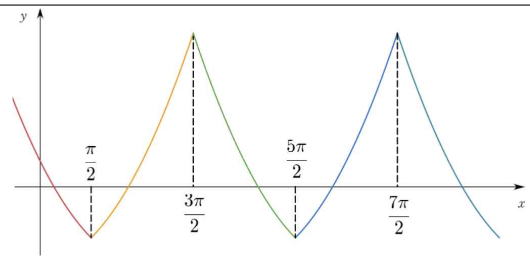
$\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$에서는 $y=f(x)$를 역방향(x가 감소하는 방향)으로 그려준다. $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\sin\frac{3\pi}{2}=-1$이므로 $f(x)$의 열린구간 $(-1,\ 1)$에 해당하는 모양을 좌우반전해서 옆에다가 붙여 그린다.



다시 $\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$에서는 $y=f(x)$를 순방향으로 그려준다. $\sin\frac{3\pi}{2}=-1$, $\sin 2\pi=0$이므로 $f(x)$의 열린구간 $(-1,\ 0)$에 해당하는 모양을 순방향으로 붙여서 그린다.



속함수는 주기가 2π인 주기함수이므로 같은 모양을 계속 반복해서 그려주면 다음과 같다.



③ 그래프 보정하기

다 그렸을 때 $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$, $2n\pi+\frac{3\pi}{2}$인 지점은 뾰족하다. 하지만 실제로는 이 함수는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 부드럽게 연결해줘야 한다. (이 뾰족한 지점들은 속함수의 미분계수가 0이 되는 지점임에 유의해야 한다.)