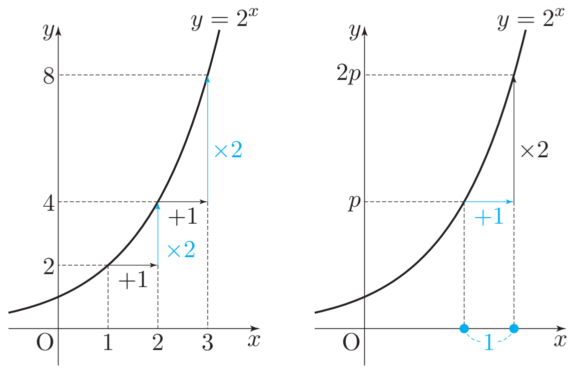
등비수열을 이용한 지수로그함수의 재해석 : 지수로그함수의 등비성

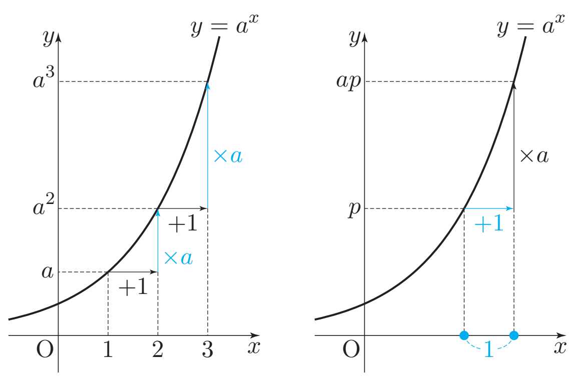
지수함수와 로그함수에서 모두 등비수열이 등장합니다. 이러한 지수로그함수의 성질을 등비성이라 부르기로 합시다.

지수함수의 등비성 : x가 $+n$되면 y가 $\times a^n$ 된다.



(a) (b)

(a)와 같이 지수함수 $y = 2^x$를 생각해봅시다. 이 함수 위의 임의의 점들은 x의 값이 $+1$되면 y의 값이 $\times 2$됩니다. 역으로, (b)와 같이 y의 값이 각각 p, $2p$이면 x값의 차이가 1임을 알 수 있습니다.

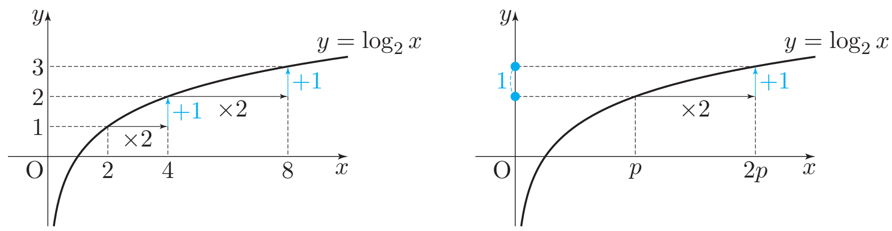


(a) (b)

마찬가지로 $y = a^x$를 생각해봅시다. 이 함수 위의 임의의 점들은 x의 값이 $+1$되면 y의 값이 $\times a$됩니다. 역으로, (b)와 같이 y의 값이 각각 p, ap이면 x값의 차이가 1임을 알 수 있습니다.

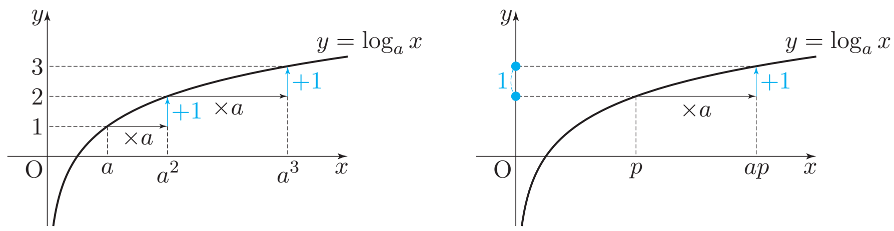
이를 일반화하면 지수함수 $y = a^x$에서는 x가 $+n$되면 y가 $\times a^n$되며, 두 y가 $\times a^n$된 관계라면 x값의 차이가 n인 관계라고 일반화할 수 있습니다.

로그함수의 등비성 : x가 $\times a^n$ 되면 y가 $+n$ 된다.



(a) (b)

로그함수는 거꾸로입니다. (a)와 같이 로그함수 $y = \log_2 x$를 생각해봅시다. 이 함수 위의 임의의 점들은 x의 값이 $\times 2$되면 y의 값이 $+1$됩니다. 역으로, (b)와 같이 y의 값의 차이가 1이면 x값이 각각 p, $2p$임을 알 수 있습니다.



(a) (b)

마찬가지로 $y = \log_a x$를 생각해봅시다. 이 함수 위의 임의의 점들은 x의 값이 $\times a$되면 y의 값이 $+1$됩니다. 역으로, (b)와 같이 y의 값의 차이가 1이면 x값이 각각 p, ap임을 알 수 있습니다.

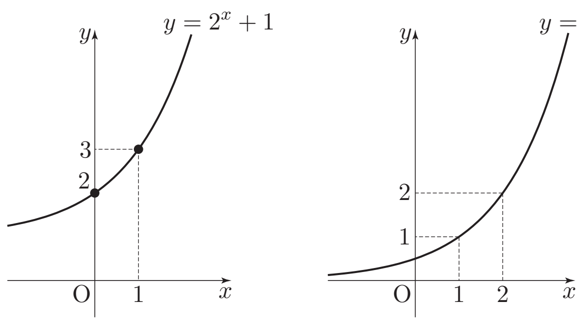
이를 일반화하면 로그함수 $y = \log_a x$에서는 x가 $\times a^n$ 되면 y가 $+n$되며, 두 y의 차이가 n이라면 x값이 $\times a^n$ 인 관계라고 일반화할 수 있습니다.

평행이동과 등비성의 보존

우리가 지수함수라 부르는 꼴은 $y = a^x$이며, 지수함수를 평행이동한 $y = a^{x-p} + q$는 교과서 정의상 지수함수가 아닙니다. 로그함수 또한 $y = \log_a x$가 로그함수의 꼴이며, 로그함수를 평행이동한 $y = \log_a (x - p) + q$는 교과서 정의상 로그함수가 아닙니다.

이렇게 지수로그함수를 평행이동한 함수 중에서 어떤 함수가 지수로그함수의 등비성을 그대로 보존하는지 알아봅시다.

지수함수는 x축 평행이동하면(또는 y에 k배하면) 등비성이 보존된다.



(a) (b)

(a)와 같이 y축 방향으로 평행이동했을 때, 평행이동된 함수는 등비성을 잃습니다. 예를 들어 $y = 2^x + 1$에서 $(0,\ 2)$, $(1,\ 3)$을 생각하면 x가 1 증가했지만 y가 $\times 2$ 되지 않음을 알 수 있습니다. 그런데 (b)와 같이 x축 방향으로 평행이동한 $y = 2^{x-1}$은 등비성을 보존합니다. 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$를 보면 등비성이 보존됨을 알 수 있습니다.[156)]

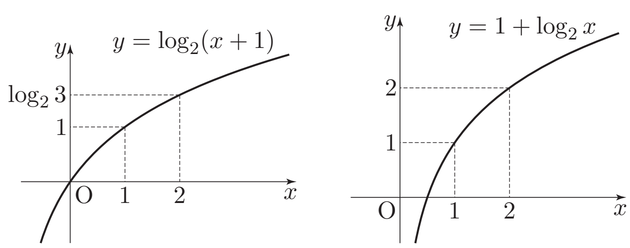
156) x가 $+1$되면 y가 $\times 2$ 됩니다.

따라서 a^{x-p}는 지수함수가 아님에도 등비성을 보존합니다. 그러나 $a^{x-p} + q$는 등비성을 보존하지 않습니다.

지수함수의 등비성 보존에서 특히 유의해야 할 것은 식의 꼴입니다. $ka^x = a^{x + \log_a k}$이므로 x축 평행이동이 식에 드러나지 않을 수 있습니다.[157)] 따라서 ka^x 꼴이 등비성을 보존한다고 외워두어도 좋습니다.

157) 방금 다룬 2^{x-1}은 지수법칙에 의해 $\frac{1}{2} \times 2^x$라 다시 쓸 수 있습니다.

로그함수는 y축 평행이동하면(또는 x에 k배하면) 등비성이 보존된다.



(a) (b)

(a)와 같이 x축 방향으로 평행이동했을 때, 평행이동된 함수는 등비성을 잃습니다. 예를 들어 $y = \log_2 (x+1)$에서 $(1,\ 1)$, $(2,\ \log_2 3)$을 생각하면 x가 $\times 2$되었지만 y가 $+1$ 되지 않음을 알 수 있습니다. 그런데 (b)와 같이 y축 방향으로 평행이동한 $y = 1 + \log_2 x$은 등비성을 보존합니다. 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$를 보면 등비성이 보존됨을 알 수 있습니다.[158)]

158) x가 $\times 2$되면 y가 $+1$ 됩니다.

따라서 $q + \log_a x$는 로그함수가 아님에도 등비성을 보존합니다. 그러나 $\log_a (x-p) + q$는 등비성을 보존하지 않습니다.

로그함수의 등비성 보존에서 특히 유의해야 할 것은 식의 꼴입니다. $q + \log_a x = \log_a a^q x$이므로 y축 평행이동이 식에 드러나지 않을 수 있습니다.[159)] 따라서 $\log_a kx$ 꼴이 등비성을 보존한다고 외워두어도 좋습니다.

159) 방금 다룬 $1 + \log_2 x$는 로그의 성질에 의해 $\log_2 2x$라 다시 쓸 수 있습니다.