지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

https://orbi.kr/00043463424

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

https://atom.ac/books/9395

입니다. 감사합니다!

# 아드레날린 ex
## 공통

**1.** 함수 $f(x)=\left|x^3-3x^2+p\right|$는 $x=a$와 $x=b$에서 극대이다. $f(a)=f(b)$일 때, 실수 $p$의 값은? (단, $a$, $b$는 $a\neq b$인 상수이다.) 〔2023년 3월 09〕

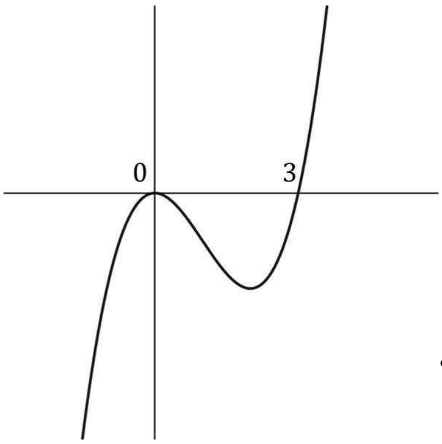
① $\frac{3}{2}$　　② 2　　③ $\frac{5}{2}$　　④ 3　　⑤ $\frac{7}{2}$

**1.** 정답 ② 〔2023년 3월 09〕

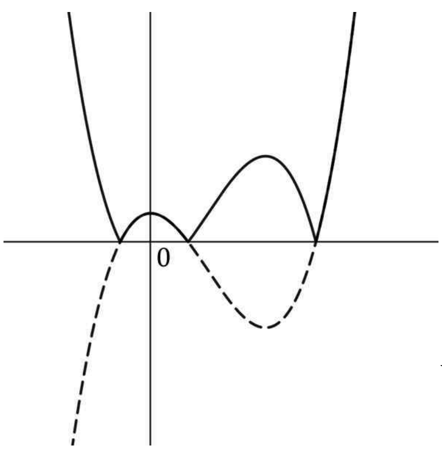
1) 절댓값 함수, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

일단 $f(x)=\left|x^3-3x^2+p\right|$라는 함수가 있습니다. 기본적으로 $x^3-3x^2=x^2(x-3)$이라는 함수를 위아래로 $p$만큼 움직이고 절댓값을 씌운 함수이죠? 대충 그려볼게요.

원래 $y=x^2(x-3)$는 $x$축과 $x=0$에서 접하고 $x=3$에서 그냥 지나가는 함수입니다.



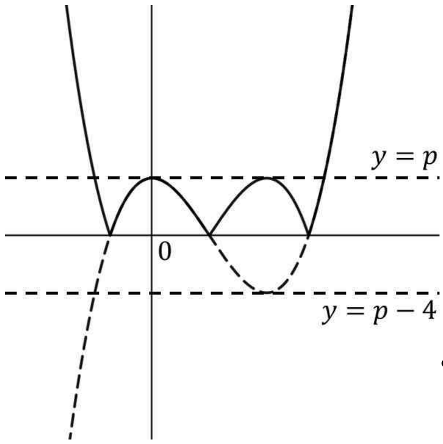

이런 함수죠. 여기서 $p$만큼 움직이고 절댓값을 씌우면




대충 이렇게 그려지겠네요.

이때 $f(x)$가 $x=a$와 $x=b$에서 극대라고 합니다. 일단 극대인 점이 어디인지는 알겠어요. 원래 $x^2(x-3)$에서 극대와 극소였던 $x=0$과 $x=2$가 절댓값으로 뒤집어 올라가서 극대가 된 거죠.

이때 극대값이 같아야 합니다. 그런데 지금 그림에서는 극댓값이 다르잖아요? 그러면 어떻게 그래프를 조정해야 할까요?




이렇게 조정해줘야 합니다.

일단 원본함수인 $x^2(x-3)$은 $x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소이고 극댓값은 0, 극솟값은 $-4$입니다. 이걸 $p$만큼 위아래로 움직이면 극댓값은 $p$, 극솟값은 $p-4$가 되겠죠. 이때 극솟값은 음수여야 합니다. 그래야 접어 올라갈 때 양수가 되어서 극댓값과 같아지겠죠.

이때 극솟값은 부호가 뒤집히므로 $4-p$가 되는데 이게 극댓값인 $p$와 같아야 하니까 $4-p=p$이고 $p=2$입니다. 답은 ②번이네요.

**2.** 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $a_{10}$의 값은? 〔2023년 3월 10〕

| |
|---|
| (가) $\lvert a_4 \rvert + \lvert a_6 \rvert = 8$ |
| (나) $\sum_{k=1}^{9} a_k = 27$ |

① 21　② 23　③ 25　④ 27　⑤ 27

**2.** 정답 ② 〔2023년 3월 10〕

## 1) 등차수열 $a_n$은 $a+(n-1)d$로 놓기, 조건해석

일단 공차가 양수인 등차수열 $a_n$이 있답니다. 그럼 일단 $a_n = a+(n-1)d$ ($d$는 양수)라고 놓을게요.

(가)조건에서 $|a_4|+|a_6|=8$랍니다. 일단 $|a+3d|+|a+5d|=8$이죠?

(나)조건에서 $\sum_{k=1}^{9} a_k = 27$라고 합니다. $\frac{(a_1+a_9)}{2}\times 9 = 27$이고 $a_1+a_9=6$이네요. 그리고

$a_1+a_9 = a+a+8d = 6$입니다.

여기서 잘 생각해보세요. $a_4+a_6$은 사실상 $a_1+a_9$와 같지 않나요? 둘 다 $2a+8d$잖아요? 따라서

$|a_4|+|a_6|=8$이고 $a_4+a_6=6$입니다.

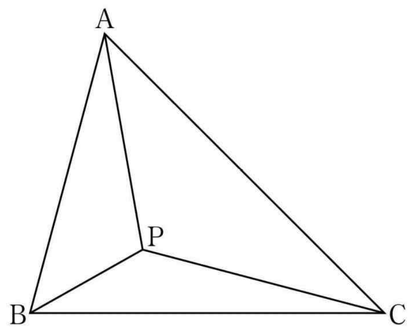
$a_4$와 $a_6$이 둘 다 양수라면 두 식의 결과가 다를 리가 없죠. 둘 다 음수라면 더해서 6이 나올 수 없구요.

이때 공차는 양수이므로 $a_4 < a_6$이어야 합니다. 따라서 $a_4$는 음수, $a_6$은 양수가 되어야겠네요. 그러면 $a_4$만

절댓값으로 부호가 바뀌어서 $-a_4+a_6=2d=8$이고 $d=4$입니다.

$a_4+a_6=2a+8d=2a+32=6$이고 $a=-13$이네요. $a_{10}=a+9d=23$입니다. 답은 ②번입니다.

**3.** 그림과 같이 $\angle \mathrm{BAC} = 60^\circ$, $\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{3}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PBC} = 30^\circ$, $\angle \mathrm{PCB} = 15^\circ$ 일 때, 삼각형 APC의 넓이는?
〔2023년 3월 11〕

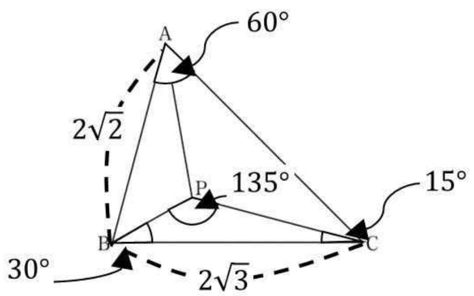



① $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ ② $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}$ ③ $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$
④ $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $2+\sqrt{3}$

**3.** 정답 ③ 〔2023년 3월 11〕

## 1) 그림 있으면 그림 보면서

$\angle \mathrm{BAC}=60^\circ$, $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{3}$이고 $\angle \mathrm{PBC}=30^\circ$, $\angle \mathrm{PCB}=15^\circ$이라고 합니다. 삼각형 APC의 넓이를 구하라네요. 일단 그림에 표시부터 해봅시다.




이렇게 되네요.

## 2) 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각

일단 삼각형 ABC를 보면 두 변의 길이와 한 각이 있죠? 코사인법칙으로 나머지 한 변의 길이를 구해봅시다.

$\overline{\mathrm{AC}}=k$라고 하면 $\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}=\dfrac{k^2+(2\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times 2\sqrt{2}\times k}=\dfrac{k^2-4}{4k\sqrt{2}}$입니다. 정리하면 $2k\sqrt{2}=k^2-4$이고

$k^2-2\sqrt{2}k-4=0$입니다. 이건 근의 공식을 사용해야겠어요. $\dfrac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{24}}{2}=\sqrt{2}\pm\sqrt{6}$이고 음수가 될 수는 없으므로 $\sqrt{2}+\sqrt{6}$입니다.

그리고 각 $A$와 그 반대편에 있는 $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{3}$이 있고, $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$이 있으니까 각 $C$도 구할 수 있겠죠?

사인법칙에 의하여 $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=4=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin C}$이고 $\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$입니다. $C$는 예각이니까 $45^\circ$겠네요. 그러면 $\angle \mathrm{PCA}=30^\circ$입니다.

또한 각 $P$와 그 반대편에 있는 $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{3}$이 있고, $\angle \mathrm{PBC}=30^\circ$이 있으니까 $\overline{\mathrm{PC}}$도 구할 수 있습니다.

$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 135^\circ}=\dfrac{\overline{\mathrm{PC}}}{\sin 30^\circ}$이고 $\overline{\mathrm{PC}}=\sqrt{6}$입니다.

그러면 이제 삼각형 APC의 넓이를 구할 수 있겠어요. 일단 밑변의 길이는 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$이고 높이는

$\overline{\mathrm{PC}}(=\sqrt{6})\times\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$이므로 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times(\sqrt{2}+\sqrt{6})=\dfrac{6+2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$입니다. 답은 ③번이네요.

**4.** 두 함수

$$f(x)= x^2+ax+b,\ \ g(x)= \sin x$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?
(단, $a$, $b$는 상수이고, $0 \le a \le 2$이다.) 〔2023년 3월 13〕

| |
|---|
| (가) $\{g(a\pi)\}^2 = 1$<br>(나) $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))= 0$의 모든 해의 합은 $\frac{5}{2}\pi$이다. |

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

**4.** 정답 ④ 〔2023년 3월 13〕

1) 조건해석

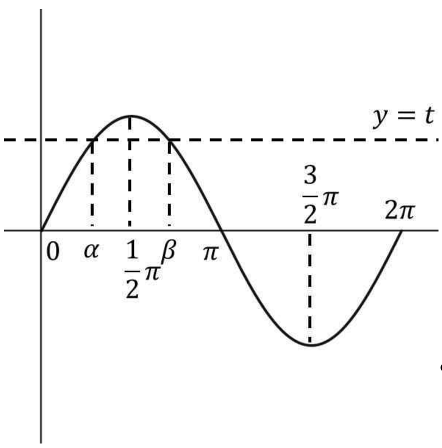
$f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=\sin x$가 있다고 합니다. 이때 $0 \le a \le 2$인데 (가)조건에서 $\{g(a\pi)\}^2=1$라고 하네요. 그러면 $g(a\pi)=1$ 이거나 $g(a\pi)=-1$이죠? $g(x)=\sin x$이므로 가능한 $a$는 $\frac{1}{2}$이거나 $\frac{3}{2}$입니다.

2) 합성함수는 치환

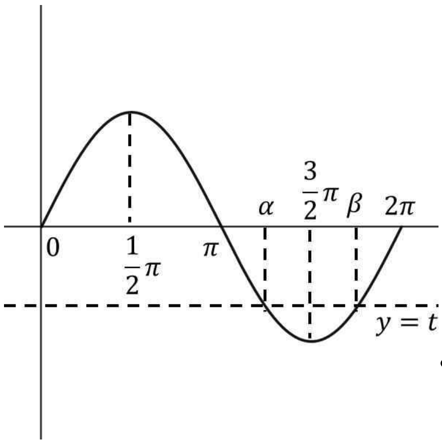
(나)조건에서 $0 \le x \le 2\pi$일 때 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합은 $\frac{5}{2}\pi$라고 하네요. 일단 $g(x)=t$라고 치환하면 $0 \le x \le 2\pi$이므로 $-1 \le t \le 1$입니다. $0 \le x \le 2\pi$에서 $\sin x$의 함숫값은 $-1$부터 1까지의 범위 내에 있으니까요.

이렇게 되면 $-1 \le t \le 1$에서 $f(t)=0$가 되는 $t$를 찾은 후, $0 \le x \le 2\pi$에서 $\sin x=t$가 되는, 즉 $y=\sin x$와 $y=t$가 만나게 되는 $x$값을 찾는 두 개의 과정을 거치는 문제가 되는 거예요.

이때 잘 생각해봐야 할 점은 합이 $\frac{5}{2}\pi$라는 점입니다. $y=\sin x$는 축에 대하여 대칭이라는 특징이 있어요.




이 그림에서 이렇게 $y=t$를 설정하면 $g(x)=t$가 되는 $x$의 합은 축의 $x$값의 두 배인 $\pi$이 됩니다. 왜냐하면 $g(x)=\sin x$는 $x=\frac{1}{2}\pi$라는 축에 대하여 대칭이므로 $x=\frac{1}{2}\pi$에서 $x=\alpha$까지의 거리와 $x=\frac{1}{2}\pi$에서 $x=\beta$까지의 거리가 같거든요. 따라서 $\frac{1}{2}\pi-\alpha=\beta-\frac{1}{2}\pi$이고 $\alpha+\beta=\pi$입니다. 이건 축의 $x$값의 두 배죠.




이렇게 설정해도 마찬가지입니다. 축의 두 배인 $3\pi$가 되죠.

$y=t=0$으로 설정해도 마찬가지구요.

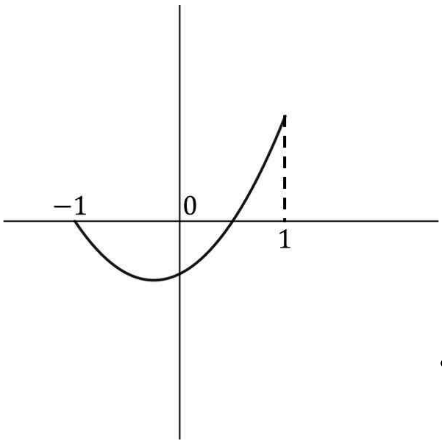
그런데 합은 $\frac{5}{2}\pi$이므로 $\frac{5}{2}\pi$를 초과하는 후자의 경우는 불가능합니다. 그러면 전자의 $\pi$에 무언가를 더해야 한다는 거겠죠. $\frac{5}{2}\pi=\pi+\frac{3}{2}\pi$이죠? 그리고 $\sin x=t$를 만족시키는 $x$가 $\frac{3}{2}\pi$인 $t$는 $-1$이구요. 따라서 조건을 만족시키는 $t$는 $0<t<1$에서 하나, $t=-1$이 되어야 합니다. $\sin x=t$를 만족시키는 $t$가 $-1$이므로 $f(t)=0$를 만족시키는 $t$ 역시 $-1$이고, 따라서 $f(-1)=0$입니다.

## 3) 케이스 분류

이때 $a=\frac{1}{2}$ 이거나 $a=\frac{3}{2}$이잖아요? 각각 하나씩 해보고 $f(-1)=0$이고 $f(t)=0$를 만족시키는 $t$가 $0<t<1$에 있는지 확인해봅시다.

## 3-1) $a=\frac{1}{2}$일 때

$f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+b$인데 $f(-1)=0$이므로 $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$입니다. 축이 $x=-\frac{1}{4}$이고 $\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$, $(1,\ 1)$를 지나는 그래프를 그려보면



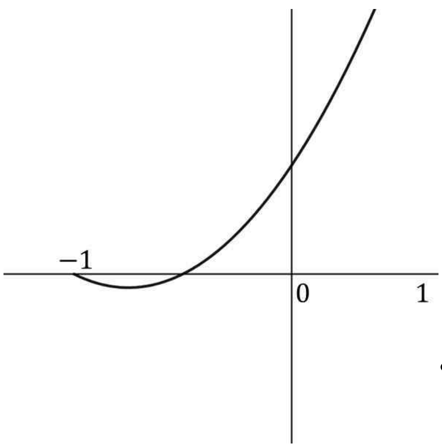

이렇게 됩니다. $x$축과 만나는 점이 0과 1 사이에 있네요? 조건에

부합합니다! 따라서 $f(2)=\frac{9}{2}$입니다. 답은 ④번이네요.

### 3-2) $a=\frac{3}{2}$일 때

이미 답은 알지만 왜 이 경우는 안 되는지 확인은 해볼게요. $f(x)=x^2+\frac{3}{2}x+b$인데 $f(-1)=0$이므로

$f(x)=x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$입니다. 축이 $x=-\frac{3}{4}$이고 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, $(1,\ 3)$를 지나는 그래프를 그려보면




이렇게 됩니다. $x$축과 만나는 점이 0과 1 사이에 없습니다. 조건에

부합하지 않네요.

**5.** 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1} + a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) & (a_{n+1} + a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1 = 1$일 때, $a_6 = 34$가 되도록 하는 모든 $a_2$의 값의 합은? 〔2023년 3월 15〕

① 60　② 64　③ 68　④ 72　⑤ 76

**5.** 정답 ③ 〔2023년 3월 15〕

## 1) 조건해석

모든 항이 자연수인 수열 $a_n$이 있는데 $a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}+a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n) & (a_{n+1}+a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$라고 합니다. 일단 식을 해석해볼게요.

먼저 $a_n+a_{n+1}$이 홀수일 때, 즉 $a_n$과 $a_{n+1}$ 둘 중 하나가 홀수, 나머지가 짝수일 때는 $a_{n+2}$는 그냥 $a_n+a_{n+1}$이라고 합니다. 이 경우 $a_{n+2}$ 역시 홀수가 되겠죠?

그리고 $a_n+a_{n+1}$이 짝수일 때, 즉 $a_n$과 $a_{n+1}$이 둘 다 홀수이거나 둘 다 짝수일 때는 $a_{n+2}$는 $a_n+a_{n+1}$에 $\frac{1}{2}$를 곱한 값이라는 거네요. 이 경우 $a_{n+2}$는 짝수 혹은 홀수가 됩니다.

이때 $a_1=1$일 때 $a_6=34$이 되도록 하는 $a_2$의 모든 값의 합을 구하랍니다. 먼저 $a_1$은 홀수이고, $a_6$은 짝수입니다. 짝수가 되는 경우는 $a_n$과 $a_{n+1}$이 둘 다 홀수이거나 둘 다 짝수인 경우만 가능합니다. 따라서 $a_4$와 $a_5$는 둘 다 짝수이거나 홀수여야 합니다.

이때 $a_4$와 $a_5$가 둘 다 짝수라면, $a_3$ 역시 짝수여야 합니다. 왜냐하면 $a_5$가 짝수가 되는 경우는 $a_3$과 $a_4$ 둘 다 짝수거나 홀수인 경우인데, 이미 $a_4$는 짝수이므로 $a_3$ 역시 짝수여야 하죠. 마찬가지로 $a_2$ 역시 짝수여야 하고, $a_1$ 역시 짝수여야 합니다. 그런데 $a_1=1$이죠? 아니네요? 따라서 $a_4$와 $a_5$는 둘 다 홀수입니다.

## 2) 케이스 분류

이러면 이제 $a_2$와 $a_3$만 남았네요. 가능한 경우는 짝짝, 짝홀, 홀짝, 홀홀의 4가지 경우입니다.

먼저 짝짝의 경우 불가능합니다. $a_1$이 홀수이므로 $a_1+a_2$는 홀수+짝수가 되어 홀수가 됩니다. $a_3$는 무조건 홀수여야 하죠?

짝홀의 경우 바로 위에서 봤듯이 $a_1$부터 홀짝홀홀홀이 됩니다. $a_2+a_3$은 짝+홀=홀이므로 $a_4$가 홀수라는 것도 맞네요. 가능합니다.

이러면 $a_2=2k$ ($k$는 자연수)라고 하면 $a_3=a_1+a_2=2k+1$입니다. $a_4=a_2+a_3=4k+1$이고,

$a_5 = \frac{1}{2}(a_3 + a_4) = 3k+1$이고 $a_6 = \frac{1}{2}(a_4 + a_5) = \frac{7k+2}{2} = 34$입니다. $7k = 66$이고 $k = \frac{66}{7}$인데 $k$는 자연수여야 하죠? 조건에 맞지 않습니다.

홀짝의 경우 $a_2 = 2k-1$ ($k$는 자연수)라 했을 때 $a_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) = k$가 됩니다. $a_3$가 짝수이므로 $k$ 역시 짝수여야겠네요. $a_4 = a_2 + a_3 = 3k-1$, $a_5 = a_3 + a_4 = 4k-1$입니다. $a_4 + a_5 = 68$이므로 $7k-2 = 68$이고 $k = 10$이네요. $a_2 = 19$입니다.

홀홀의 경우 $a_1$부터 $a_5$까지 싹 다 홀수가 됩니다. 이러면 $a_2 = 2k-1$ ($k$는 자연수)라 했을 때 $a_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) = k$, $a_4 = \frac{1}{2}(a_2 + a_3) = \frac{3k-1}{2}$, $a_5 = \frac{1}{2}(a_3 + a_4) = \frac{5k-1}{4}$가 됩니다. 이때 $a_4 + a_5 = 68$이므로 $\frac{11k-3}{4} = 68$이고 $k = 25$입니다. $a_2 = 49$

모든 $a_2$의 합은 $19 + 49 = 68$입니다. 답은 ③번이네요.

**6.** 최고차항의 계수가 $1$이고 $f(0)=1$인 삼차함수 $f(x)$와
양의 실수 $p$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $g'(0)=0$ |
| (나) $g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x<0) \\ f(x+p)-f(p) & (x \geq 0) \end{cases}$ |

$\int_0^p g(x)dx=20$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. 〔2023년 3월 20〕

**6.** 정답 66 〔2023년 3월 20〕

1) 조건해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

삼차함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$인 삼차함수라고 합니다. 이때 양수인 $p$와 (가)조건에서 $g'(0)=0$, (나)조건에서 $g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x<0) \\ f(x+p)-f(p) & (x \geq 0) \end{cases}$인 $g(x)$가 있다고 하네요.

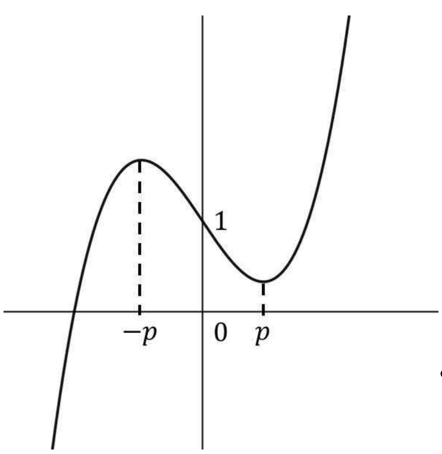
일단 $g'(0)=0$이라는 건 $g(x)$는 최소한 $x=0$에서는 미분가능하다는 거죠? 또한 $x=0$에서 접선의 기울기가 0이어야 합니다. 그 전에 $g(x)$부터 해석해볼게요.

먼저 $g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x<0) \\ f(x+p)-f(p) & (x \geq 0) \end{cases}$는 $x<0$에서는 $g(x)=f(x-p)-f(-p)$입니다. $x=0$을 넣으면 $g(0)=0$이 나오네요. 그리고 $f(x)$라는 함수를 $p$만큼 오른쪽으로 움직인 다음에 그걸 $f(-p)$만큼 위아래로 움직인 함수입니다.

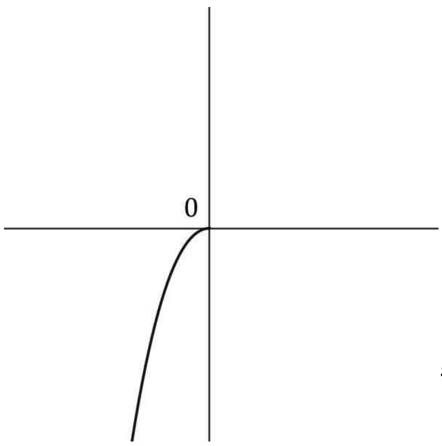
또한 $x \geq 0$에서는 $g(x)=f(x+p)-f(p)$입니다. 이 역시 마찬가지로 $x=0$을 넣으면 $g(0)=0$이네요. 이쪽은 $f(x)$라는 함수를 $p$만큼 왼쪽으로 움직인 다음에 그걸 $f(p)$만큼 위아래로 움직인 함수입니다.

또한 아까 $g(x)$가 $x=0$에서는 미분가능하고 그 접선의 기울기가 0이어야 한다고 했었죠? 먼저 $x<0$에서는 $g(x)=f(x-p)-f(-p)$이므로 접선의 기울기는 $f'(-p)$이고 이 값은 0이어야 합니다. $f'(-p)=0$이네요.

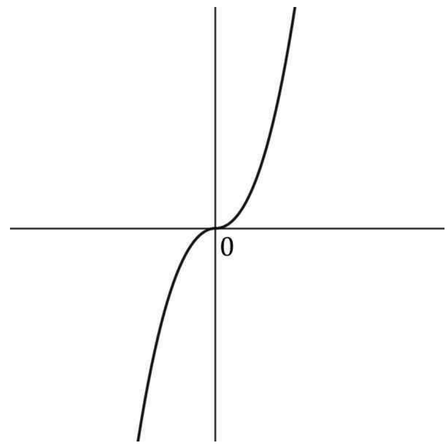
$x \geq 0$에서 $g(x)=f(x+p)-f(p)$이고 접선의 기울기는 $f'(p)$이고 이 값은 0이어야 하므로 $f'(p)=0$입니다. 이러면 $f(x)$는




이런 함수겠네요. 이제 $g(x)$를 그려보죠. 먼저 $x<0$에서는 함수를 $p$만큼 오른쪽으로 움직인 다음에 원점을 지나도록 설정하고



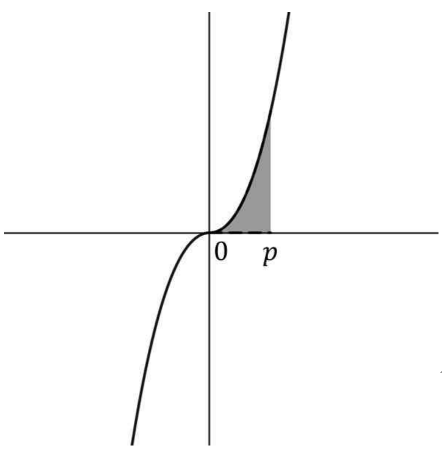

$x \geq 0$ 부분도 마찬가지로 해보면



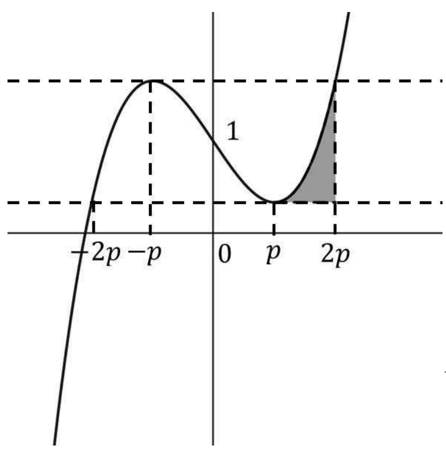

이렇게 되겠네요!

## 2) 정적분 관찰

이때 $\int_0^p g(x)dx = 20$라고 합니다. 일단 $g(x)$를 잘 관찰해보세요. $x \geq 0$에서 $g(x)$는 $x \geq p$에서 $f(x)$와 같은 형태잖아요? 애초에 $f(x)$를 $p$만큼 왼쪽으로 움직인 다음에 $x \geq 0$에서 짤라낸 함수가 $g(x)$니까요. 단순한 평행이동이기 때문에 범위만 대응시켜주면 정적분 값은 같아야 합니다. 그러니까 다시 말하면




색칠된 부분과




색칠된 부분의 값이

동일해야 한다는 거죠.

일단 색칠된 부분을 구해볼까요? 저 색칠된 부분을 구하는 건 사실상 $f(x)$를 아래로 내려서 $x = p$에서 $x$축과 접하게 만든 후 $p$부터 $2p$까지 정적분하는 것과 같죠? 따라서

$\int_0^p g(x)dx = 20 = \int_p^{2p} (x-p)^2(x+2p)dx$입니다. 이때 평행이동을 해도 정적분 값은 동일하다는 논리를 사용해볼게요. 지금 우리가 구하는 건 $\int_p^{2p} (x-p)^2(x+2p)dx = 20$인데 어차피 정적분 식의 $x$값을 전부 $p$만큼

왼쪽으로 밀어버려도 값은 동일하겠죠? 따라서 $\int_0^p x^2(x+3p)dx= \left[\frac{1}{4}x^4+px^3\right]_0^p = \frac{5}{4}p^4 = 20$가 됩니다.

$p^4 = 16$이고 $p > 0$이므로 $p = 2$이네요.

## 3) 함수 구하기 - 차함수

$f(x)$는 $y = f(p)= f(2)$와 $x = p = 2$에서 접하고 $x = -4$에서 만나므로 차함수에 의하여

$f(x)- f(2)= (x-2)^2(x+4)$이고 $f(x)= (x-2)^2(x+4)+ f(2)$입니다.

이때 $f(0)= 1$이므로 $f(0)= 16+f(2)= 1$이고 $f(2)= -15$이네요. $f(x)= (x-2)^2(x+4)- 15$이고

$f(5)= 66$입니다.

**7.** 최고차항의 계수가 $1$이고 사차함수 $f(x)$가 있다.
실수 $t$에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)-t|$라 할 때,
$\lim_{x \to k} \frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 서로 다른 실수 $k$의 개수를 $h(t)$라 하자.
함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t \to 4+} h(t)=5$
(나) 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$일 때, $f(4)+h(4)$의 값을 구하시오.
〔2023년 3월 22〕

**7.** 정답 729 〔2023년 3월 22〕

1) 문제해석, 절댓값 함수

먼저 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 사차함수라고 합니다.

이때 $g(x)=|f(x)-t|$라고 하네요. 이건 $f(x)$를 $t$만큼 아래로 내리고 절댓값을 씌운 함수죠?

이때 $h(t)$라는 함수가 있는데 얘는 $\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 서로 다른 실수 $k$의 개수라고 합니다.

이건 뭘까요? 천천히 해석해봅시다.

먼저 "극한값이 존재한다"는 건 좌극한값과 우극한값이 동일하다는 의미입니다. 일단 분모인 $x-k$에 절댓값이 있어요. 이거부터 풀어보죠. 먼저 $x>k$일 때, 즉 $x-k>0$일 때 우극한은 $\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$입니다. 이건 $x=k$보다 큰 쪽에서의 미분계수죠? 간단하게 우리만의 표현으로 표현하자면 $g'(k+)$가 되겠네요.

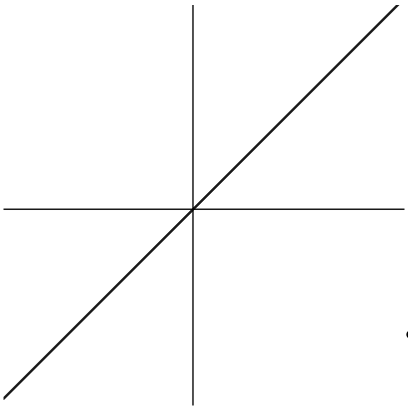
$x<k$일 때는요? 좌극한은 $\lim_{x\to k-}-\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=-g'(k-)$가 됩니다. $x=k$보다 작은 쪽에서의 미분계수입니다.

결국 이 둘이 같아야 하므로 $g'(k+)=-g'(k-)$이 되는 점의 개수가 $h(t)$가 되겠군요.

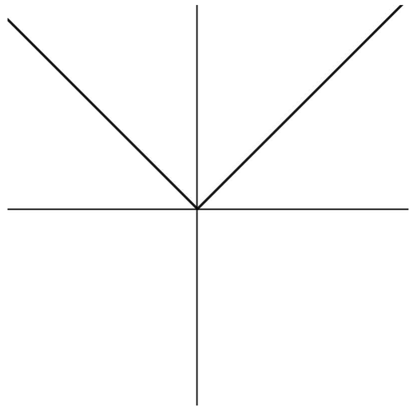
그러면 $g'(k+)=-g'(k-)$는 어떤 경우에 성립할까요? 일단 일반적인 상황에서는 $g'(k+)=-g'(k-)$는 불가능합니다. 왜냐하면 좌미분계수과 우미분계수의 부호가 다르다는 건 미분불가능이라는 건데 다항함수는 모든 점에서 미분가능이거든요.

다만 그 값이 0이라면요? 0은 부호를 바꾸든 말든 0이니까 성립하죠. 일단 하나 찾았네요.

그리고 특수한 상황도 고려를 해야죠. $g(x)$는 절댓값 함수잖아요? 절댓값 함수의 특징은 $x$축 아래의 부분은 위로 접혀 올라간다는 거죠. 접혀 올라간다는 건 미분계수 역시 부호가 반대로 된다는 거구요.



이런 함수가 있다면 절댓값을 씌웠을 땐



이렇게 $x$축 아래에 있는 $x<0$ 부분이 접혀 올라갑니다. 그러면 $x=0$에서의 우미분계수와 좌미분계수는 정확히 부호가 반대가 되죠. 결국 조건을 만족하는 경우는 미분계수가 0이거나 미분계수가 0이 아니면서 $x$축과 만나는 경우 두 가지입니다. 이러한 점의 개수가 $h(t)$인 거죠.

## 2) 조건해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

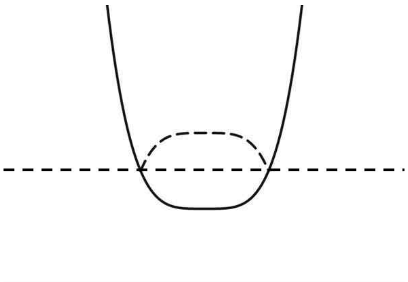
(가)조건에서 $\lim_{t \to 4+} h(t)=5$라고 합니다. $t$가 4보다 약간 클 때, 즉 $f(x)$를 4보다 약간 더 내리고 절댓값 씌운 $g(x)=|f(x)-4+|$일 때는 미분계수가 0이거나 $x$축과 만나는 점이 5개라는 거죠?

(나)조건에서 $h(t)$는 $t=-60$와 $t=4$에서만 불연속이라고 합니다. 일단 $t=4$는 (가)조건에도 있던 값이에요. 당연히 주의해서 봐야 합니다.

$h(t)$가 불연속이라는 건 $f(x)$를 $t$만큼 내리고 절댓값 씌울 때 미분계수가 0이거나 미분계수가 0이 아니면서 $x$축과 만나는 점의 개수가 특정 지점에서 변한다는 거죠? 좌극한값, 함숫값, 우극한값 중 어느 하나라도 다르면 불연속이니까요.

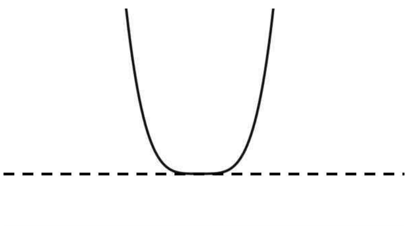
그리고 두 지점에서만 불연속이라는 것도 포인트입니다. 결국 개형을 정한 다음 하나하나 확인해봐야겠네요.

이때 어차피 $t$만큼 아래로 내려서 절댓값으로 접어 올리는 거랑 $y=t$라는 직선을 그어서 직선에 대하여 접어 올리는 거랑 결과는 똑같으니까 설명은 후자로 하겠습니다.



이런 개형인 경우 불연속점은 하나입니다. 이렇게 점선을 그으면 점선과

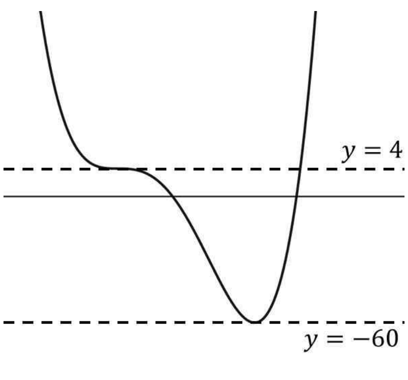
만나는 점 두 개와 미분계수가 0이 되는 점 하나를 합해 $h(t)=3$이다가



이렇게 점선을 그으면 미분계수가 0이 되는 점이 하나로 $h(t)=1$이 되고,

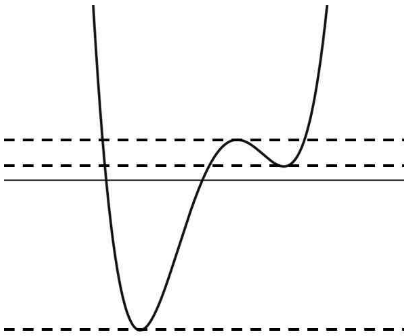
더 아래로 내려가도 $h(t)=1$입니다.

여기서 잘 생각해볼게요. 미분계수가 0이 되는 점은 어차피 고정되어 있어요. $t$값에 따라 변하는 건 $y=t$와의 교점 중 접하지 않는 점의 개수죠. 그러면 빠르게 확인해봅시다.



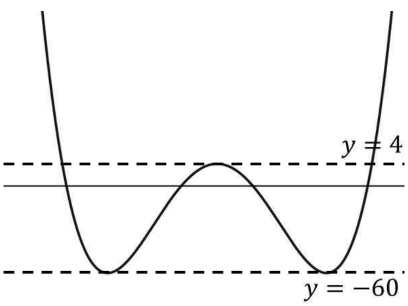

그림과 같이 점선을 그었을 때 $h(t)$가 불연속이 됩니다. 기본적으로 미분계수가 0이 되는 점 2개에 $t$가 4보다 클 때는 접점이 아닌 교점이 2개, $t=4$일 때 1개, 4보다 작을 때는 다시 2개, $t=-60$부터는 0개가 되죠.

그런데 문제는 $\lim_{t \to 4+} h(t) = 5$이어야 한다는 거에요. $t = 4$보다 클 때 5개의 점이 조건을 충족해야 하는데 지금 같은 상황은 4개죠. 이 개형은 불가능합니다. 마찬가지의 이유로 개형이 좌우로 뒤집힌 개형도 불가능합니다.



이런 개형인 경우를 살펴볼게요. 이 경우 불연속점이 3개가 나타납니다. 기본적으로 미분계수가 0인 점이 3개에 위에서부터 첫 번째 점선 전까지 접점이 아닌 교점이 2개, 두 번째 점선 전까지 4개였다가 두 번째 점선일 때 2개로 변하고, 다시 2개였다가 세 번째 점부터는 0개로 변하죠. 조건을 만족하지 않습니다. 마찬가지의 이유로 개형이 좌우로 뒤집힌 개형도 불가능합니다.

결국 남은 개형은




이거죠. 일단 조건을 만족하는지 보면 기본적으로 미분계수가 0인 점이 3개에 위에서부터 $y = 4$까지는 접점 아닌 교점이 2개, $y = -60$까지는 4개였다가 $y = -60$부터는 0개가 됩니다.

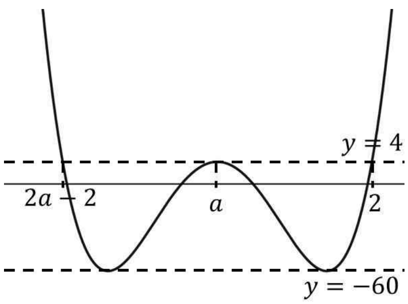
또한 $t = 4$보다 클 때 미분계수가 0인 점 3개+ 접점 아닌 교점 2개로 총 5개니까 (가)조건도 만족하네요.
찾았어요!

### 3) 함수 구하기 - 차함수

먼저 사차함수 중 이런 대칭축이 존재하는 개형의 특징은 대칭축으로부터 극소가 되는 점의 $x$좌표의 차이가

동일하다는 거예요. 대칭축의 $x$좌표를 $a$라고 잡고 $y=f(x)$가 $y=-60$과 접하는 점의 $x$좌표를 각각 $a-b$, $a+b$라고 하면 차함수에 의하여 $f(x)-(-60)=(x-a+b)^2(x-a-b)^2$이고 $f(x)=(x-a+b)^2(x-a-b)^2-60$입니다. 이때 $f(a)=4$이므로 $b^4-60=4$이고 $b=2\sqrt{2}$이네요. $b=-2\sqrt{2}$도 어차피 똑같으니까 상관없습니다. $f(x)=(x-a+2\sqrt{2})^2(x-a-2\sqrt{2})^2-60$입니다.

이때 $f(2)=4$이고 $f'(2)>0$이므로 $x=2$는




이렇게 그려지겠네요.

$f(x)=(x-a+2\sqrt{2})^2(x-a-2\sqrt{2})^2-60$에 $f(2)=4$를 해보면 $(2-a+2\sqrt{2})^2(2-a-2\sqrt{2})^2=64$이고 정리하면 $((2-a)^2-8)^2=64$이 됩니다. $(a^2-4a-4)^2=64$이고 $a^2-4a-4=8$이거나 $a^2-4a-4=-8$입니다.

$a^2-4a-4=-8$의 경우 $a^2-4a+4=(a-2)^2=0$이고 $a=2$가 되는데 이건 불가능하죠? 무조건 $a<2$여야 하니까요.

$a^2-4a-4=8$의 경우 $a^2-4a-12=(a-6)(a+2)=0$이므로 $a=-2$입니다.
$f(x)=(x+2+2\sqrt{2})^2(x+2-2\sqrt{2})^2-60$이네요. 아니면 위의 그림처럼 대칭축 $x=a=-2$를 기준으로 $x=2$와 반대편의 $x=2a-2=-6$를 잡고 $f(x)=(x+6)(x+2)^2(x-2)+4$로 설정해도 됩니다. 이게 더 편하겠네요.

이제 $f(4)+h(4)$를 구해보죠. $h(4)$는 이미 알죠? 미분계수가 0인 점이 3개에 접점 아닌 교점이 2개니까 $h(4)=5$이구요, $f(4)=724$입니다. 따라서 $f(4)+h(4)=729$이네요.