제 2 교시

수학 영역

1. $\sqrt[3]{8}\times\dfrac{2^{\sqrt{2}}}{2^{1+\sqrt{2}}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$$\sqrt[3]{8}\times\frac{2^{\sqrt{2}}}{2^{1+\sqrt{2}}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}\times2^{\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})}=2\times2^{-1}=1$$

2. 함수 $f(x)=2x^3-x^2+6$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$f'(x)=6x^2-2x$
$f'(1)=6-2=4$

3. 등비수열 $\{a_n\}$이
$a_5=4,\ a_7=4a_6-16$
을 만족시킬 때, a_8의 값은? [3점]

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면
$a_7=4a_6-16$
$\Leftrightarrow\ 4r^2=4\times4r-16$
$\Leftrightarrow\ r^2-4r+4=0$
$\therefore\ r=2$
$\therefore\ a_8=a_5r^3=4\times2^3=32$

4. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여
$$\int_1^x f(t)dt=x^3-ax+1$$
을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$$\int_1^x f(t)dt=x^3-ax+1$$
양변에 $x=1$을 대입
$0=1-a+1$
$\therefore\ a=2$
양변을 x에 대하여 미분
$f(x)=3x^2-2$
$\therefore\ f(2)=12-2=10$

수학 영역

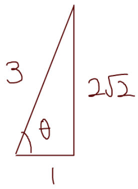
5. $\cos(\pi+\theta)=\frac{1}{3}$이고 $\sin(\pi+\theta)>0$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-2\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ 1
④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \cos\theta=-\frac{1}{3}$



$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta>0 \ \Leftrightarrow\ \sin\theta<0$

$\therefore$ θ는 제3사분면의 각

$\therefore\ \tan\theta=2\sqrt{2}$

6. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax+1 & (x<2) \\ -x+1 & (x\ge 2)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$$\{f(x)\}^2=\begin{cases} (x^2-ax+1)^2 & (x<2) \\ (-x+1)^2 & (x\ge 2)\end{cases}$$

$x=2$에서 연속이므로

$(5-2a)^2=(-1)^2$

$\Leftrightarrow\ 5-2a=\pm1$

$\Leftrightarrow\ a=2$ or $a=3$

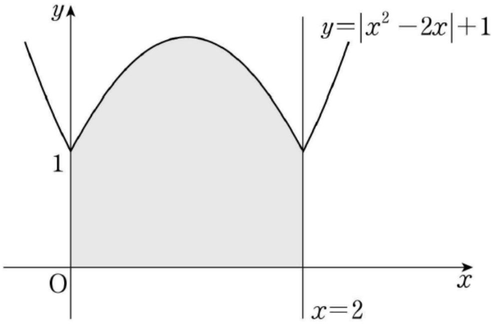
$\therefore$ 모든 상수 a의 값의 합은

$2+3=5$

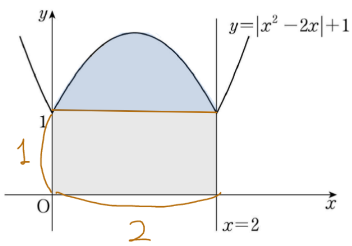
수학 영역

7. 함수 $y=|x^2-2x|+1$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4



수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설



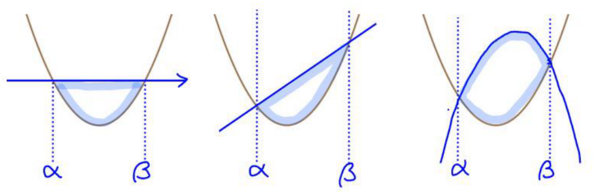
$\frac{1}{6}(2-0)^3+1\times2=\frac{10}{3}$

[다른 풀이]

$$\int_0^2(|x^2-2x|+1)dx=\int_0^2(-x^2+2x+1)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_0^2=\frac{10}{3}$$

Analysis



넓이 $=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$ $\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$ $\frac{\text{최고차계수차}}{6}(\beta-\alpha)^3$

8. 두 점 $\mathrm{A}(m,\ m+3)$, $\mathrm{B}(m+3,\ m-3)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 곡선 $y=\log_4(x+8)+m-3$위에 있을 때, 상수 m의 값은? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2(m+3)+m}{2+1},\ \frac{2(m-3)+(m+3)}{2+1}\right)$

$\therefore\ (m+2,\ m-1)$

곡선 $y=\log_4(x+8)+m-3$위에 있으므로

$m-1=\log_4(m+10)+m-3$

$\Leftrightarrow\ \log_4(m+10)=2$

$\therefore\ m=6$

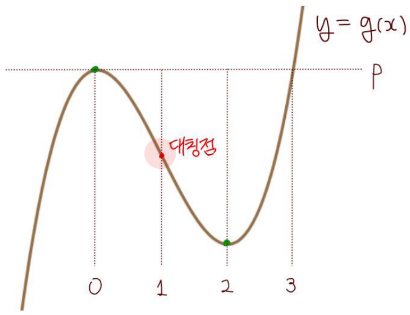
수학 영역

9. 함수 $f(x)=|x^3-3x^2+p|$는 $x=a$와 $x=b$에서 극대이다. $f(a)=f(b)$일 때, 실수 p의 값은?
(단, a, b는 $a \neq b$인 상수이다.) [4점]

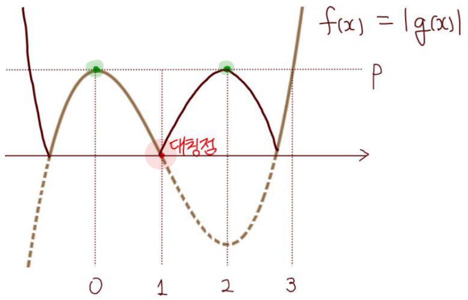
① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$g(x)=x^3-3x^2+p=x^2(x-3)+p$라고 하면
2:1 비례관계에 의해



$f(x)=|g(x)|$의 두 극댓값이 같으려면 $g(1)=0$



$g(1)=1-3+p=0$
$\therefore\ p=2$

10. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

(가) $\lvert a_4\rvert+\lvert a_6\rvert=8$
(나) $\sum_{k=1}^{9} a_k=27$

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

등차수열의 합의 핵심 원리를 활용하자.
$S_n=$ 평균 $\times$ 개수 $=$ 중앙값 $\times$ (홀수)개수

$\sum_{k=1}^{9} a_k=27=a_5\times 9$
$\therefore\ a_5=3$

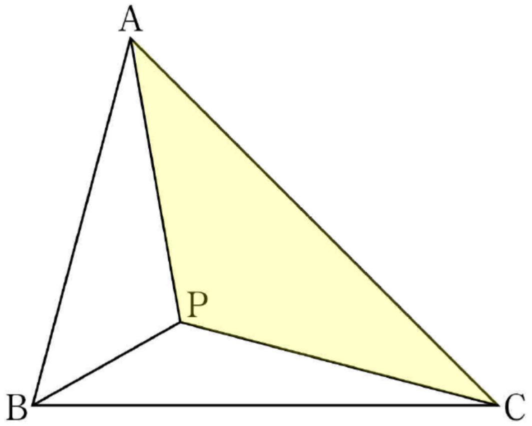
$a_4 \xrightarrow{+d} a_5=3 \xrightarrow{+d} a_6$
이므로 $a_6>0$ ($\because\ d>0$)

i) $a_4 \geq 0$ 이면 $a_6 \geq 0$
$|a_4|+|a_6|=a_4+a_6=2a_5=6\neq 8$ (모순)

ii) $a_4<0$
$|a_4|+|a_6|=-a_4+a_6=2d=8$
$\therefore\ d=4$
$\therefore\ a_{10}=a_5+5d=3+5\times 4=23$

수학 영역

11. 그림과 같이
$\angle BAC = 60^\circ$, $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$, $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle PBC = 30^\circ$, $\angle PCB = 15^\circ$일 때, 삼각형 APC의 넓이는? [4점]



① $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$　② $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}$　③ $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$
④ $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}$　⑤ $2+\sqrt{3}$

Analysis

sin법칙 vs cos법칙의 활용해야 하는 상황 정리

	[단서] → [답]
sin법칙 (각이 많을 때)	2변 1각 → 1각 1변 2각 → 1변 1변 1각 ↔ 외접원
cos법칙 (변이 많을 때)	2변 1각 → 1변 3변 → 각

Analysis

사인법칙

△ABC에서

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

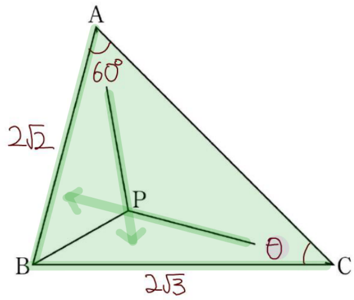
$\Leftrightarrow\ a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

(단, R는 외접원의 반지름)

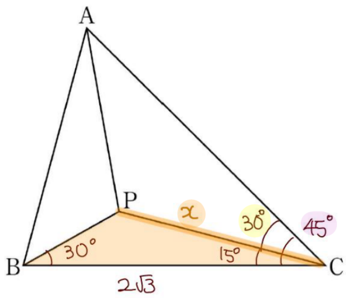
수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

(Step1) 사인법칙을 써야 하는 상황
각에 대한 단서가 많으므로
우선 사인법칙을 사용한다
무작정 사인법칙 공식에 단순 대입하지 말자.
사인법칙의 본질은 변 길이의 비에 있다.

$2\sqrt{3} : 2\sqrt{2} = \sin 60^\circ : \sin\theta$



$\therefore\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta = 45^\circ$



$x = 2\sqrt{3} \times \dfrac{\sin 30^\circ}{\sin 135^\circ} = \sqrt{6}$

$(\because\ 2\sqrt{3} : x = \sin 135^\circ : \sin 30^\circ)$

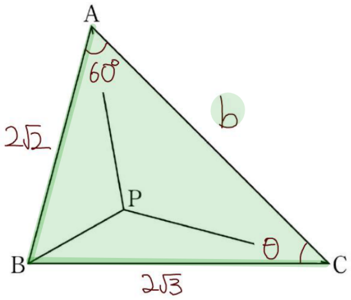
수학 영역

(step2) 코사인법칙을 써야 하는 상황

삼각형 ABC에서 2변&1각을 단서로 1변을 구해야 하므로 코사인 법칙을 사용한다.

(2변&1각 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{BC}=2\sqrt{3}$, $\angle BAC=60^\circ$

→ 1변 $\overline{AC}$)



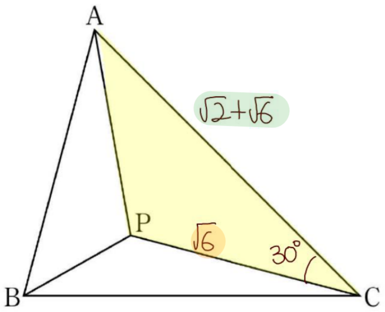
$(2\sqrt{3})^2=(2\sqrt{2})^2+b^2-2\times2\sqrt{2}\times b\times\cos60^\circ$

⇔ $b^2-2\sqrt{2}b-4=0$

$\therefore\ b=\sqrt{2}+\sqrt{6}$

∴ 삼각형 APC의 넓이

$\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times(\sqrt{2}+\sqrt{6})\times\sin30^\circ=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$



Analysis

코사인 법칙

△ABC에서

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \Leftrightarrow \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

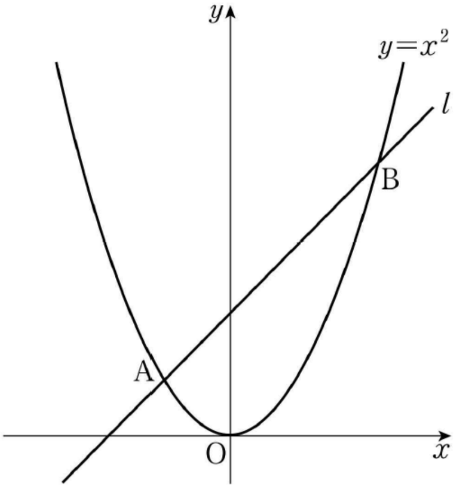
$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \Leftrightarrow \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \Leftrightarrow \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

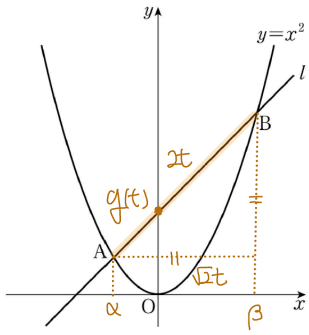
수학 영역

12. 곡선 $y=x^2$과 기울기가 1인 직선 l이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 양의 실수 t에 대하여 선분 AB의 길이가 $2t$가 되도록 하는 직선 l의 y절편을 $g(t)$라 할 때, $\lim_{t \to \infty} \frac{g(t)}{t^2}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1



수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설



기울기는 단순 숫자가 아니라 직각삼각형의 변 길이 비율이다!

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 기울기=1이므로

$\beta-\alpha=\sqrt{2}t$

직선 l의 방정식은 $y=x+g(t)$

$x^2=x+g(t)$

⇔ $x^2-x-g(t)=0$

근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-g(t)$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

⇔ $2t^2=1+4g(t)$

⇔ $g(t)=\frac{2t^2-1}{4}$

$\therefore \lim_{t \to \infty} \frac{g(t)}{t^2}=\lim_{t \to \infty} \frac{2t^2-1}{4t^2}=\frac{1}{2}$

수학 영역

13. 두 함수

$f(x)=x^2+ax+b,\ g(x)=\sin x$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

(단, a, b는 상수이고, $0 \le a \le 2$이다.) [4점]

> (가) $\{g(a\pi)\}^2=1$
>
> (나) $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의
>
> 모든 해의 합은 $\frac{5}{2}\pi$이다.

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

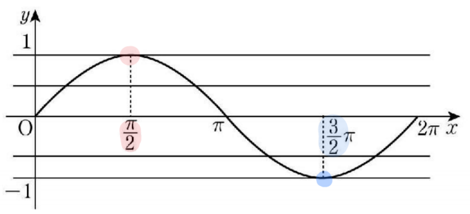
수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

(Step1) 조건 (가) 활용하기

$\{g(a\pi)\}^2=1$

⇔ $\sin^2(a\pi)=1$

⇔ $\sin(a\pi)=-1$ or 1



⇔ $a\pi=\frac{1}{2}\pi$ or $\frac{3}{2}\pi$ ($\because\ 0 \le a\pi \le 2\pi$)

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$ or $\frac{3}{2}$

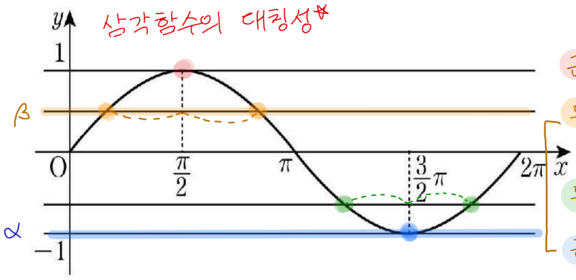
(Step2) 조건 (나) 활용하기

$f(X)=0$의 근을 $X=\alpha$ or β라고 하면

$f(g(x))=0$

⇔ $g(x)=\alpha$ or β

삼각함수의 대칭성★



근$=\frac{\pi}{2}$

두 근의 합$=\frac{\pi}{2}\times 2=\pi$

두 근의 합$=\frac{3\pi}{2}\times 2=3\pi$

근$=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore\ \alpha=-1$, $0<\beta<1$일 때

$g(x)=\alpha$ or β의 모든 해의 합이 $\pi+\frac{3\pi}{2}=\frac{5\pi}{2}$

(Step3) $f(x)$ 식 구하기

$f(x)=x^2+ax+b=0$의 근과 계수의 관계

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$

i) $a=\frac{3}{2}$

$\alpha+\beta=-a$

⇔ $-1+\beta=-\frac{3}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ 0<\beta<1$에 모순

ii) $a=\frac{1}{2}$

$\alpha+\beta=-a$

⇔ $-1+\beta=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$

$\therefore\ 0<\beta<1$ 성립

$\therefore\ f(x)=x^2+ax+b=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$\therefore\ f(2)=\frac{9}{2}$

수학 영역

14. 세 양수 a, b, k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} ax & (x<k) \\ -x^2+4bx-3b^2 & (x \ge k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

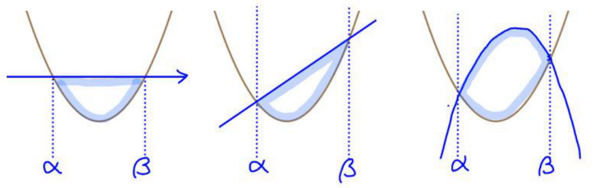
ㄱ. $a=1$이면 $f'(k)=1$이다.

ㄴ. $k=3$이면 $a=-6+4\sqrt{3}$이다.

ㄷ. $f(k)=f'(k)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Analysis



넓이 $=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$　$\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$　$\frac{\text{최고차계수차}}{6}(\beta-\alpha)^3$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$$f'(x)=\begin{cases} a & (x<k) \\ -2x+4b & (x \ge k) \end{cases}$$

미분가능하므로

① $f(k)$

$ak=-k^2+4bk-3b^2$

② $f'(k)$

$a=-2k+4b$

$\Leftrightarrow\ ak=-2k^2+4bk=-k^2+4bk-3b^2$

$\Leftrightarrow\ k^2=3b^2$

$\Leftrightarrow\ k=\sqrt{3}b$ ($\because\ k>0,\ b>0$)

$\therefore\ b=\frac{1}{\sqrt{3}}k,\ a=\left(-2+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)k$

ㄱ. (참)

$f'(k)=a=1$

ㄴ. (참)

$k=3$이면

$a=\left(-2+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)k=-6+4\sqrt{3}$

ㄷ. (참)

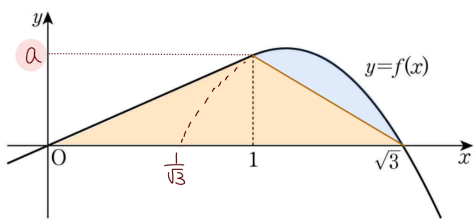
$f(k)=f'(k)$

$\Leftrightarrow\ ak=a$

$\therefore\ k=1,\ a=-2+\frac{4}{\sqrt{3}},\ b=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$-x^2+4bx-3b^2$

$=-(x-b)(x-3b)=-\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(x-\sqrt{3})$



$$\int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-2+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{6}(\sqrt{3}-1)^3=\frac{1}{3}$$

수학 영역

15. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}+a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n) & (a_{n+1}+a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1=1$일 때, $a_6=34$가 되도록 하는 모든 a_2의 값의 합은? [4점]

① 60 ② 64 ③ 68 ④ 72 ⑤ 76

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$a_{n+1}+a_n$이 짝수, 홀수에 대한 언급이 있으므로
두 수의 합의 홀짝성에 대해 점검하자.

짝+짝=짝
짝+홀=홀
홀+짝=홀
홀+홀=짝

a_{n+2}가 짝수이려면
<a_n=짝, a_{n+1}=짝> or <a_n=홀, a_{n+1}=홀>
만 가능!

why?
<a_n=짝, a_{n+1}=홀> or <a_n=홀, a_{n+1}=짝>
이면
$a_n+a_{n+1}=a_{n+2}$
짝 + 홀 = 홀

제시된 a_n의 숫자값도 아무 생각없이 보지 말고 홀짝을
고려할 생각을 해야 한다.
$a_1=1$=홀수
$a_6=34$=짝수
→ ㄱ) a_4=짝 a_5=짝 ㄴ) a_4=홀 a_5=홀

ㄱ) a_4=짝 a_5=짝

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6
짝←짝←짝←짝 짝 34
$a_1=1$이므로 모순

ㄴ) a_4=홀 a_5=홀

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6

i) 1 짝 불가능
ii) 1 홀 짝 =2k
iii) 1 짝 홀 홀 34
iv) 1 홀 홀 =2k−1

ii)

	홀	짝	홀	홀	34
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	$4k-1$ ←	$2k$	$6k-1$	$8k-1$	$7k-1$

∴ $a_6=34=7k-1 \Leftrightarrow k=5$
∴ $a_2=4k-1=19$

iii)

	짝	홀	홀	홀	34
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	$2k-2$ ←	$2k-1$	$4k-3$	$3k-2$	$\frac{7k-5}{2}$

∴ $a_6=34=\frac{7k-5}{2} \Leftrightarrow k=\frac{73}{7}$ ←자연수가 아님

iv)

	홀	홀	홀	홀	34
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	$4k-3$ ←	$2k-1$	$3k-2$	$\frac{5k-3}{2}$	$\frac{11k-7}{4}$

∴ $a_6=34=\frac{11k-7}{4} \Leftrightarrow k=13$
∴ $a_2=4k-3=49$

∴ 모든 a_2의 값의 합은
$49+19=68$

수학 영역

16. $\log_2 96 - \dfrac{1}{\log_6 2}$의 값을 구하시오. [3점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

4

$\log_2 96 - \dfrac{1}{\log_6 2} = \log_2 96 - \log_2 6 = \log_2 \dfrac{96}{6}$

$= \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

17. 직선 $y = 4x + 5$가 곡선 $y = 2x^4 - 4x + k$에 접할 때, 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

11

$f(x) = 2x^4 - 4x + k$라고 하자.

접점의 x좌표를 a라고 하면

$f'(a) = 8a^3 - 4 = 4$

$\therefore\ a = 1$

$f(1) = 4 + 5$

$\Leftrightarrow\ 2 - 4 + k = 9$

$\therefore\ k = 11$

18. n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$x^2 - 5nx + 4n^2 = 0$

의 두 근을 α_n, β_n이라 하자.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{7} (1-\alpha_n)(1-\beta_n)$의 값을 구하시오. [3점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

427

$x^2 - 5nx + 4n^2 = (x - \alpha_n)(x - \beta_n)$

$\Leftrightarrow\ (1-\alpha_n)(1-\beta_n) = 1 - 5n + 4n^2$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{7} (1-\alpha_n)(1-\beta_n) = \sum_{n=1}^{7} (1 - 5n + 4n^2)$

$= 7 - 5 \times \dfrac{7 \times 8}{2} + 4 \times \dfrac{7 \times 8 \times 15}{6} = 427$

19. 시각 $t = 0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$v_1(t) = 3t^2 - 15t + k, \quad v_2(t) = -3t^2 + 9t$

이다. 점 P와 점 Q가 출발한 후 한 번만 만날 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

18

시각 t에서 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하자.

(step1) 일상용어를 수학용어로 번역하기

시각 $t = 0$일 때 동시에 원점을 출발하여

$\Leftrightarrow$ 위치=0 $\Leftrightarrow$ $x_1(0) = x_1(0) = 0$

출발한 후

$\Leftrightarrow\ t > 0$

두 점 P, Q가 출발한 후 한 번만 만난다.

$\Leftrightarrow$ $t > 0$에서 $x_1(t) = x_2(t)$의 서로 다른 실근의 개수는 1

(step2) $x_1(t) = x_2(t)$ 계산하기

$x_1(t) = t^3 - \dfrac{15}{2}t^2 + kt$

$x_2(t) = -t^3 + \dfrac{9}{2}t^2$

$x_1(t) - x_2(t) = t(2t^2 - 12t + k) = 0$

$k > 0$이고 $t > 0$이므로

$2t^2 - 12t + k = 0$은 중근을 가져야 한다.

판별식을 계산하면

$\dfrac{D}{4} = (-6)^2 - 2 \times k = 0$

$\therefore\ k = 18$

수학 영역

20. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$인 삼차함수 $f(x)$와 양의 실수 p에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g'(0)=0$
>
> (나) $g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x<0) \\ f(x+p)-f(p) & (x \geq 0) \end{cases}$

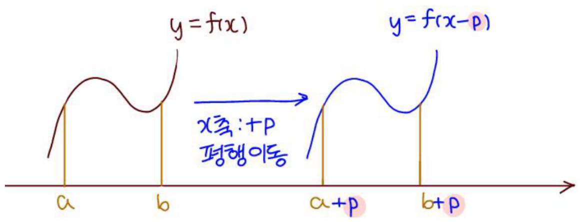
$\int_0^p g(x)dx=20$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

[4점]

Analysis

적분의 평행이동

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a+p}^{b+p} f(x-p)dx$$



수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

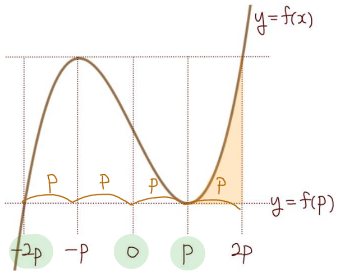
66

$$g'(x)=\begin{cases} f'(x-p) & (x<0) \\ f'(x+p) & (x \geq 0) \end{cases}$$

$g'(0)=0$

$\Leftrightarrow\ f'(-p)=f'(p)=0$

삼차함수의 2:1 비례관계



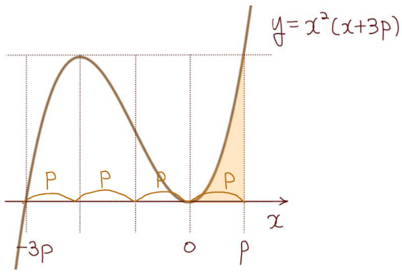
$x \geq 0$에서 $g(x)=f(x+p)-f(p)$이므로

$\int_0^p g(x)dx$

$=\int_0^p \{f(x+p)-f(p)\}dx$

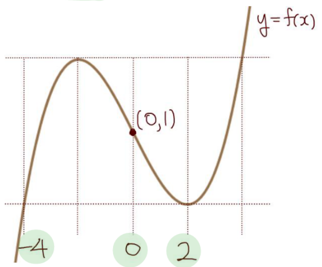
$=\int_p^{2p} \{f(x)-f(p)\}dx=20$

적분의 평행이동



$20=\int_0^p x^2(x+3p)dx=\left[\frac{x^4}{4}+px^3\right]_0^p=\frac{5}{4}p^4$

$\therefore\ p=2$

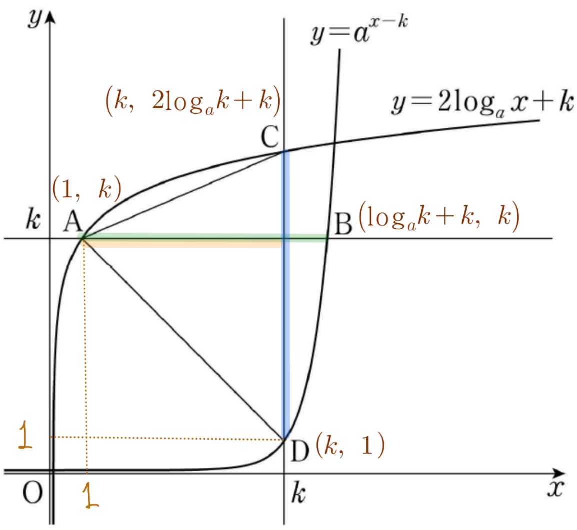


$\therefore\ f(x)=(x-2)^2(x+4)-15\ \ (\because\ f(0)=1)$

$\therefore\ f(5)=66$

수학 영역

21. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, k에 대하여 직선 $y=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}\times\overline{CD}=85$이고 삼각형 CAD의 넓이가 35일 때, $a+k$의 값을 구하시오. [4점]



수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

12

좌표평면에서 넓이
→ 길이를 구해야 한다
→ 점의 좌표를 구해야 한다.

두 점 C와 D의 x좌표는 모두 k이므로
$\mathrm{C}(k,\ 2\log_a k+k)$, $\mathrm{D}(k,\ 1)$

두 점 A와 B의 y좌표는 모두 k이므로
$\mathrm{A}(1,\ k)$, $\mathrm{B}(\log_a k+k,\ k)$

$\overline{AB}\times\overline{CD}=85$
$\Leftrightarrow (\log_a k+k-1)\times(2\log_a k+k-1)=85$
$\Leftrightarrow (p+q)(2p+q)=85$
$(\because \log_a k=p,\ k-1=q)$

CAD의 넓이가 35
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\times(2\log_a k+k-1)\times(k-1)=35$
$\Leftrightarrow (2p+q)q=70$

$(p+q)(2p+q)-(2p+q)q=85-70$
$\Leftrightarrow (2p+q)p=15$
$\Leftrightarrow \dfrac{(2p+q)q}{(2p+q)p}=\dfrac{q}{p}=\dfrac{70}{15}=\dfrac{14}{3}$
$\Leftrightarrow q=\dfrac{14}{3}p$

$\therefore p=\dfrac{3}{2}$, $q=7$, $k=8$

$\log_a k=p \Leftrightarrow \log_a 8=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow a^{\frac{3}{2}}=8 \Leftrightarrow a=4$
$\therefore a+k=4+8=12$

수학 영역

22. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다.
실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-t|$라 할 때, $\lim_{x \to k} \frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k의 개수를 $h(t)$라 하자.
함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{t \to 4+} h(t)=5$
>
> (나) 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$일 때, $f(4)+h(4)$의 값을 구하시오.
[4점]

[Killer Mind] 숫자의 일치는 우연이 아니다!

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

729

(step1) $\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$이 존재성 해석

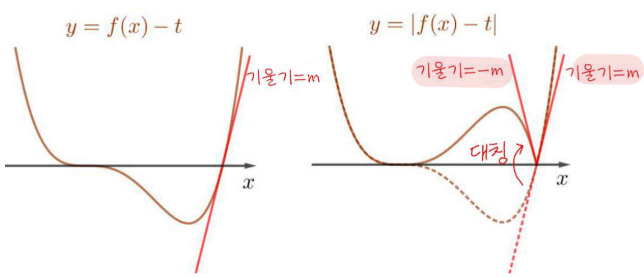
⇔ $-\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$

① $g'(k)=0$

② $x=k$에서 "-좌미분계수=우미분계수"

절댓값 함수의 뾰족점에서 "-좌미분계수=우미분계수"가 성립한다!

why? 그래프가 대칭되면 접선도 함께 대칭된다.

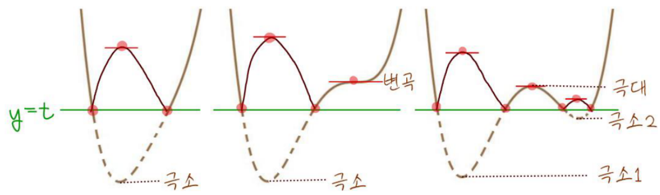


∴ h(t)는 y=|f(x)-t|에서 뾰족점 or 접선기울기=0 인 점의 개수

(step2) f(x) 그래프 개형 판단

y=|f(x)-t|에서 뾰족점 or 접선기울기=0 인 점의 개수

i) 최대 3개 ii) 최대 4개 iii) 최대 7개



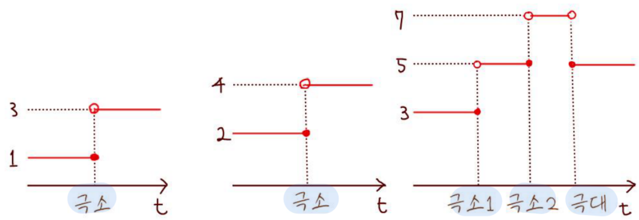
$\lim_{x\to 4+} h(t)=5$

불가능 불가능 가능

∴ f(x)는 W꼴

[참고] h(t) 그래프

i) ii) iii)

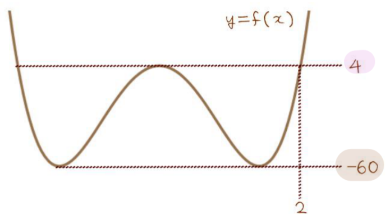


h(t)의 불연속점의 개수는 f(x)의 극값의 개수와 동일하다.

조건 (나)에서 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

⇔ 극소1=극소2

⇔ f(x)의 극솟값은 -60, 극댓값은 4

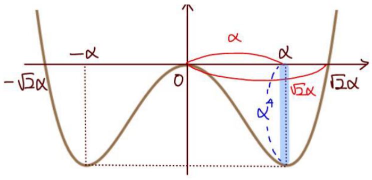


수학 영역

(step3)

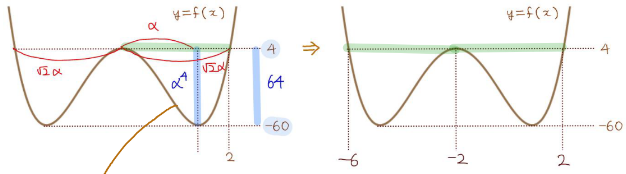
[개념] 사차함수는 극소가 동일하면 좌우대칭

[개념] 사차함수의 $\sqrt{2}:1$ 비례관계



$p(x)=(x-\sqrt{2}\alpha)x^2(x+\sqrt{2}\alpha)=(x^2-2\alpha^2)x^2$

극솟값 $p(\alpha)=-\alpha^2\alpha^2=-\alpha^4$



$\alpha^4=64$

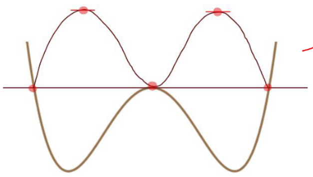
$\therefore\ \alpha=2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}\alpha=4$

$\therefore\ f(x)=(x+6)(x+2)^2(x-2)+4$

$\therefore\ f(4)=10\cdot 6^2\cdot 2+4=724$

$\therefore\ f(4)+h(4)=724+5=729$

※ t=4일 때, g(x)=|f(x)-4|



항상 응원하고 있을게!
다음 모의고사 해설도 기대해!