제 2 교시

수학 영역

KSM

5지선다형

1. 두 다항식

$$A=x^3+2x^2,\ B=2x^3-x^2-1$$

에 대하여 $A+B$를 간단히 하면? [2점]

① x^3-3x^2-1 ② x^3+x^2+1 ③ $3x^3+x^2-1$
④ $3x^3+x^2+1$ ⑤ $3x^3+3x^2-1$

2. 실수 x에 대한 조건

'x는 음이 아닌 실수이다.'

의 진리집합은? [2점]

① $\{x|x<0\}$ ② $\{x|x\leq 0\}$ ③ $\{x|x\neq 0\}$
④ $\{x|x\geq 0\}$ ⑤ $\{x|x>0\}$

3. ${}_5\mathrm{P}_3$의 값은? [2점]

① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60

4. 수직선 위의 두 점 A(-5), B(1)에 대하여 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점의 좌표는? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

$\frac{3+5}{2}=4$

5. $(\sqrt{2}+\sqrt{-2})^2$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [3점]

① $-4i$ ② $-2i$ ③ 0 ④ $2i$ ⑤ $4i$

$(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^2 = 2-2+4i$

$2 \cdot 2i$

6. $a+b=2$, $a^3+b^3=10$일 때, ab의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$10 = 8-6(a+b)$, $a+b=-\frac{1}{3}$

7. 점 $(6,\ a)$를 지나고 직선 $3x+2y-1=0$에 수직인 직선이 원점을 지날 때, a의 값은? [3점]

기울기 $-\frac{3}{2}$

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

수직 → 기울기 $\frac{2}{3}$

$y=\frac{2}{3}(x-6)+a$ $(0,0)$

$-4+a=0$, $a=4$

8. 이차함수 $y=x^2+ax+a^2$의 그래프가 직선 $y=-x$에 접하도록 하는 양수 a의 값은? [3점]

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

$x^2+(a+1)x+a^2=0$

$D=(a+1)^2-4a^2=0$

$3a^2-2a-1=0$

$3a \quad +1$

$a \quad -1 \qquad a=1$

9. 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(a,\ 4\sqrt{3})$에서의 접선의 방정식이 $x-\sqrt{3}y+b=0$일 때, $a+b+r$의 값은? (단, r는 양수이고, a, b는 상수이다.) [3점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

$a^2+48=r^2$

$ax+4\sqrt{3}y=r^2$ $\div(-4)$

$-\frac{a}{4}x-\sqrt{3}y+\frac{r^2}{4}=0$

$a=-4$

$r^2=64 \quad b=16 \qquad -4+16+8=20$

10. 삼차방정식 $x^3+2x-3=0$의 한 허근을 $a+bi$라 할 때, a^2b^2의 값은? (단, a, b는 실수이고, $i=\sqrt{-1}$이다.) [3점]

① $\frac{11}{16}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{13}{16}$ ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{15}{16}$

$(x-1)(x^2+x+3)=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{11}}{2}i$

$a^2=\frac{1}{4}$

$b^2=\frac{11}{4}$ $\qquad \frac{11}{16}$

11. 전체집합 $U=\{x|x$는 50 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합

$A=\{x|x$는 30의 약수$\}$, $B=\{x|x$는 3의 배수$\}$

에 대하여 $n(A^C \cup B)$의 값은? [3점]

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

1 2 3 5 6 10 15 30

A B

1 2 5 10

3 6 15 30

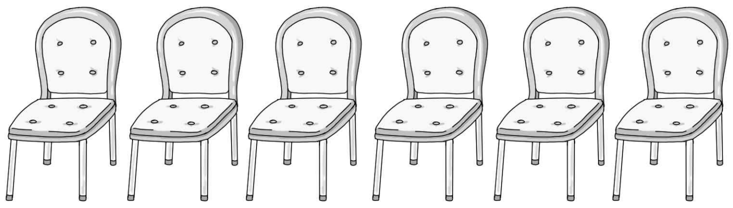
9 12 18 21 24 27

$50-4=46$

12. 1학년 학생 2명과 2학년 학생 4명이 있다. 이 6명의 학생이 일렬로 나열된 6개의 의자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 앉는 경우의 수는? [3점]

(가) 1학년 학생끼리는 이웃하지 않는다. (나) 양 끝에 있는 의자에는 모두 2학년 학생이 앉는다.

① 96 ② 120 ③ 144 ④ 168 ⑤ 192



(나) $_4P_2$

$\vee 2_A \vee 2_B \vee$

$2! \times {}_3P_2 = 12$

$_4P_2 \times 12 = 144$

13. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 X에서 X로의 세 함수 $f,\ g,\ h$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) f는 항등함수이고 g는 상수함수이다.
> (나) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여
> $f(x)+g(x)+h(x)=7$
> 이다.

$g(3)+h(1)$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

	f	g	h
1	1	1	5
2	2	1	4
3	3	1	3
6	4	1	2
5	5	1	1

$1+5=6$

14. x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x^2+3x-10<0 \\ ax \geq a^2 \end{cases}$$

을 만족시키는 정수 x의 개수가 4가 되도록 하는 정수 a의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$(x+5)(x-2)<0$

$-5<x<2$

i) $a=0 \rightarrow ax \geq a^2$ 모든실수 $\rightarrow -5<x<2$ 6개 (x)

(ii) $a>0 \rightarrow \begin{cases} x \geq a \\ -5<x<2 \end{cases}$ 정수 4개: $-2, -1, 0, 1$

$a=-2$ (x) ($\because a>0$)

(iii) $a<0 \rightarrow \begin{cases} x \leq a \\ -5<x<2 \end{cases}$ 정수 4개: $-4, -3, -2, -1$

$a=-1$

15. 다항식 $P(x)$와 상수 a에 대하여 등식

$$x^3 - x^2 + 3x - 2 = (x+2)P(x) + ax$$

가 x에 대한 항등식일 때, $P(-2)$의 값은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

$-2 \to -8-4-6-2=-2a, \ a=10$

$x^3-x^2-7x-2 = (x+2)P(x)$

$(x+2)(x^2-3x-1) = (x+2)P(x)$

$P(-2) = 4+6-1 = 9$

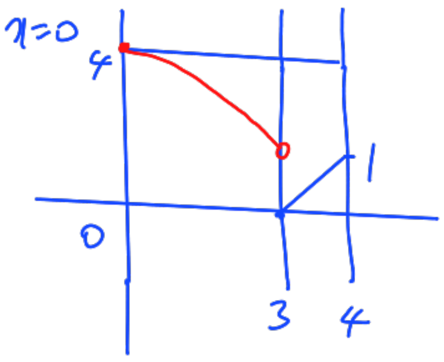
16. 집합 $X = \{x \mid 0 \le x \le 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & (0 \le x < 3) \\ x - 3 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$

가 일대일대응일 때, $f(1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

대칭축 $x=0$



$(0,4), (3,1) \to y = -\frac{1}{3}x^2 + 4$

$f(1) = -\frac{1}{3} + 4 = \frac{11}{3}$

17. 다음 조건을 만족시키는 허수 z가 존재하도록 하는 두 정수 m, n에 대하여 $m+n$의 최솟값은? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [4점]

(가) $z^2+mz+n=0$
(나) $z+\bar{z}=8$

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 11

$z=4+bi\ (b\neq0)$
$\bar{z}=4-bi$

(가) $16-b^2+8bi+4m+bmi+n=0$
$(16-b^2+4m+n)+bi(8+m)=0$
$m=-8$
$n-b^2-16=0$
$n-b^2=16$　　n　b^2
　　　　　　17　1　$(1\neq0)$

$m+n=9$

18. 실수 x에 대한 두 조건

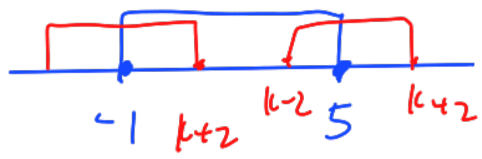
$p:\ |x-k|\le 2,$

$q:\ x^2-4x-5\le 0$

이 있다. 명제 $p\to q$와 명제 $p\to\sim q$가 모두 거짓이 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은? [4점]

① 14　② 16　③ 18　④ 20　⑤ 22

간격: 4
$p:\ k-2\le x\le k+2$
$q:\ -1\le x\le 5$



$k+2=-1, 0, 1, 2, 6, 7, 8, 9$
$k=-3, -2, -1, 0, 4, 5, 6, 7$
16

19. 다음 조건을 만족시키는 집합 A의 개수는? [4점]

(가) $\{0\} \subset A \subset \{x \mid x$는 실수$\}$
(나) $a^2-2 \notin A$이면 $a \notin A$이다.
(다) $n(A)=4$

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

(나) 대우 $a \in A \to a^2-2 \in A$

$0 \in A \to -2 \in A \to 2 \in A$

$0, -2, 2$: 필수 & 1개 더

i) $a=a^2-2$, $a^2-a-2=0$
$a=-1, 2$ ∴ $\{0, -2, 2, -1\}$

ii) $a \in A \to a^2-2 \in A$
$a^2-2 = 0, -2, 2$

$a^2=2, 0, 4$
$a=\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0, 2, -2$
가능

$\{0, -2, 2, \sqrt{2}\}$
$\{0, -2, 2, -\sqrt{2}\}$

3개

20. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -(x-a)^2+b & (x \le a) \\ -\sqrt{x-a}+b & (x > a) \end{cases}$$

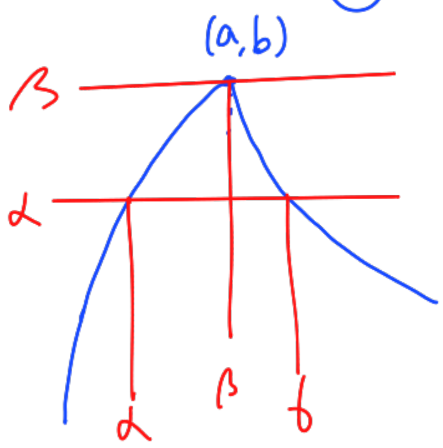
와 서로 다른 세 실수 α, β, γ가 다음 조건을 만족시킨다.

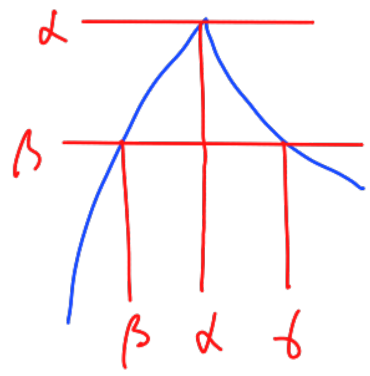
(가) 방정식 $\{f(x)-\alpha\}\{f(x)-\beta\}=0$을 만족시키는 실수 x의 값은 α, β, γ뿐이다.
(나) $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$

$f(x)=\alpha$
$f(x)=\beta$

$\alpha+\beta+\gamma=15$일 때, $f(\alpha+\beta)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5





$a=b=\beta$

$-(\alpha-\beta)^2+\beta=\alpha$

$-\sqrt{\gamma-\beta}+\beta=\alpha$

$\gamma-\beta=(\alpha-\beta)^2=\beta-\alpha$

$\alpha+\gamma=2\beta$

∴ $\alpha+\beta+\gamma=3\beta=15$
$\beta=5$

$-(\alpha-5)^2=\alpha-5$

$\alpha^2-9\alpha+20=0$

$(\alpha-4)(\alpha-5)=0$

$\alpha=4$ ($\because \alpha \ne \beta$)

$f(\alpha+\beta)=f(9)=-\sqrt{9-5}+5$

$=3$

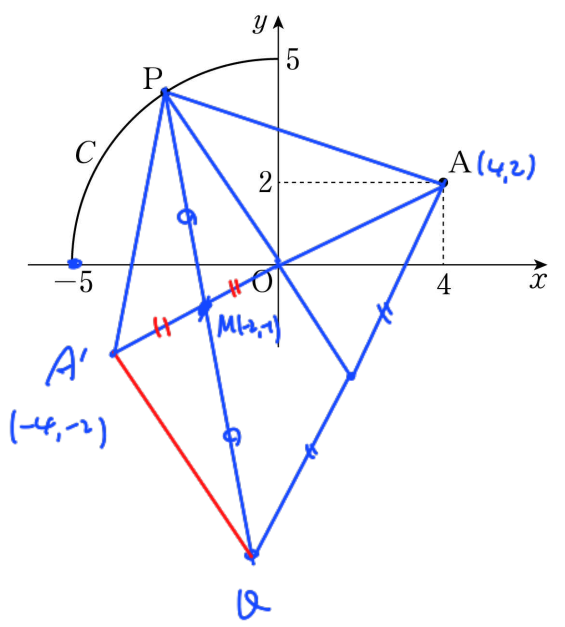
$x>5 \to f(x)=-\sqrt{x-5}+5$

21. 좌표평면 위에 사분원의 호 $C: x^2+y^2=25\,(x \le 0,\ y \ge 0)$과 점 A(4, 2)가 있다. 호 C 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 Q를 삼각형 APQ의 무게중심이 원점과 일치하도록 잡는다. 점 A를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. 선분 PQ의 중점의 좌표는 $(-2,\ -1)$이다.
ㄴ. 선분 A′Q의 길이는 항상 일정하다.
~~ㄷ~~. 삼각형 A′QP의 넓이의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$이라 할 때, $M \times m = 20\sqrt{5}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



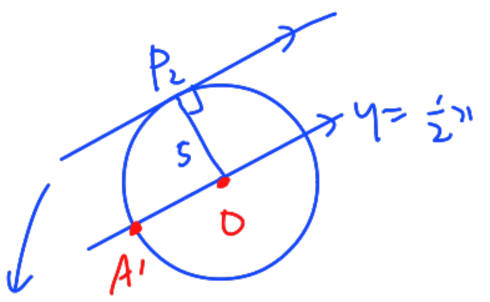
ㄴ. $\triangle A'MQ \equiv \triangle OMP$ $\therefore \overline{A'Q}=\overline{PO}=5$

ㄷ. $\triangle A'QP = \triangle A'OP$, $\overline{A'O}=2\sqrt{5}$, $AA': y=\frac{1}{2}x$

최소 $P_1(-5,0) \rightarrow (-5,0) \sim x-2y=0$ $\frac{|-5|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}=h$

$m=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$

최대



기울기 $\frac{1}{2}$, 거리=5 $M=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 5=5\sqrt{5}$

$\therefore Mm=25\sqrt{5}$

단답형

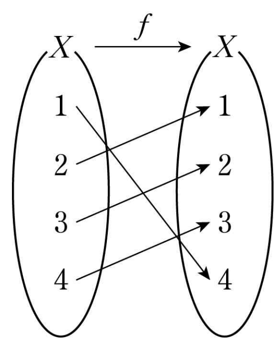
22. 두 집합

$A=\{-7,\ -5,\ 3\}$, $B=\{-7,\ -5,\ 9\}$

에 대하여 집합 $A \cap B$의 모든 원소의 곱을 구하시오. [3점]

$\boxed{35}$

23. 그림은 함수 $f: X \rightarrow X$를 나타낸 것이다.



$(f \circ f)(1)+f^{-1}(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{5}$

$3+2$

24. 다항식 $P(x)$를 x^2+3으로 나눈 몫이 $3x+1$, 나머지가 $x+5$일 때, $P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하시오. [3점]

$\boxed{22}$

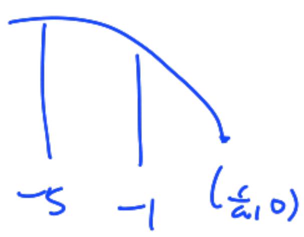
$P(x) = (x^2+3)(3x+1)+x+5$

$P(1) = 4\times4+6 = 22$

25. $-5 \le x \le -1$에서 함수 $f(x)=\sqrt{-ax+1}$ $(a>0)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{3}$

$\sqrt{-a(x-\frac{1}{a})}$



$-5 \to \sqrt{5a+1} = 4 \quad a=3$

26. 좌표평면 위의 네 점

A(0, 1), B(0, 4), C($\sqrt{2}$, p), D($3\sqrt{2}$, q)

가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 직선 CD의 기울기는 음수이다.
> (나) $\overline{AB}=\overline{CD}$이고 $\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$이다.

$\boxed{9}$

(가) $\frac{q-p}{2\sqrt{2}} < 0 \to q<p$

(나) $3 = \sqrt{8+(p-q)^2}$, $(p-q)^2 = 1$

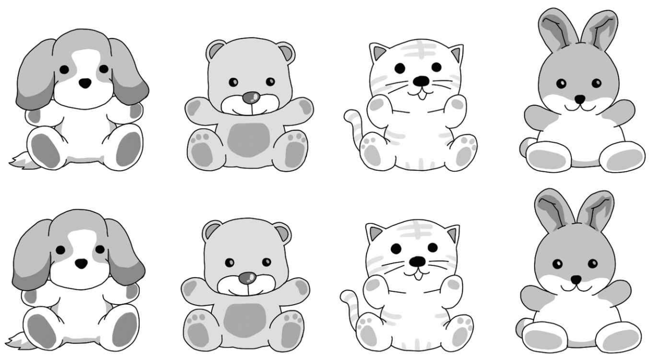
$p-q=1$

$\frac{q-1}{3\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{p-4}{\cancel{\sqrt{2}}}$

$3p-12 = q-1$, $3p-q=11$

$p=5$
$q=4$

27. 서로 다른 네 종류의 인형이 각각 2개씩 있다. 이 8개의 인형 중에서 5개를 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 종류의 인형끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점] $\boxed{16}$



i) 4종류

AABCD → ${}_4C_1 \times 1 = 4$

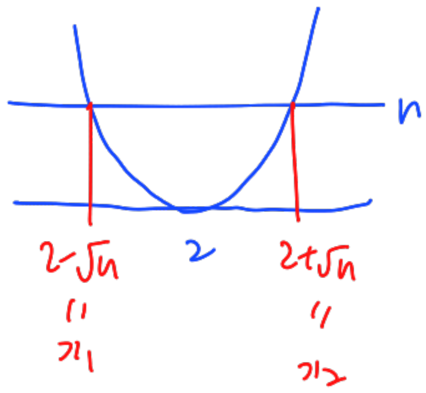
ii) 3종류

AABBC → ${}_4C_3 \times {}_3C_1 = 12$

16

28. 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$이 이차함수 $y=x^2-4x+4$의 그래프와 만나는 두 점의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하자. $\dfrac{|x_1|+|x_2|}{2}$의 값이 자연수가 되도록 하는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점] $\boxed{12}$

$y=(x-2)^2$



$(x-2)^2=n$

$x-2=\pm\sqrt{n}$

$x=2\pm\sqrt{n}$

$1 \le n \le 4$ → $|x_1| = 2-\sqrt{n}$, $|x_2| = 2+\sqrt{n}$) $\frac{4}{2}=2$ (ok) 4개

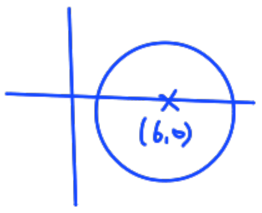
$n \ge 5$ → $|x_1| = -2+\sqrt{n}$, $|x_2| = 2+\sqrt{n}$) $\frac{2\sqrt{n}}{2}=\sqrt{n}$

$n = 3^2, 4^2, \cdots, 10^2$ 8개

$4+8=12$개

29. 원 $(x-6)^2+y^2=r^2$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하고, 점 Q를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(x_2,\ y_2)$라 하자. $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$의 최솟값이 0이고 최댓값이 $\dfrac{4}{3}$일 때, $|r+k|$의 값을 구하시오. (단, $x_1 \neq x_2$이고, r는 양수이다.) [4점]

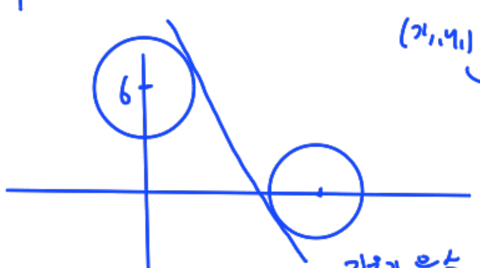
$\boxed{15}$



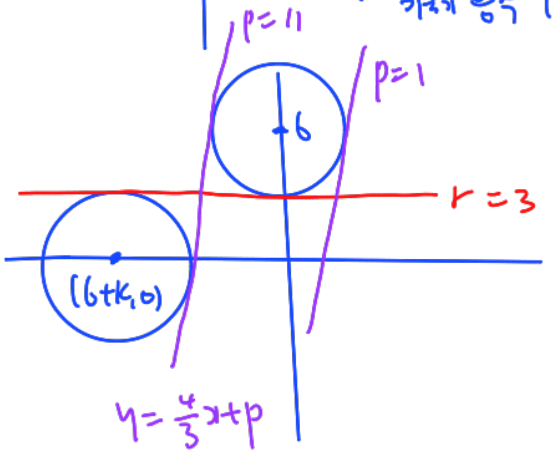
$(x_1,y_1) \to x^2+(y-6)^2=r^2$ 위

$(x_2,y_2) \to (x-6-k)^2+y^2=r^2$ 위

$(x_1,y_1), (x_2,y_2)$ 기울기 $=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$



기울기 음수 (x)



$(0,6) \sim 4x-3y+3p=0$ $\quad \dfrac{|-18+3p|}{5}=3,\ |p-6|=5$

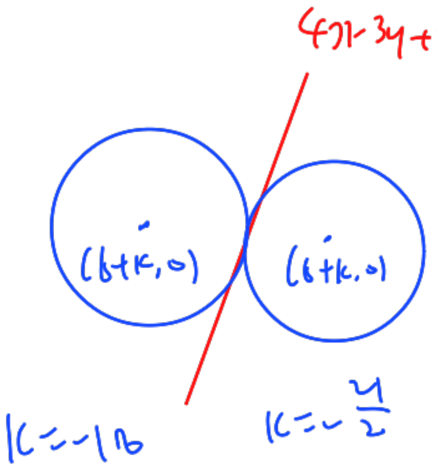
$p=11,\ 1 \quad \therefore p=11$

$(6+k,0) \sim 4x-3y+33=0 \quad \dfrac{|24+4k+33|}{5}=3$

$|4k+57|=15,\ 4k=-42,\ -72$

$k=-\dfrac{21}{2},\ -18$

$4x-3y+33=0$



$\therefore k=-18$

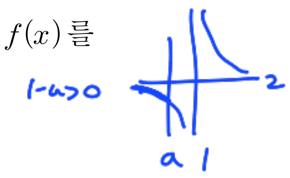
$|r+k|=|3-18|=15$

30. 두 실수 $a\,(a<1)$, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-a}{x-1}+2 & (x \le a) \\ bx(x-a)+1 & (x>a) \end{cases}$$

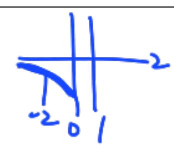
라 하자. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 a, b의 모든 순서쌍이 $(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$일 때, $-40\times(a_1+b_1+a_2+b_2)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{250}$

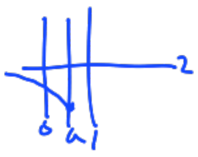


(가) $x \le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge f(-2)$이다.
(나) 방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

i) $a=0 \to$ (가) X

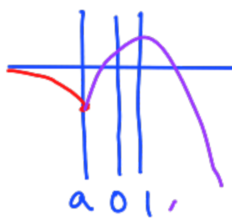


ii) $0<a<1 \to$ (가) X



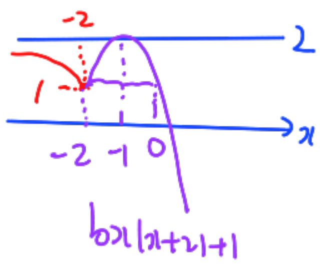
iii) $a<0$

①



$a=-2$

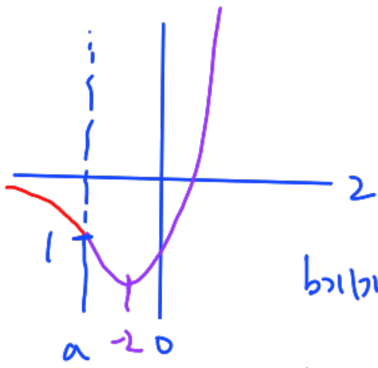
$(-2,1)$



$x=-1 \to -b+1=2,\ b=-1$

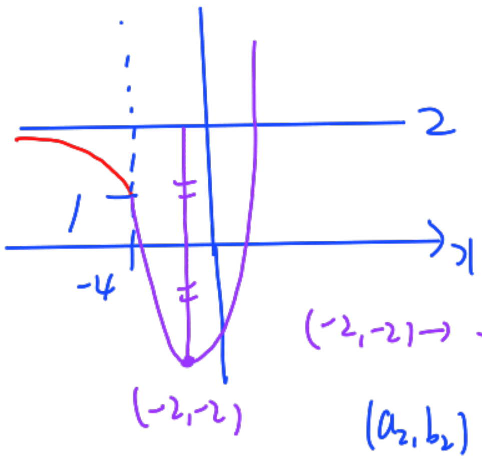
$(a_1,b_1)=(-2,-1)$

②



$bx(x-a)+1$ 대칭축 $\dfrac{a}{2}=-2,\ a=-4$

$bx(x+4)+1$



$(-2,-2) \to -4b+1=-2,\ b=\dfrac{3}{4}$

$(a_2,b_2)=\left(-4,\ \dfrac{3}{4}\right)$

$-40\left(-2-1-4+\dfrac{3}{4}\right)=250$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.