#1 갈수록 1번이 복잡해지는 것 같긴 한데 차분히 계산하시면 됩니다. 거듭제곱근은 유리수 지수로 바꿔주고, 밑 똑같게 잡은 후에 지수 법칙 쓰고

#2 f(x)가 실수 전체의 집합에서 미분가능하니 f'(x) 구해서 x=1 대입

#3 a_7, a_6을 a_5에 관해 공비 r로 잡고 표현하면 r에 관한 이차방정식 나옵니다.

#4 정적분으로 정의된 함수이니 x=1 대입해 적분 구간 0 만들어주고 양변 미분

#5 각변환 해 theta값 잡고 theta 위치 잡아주면 끝

#6 [f(x)]^2 식 작성하고 연속 정의 쓰면 되겠죠? 혹은 극한값, 함숫값부터 구한 후에 제곱해도 문제없습니다

#7 직접 적분해도 되고 직사각형과 이차함수의 넓이 공식으로 바라봐도 굿

#8 단순 계산. 내분 공식 기억하시죠?

#9 절댓값 안의 식을 x^2(x-3)+p로 잡아주면 y=p를 x축 삼아 y=x^2(x-3)를 그릴 수 있습니다. P에 적당한 값을 대입해 생각해보면 주어진 삼차함수의 극댓값과 극솟값이 핵심임을 확인할 수 있는데 미분없이 극소일 때의 x값이 2임을 확인할 수 있으니 (비율 관계에 의해) 조금이나마 계산량을 줄여주는 유의미한 작업입니다. 이후 p=0과 p=4일 때를 경계로 0<p<4여야 극대가 두 번 존재할 수 있고 p=2여야 두 극댓값이 일치함을 확인할 수 있습니다. (pdf 참고)

#10 (가)는 네 가지 경우가 존재합니다. (+, +) or (+, -) or (-, +) or (- ,-). 각각의 경우에서 a_5=4 or d=-4, d=4, a_5=-4를 얻을 수 있고 공차가 양수이므로 a_5=4 or d=4가 남습니다. (나)에서 a_5=3이므로 a_5=4일 때는 모순이고 d=4입니다.

#11 삼각형 ABC에서 cos법칙을 통해 AC를 구할 수 있습니다. 삼각형 BPC에서 sin법칙 혹은 cos법칙을 통해 PC의 길이를 구할 수 있고 다시 삼각형 ABC에서 cos법칙과 그림을 통해 각 ACB에 대한 정보를 확인할 수 있습니다. 이때 각 ACB와 각 BCP의 크기의 차이가 특수각이므로 삼각형 APC에서 각 ACP의 sin값을 활용해 넓이를 구할 수 있습니다. (pdf 참고)

#12 A의 x좌표를 alpha, B의 x좌표를 beta라 두고 직선의 기울기가 1임을 활용하면 alpha+beta=1. 이때 sqrt2(beta-alpha)=2t이고 g(t)=(alpha)^2-alpha이므로 식을 정리하면 g(t)=0.5t^2-0.25 (pdf 참고)

#13 (가)에서 a=1/2 or a=3/2. (나)에서 방정식 f(x)=0의 근을 alpha, beta라 할 때 방정식 g(x)=alpha or g(x)=beta의 근이 합해서 5pi/2 되려면 alpha=-1, beta=1/2가 되어야

#14 구간 별로 각각 정의된 함수가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 f(x)도 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 '구간 별 함수의 미분가능성'에 따라 k^2=3b. (pdf 참고)

#15 차분히 case 분류 해보자. 홀수에 홀수를 더하면 짝수, 홀수에 짝수를 더하면 홀수, 짝수에 홀수를 더하면 홀수, 짝수에 짝수를 더하면 짝수. (주의: 정신을 똑바로 차릴 것)

#16 밑변환 공식 적용 후, 밑이 같은 로그끼리 빼니 진수끼리 나눠주기

#17 접점의 x좌표를 u라 하고 함숫값과 미분계수값이 같음을 활용

#18 a_n=n, b_n=4n이라 하자

#19 x_1 (t)와 x_2 (t)를 작성해 그래프 그려 비교해보자, k값 결정 가능

#20 (가)에서 g'(0)이 존재함을 알았기에 (나)에서 f'(p)=f'(-p)=0. f'(x)=3(x^2-p^2)이고 g(x)는 간단하게 작성할 수 있다. 적분값 통해 p 결정하면 f(x)도 결정된다. (pdf 참고)

#21 미지수 두 개에 조건 두 개이니 결정될 것. k-1+2log_a k가 약분될 수 있도록 식 조작 해준 후 log_a k를 3(k-1)/14로 잡아 한 쪽에 넣어 정리해주면 k=8, a=4

#22 극한식의 분모에 절댓값이 있으니 극한을 우극한과 좌극한으로 나누어 바라봐 절댓값을 풀어봅시다. 극한이 존재하려면 g(x)의 x=k에서의 평균변화율의 우극한과 좌극한이 존재하고 이 둘을 합한 값이 0이어야 함을 알 수 있습니다. 다시 말해 h(t)는 방정식 f(x)=t의 해와 방정식 f’(x)=0의 해의 합집합의 원소의 개수와 같습니다. (가)는 별 거 없으니 (나)부터 생각해보면 세 가지 경우가 가능하고 이때 (가)에서 한 가지 경우로 특정할 수 있습니다. (pdf 참고)

#23 분모 분자 n^2으로 나누어주고 lim 분배

#24 각 식을 3^(n+1)+2^n으로 나누어준 후 샌드위치 정리

#25 a_n=pn+q로 잡으면 p 결정 가능

#26 수학에서 중요한 건 내가 알고 있는 것으로 내가 모르는 것처럼 보이는 것을 표현해보는 것이다. 또한 극한 문제에서는 각각이 수렴해야 lim를 분배해 계산할 수 있다. 혹은 대충 a_n~3/n^2, b_n~-11/(4n^2) (pdf 참고)

#27 a_n/b_n을 n에 관해 표현해보자. a_1, a_2를 통해 b_n을 결정할 수 있고 그에 따라 a_n도 결정 가능. / 등차수열은 정의역이 자연수 집합인 일차함수이므로 일차함수가 두 가지 정보만 주어지면 식을 작성할 수 있듯이 등차수열도 두 가지 정보만 주어지면 식을 작성할 수 있다.

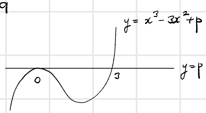
#28 a가 결정되지 않았으므로 0<a<1과 a>1로 범위 나누어 그래프 그리고 차분히 생각해보자. 사다리꼴 넓이 공식은 기억하고 있거나 유도할 줄 알아야한다! (pdf 참고)

#29 이차식은 방정식이든 부등식이든 완전제곱식꼴에 상수 더한 것으로 볼 수 있다. a_n=4n+1. 대충 sqrt(4n^2+n)~2n이면 2n과 pn을 비교하는 것이니 p=/0면 n->inf일 때 비슷한 속도로 무한대로 갈 것. 무한대-무한대 꼴에 루트 있으니 유리화 해보자

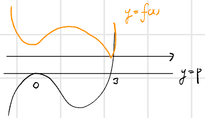
#30 등비수열이 있으니 x에 따라 f(x)를 작성해보자. f(x) 그래프를 그려두고 k=1, 2, 3, ... 대입하며 g(x)를 작성해보자. y=0과 y=x, y=-x가 적당히 구간 별로 끊긴 함수이며 방정식 g(x)=t (0<t<10) 의

근이 존재하지 않도록 하는 t=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

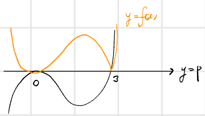
#9



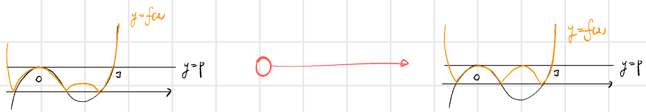

$p < 0$,



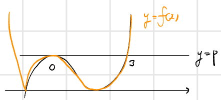

$p = 0$,



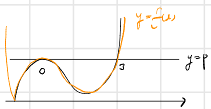

$0 < p < 4$,



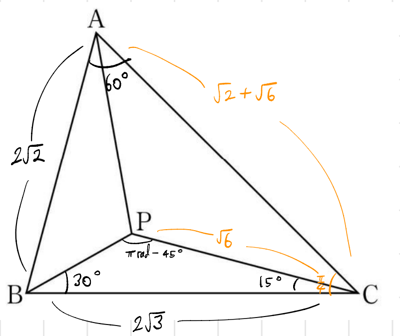

$p = 4$,




$p > 4$,



#11




$\triangle ABC$, $(2\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{2})^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AC} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 - 2\sqrt{2}\,\overline{AC} - 4 = 0$

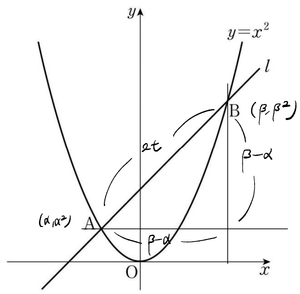
$\overline{AC} = \sqrt{2} + \sqrt{6} \quad (\overline{AC} > 0)$

$\triangle BPC$, $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin(\pi \text{ rad} - 45°)} = \dfrac{\overline{PC}}{\sin 30°}$, $\overline{PC} = \sqrt{6}$

$\triangle ABC$, $(2\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{6}) \cdot \cos C$, $\cos C = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (그림에서 $0 < C < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $C = \frac{\pi}{4}$)

$\triangle APC = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2}) \cdot \sqrt{6} \cdot \sin(45° - 15°)$

#12




$$\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha} = \beta+\alpha = 1$$

$$\sqrt{2}(\beta-\alpha) = 2t$$

$$l: \ y = (x-\alpha) + \alpha^2, \quad g(t) = \alpha^2 - \alpha$$

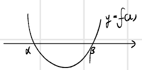
$$\rightarrow \alpha = \frac{1-\sqrt{2}t}{2}, \quad g(t) = \frac{2t^2-1}{4}$$

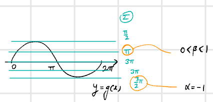
#13

(가) $(\sin(a\pi))^2 = 1 \iff \sin(a\pi) = 1$ or $\sin(a\pi) = -1$

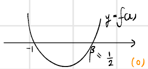
$\iff a = \frac{1}{2}$ or $a = \frac{3}{2}$ $(0 \le a \le 2)$

(나)

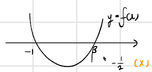



i) $a=\frac{1}{2}$




ii) $a=\frac{3}{2}$



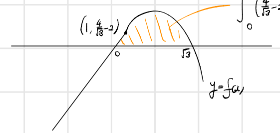
#14

$$f(x) = \begin{cases} ax & (x<k) \\ -(x-b)(x-3b) & (x \ge k) \end{cases}$$ 가 미분 가능한 함수 $\longrightarrow \begin{cases} ak = -k^2 + 4bk - 3b^2 \\ a = -2k + 4b \end{cases} \Leftrightarrow k = \sqrt{3}\,b \quad (k>0,\ b>0)$

ㄱ. $f'(k)\big|_{a=1} = a\big|_{a=1} = 1$

ㄴ. $k = 3,\ b = \sqrt{3},\ a = 4\sqrt{3} - 6$

ㄷ. $k=1,\ b = \frac{1}{\sqrt{3}},\ a = \frac{4}{\sqrt{3}} - 2$ 이면 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - 2\right)x & (x<1) \\ -\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(x - \sqrt{3}) & (x \ge 1) \end{cases}$




$$\int_0^1 \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - 2\right)x\,dx + \int_1^{\sqrt{3}} -\left(x^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}x + 1\right)dx$$

#15

$a_3 = \begin{cases} a_2+1 & (a_2\text{가 짝수}) \\ \dfrac{a_2+1}{2} & (a_2\text{가 홀수}) \end{cases}$ , $34 = \begin{cases} a_5+a_4 & (a_5+a_4\text{가 홀수}) \\ \dfrac{a_5+a_4}{2} & (a_5+a_4\text{가 짝수}) \end{cases}$

i) $a_2$가 홀수

$a_3 = \dfrac{a_2+1}{2}$

- 홀: $a_4 = \dfrac{a_2+a_3}{2} = \dfrac{3a_2+1}{4}$
  - 홀: $a_5 = \dfrac{a_3+a_4}{2} = \dfrac{5a_2+3}{8}$
    - 홀: $34 = \dfrac{a_4+a_5}{2} = \dfrac{11a_2+5}{16}$ , $\boxed{a_2 = 49}$
    - 짝: $34 = a_4+a_5 = \dfrac{11a_2+5}{8}$ $(X, a_2 \in N)$
  - 짝: $a_5 = a_3+a_4 = \dfrac{5a_2+3}{4}$
    - 홀: $34 = a_4+a_5 = 2a_2+1$ $(X, a_2 \in N)$
    - 짝: $34 = \dfrac{a_4+a_5}{2} = a_2+\dfrac{1}{2}$ $(X, a_2 \in N)$
- 짝: $a_4 = a_2+a_3 = \dfrac{3a_2+1}{2}$
  - 홀: $a_5 = a_3+a_4 = 2a_2+1$ —홀— $34 = \dfrac{a_4+a_5}{2} = \dfrac{3.5a_2+1.5}{2}$ , $\boxed{a_2 = 19}$
  - 짝: $a_5 = \dfrac{a_3+a_4}{2} = a_2+\dfrac{1}{2}$ $(X, a_5 \in N)$

ii) $a_2$가 짝수

$\underset{\text{홀}}{a_3 = a_2+1}$ , $\underset{\text{홀}}{a_4 = 2a_2+1}$ , $a_5 = \dfrac{3a_2+2}{2}$

- 홀: $34 = \dfrac{3.5a_2+2}{2}$ $(X, a_2 \in N)$
- 짝: $34 = 3.5a_2+2$ $(X, a_2 \in N)$

\#20

(가) $g(x)$는 $x=0$ 에서 미분가능, 미분계수는 0

(나)

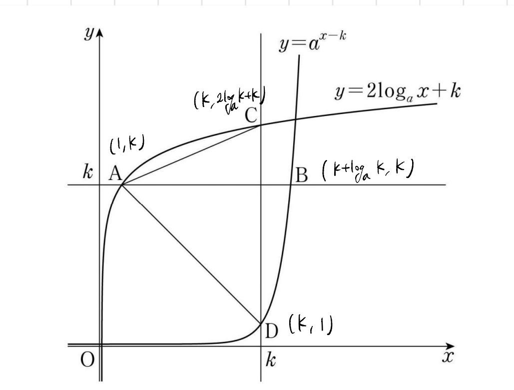
$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+}\frac{f(x+p)-f(p)}{x} = f'(p)$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-}\frac{f(x-p)-f(-p)}{x} = f'(-p)$$

$f'(p)=f'(-p)=0$ 이므로 $f'(x)=3(x^2-p^2)$, $f(x)=x^3-\frac{3}{2}p^2x+1$ $\longrightarrow$ $g(x)=\begin{cases} x^2(x-3p) & (x<0) \\ x^2(x+3p) & (x\geq 0)\end{cases}$

$$\int_0^p g(x)\,dx = \int_0^p x^2(x+3p)\,dx$$

\#21




$$\begin{cases} (k+\log_a k-1)\cdot(k+2\log_a k-1) = 85 \\ \frac{1}{2}\cdot(k+2\log_a k-1)\cdot(k-1) = 35 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ $\frac{\log_a k}{k-1} = \frac{3}{14}$, $a = k^{\frac{14}{3(k-1)}}$

$\longrightarrow$ $k=8$, $a=4$

#22

$\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$ $\left\langle \begin{array}{l} \lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k} \\ -\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k} \end{array}\right.$

가 존재하려면 $\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}+\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=0$

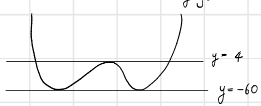
$\Leftrightarrow$ $g(x)$ 의 평균변화율의 우극한과 좌극한이 존재하며

부호는 다르지만 크기는 같아야 or $g'(0)=0$

$\Leftrightarrow$ 방정식 $f(x)=t$ 의 해 $x=x_1, x_2, \cdots, x_n$ $\oplus$ $f'(x)=0$ 의 해 $x=y_1, y_2, \cdots, y_n$

$A=\{x \mid f(x)=t\}$, $B=\{x \mid f'(x)=0\}$ 일때 $h(t)=n(A\cup B)$

(나)




$$h(t)=\begin{cases} 3 & (t\le -60) \\ 7 & (-60<t<4) \\ 5 & (t\ge 4) \end{cases}$$


or


$$h(t)=\begin{cases} 2 & (t\le -60) \\ 4 & (-60<t<4) \\ 2 & (t=4) \\ 4 & (t>4) \end{cases}$$

(가)


$f(x)-4=(x-p)^2\left(x-(p+\sqrt{2}a)\right)\left(x-(p-\sqrt{2}a)\right)$

$f(p+a)=-60$ 에 의해 $a=2^{\frac{3}{2}}$.

$f(2)=4$ 에 의해 $p+\sqrt{2}a=2$ 이고 $p=-2$.

#26

$$\lim_{n\to\infty}(4n^2+1)(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty}\left((n^2+1)a_n \cdot \frac{4n^2+1}{n^2+1} + (4n^2+1)b_n\right) = 1 \qquad \lim_{n\to\infty}(4n^2+1)b_n = -11$$

$1 = \lim_{n\to\infty} 1$ 로 보고 양변에 $\lim_{n\to\infty}(n^2+1)a_n \cdot \frac{4n^2+1}{n^2+1}$ 빼주기

$$\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)(a_n+2b_n) = \lim_{n\to\infty}\left((n^2+1)a_n \cdot \frac{2n^2+1}{n^2+1} + (4n^2+1)b_n \cdot \frac{2(2n^2+1)}{4n^2+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}(n^2+1)a_n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2+1} + \lim_{n\to\infty}(4n^2+1)b_n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{2(2n^2+1)}{4n^2+1}$$

$$= 3 \cdot 2 + (-11) \cdot 1$$

$$= -5$$

⊕ $\lim_{n\to\infty}(n^2+1)a_n = 3 \longrightarrow a_n \sim \frac{3}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty}(4n^2+1)(a_n+b_n) \sim \lim_{n\to\infty} 4n^2\left(\frac{3}{n^2}+\frac{11}{\infty}\right) = 1 \longrightarrow b_n \sim -\frac{11}{4n^2}$

$\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)(a_n+2b_n) \sim \lim_{n\to\infty} 2n^2\left(\frac{3}{n^2} - 2\cdot\frac{11}{4n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} -5 = -5$

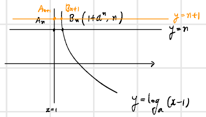
#27

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k} = \frac{6}{n+1} \longrightarrow \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 3 & (n=1) \\ \frac{6}{n+1} - \frac{6}{n} & (n\geq 2) \end{cases} \xrightarrow{a_1=3,\ a_2=-4} b_1=1,\ b_2=4 \longrightarrow \begin{aligned} a_n &= -6\cdot\frac{3n-2}{n(n+1)} \\ b_n &= 3(n-1)+1 \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} -6\cdot\frac{(3n-2)^2}{n(n+1)} = -54$$

\# 28

i) $0<a<1$




$A_n(1, n)$

$B_n(1+a^n, n)$

$B_{n+1}(1+a^{n+1}, n+1)$

$A_{n+1}(1, n+1)$

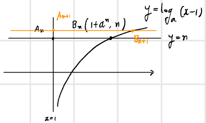
$\square A_nB_nB_{n+1}A_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\overline{A_nB_n} + \overline{A_{n+1}B_{n+1}}\right)\cdot\overline{A_nA_{n+1}}$

$= \frac{1}{2}(a^n + a^{n+1})\cdot 1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(1-a)^2a^{2n}+1}}{\frac{1+a}{2}\cdot a^n} = \frac{2(1-a)^2}{1+a} = \frac{3}{2a+2}$$

, $a = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(0<a<1)$

ii) $a>1$




$A_n(1, n)$

$B_n(1+a^n, n)$

$B_{n+1}(1+a^{n+1}, n+1)$

$A_{n+1}(1, n+1)$

$\square A_nB_nB_{n+1}A_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\overline{A_nB_n} + \overline{A_{n+1}B_{n+1}}\right)\cdot\overline{A_nA_{n+1}}$

$= \frac{1}{2}(a^n + a^{n+1})\cdot 1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(a-1)^2a^{2n}+1}}{\frac{1+a}{2}\cdot a^n} = \frac{2(a-1)^2}{1+a} = \frac{3}{2a+2}$$

, $a = 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(a>1)$

\# 29

$(x-2n)^2 - 4n^2 - n < 0$

$\Rightarrow \sqrt{(x-2n)^2} < \sqrt{4n^2+n}$

$\Leftrightarrow |x-2n| < \sqrt{4n^2+n}$

$\Rightarrow 2n - \sqrt{4n^2+n} < x < 2n + \sqrt{4n^2+n}$

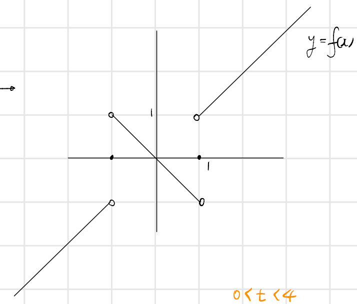
이때 $2n < \sqrt{4n^2+n} < 2n+1$ 이므로 $\sqrt{4n^2+n} = 2n+\alpha$ $(0<\alpha<1)$

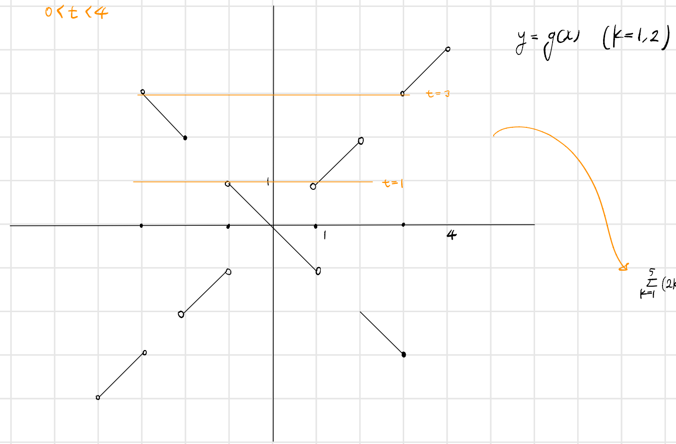
$\Rightarrow -\alpha < x < 4n+\alpha$ $(0<\alpha<1)$ , $a_n = 4n+1$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n} - pn\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(4-p^2)n^2+n}{\sqrt{4n^2+n}+pn} = \begin{cases} \pm\infty & (p\neq 2) \\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+pn} & (p=2) \longrightarrow q = \frac{1}{4} \end{cases}$$

#30

$$f(x) = x \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(x^2)^n - 1}{(x^2)^n + 1} = \begin{cases} x \cdot \dfrac{\lim_{n\to\infty}(x^{2n}-1)}{\lim_{n\to\infty}(x^{2n}+1)} = -x & (x^2<1) \\ 0 & (x^2=1) \\ x \cdot \lim_{n\to\infty} \dfrac{1-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}} = x & (x^2>1) \end{cases}$$




$\sum_{k=1}^{5}(2k-1) = 5^2$

$k=1$, $0 \le |x| < 2$ 에서 $g(x) = f(x)$ $\left(0 \le |x| < 2\right)$

$k=2$, $2 \le |x| < 4$ 에서 $g(x) = 3f\left(\frac{x}{3}\right)$ $\left(\frac{2}{3} \le \left|\frac{x}{3}\right| < \frac{4}{3}\right)$

$k=3$, $4 \le |x| < 6$ 에서 $g(x) = 5f\left(\frac{x}{5}\right)$ $\left(\frac{4}{5} \le \left|\frac{x}{5}\right| < \frac{6}{5}\right)$

$k=4$, $6 \le |x| < 8$ 에서 $g(x) = 7f\left(\frac{x}{7}\right)$ $\left(\frac{6}{7} \le \left|\frac{x}{7}\right| < \frac{8}{7}\right)$

$\vdots$

$2k-2 \le |x| < 2k$ 에서 $g(x) = (2k-1) \cdot f\left(\frac{x}{2k-1}\right) = \begin{cases} -x & (-(2k-1) < x < 2k-1) \\ 0 & (|x| = 2k-1) \\ x & (x < -(2k-1) \text{ or } x > 2k-1) \end{cases}$