수학 영역

● [공통과목]

1. 계산 능력 - 지수함수와 로그함수 정답 ①

$$(2\times 2^{\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}=(2^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$$
$$=2^{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}$$
$$=2^{1-2}$$
$$=2^{-1}$$
$$=\frac{1}{2}$$

2. 이해 능력 - 삼각함수 정답 ③

$-1\le\cos x\le 1$이므로 $-1\le 3\cos x+2\le 5$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 5이다.

3. 이해 능력 - 수열 정답 ②

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

$$\frac{a_3+a_4}{a_2}=\frac{a_2r+a_2r^2}{a_2}=r+r^2=6$$

$r^2+r-6=0$

$(r+3)(r-2)=0$

$r>0$이므로 $r=2$

따라서 $\dfrac{a_5}{a_2}=\dfrac{a_2r^3}{a_2}=r^3=8$

4. 이해 능력 - 함수의 극한과 연속 정답 ④

$x\to-1$일 때 $f(x)\to1$이므로 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=1$

$x\to1-$일 때 $f(x)\to0$이므로 $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=0$

따라서 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)+\lim\limits_{x\to1-}f(x)=1+0=1$

5. 계산 능력 - 미분 정답 ⑤

곱의 미분법에 의하여

$f'(x)=2x(x^2+2x+3)+(x^2-1)(2x+2)$

이므로

$f'(1)=2\times6+0\times4=12$

6. 이해 능력 - 수열 정답 ③

$$\sum_{k=1}^{5}(k^2+ak)=\sum_{k=1}^{5}k^2+a\times\sum_{k=1}^{5}k$$
$$=\frac{5\times6\times11}{6}+a\times\frac{5\times6}{2}$$
$$=55+15a$$

이므로 $\sum\limits_{k=1}^{5}(k^2+ak)=85$에서

$55+15a=85$, $15a=30$

따라서 $a=2$

7. 이해 능력 - 미분 정답 ①

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}(ax+b)=2a+b$

$f(2)=3$

$\lim\limits_{x\to2+}f(x)=\lim\limits_{x\to2+}(2x^2-3x+1)=3$

에서

$2a+b=3$ ……… ㉠

$$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{(ax+b)-3}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{a(x-2)}{x-2}\ (\because ㉠)$$
$$=a$$

$$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{2x^2-3x-2}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(2x+1)}{x-2}$$
$$=5$$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$에서

$a=5$

㉠에서 $b=3-2a=-7$이므로

$a+b=5+(-7)=-2$

8. 이해 능력 - 삼각함수 정답 ②

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\dfrac{1}{\cos\theta}+\tan\theta=\dfrac{1}{2}$에서

$$\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}$$

$2+2\sin\theta=\cos\theta$

위의 등식의 양변을 제곱하여 정리하면

$(2+2\sin\theta)^2=\cos^2\theta$

$4\sin^2\theta+8\sin\theta+4=1-\sin^2\theta$

$(\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$

$5\sin^2\theta+8\sin\theta+3=0$

$(5\sin\theta+3)(\sin\theta+1)=0$

$\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $-1<\sin\theta<0$이므로

$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$

9. 이해 능력 - 미분 정답 ③

곡선 $y=f(x)$는 점 $(0,2)$를 지나므로 $f(0)=2$이고, 점 $(0,2)$에서의 접선은 두 점 $(0,2)$, $(1,0)$을 지나므로 $f'(0)=\dfrac{0-2}{1-0}=-2$이다.

네 실수 a, b, c, d에 대하여

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\ne0)$라 하면

$f(0)=d=2$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서

$f'(0)=c=-2$

곡선 $y=f(x)$는 점 $(-1,6)$을 지나므로 $f(-1)=6$이고, 점 $(-1,6)$에서의 접선은 두 점 $(-1,6)$, $(1,0)$을 지나므로 $f'(-1)=\dfrac{0-6}{1-(-1)}=-3$이다.

$f(x)=ax^3+bx^2-2x+2$, $f'(x)=3ax^2+2bx-2$

이므로

$f(-1)=-a+b+4=6$

$a-b=-2$

$f'(-1)=3a-2b-2=-3$

$3a-2b=-1$

두 식을 연립하면 $a=3$, $b=5$이므로

$f(x)=3x^3+5x^2-2x+2$

따라서 $f(2)=24+20-4+2=42$

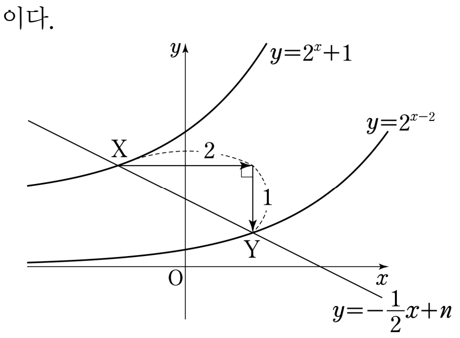
10. 이해 능력 - 지수함수와 로그함수 정답 ④

곡선 $y=2^x+1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 곡선의 방정식은

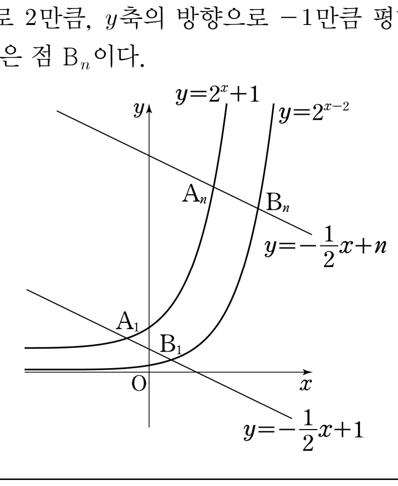
$y=2^{x-2}+1-1$, 즉 $y=2^{x-2}$이다.

한편, 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+n$의 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$이므로

직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+n$ 위의 임의의 점 X에 대하여 점 X를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점 Y는 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+n$ 위의 점이다.



따라서 모든 자연수 n에 대하여 점 A_n을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점은 점 B_n이다.



따라서

$\overline{A_1B_1}=\overline{A_2B_2}=\overline{A_3B_3}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

이므로

$\overline{A_1B_1}+\overline{A_2B_2}+\overline{A_3B_3}=3\sqrt{5}$

11. 문제해결 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 ①

(ⅰ) $a=\frac{1}{10}$ 일 때,

$0<a<1$ 이므로

$a^{4-x}>a^{x-6} \Leftrightarrow 4-x<x-6$

따라서 $x>5$ ······ ㉠

$\log_{\frac{1}{a}}(x-2)>\log_{\frac{1}{a}}(10-x)$ 의 진수 조건에서

$x-2>0$ 이고 $10-x>0$

즉, $2<x<10$ ······ ㉡

$\frac{1}{a}=10>1$ 이므로

$\log_{\frac{1}{a}}(x-2)>\log_{\frac{1}{a}}(10-x)$

에서 $x-2>10-x$

즉, $x>6$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$6<x<10$

이므로 모든 정수 x 의 값의 합은

$f\left(\frac{1}{10}\right)=7+8+9=24$

(ⅱ) $a=10$ 일 때,

$a>1$ 이므로

$a^{4-x}>a^{x-6} \Leftrightarrow 4-x>x-6$

따라서 $x<5$ ······ ㉣

$\log_{\frac{1}{a}}(x-2)>\log_{\frac{1}{a}}(10-x)$ 의 진수 조건에서

$2<x<10$ ······ ㉤

$0<\frac{1}{a}=\frac{1}{10}<1$ 이므로

$\log_{\frac{1}{a}}(x-2)>\log_{\frac{1}{a}}(10-x)$

에서 $x-2<10-x$

즉, $x<6$ ······ ㉥

㉣, ㉤, ㉥에서

$2<x<5$

이므로 모든 정수 x 의 값의 합은

$f(10)=3+4=7$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$f\left(\frac{1}{10}\right)+f(10)=24+7=31$

12. 이해 능력 – 삼각함수 정답 ②

점 D가 선분 AB의 중점이고 $\overline{AB}=2\overline{BC}$ 이므로

$\overline{BD}=\overline{BC}$

삼각형 BCD가 $\overline{BD}=\overline{BC}$ 인 이등변삼각형이고 $\overline{BE}\perp\overline{CD}$ 이므로 직선 BE는 선분 CD를 수직이등분한다. 점 E가 선분 CD의 수직이등분선 위의 점이므로

$\overline{CE}=\overline{DE}$

직선 BE가 $\angle$ABC의 이등분선이므로 $\overline{BC}=k$ 라 하면

$\overline{BC}:\overline{BA}=\overline{CE}:\overline{AE}$

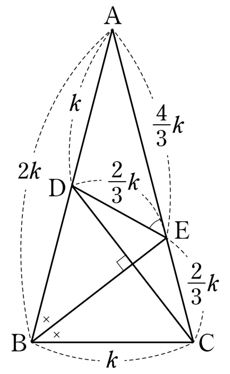
에서

$k:2k=\overline{CE}:\overline{AE}$

즉, $\overline{CE}+\overline{AE}=2k$ 이고 $\overline{CE}:\overline{AE}=1:2$ 이므로

$\overline{CE}=2k\times\frac{1}{1+2}=\frac{2}{3}k$

즉, $\overline{DE}=\overline{CE}=\frac{2}{3}k$



$\overline{AD}=k$, $\overline{AE}=2k-\frac{2}{3}k=\frac{4}{3}k$ 이므로 삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle AED)=\frac{\overline{AE}^2+\overline{DE}^2-\overline{AD}^2}{2\times\overline{AE}\times\overline{DE}}$$

$$=\frac{\left(\frac{4}{3}k\right)^2+\left(\frac{2}{3}k\right)^2-k^2}{2\times\frac{4}{3}k\times\frac{2}{3}k}$$

$$=\frac{11}{16}$$

13. 이해 능력 – 함수의 극한과 연속 정답 ④

함수 $g(x)$ 는 $x\neq1$, $f(x)\neq0$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다.

(ⅰ) $f(1)\neq0$ 인 경우

$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1-}\{f(x)-1\}^2=\{f(1)-1\}^2$

$\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)^2}{f(x)}=0$

$g(1)=\{f(1)-1\}^2$

함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$\{f(1)-1\}^2=0$

따라서 $f(1)=1$

실수 a, b 에 대하여 $f(x)=x^2+ax+b$ 라 하면

$f(1)=1+a+b=1$

$b=-a$

$f(x)=x^2+ax-a$ 이므로

$f(-1)=1-a-a=1-2a=4$

$a=-\frac{3}{2}$

즉, $f(x)=x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}=\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{16}$

이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)>0$ 이다.

즉, 함수 $g(x)$ 는 $x>1$ 인 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때 $f(2)=4-3+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

(ⅱ) $f(1)=0$ 인 경우

실수 c 에 대하여 $f(x)=(x-1)(x-c)$ 라 하면

$f(-1)=-2(-1-c)=4$ 에서 $c=1$ 이므로

$f(x)=(x-1)^2$ 이다.

$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1-}\{f(x)-1\}^2=\{f(1)-1\}^2$

$\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}=1$

$g(1)=\{f(1)-1\}^2$

$f(1)=0$ 이므로 $\{f(1)-1\}^2=1$, 즉 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이고, $x>1$ 인 모든 실수 x 에서 $f(x)>0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때 $f(2)=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(2)$ 의 값이 될 수 있는 실수는 $\frac{5}{2}$, 1 이므로 합은 $\frac{5}{2}+1=\frac{7}{2}$ 이다.

14. 문제해결 능력 – 적분 정답 ⑤

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극댓값을 가지므로 $k>1$ 인 실수 k 에 대하여

$f'(x)=3(x-1)(x-k)=3x^2-3(k+1)x+3k$

로 놓을 수 있다.

$f(x)=\int f'(x)dx=x^3-\frac{3}{2}(k+1)x^2+3kx+C$

(단, C 는 적분상수)

이고 $f(0)=0$ 이므로 $C=0$, 즉

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(k+1)x^2+3kx$

ㄱ. 열린구간 $(0,1)$ 에서 $f'(x)>0$ 이므로

$$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}\frac{\int_0^x|f'(t)|dt}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{\int_0^x f'(t)dt}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=f'(0)$$

$$=3k>3 \text{ (참)}$$

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극댓값을 가지므로 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 $\frac{5}{2}$ 보다 크면 $f(1)>\frac{5}{2}$

$f(1)=1-\frac{3}{2}(k+1)+3k=\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}>\frac{5}{2}$

따라서 $k>2$

이때 열린구간 $(0,1)$ 에서 $f'(x)>0$, 열린구간 $(1,2)$ 에서 $f'(x)<0$ 이므로

$$g(2)=\frac{\int_0^2|f'(t)|dt}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^1 f'(t)dt-\int_1^2 f'(t)dt\right\}$$

$= \frac{1}{2}[\{f(1)-f(0)\}-\{f(2)-f(1)\}]$

$= f(1)-\frac{1}{2}f(2)-\frac{1}{2}f(0)$

$= f(1)-\frac{1}{2}\times 2-0$

$= f(1)-1$

따라서 $f(1)-g(2)=1$ (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 극솟값을 가지므로 함수 $f(x)$의 극솟값이 0이면 $f(k)=0$이다.

$f(k)=k^3-\frac{3}{2}(k+1)k^2+3k^2=-\frac{k^3}{2}+\frac{3}{2}k^2=0$

즉, $k^2(k-3)=0$에서 $k>1$이므로

$k=3$

이때 $f'(x)=3(x-1)(x-3)$,

$f(x)=x^3-6x^2+9x$이므로

$h(x)=\int_0^x|f'(t)|dt$라 하면

(i) $0<x\le 1$일 때,

$h(x)=\int_0^x f'(t)dt=f(x)$

(ii) $1<x\le 3$일 때,

$h(x)=\int_0^1 f'(t)dt-\int_1^x f'(t)dt$

$=f(1)-f(0)-f(x)+f(1)$

$=-f(x)+2f(1)$

(iii) $x>3$일 때,

$h(x)$

$=\int_0^1 f'(t)dt-\int_1^3 f'(t)dt+\int_3^x f'(t)dt$

$=f(1)-f(0)-f(3)+f(1)+f(x)-f(3)$

$=f(x)-2f(3)+2f(1)$

즉,

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (0<x\le 1) \\ -f(x)+2f(1) & (1<x\le 3) \\ f(x)-2f(3)+2f(1) & (x>3)\end{cases}$$

$0<x\le 1$일 때

$g(x)=\frac{f(x)}{x}=x^2-6x+9=(x-3)^2$이므로

$4\le g(x)<9$

$g(3)=\frac{h(3)}{3}=\frac{-f(3)+2f(1)}{3}=\frac{8}{3}$이므로

$g(x)=n\times g(3)$을 만족시키는 $0<x\le 1$인 실수 x가 존재하기 위해서는

$4\le \frac{8}{3}n<9$

$\frac{3}{2}\le n<\frac{27}{8}$

이어야 하므로 자연수 n의 값은 2, 3에서 자연수 n의 개수는 2이다. (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

15. 추론 능력 – 수열 정답 ④

$S_{n+1}=S_{n-1}+2\sqrt{a_na_{n+1}+1}$ $(n\ge 2)$ ·············· ㉠

에서

$S_{n+1}-S_{n-1}=2\sqrt{a_na_{n+1}+1}$

한편, $S_{n+1}-S_{n-1}=a_{n+1}+a_n$이므로

$a_{n+1}+a_n=2\sqrt{a_na_{n+1}+1}$

위 등식의 양변을 제곱하면

${a_{n+1}}^2+2a_na_{n+1}+{a_n}^2=4(a_na_{n+1}+1)$

${a_{n+1}}^2-2a_na_{n+1}+{a_n}^2=4$

$(a_{n+1}-a_n)^2=\boxed{4}$

즉, $a_{n+1}-a_n=2$ 또는 $a_{n+1}-a_n=-2$ $(n\ge 2)$ ··㉡

따라서 S_{10}의 값이 최대일 때는 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$, $a_2=4$이고 제2항부터 공차가 2인 등차수열일 때이므로

$M=1+\frac{9(2\times 4+8\times 2)}{2}=\boxed{109}$

이다.

한편, 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 실수이므로 ㉠에서 $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_na_{n+1}\ge -1$이고, $S_{n+1}-S_{n-1}=a_{n+1}+a_n\ge 0$이므로 S_{10}의 값이 최소가 되도록 각 항을 나열하면

$a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=2$, $a_4=0$, $a_5=2$, $a_6=0$, $a_7=2$, $a_8=0$, $a_9=2$, $a_{10}=0$

이다.

따라서

$m=(1+4)+(2+0)\times 4=\boxed{13}$

이다.

이상에서 $p=4$, $q=109$, $r=13$이므로

$p+q+r=126$

16. 계산 능력 – 적분 정답 5

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(-x^3+5)dx$

$=-\frac{1}{4}x^4+5x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=\frac{1}{4}$이므로 $C=\frac{1}{4}$이다.

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+5x+\frac{1}{4}$이므로

$f(1)=-\frac{1}{4}+5+\frac{1}{4}=5$

17. 계산 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 50

$\log_5 2\times\log_5 n=\log_5 4+(\log_5 2)^2$에서

$\log_5 2\times\log_5 n=2\log_5 2+(\log_5 2)^2$

위 등식의 양변을 $\log_5 2$로 나누면

$\log_5 n=2+\log_5 2=\log_5(5^2\times 2)=\log_5 50$

이므로

$n=50$

18. 이해 능력 – 함수의 극한과 연속 정답 13

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-4}$가 수렴하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$

$b=-2a-4$

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-2(a+2)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{x+a+2}{x+2}$

$=\frac{a+4}{4}$

$=\frac{1}{4}$

따라서 $a=-3$

$b=-2\times(-3)-4=2$이므로

$a^2+b^2=(-3)^2+2^2=13$

19. 이해 능력 – 적분 정답 25

시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량이 0이므로

$\int_1^3 v(t)dt=\int_1^3(3t^2+t+k)dt$

$=\left[t^3+\frac{t^2}{2}+kt\right]_1^3$

$=\left(27+\frac{9}{2}+3k\right)-\left(1+\frac{1}{2}+k\right)$

$=30+2k$

$=0$

따라서 $k=-15$

시각 $t=0$에서의 점 P의 위치를 x_0이라고 하면 시각 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$x_0+\int_0^2 v(t)dt=x_0+\int_0^2(3t^2+t-15)dt$

$=x_0+\left[t^3+\frac{t^2}{2}-15t\right]_0^2$

$=x_0+(8+2-30)$

$=x_0-20$

$=5$

따라서 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치는

$x_0=25$

20. 추론 능력 – 적분 정답 14

$0\le x\le 6$에서 조건 (나)에 의하여 $f(x)\le x$이고, $-6\le x\le 0$에서 $f(x)\le -x$이므로 조건 (가)에 의하여 $0\le x\le 6$에서

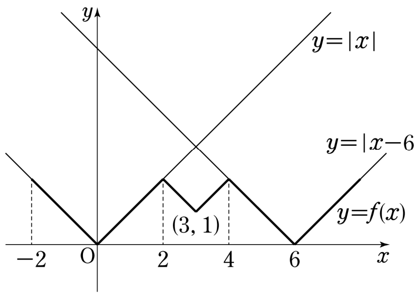
$f(x)\le -(x-6)$이어야 한다.

즉, $0\le x\le 3$에서 $f(x)\le x$이고 $3<x\le 6$에서

$f(x) \le -(x-6)$이다.

조건 (다)에 의하여 $\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \le 1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 서로 다른 임의의 두 점을 지나는 직선의 기울기의 절댓값은 1 이하이다.

함수 $f(x)$는 연속함수이므로, $f(3)=1$이고 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 중 $\displaystyle\int_0^6 f(x)dx$의 값이 최대가 되기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



$0 \le x < 2$일 때 $f(x)=x$

$2 \le x < 3$일 때 $f(x)=-x+4$

$3 \le x < 4$일 때 $f(x)=x-2$

$4 \le x < 6$일 때 $f(x)=-x+6$

$\displaystyle\int_0^6 f(x)dx$의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이와 같으므로

$$\int_0^6 f(x)dx=\frac{1}{2}\times6\times3-\frac{1}{2}\times2\times2=7$$

조건 (가)에 의해 $\displaystyle\int_{-2}^0 f(x)dx=\int_{10}^{12} f(x)dx$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{10} f(x)dx&=\int_{-2}^0 f(x)dx+\int_0^{10} f(x)dx\\&=\int_0^{12} f(x)dx\\&=2\int_0^6 f(x)dx\end{aligned}$$

따라서 $\displaystyle\int_{-2}^{10} f(x)dx=2\times7=14$

21. 추론 능력 – 수열 정답 8

$a_5=4$일 때,

$\log_2|a_4|$가 정수이면

$2\log_2|a_4|=4$, $\log_2|a_4|=2$, $|a_4|=4$

즉, $a_4=4$ 또는 $a_4=-4$

$\log_2|a_4|$가 정수가 아니면

$a_4-2=4$

$a_4=6$

그러므로 $a_4=-4$ 또는 $a_4=4$ 또는 $a_4=6$ ······ ㉠

(i) $a_4=-4$일 때,

$\log_2|a_3|$이 정수이면

$2\log_2|a_3|=-4$, $\log_2|a_3|=-2$, $|a_3|=\dfrac{1}{4}$

이므로 a_3이 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$\log_2|a_3|$이 정수가 아니면

$a_3-2=-4$에서 $|a_3|=2$이므로

$\log_2|a_3|$이 정수가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_4=4$일 때,

㉠에서 $a_3=-4$ 또는 $a_3=4$ 또는 $a_3=6$

(iii) $a_4=6$일 때,

$\log_2|a_3|$이 정수이면

$2\log_2|a_3|=6$, $\log_2|a_3|=3$, $|a_3|=8$

즉, $a_3=-8$ 또는 $a_3=8$

$\log_2|a_3|$이 정수가 아니면

$a_3-2=6$, $a_3=8$

이때 $\log_2|a_3|=3$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_3=-8$ 또는 $a_3=8$

같은 방법으로 $0<|a_n|\le17$을 만족시키는 수열의 항을 나열하면 다음과 같다.

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
4	−4			
	4	−4		
		4	−4	
			4	−4
				4
				6
			6	−8
				8
		6	−8	−6
			8	−16
				16
				10
	6	−8	−6	
		8	−16	−14
			16	
			10	12

따라서 구하는 a_1의 값이 될 수 있는 서로 다른 모든 수의 합은 8이다.

킬러문항

22. 추론 능력 – 미분 정답 9

$f(0)=k$라 하자.

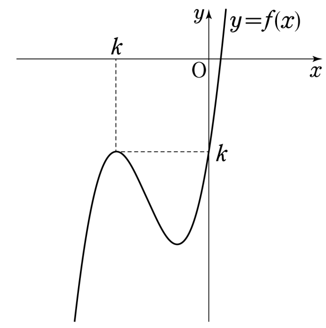
함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으면 조건 (가)를 만족시키는 k의 값은 0뿐이므로 $f(0)=0$이다. 이는 $f(0)\ne0$에 모순이므로 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.

함수 $f(x)$의 극댓값을 M, 극솟값을 m이라 하자.

$f(k)$의 값에 따라 부등식 $f(x)>f(k)$의 해를 조사하면 다음과 같다.

(i) $f(k)>M$ 또는 $f(k)<m$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(k)$가 점 $(k, f(k))$에서만 만나므로 $f(x)>f(k)$의 해는 $x>k$가 되어 조건 (가)를 만족시키기 위해서는 $k=0$이어야 한다.

(ii) $f(k)=M$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(k)$가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$에 대하여 부등식 $f(x)>f(k)$의 해는 $x>x_2$이다. 즉, 부등식 $f(x)>f(k)$의 해가 $x>0$이기 위해서는 $f(k)=M=k\,(k<0)$이어야 한다.



(iii) $m<f(k)<M$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(k)$가 만나는 세 점의 x좌표 x_1, x_2, x_3 $(x_1<x_2<x_3)$에 대하여 부등식 $f(x)>f(k)$의 해는 $x_1<x<x_2$ 또는 $x>x_3$이다.

(iv) $f(k)=m$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(k)$가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$에 대하여 부등식 $f(x)>f(k)$의 해는 $\{x\,|\,x_1<x<x_2$ 또는 $x>x_2\}$이다.

이상에서 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$f(k)=M=k$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=k\,(k<0)$에서 극댓값 k를 가져야 하므로

$f(x)=x(x-k)^2+k$이다.

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x-k)^2+x(2x-2k)\\&=(x-k)(3x-k)\end{aligned}$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{k}{3}$에서 극솟값

$f\left(\dfrac{k}{3}\right)=\dfrac{k}{3}\times\left(\dfrac{k}{3}-k\right)^2+k=\dfrac{4}{27}k^3+k$를 갖는다.

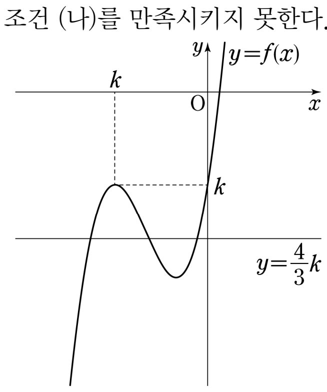
조건 (나)에서 부등식 $f(x)<\dfrac{4}{3}f(0)$, 즉 부등식 $f(x)<\dfrac{4}{3}k$의 해를 조사하면 다음과 같다.

㉠ $\dfrac{4}{27}k^3+k<\dfrac{4}{3}k$인 경우

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\dfrac{4}{3}k$가 만나는 세 점의 x좌표를 각각 t_1, t_2, t_3 $(t_1<t_2<t_3)$이라 하면 부등식 $f(x)<\dfrac{4}{3}k$의 해는

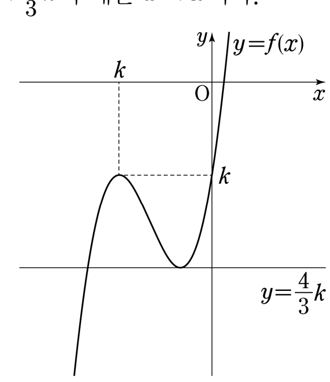
$x<t_1$ 또는 $t_2<x<t_3$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

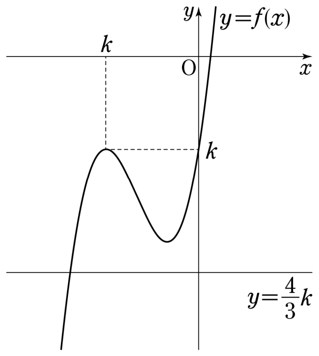


㉡ $\dfrac{4}{27}k^3+k\ge\dfrac{4}{3}k$인 경우

ⓐ $\dfrac{4}{27}k^3+k=\dfrac{4}{3}k$, 즉 함수 $y=f(x)$의 극솟값이 $\dfrac{4}{3}k$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\dfrac{4}{3}k$는 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 두 점의 x좌표를 각각 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$라 하면 부등식 $f(x)<\dfrac{4}{3}k$의 해는 $x<\alpha$이다.



ⓑ $\frac{4}{27}k^3+k > \frac{4}{3}k$, 즉 함수 $y=f(x)$의 극솟값이 $\frac{4}{3}k$보다 크면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{4}{3}k$는 오직 한 점에서 만나고 이 점의 x좌표를 α라 하면 부등식 $f(x) < \frac{4}{3}k$의 해는 $x < \alpha$이다.



㉠, ㉡에서 조건 (나)를 만족시키기 위해서는 $\frac{4}{27}k^3+k \ge \frac{4}{3}k$이고, $k<0$이므로 k의 범위는 $\frac{4}{27}k^2 \le \frac{1}{3}$에서 $-\frac{3}{2} \le k < 0$이다.

이때 $f(1)=1\times(1-k)^2+k=\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$이므로 $f(1)$은 $k=-\frac{3}{2}$일 때 최댓값 $\frac{19}{4}$를 갖는다.

즉, $1<f(1) \le \frac{19}{4}$이므로 $f(1)$의 값이 될 수 있는 모든 정수의 합은

$2+3+4=9$

● [선택과목 – 확률과 통계]

23. 이해 능력 – 경우의 수 정답 ④

다항식 $(2x-1)^4$의 전개식에서 일반항은

${}_4\mathrm{C}_r(2x)^{4-r}\times(-1)^r$

$={}_4\mathrm{C}_r\times 2^{4-r}\times(-1)^r\times x^{4-r}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

x^2항은 $4-r=2$에서 $r=2$일 때이므로 x^2의 계수는

${}_4\mathrm{C}_2\times2^2\times(-1)^2=24$

24. 이해 능력 – 확률 정답 ③

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$

또한

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이므로

$\frac{5}{6}=\frac{2}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)$

$\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

25. 이해 능력 – 경우의 수 정답 ①

A, B, C를 1명이라 생각할 때 4명의 학생이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

각 경우에 대하여 A의 양 옆의 학생 B, C가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times2=12$

26. 이해 능력 – 확률 정답 ④

7명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는 7!

먼저 2학년 학생 3명을 세우는 경우의 수는 3!

∨	2	∨	2	∨	2	∨

1학년 학생끼리는 이웃하지 않도록 일렬로 세우려면 2학년 학생 사이사이와 양 끝의 4곳에 1학년 학생을 한 명씩 세워야 한다. 따라서 1학년 학생 4명을 세우는 경우의 수는 4!

그러므로 구하는 확률은

$1-\frac{3!\times4!}{7!}=1-\frac{1}{35}=\frac{34}{35}$

27. 이해 능력 – 경우의 수 정답 ②

조건 (나)에서 $(b-4)(c+d-4)=0$이므로

$b=4$ 또는 $c+d=4$

(ⅰ) $a+b+c+d=8$이고 $b=4$인 경우

$a+c+d=4$, $b=4$이다.

$a+c+d=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c, d의 순서쌍 (a, c, d)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$

그러므로 이 경우의 수는 15이다.

(ⅱ) $a+b+c+d=8$이고 $c+d=4$인 경우

$a+b=4$, $c+d=4$이다.

$a+b=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4=5$

같은 방법으로 $c+d=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d의 순서쌍 (c, d)의 개수는 5

그러므로 이 경우의 수는 $5\times5=25$이다.

(ⅲ) $a+b+c+d=8$이고 $b=4$, $c+d=4$인 경우

$a=0$, $b=4$, $c+d=4$이다.

$c+d=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d의 순서쌍 (c, d)의 개수는 5

그러므로 이 경우의 수는 5이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$15+25-5=35$

28. 문제해결 능력 – 확률 정답 ①

한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 1인 사건을 S, 2 또는 3인 사건을 T, 4 이상인 사건을 U라 하면

$\mathrm{P}(S)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(T)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(U)=\frac{1}{2}$

A부터 시작하여 이 시행을 4번 한 후 E가 처음으로 주사위를 가지게 되는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 3번째 시행 후 D가 가지고, 4번째 시행 후 E가 가지게 되는 경우

$UUUU$가 일어나는 경우이므로 이 경우의 확률은

${}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

(ⅱ) 3번째 시행 후 F가 가지고, 4번째 시행 후 E가 가지게 되는 경우

$SSTT$, $STST$, $TSST$, $UTTT$, $TUTT$가 일어나는 경우이다.

$SSTT$, $STST$, $TSST$가 일어날 확률은

$3\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{108}$

$UTTT$, $TUTT$가 일어날 확률은

$2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$

그러므로 이 경우의 확률은

$\frac{1}{108}+\frac{1}{27}=\frac{5}{108}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{16}+\frac{5}{108}=\frac{47}{432}$

29. 이해 능력 – 경우의 수 정답 146

조건에서 함수 f의 치역은 1과 4를 동시에 원소로 가질 수 없으므로 함수 f의 치역은 집합 $\{1, 2, 3\}$의 부분집합이거나 $\{2, 3, 4\}$의 부분집합이다.

함수 f의 치역이 집합 $\{1, 2, 3\}$의 부분집합인 함수의 개수는

${}_{3}\Pi_{4}=3^4=81$

함수 f의 치역이 집합 $\{2, 3, 4\}$의 부분집합인 함수의 개수는

${}_{3}\Pi_{4}=3^4=81$

함수 f의 치역이 집합 $\{2, 3\}$의 부분집합인 함수의 개수는

${}_{2}\Pi_{4}=2^4=16$

따라서 구하는 함수의 개수는

$81+81-16=146$

킬러문항

30. 문제해결 능력 – 확률 정답 136

얻은 3개의 점수의 합이 6인 사건을 A, 꺼낸 3개의 공 중에서 검은 공이 있는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

얻은 점수의 합이 6인 경우는

$6=4+1+1=3+2+1=2+2+2$

이므로 다음과 같은 경우로 나누어 구할 수 있다.

(ⅰ) 얻은 점수가 4, 1, 1인 경우

4가 적혀 있는 흰 공 1개, 1이 적혀 있는 흰 공 2개를 꺼낼 확률은

$\frac{3!}{2!}\times\left(\frac{1}{7}\right)^3=\frac{3}{7^3}$

4가 적혀 있는 흰 공 1개, 1이 적혀 있는 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼낼 확률은

$3!\times\left(\frac{1}{7}\right)^2\times\frac{3}{7}=\frac{18}{7^3}$

4가 적혀 있는 흰 공 1개, 검은 공 2개를 꺼낼 확률은

$\frac{3!}{2!}\times\frac{1}{7}\times\left(\frac{3}{7}\right)^2=\frac{27}{7^3}$

그러므로 얻은 점수가 4, 1, 1일 확률은

$\frac{3+18+27}{7^3}=\frac{48}{7^3}$

(ⅱ) 얻은 점수가 3, 2, 1인 경우

3이 적혀 있는 흰 공 1개, 2가 적혀 있는 흰 공 1개, 1이 적혀 있는 흰 공 1개를 꺼낼 확률은

$3!\times\left(\frac{1}{7}\right)^3=\frac{6}{7^3}$

3이 적혀 있는 흰 공 1개, 2가 적혀 있는 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼낼 확률은

$3!\times\left(\frac{1}{7}\right)^2\times\frac{3}{7}=\frac{18}{7^3}$

그러므로 얻은 점수가 3, 2, 1일 확률은

$\frac{6+18}{7^3}=\frac{24}{7^3}$

(ⅲ) 얻은 점수가 2, 2, 2인 경우

2가 적혀 있는 흰 공을 3개 꺼낼 확률은

$\left(\frac{1}{7}\right)^3=\frac{1}{7^3}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{48+24+1}{7^3}=\frac{73}{7^3}$

또한 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 꺼낸 3개의 공 중에서 검은 공이 있을 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{18+27+18}{7^3}=\frac{63}{7^3}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{63}{7^3}}{\frac{73}{7^3}}=\frac{63}{73}$$

이므로

$p+q=73+63=136$

● [선택과목 – 미적분]

23. 계산 능력 – 수열의 극한 정답 ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times2^{n-2}+2^{n-1}}{1+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times2^{-2}+2^{-1}}{\frac{1}{2^n}+1}$$
$$=\frac{3\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{0+1}$$
$$=\frac{5}{4}$$

24. 이해 능력 – 미분법 정답 ④

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)+6}{x-3}=4$에서 $x\to3$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. 즉, 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3}\{f(x)+6\}=f(3)+6=0$

따라서 $f(3)=-6$

또한 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)+6}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$
$$=f'(3)$$
$$=4$$

한편, $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$에서 몫의 미분법에 의하여

$$g'(x)=\frac{f'(x)\times x^2-f(x)\times2x}{(x^2)^2}$$
$$=\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}$$

이므로

$$g'(3)=\frac{3f'(3)-2f(3)}{3^3}$$
$$=\frac{3\times4-2\times(-6)}{3^3}$$
$$=\frac{8}{9}$$

25. 이해 능력 – 수열의 극한 정답 ①

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{4n^2}{n^2+3}\right)$이 수렴하므로

$p_n=\frac{a_n}{n}-\frac{4n^2}{n^2+3}$이라 하면 수열 $\{p_n\}$은 0으로 수렴한다. 이때

$\frac{a_n}{n}=p_n+\frac{4n^2}{n^2+3}$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(p_n+\frac{4n^2}{n^2+3}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}p_n+\lim_{n\to\infty}\frac{4}{1+\frac{3}{n^2}}$$
$$=0+4$$
$$=4$$

또한 $\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=1$이므로 $q_n=a_n-2b_n$이라 하면 수열 $\{q_n\}$은 1로 수렴한다. 이때

$2b_n=a_n-q_n$, $\frac{b_n}{n}=\frac{1}{2}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{q_n}{n}\right)$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{q_n}{n}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}-\lim_{n\to\infty}q_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times(4-1\times0)$$
$$=2$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+3{a_n}^2+1}{2n^2+nb_n+{b_n}^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times\frac{a_n}{n}\times\frac{1}{n}+3\times\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{b_n}{n}+\left(\frac{b_n}{n}\right)^2}$$
$$=\frac{4\times4\times0+3\times4^2+0}{2+2+2^2}$$
$$=6$$

26. 이해 능력 – 미분법 정답 ③

$x=1$에서

$2t^2+t=1$

$2t^2+t-1=0$

$(2t-1)(t+1)=0$

따라서 $t>0$이므로 $t=\frac{1}{2}$

a의 값은 $y=\sin\frac{\pi}{2}t$에 $t=\frac{1}{2}$을 대입한 것과 같으므로

$a=\sin\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{dx}{dt}=4t+1$, $\frac{dy}{dt}=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t}{4t+1}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

곡선 위의 점 $(1, a)$에서의 접선의 기울기 m은 ㉠에 $t=\frac{1}{2}$을 대입한 것과 같으므로

$$m=\frac{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}\right)}{4\times\frac{1}{2}+1}$$

$$=\frac{\frac{\pi}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$$

따라서

$$\frac{m}{a}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{12}\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\pi}{6}$$

27. 문제해결 능력 – 미분법 정답 ②

$g\left(\frac{x}{k}\right)=f^{-1}(x)$ ……………… ㉠

의 양변에 $x=2k$를 대입하면 $g(2)=k$이므로

$g(2)=f^{-1}(2k)=k$

즉, $f(k)=2k$

$f(x)=(x+k)\ln x$에서

$f(k)=2k\ln k=2k$

$2k(\ln k-1)=0$

$k\neq 0$이므로

$\ln k=1$, $k=e$

㉠에서

$f\left(g\left(\frac{x}{e}\right)\right)=x$

이므로 위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'\left(g\left(\frac{x}{e}\right)\right)\times g'\left(\frac{x}{e}\right)\times\frac{1}{e}=1$

위의 등식의 양변에 $x=2e$를 대입하여 정리하면

$g(2)=e$이므로

$f'(e)\times g'(2)=e$

한편, $f(x)=(x+e)\ln x$에서

$f'(x)=\ln x+\frac{x+e}{x}$

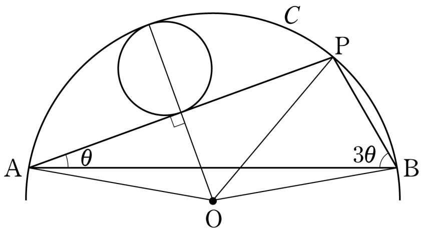
이므로

$f'(e)=\ln e+\frac{e+e}{e}=3$

따라서

$g'(2)=\frac{e}{f'(e)}=\frac{e}{3}$

28. 문제해결 능력 – 미분법 정답 ③



삼각형의 내각의 합은 π이므로

$\angle\mathrm{APB}=\pi-(\angle\mathrm{PAB}+\angle\mathrm{PBA})$

$=\pi-(\theta+3\theta)$

$=\pi-4\theta$

삼각형 PAB의 외접원의 반지름의 길이를 $R(\theta)$라 하면 삼각형 PAB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle\mathrm{APB})}=2R(\theta)$$

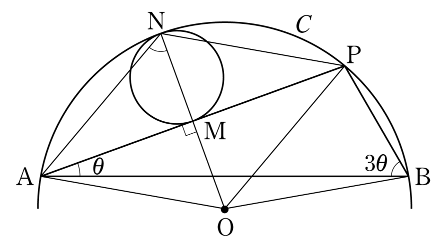
$$R(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sin(\pi-4\theta)}=\frac{1}{2\sin 4\theta}$$

삼각형 PAB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\sin(\angle\mathrm{ABP})}=2R(\theta)$$

$$\overline{\mathrm{AP}}=2\times\frac{1}{2\sin 4\theta}\times\sin 3\theta$$

$$=\frac{\sin 3\theta}{\sin 4\theta}$$



호 AP를 이등분하는 점을 N, 선분 AP의 중점을 M이라 하자.

$\angle\mathrm{ABP}$는 점 N을 포함하는 호 AP에 대한 원주각이고, $\angle\mathrm{ANP}$는 점 N을 포함하지 않는 호 AP에 대한 원주각이므로 원주각의 성질에 의해

$\angle\mathrm{ANP}+\angle\mathrm{ABP}=\pi$

$\angle\mathrm{ANP}=\pi-\angle\mathrm{ABP}=\pi-3\theta$

점 N은 점 B를 포함하지 않는 호 AP를 이등분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{AN}}=\overline{\mathrm{PN}}$, $\angle\mathrm{ANM}=\angle\mathrm{PNM}$

$$\angle\mathrm{ANM}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{ANP}=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\theta$$

점 M은 선분 AP의 중점이므로

$$\overline{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}=\frac{\sin 3\theta}{2\sin 4\theta}$$

삼각형 AMN에서

$$\tan(\angle\mathrm{ANM})=\frac{\overline{\mathrm{AM}}}{\overline{\mathrm{NM}}}$$

$$\overline{\mathrm{NM}}=\frac{\overline{\mathrm{AM}}}{\tan(\angle\mathrm{ANM})}$$

$$=\frac{\frac{\sin 3\theta}{2\sin 4\theta}}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\theta\right)}$$

$$=\frac{\sin 3\theta\tan\frac{3}{2}\theta}{2\sin 4\theta}$$

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{NM}}=\frac{\sin 3\theta\tan\frac{3}{2}\theta}{4\sin 4\theta}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin 3\theta\tan\frac{3}{2}\theta}{4\theta\sin 4\theta}$$

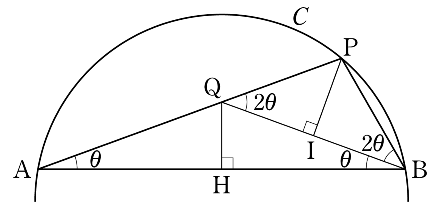
$$=\frac{1}{4}\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin 3\theta}{3\theta}\times 3\times\frac{\tan\frac{3}{2}\theta}{\frac{3}{2}\theta}\times\frac{4\theta}{\sin 4\theta}\times\frac{\frac{3}{2}}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin 3\theta}{3\theta}\times 3\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan\frac{3}{2}\theta}{\frac{3}{2}\theta}\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{4\theta}{\sin 4\theta}\times\frac{3}{8}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\times 1\times 3\times 1\times 1\times\frac{3}{8}$$

$$=\frac{9}{32}$$

다른 풀이



그림과 같이 $\angle\mathrm{QBA}=\theta$를 만족시키는 선분 AP 위의 점 Q를 잡으면 $\angle\mathrm{QAB}=\angle\mathrm{QBA}$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}$

점 Q에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}$$

$\angle\mathrm{QAH}=\theta$이므로 $\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AQ}}}$에서

$$\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}=\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\cos\theta}=\frac{1}{2\cos\theta}$$

$\angle\mathrm{PQB}=\angle\mathrm{QAB}+\angle\mathrm{QBA}=2\theta$

$\angle\mathrm{PBQ}=\angle\mathrm{PBA}-\angle\mathrm{QBA}=3\theta-\theta=2\theta$

이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PB}}$

점 P에서 선분 QB에 내린 수선의 발을 I라 하면

$$\overline{\mathrm{QI}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{QB}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\cos\theta}=\frac{1}{4\cos\theta}$$

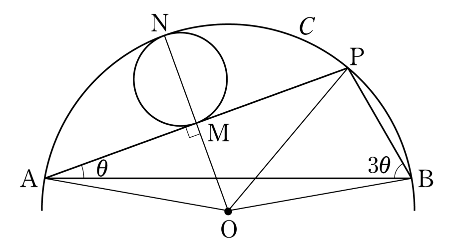
$$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PB}}=\frac{\overline{\mathrm{QI}}}{\cos 2\theta}=\frac{1}{4\cos\theta\cos 2\theta}$$

이고

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}$

$$=\frac{1}{2\cos\theta}+\frac{1}{4\cos\theta\cos 2\theta}$$

$$=\frac{2\cos 2\theta+1}{4\cos\theta\cos 2\theta}$$



한편, 원 C의 현 AP에 대한 원주각은

$\angle\mathrm{ABP}=3\theta$

이고 원 C의 중심을 O라 할 때, 원주각과 중심각 사이의 관계에 의하여

$\angle\mathrm{AOP}=2\angle\mathrm{ABP}=6\theta$

선분 AP의 중점을 M이라 하고 호 AP를 이등분하는 점을 N이라 하자.

원 C의 중심 O에서 현 AP에 내린 수선의 발은 현 AP의 중점과 일치하므로

$$\angle\mathrm{AMO}=\frac{\pi}{2}$$

$$\overline{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}=\frac{2\cos 2\theta+1}{8\cos\theta\cos 2\theta}$$

$$\angle\mathrm{AOM}=\angle\mathrm{POM}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOP}=3\theta$$

이고 직각삼각형 AOM에서

$\sin(\angle\mathrm{AOM})=\frac{\overline{\mathrm{AM}}}{\overline{\mathrm{OA}}}$이므로

$$\overline{\mathrm{OA}}=\frac{\overline{\mathrm{AM}}}{\sin(\angle\mathrm{AOM})}$$

$$=\frac{\frac{2\cos 2\theta+1}{8\cos\theta\cos 2\theta}}{\sin 3\theta}$$

$$=\frac{2\cos 2\theta+1}{8\sin 3\theta\cos\theta\cos 2\theta}$$

$$\overline{OM}=\overline{OA}\cos 3\theta=\frac{(2\cos 2\theta+1)\cos 3\theta}{8\sin 3\theta\cos\theta\cos 2\theta}$$

$\overline{OA}=\overline{ON}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{MN}&=\overline{ON}-\overline{OM}\\&=\overline{OA}-\overline{OM}\\&=\frac{2\cos 2\theta+1}{8\sin 3\theta\cos\theta\cos 2\theta}-\frac{(2\cos 2\theta+1)\cos 3\theta}{8\sin 3\theta\cos\theta\cos 2\theta}\\&=\frac{(2\cos 2\theta+1)(1-\cos 3\theta)}{8\sin 3\theta\cos\theta\cos 2\theta}\end{aligned}$$

선분 MN을 지름으로 하는 원의 반지름의 길이 $f(\theta)$는

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\frac{1}{2}\overline{MN}\\&=\frac{(2\cos 2\theta+1)(1-\cos 3\theta)}{16\sin 3\theta\cos\theta\cos 2\theta}\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0+}\frac{1-\cos 3\theta}{\theta^2}&=\lim_{\theta\to 0+}\frac{(1-\cos 3\theta)(1+\cos 3\theta)}{\theta^2(1+\cos 3\theta)}\\&=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^2 3\theta}{\theta^2(1+\cos 3\theta)}\\&=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin 3\theta}{3\theta}\right)^2\times 9\\&\quad\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{1+\cos 3\theta}\\&=1^2\times 9\times\frac{1}{2}\\&=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta}\\&=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{1}{\theta}\times\frac{(2\cos 2\theta+1)(1-\cos 3\theta)}{16\sin 3\theta\cos\theta\cos 2\theta}\right\}\\&=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{1-\cos 3\theta}{\theta^2}\times\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{1}{3}\times\frac{2\cos 2\theta+1}{16\cos\theta\cos 2\theta}\right\}\\&=\lim_{\theta\to 0+}\frac{1-\cos 3\theta}{\theta^2}\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{1}{3}\\&\quad\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\cos 2\theta+1}{16\cos\theta\cos 2\theta}\\&=\frac{9}{2}\times 1\times\frac{1}{3}\times\frac{2\times 1+1}{16\times 1\times 1}\\&=\frac{9}{32}\end{aligned}$$

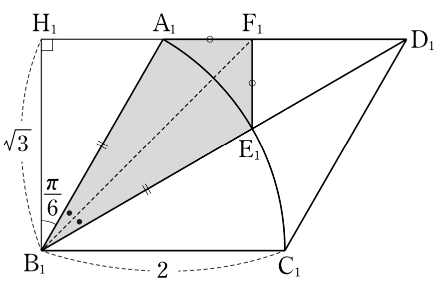
29. 문제해결 능력 – 수열의 극한 정답 140

사각형 $A_1B_1C_1D_1$은 마름모이므로 대각선 B_1D_1은 $\angle A_1B_1C_1$을 이등분한다.

$\angle A_1B_1C_1=\frac{\pi}{3}$이므로

$\angle D_1B_1C_1=\angle A_1B_1D_1=\frac{\pi}{6}$

두 부채꼴 $A_1B_1E_1$, $E_1B_1C_1$이 서로 합동이므로 그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이는 사각형 $A_1B_1E_1F_1$의 넓이와 같다.



한편, $\overline{A_1B_1}=\overline{A_1D_1}=2$이고 $\angle A_1B_1D_1=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{B_1D_1}&=2\times\overline{A_1B_1}\cos\frac{\pi}{6}\\&=2\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=2\sqrt{3}\end{aligned}$$

직선 B_1F_1이 $\angle A_1B_1D_1$의 이등분선이므로

$\overline{A_1F_1}:\overline{D_1F_1}=\overline{A_1B_1}:\overline{B_1D_1}=2:2\sqrt{3}=1:\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\overline{A_1F_1}&=\frac{1}{\sqrt{3}+1}\times\overline{A_1D_1}\\&=\frac{2}{\sqrt{3}+1}\\&=\frac{2\times(\sqrt{3}-1)}{3-1}\\&=\sqrt{3}-1\end{aligned}$$

점 B_1에서 직선 A_1D_1에 내린 수선의 발을 H_1이라 하자. 두 직선 A_1D_1, B_1C_1이 서로 평행하고

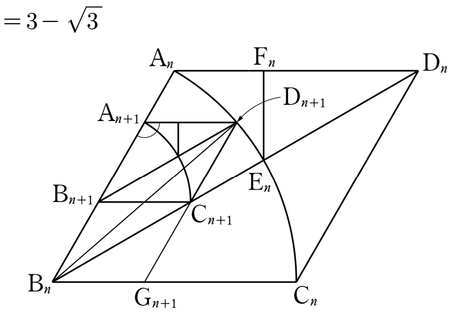
$\angle A_1B_1C_1=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\begin{aligned}\angle A_1B_1H_1&=\angle C_1B_1H_1-\angle A_1B_1C_1\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{B_1H_1}&=\overline{A_1B_1}\cos(\angle A_1B_1H_1)\\&=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\sqrt{3}\end{aligned}$$

$\angle A_1B_1F_1=\angle E_1B_1F_1$, $\overline{A_1B_1}=\overline{E_1B_1}$이므로 두 삼각형 $A_1B_1F_1$, $E_1B_1F_1$은 서로 합동이고 따라서 사각형 $A_1B_1E_1F_1$의 넓이는 삼각형 $A_1B_1F_1$의 넓이의 2배이다. 즉,

$$\begin{aligned}S_1&=2\times\frac{1}{2}\times\overline{A_1F_1}\times\overline{B_1H_1}\\&=2\times\frac{1}{2}\times(\sqrt{3}-1)\times\sqrt{3}\\&=3-\sqrt{3}\end{aligned}$$



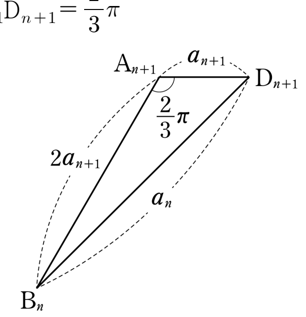
두 마름모 $A_nB_nC_nD_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$에 대하여 직선 $C_{n+1}D_{n+1}$이 선분 B_nC_n과 만나는 점을 G_{n+1}이라 하면 사각형 $B_{n+1}B_nG_{n+1}C_{n+1}$은 평행사변형이고, 대각선 B_nC_{n+1}이 $\angle B_{n+1}B_nG_{n+1}$을 이등분하므로 사각형 $B_{n+1}B_nG_{n+1}C_{n+1}$은 마름모이다. 이때 사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$도 마름모이므로 두 마름모 $A_nB_nC_nD_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 변의 길이를 각각 a_n, a_{n+1}이라 하면

$\overline{A_{n+1}D_{n+1}}=a_{n+1}$

$$\begin{aligned}\overline{A_{n+1}B_n}&=\overline{A_{n+1}B_{n+1}}+\overline{B_{n+1}B_n}\\&=a_{n+1}+a_{n+1}\\&=2a_{n+1}\end{aligned}$$

$\overline{B_nD_{n+1}}=\overline{B_nC_n}=a_n$

$\angle B_nA_{n+1}D_{n+1}=\frac{2}{3}\pi$



즉, 삼각형 $A_{n+1}B_nD_{n+1}$에서 코사인법칙에 의해

$$\begin{aligned}\overline{B_nD_{n+1}}^2&=\overline{A_{n+1}B_n}^2+\overline{A_{n+1}D_{n+1}}^2\\&\quad-2\times\overline{A_{n+1}B_n}\times\overline{A_{n+1}D_{n+1}}\\&\quad\times\cos(\angle B_nA_{n+1}D_{n+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n^2&=(2a_{n+1})^2+a_{n+1}^2-2\times 2a_{n+1}\times a_{n+1}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=7a_{n+1}^2\end{aligned}$$

$a_n=\sqrt{7}\,a_{n+1}$ ($\because a_n>0$)

따라서 두 마름모 $A_nB_nC_nD_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비가 $\sqrt{7}:1$이므로 넓이의 비는 $7:1$이고, 그림 R_n에 새롭게 색칠되는 부분의 넓이를 T_n이라 하면

$T_{n+1}=\frac{1}{7}T_n$

따라서 $S_n=\sum_{k=1}^{n}T_k$이므로

$T_1=S_1=3-\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{3-\sqrt{3}}{1-\frac{1}{7}}\\&=\frac{7}{2}-\frac{7}{6}\sqrt{3}\end{aligned}$$

즉, $p=\frac{7}{2}$, $q=-\frac{7}{6}$이므로

$60\times(p+q)=60\times\left\{\frac{7}{2}+\left(-\frac{7}{6}\right)\right\}=140$

킬러문항

30. 추론 능력 – 미분법 정답 8

$f(x)=axe^{-bx^2+b}$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=ae^{-bx^2+b}+ax\times(-2bx)e^{-bx^2+b}\\&=a(1-2bx^2)e^{-bx^2+b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&f''(x)\\&=-4abxe^{-bx^2+b}+a(1-2bx^2)\times(-2bx)e^{-bx^2+b}\\&=2abx(2bx^2-3)e^{-bx^2+b}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서

$x=\frac{1}{\sqrt{2b}}$ ($\because x>0$) ……… ㉠

이고 $a>0$, $b>0$이므로 $x=\frac{1}{\sqrt{2b}}$의 좌우에서 함수 $f'(x)$의 값의 부호가 양에서 음으로 바뀐다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{\sqrt{2b}}$에서 극대이다.

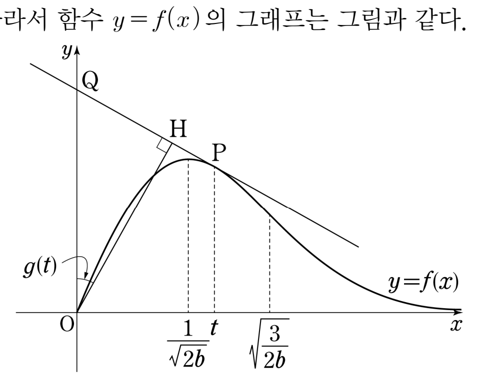
$f''(x)=0$에서

$x=\sqrt{\frac{3}{2b}}$ ($\because x>0$)

이고 $x=\sqrt{\frac{3}{2b}}$의 좌우에서 함수 $f''(x)$의 값의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f'(x)$는

$x=\sqrt{\frac{3}{2b}}$에서 극소이다. ……… ㉡

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$이고 $\angle\mathrm{HOQ}=g(t)$일 때 이 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\pi-g(t)$이므로

$\tan\{\pi-g(t)\}=f'(t)$, 즉

$\tan g(t)=-f'(t)$ ⋯⋯ ㉢

조건 (가)에서 $\lim_{t\to\frac{\sqrt{3}}{3}+} g(t)=0$이고 ㉢에서 $g(t)$의 값이 0에 가까워지면 $-f'(t)$의 값도 0에 가까워진다. 즉, $\lim_{t\to\frac{\sqrt{3}}{3}+}\{-f'(t)\}=0$이고 함수 $f'(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0$

이때 ㉠에서 방정식 $f'(x)=0$을 만족시키는 양의 실수 x의 값은 $\frac{1}{\sqrt{2b}}$뿐이므로

$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{2b}}$, $b=\frac{3}{2}$

조건 (나)에서 함수 $g(t)$의 최댓값은 $\frac{\pi}{4}$이고

$0<g(t)\le\frac{\pi}{4}$일 때 $0<\tan g(t)\le 1$이며 ㉢에서

$f'(t)=-\tan g(t)$이므로 $t>\frac{\sqrt{3}}{3}$인 모든 실수 t에 대하여

$-1\le f'(t)<0$

이다. 즉, 함수 $f'(t)$는 최솟값 -1을 갖는다.

㉡에서 함수 $f'(x)$는 $x=\sqrt{\frac{3}{2b}}$, 즉 $x=1$에서 극소이므로 함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 극솟값이자 최솟값 -1을 갖는다.

$f'(x)=a(1-3x^2)e^{-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}}$ 에서

$f'(1)=-2a=-1$

$a=\frac{1}{2}$

따라서

$f(x)=\frac{1}{2}xe^{-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}}$,

$f'(x)=\frac{1}{2}(1-3x^2)e^{-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}}$ ⋯⋯ ㉣

이다.

㉢에서 $\tan g(t)=-f'(t)$이므로

$\sec^2 g(t)\times g'(t)=-f''(t)$

$g'(t)=-\frac{f''(t)}{\sec^2 g(t)}$

$\quad=-\frac{f''(t)}{1+\tan^2 g(t)}$ ⋯⋯ ㉤

㉣에서

$f'\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{1}{2}\times\left\{1-3\times\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\right\}e^{-\frac{3}{2}\times\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\frac{3}{2}}$

$\quad=-\frac{\sqrt{e}}{2}$

이므로 ㉤에서

$$\frac{g'\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}{f''\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}=-\frac{1}{1+\tan^2 g\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}=-\frac{1}{1+\left\{-f'\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}^2}=-\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^2}=-\frac{4}{4+e}$$

따라서 $m=4$, $n=4$이므로

$m+n=4+4=8$

● [선택과목 – 기하]

23. 계산 능력 – 평면벡터 정답 ②

$\vec{a}-2\vec{b}=(1,3)-2(-2,2)$

$\quad=(1,3)-(-4,4)$

$\quad=(5,-1)$

이므로

$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$

24. 이해 능력 – 이차곡선 정답 ①

포물선 $y^2=10(x+1)$은 포물선 $y^2=10x$를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2=10x$의 준선의 방정식은 $x=-\frac{5}{2}$이므로

포물선 $y^2=10(x+1)$의 준선의 방정식은

$x+1=-\frac{5}{2}$, 즉 $x=-\frac{7}{2}$이다.

따라서 포물선의 정의에 의하여 선분 AF의 길이는 x좌표가 7인 점 A와 준선 $x=-\frac{7}{2}$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{\mathrm{AF}}=7-\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{21}{2}$

25. 문제해결 능력 – 평면벡터 정답 ③

점 P가 나타내는 직선은 점 $\mathrm{A}(2,\ 2)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(2,\ 1)$이므로 직선 l의 방정식은

$\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{1}$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+1$

기울기가 $\frac{1}{2}$이고 포물선 $y^2=8x$에 접하는 직선 m의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x+\frac{2}{\frac{1}{2}}$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+4$

따라서 두 직선 l, m의 y절편의 합은

$1+4=5$

26. 문제해결 능력 – 평면벡터 정답 ⑤

$|3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{5}$ 에서

$|3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=5$

$9|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+12\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=5$

이때 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$이므로

$9+12\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4=5$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\frac{2}{3}$

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta$

$\quad=\cos\theta$

$\quad=-\frac{2}{3}$

이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$\quad=\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$

$\quad=\frac{\sqrt{5}}{3}$

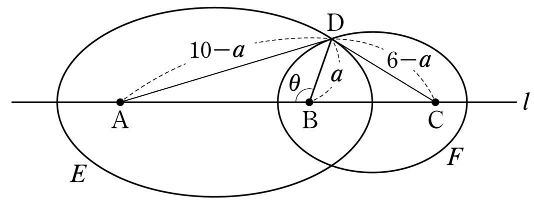
따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\quad=\frac{\sqrt{5}}{6}$

27. 문제해결 능력 – 이차곡선 정답 ④

$\overline{\mathrm{BD}}=a$라 하고 $\angle\mathrm{ABD}=\theta$라 하자.



점 D는 장축의 길이가 10인 타원 E 위의 점이므로 타원 E의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}}=10-a$

같은 방법으로 점 D는 장축의 길이가 6인 타원 F 위의 점이므로 타원 F의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{CD}}=6-a$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\cos\theta$

이므로

$(10-a)^2=6^2+a^2-2\times6\times a\times\cos\theta$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{20a-64}{12a}$

$\quad=\frac{5a-16}{3a}$ ⋯⋯ ㉠

삼각형 CDB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{CD}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2-2\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\cos(\pi-\theta)$

이므로

$(6-a)^2=4^2+a^2+2\times4\times a\times\cos\theta$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{20-12a}{8a}$

$\quad=\frac{5-3a}{2a}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{5a-16}{3a}=\frac{5-3a}{2a}$, 즉 $10a-32=15-9a$

이므로

$a=\frac{47}{19}$

28. 문제해결 능력 - 평면벡터 정답 ③

조건 (가)에서

$\overline{AB}=6$

이고, 조건 (나)에서

$\overline{AC}\perp\overline{BC}$, $\overline{AD}\perp\overline{BD}$

이므로 두 점 C, D는 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

$2\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}$에서

$2\overrightarrow{MD}+4\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$이므로

$2\overrightarrow{MD}+4\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MB}$, 즉

$\dfrac{\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{MC}}{1+2}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{MB}$ ············ ㉠

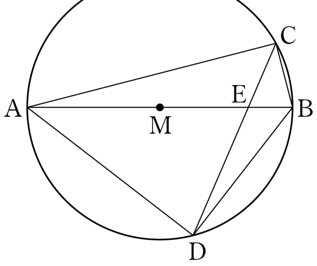
따라서 선분 MB를 2 : 1로 내분하는 점을 E라 하면

$\dfrac{2}{3}\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{ME}$

이므로 ㉠에서

$\dfrac{\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{MC}}{1+2}=\overrightarrow{ME}$

따라서 점 E는 선분 CD를 1 : 2로 내분하는 점이므로 네 점 A, B, C, D와 점 E의 위치는 그림과 같다.



따라서 $\overline{AB}=6$에서

$\overline{AM}=3$, $\overline{ME}=2$, $\overline{EB}=1$

이고, $\overline{EC}=k$라 하면

$\overline{ED}=2k$

이때 $\angle BED=\angle CEA$, $\angle CDB=\angle CAB$이므로 두 삼각형 EBD와 ECA는 서로 닮은 도형이다.

따라서 $\overline{EB}:\overline{ED}=\overline{EC}:\overline{AE}$, 즉 $1:2k=k:5$에서

$2k^2=5$

이므로

$k=\sqrt{\dfrac{5}{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

따라서

$|\overrightarrow{CD}|=3k=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$

다른 풀이

조건 (가)에서 $\overline{AB}=6$이고, 조건 (나)에서

$\overline{AC}\perp\overline{BC}$, $\overline{AD}\perp\overline{BD}$

이므로 두 점 C, D는 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

$\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$이므로

$2\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}$

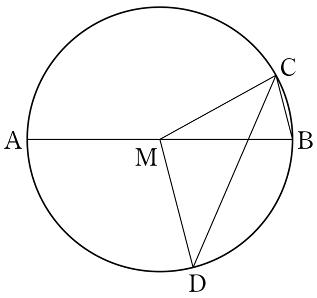
$=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})+4(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})$

$=\vec{0}+4\overrightarrow{CB}$

즉, $\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{CB}$

이때 $|\overrightarrow{MD}|=3$이므로

$|\overrightarrow{CB}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{MD}|=\dfrac{3}{2}$



두 직선 BC, DM은 서로 평행하므로 $\angle MCB=\theta$라 하면

$\angle CMD=\pi-\theta$

이등변삼각형 MBC에서

$\cos\theta=\dfrac{\frac{1}{2}\overline{BC}}{\overline{MC}}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}{3}=\dfrac{1}{4}$

삼각형 MDC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CD}^2=3^2+3^2-2\times3\times3\times\cos(\pi-\theta)$

$=9+9-18\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)$

$=\dfrac{45}{2}$

이므로

$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{\dfrac{45}{2}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$

29. 문제해결 능력 - 이차곡선 정답 90

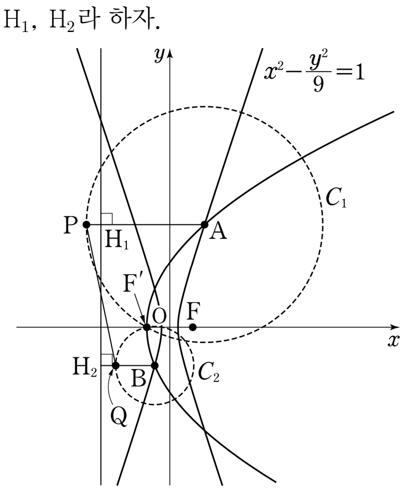
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{1^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$의 두 초점의 좌표는 각각

$F(\sqrt{10},0)$, $F'(-\sqrt{10},0)$이고, 주축의 길이는

$2\times1=2$

이다.

두 점 A와 B에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하자.



점 M의 x좌표가 최소가 되는 두 점 P와 Q의 위치는 그림과 같이 두 점 P, Q의 x좌표는 모두 음수이고, 선분 AP와 선분 BQ가 모두 x축에 평행할 때이다.

이때 쌍곡선과 포물선의 정의에 의하여

$\overline{PH_1}=\overline{AP}-\overline{AH_1}=\overline{AF'}-\overline{AF}=2$,

$\overline{QH_2}=\overline{BH_2}-\overline{BQ}=\overline{BF}-\overline{BF'}=2$

즉, $\overline{PH_1}=\overline{QH_2}$이므로 점 M은 포물선의 준선 위의 점이다.

이때 $\overline{FF'}=2\sqrt{10}$이므로 포물선의 준선의 방정식은

$x=-\sqrt{10}-2\sqrt{10}=-3\sqrt{10}$

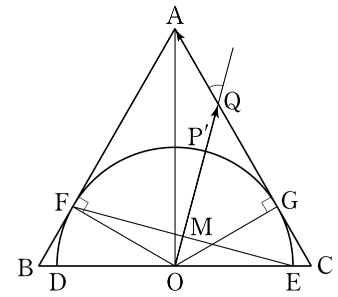
따라서 점 M의 x좌표의 최솟값은 $m=-3\sqrt{10}$이므로

$m^2=90$

킬러문항

30. 이해 능력 - 평면벡터 정답 432

반원의 중심 O는 선분 BC의 중점이다.



선분 EF의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{ME}=-\overrightarrow{MF}$이므로

$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{ME})\cdot(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MF})$

$=|\overrightarrow{PM}|^2+\overrightarrow{PM}\cdot(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF})+\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}$

$=|\overrightarrow{PM}|^2-|\overrightarrow{ME}|^2$

이때 $|\overrightarrow{ME}|$의 값은 일정하므로 그림과 같이 점 P가 반원과 직선 OM의 교점 P′과 일치할 때 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$의 값이 최소이다.

두 삼각형 OFM과 OEM은 합동이고

$\angle BOF=30°$이므로

$\angle QOC=75°$

$\angle COG=30°$이므로

$\angle QOG=\angle QOC-\angle COG=45°$

따라서 삼각형 QOG는 직각이등변삼각형이다.

$\overline{OC}=4$에서

$\overline{GC}=4\cos60°=2$,

$\overline{OG}=4\sin60°=2\sqrt{3}$,

$\overline{QG}=\overline{OG}=2\sqrt{3}$, $\overline{OQ}=\sqrt{2}\times\overline{OG}=2\sqrt{6}$

$\overline{AG}=\overline{AC}-\overline{GC}=8-2=6$

두 벡터 $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{GA}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\theta=\angle OQG=45°$

이므로

$k=\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{GA}$

$=|\overrightarrow{OQ}||\overrightarrow{GA}|\cos45°$

$=2\sqrt{6}\times6\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=12\sqrt{3}$

따라서 $k^2=12^2\times3=144\times3=432$

다른 풀이

반원의 중심 O는 선분 BC의 중점이다.

$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OE})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OF})$

$=\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})$

$+\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}$

이때 $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}$의 값은 상수이므로

$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$의 값이 최소이려면 $\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})$의 값이 최소이어야 한다.

선분 EF의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{OM}$

이므로 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OM}$이 이루는 각의 크기를 α라 하면

$\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})=2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OM}$

$=-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}$

$=-2|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OM}|\cos\alpha$

이때 $|\overrightarrow{OP}|$, $|\overrightarrow{OM}|$의 값은 상수이므로

$\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})$의 값이 최소이려면 $\cos\alpha$의 값이 최대이어야 한다.

따라서 $\cos\alpha=1$, 즉 $\alpha=0$일 때 최소이므로 점 P가 반원과 직선 OM의 교점 P′과 일치할 때

$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$의 값이 최소이다.