제 2교시 수학 영역

● 공통 – 수학 Ⅰ · 수학 Ⅱ

1. ③	2. ①	3. ③	4. ④	5. ⑤
6. ⑤	7. ②	8. ①	9. ④	10. ②
11. ③	12. ④	13. ⑤	14. ②	15. ①
16. 13	17. 6	18. 27	19. 45	20. 29
21. 5	22. 16			

● 선택 – 확률과 통계

23. ②	24. ①	25. ④	26. ③	27. ⑤
28. ②	29. 48	30. 11		

● 선택 – 미적분

23. ④	24. ③	25. ①	26. ⑤	27. ③
28. ②	29. 36	30. 10		

● 선택 – 기하

23. ④	24. ①	25. ③	26. ②	27. ⑤
28. ①	29. 255	30. 3		

● 공통 – 수학 Ⅰ · 수학 Ⅱ

1. $2^{\frac{8}{3}} \div 8^{\frac{5}{9}} = 2^{\frac{8}{3}} \div (2^3)^{\frac{5}{9}} = 2^{\frac{8}{3}-\frac{5}{3}} = 2$

2. $\int_0^2 (3x^2+2)dx = \left[x^3+2x\right]_0^2 = 2^3+2\times2=12$

3. $\log_2 x+\log_2 y=3$에서 $\log_2 xy=3$ $\quad \therefore xy=2^3=8$
두 실수 x, y는 로그의 진수이므로 $x>0$, $y>0$
따라서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$2x+4y \ge 2\sqrt{8xy}=16$ (등호는 $x=4$, $y=2$일 때 성립)
이므로 $2x+4y$의 최솟값은 16이다.

4. $\lim_{x\to1}\dfrac{2x^2-f(x)}{x^2-1}=2-\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+1)}$
$=2-\dfrac{1}{2}f'(1)=-1$
$\therefore f'(1)=6$

5. 조건 (가)에서 등비중항의 성질에 의해 $b^2=a\times ab$
$\therefore b=a^2$ …… ㉠
조건 (나)에서 등차중항의 성질에 의해 $a=\dfrac{ab+b}{2}$
$\therefore 2a=b+ab$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$a^3+a^2-2a=0$, $a(a-1)(a+2)=0$
$\therefore a=-2$, $b=4$ ($\because a<0$)
따라서 구하는 값은 $a^2+b^2=(-2)^2+4^2=20$

6. $\angle\mathrm{DBC}=\alpha$, $\angle\mathrm{DCB}=\beta$하면
$2\alpha+2\beta+60°=180°$에서
$\alpha+\beta=60°$
$\therefore \angle\mathrm{BDC}=120°$
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{\mathrm{BC}}^2=5^2+4^2-2\times5\times4\times\cos60°$
$\therefore \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{21}$
삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면
삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여
$\dfrac{\sqrt{21}}{\sin120°}=2R$
$\therefore R=\sqrt{7}$
따라서 외접원의 넓이는 $\pi R^2=7\pi$

7. $a\le0$이면 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-4x}-ax-b)=\infty$이므로 $a>0$
$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-4x}-ax-b)$
$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2-4x}-ax-b)(\sqrt{x^2-4x}+ax+b)}{\sqrt{x^2-4x}+ax+b}$
$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(1-a^2)x^2-2(2+ab)x-b^2}{\sqrt{x^2-4x}+ax+b}$ …… ㉠
극한값이 존재하려면 $1-a^2=0$이므로 $a=1$($\because a>0$)
㉠에서
$\lim_{x\to\infty}\dfrac{-2(2+b)x-b^2}{\sqrt{x^2-4x}+x+b}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-2(2+b)-\dfrac{b^2}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}+1+\dfrac{b}{x}}$
$=-2-b=-5$
따라서 $b=3$이므로 $a+b=1+3=4$

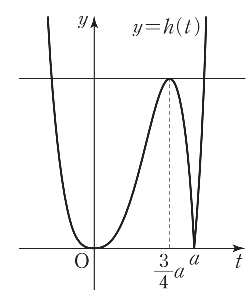
8. 이차방정식 $2x^2+2(a-1)x+2-a=0$의 서로 다른 두 실근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\sin\theta+\cos\theta=1-a$, $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{2-a}{2}$
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta$에서
$1=(1-a)^2-2\times\dfrac{2-a}{2}$, $a^2-a-2=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$
또한 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(a-1)^2-2(2-a)>0$
$a^2-3>0$에서 $a<-\sqrt{3}$ 또는 $a>\sqrt{3}$ $\quad \therefore a=2$
$\sin\theta+\cos\theta=-1$, $\sin\theta\cos\theta=0$에서 $\theta=\pi$
이므로 구하는 부채꼴의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times16\times\pi=8\pi$

9. 점 P의 시각 t에서의 속도는 $v(t)=-t^2+3t$이다.
$v(t)=-t(t-3)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=3$
즉, 점 P는 $t=3$에서 방향이 바뀌므로
$a=-\dfrac{1}{3}\times3^3+\dfrac{3}{2}\times3^2=\dfrac{9}{2}$
출발한 후 다시 원점으로 돌아오는데 걸린 시간은
$-\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{3}{2}t^2=-\dfrac{1}{6}t^2(2t-9)=0$에서 $t=\dfrac{9}{2}$
따라서 $b=\dfrac{9}{2}$이므로 $a+b=\dfrac{9}{2}+\dfrac{9}{2}=9$

10. 함수 $f(x)$는 $x\ne a$인 모든 실수 x에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이려면
$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=f(a)g(a)$가 성립해야 한다.
$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}\dfrac{x(x^2-4x+b)}{x-a}$ …… ㉠
㉠에서 $x\to a$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.
$\lim_{x\to a}x(x^2-4x+b)=a(a^2-4a+b)=0$ …… ㉡
이때 $a\ne0$이므로 $a^2-4a+b=0$
즉, $b=-a^2+4a$ …… ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$\lim_{x\to a}\dfrac{x(x^2-4x-a^2+4a)}{x-a}=\lim_{x\to a}x(x+a-4)$
$=a(2a-4)$ …… ㉣
$f(a)g(a)=a(a^2-4a+b)$는 ㉡에 의하여
$f(a)g(a)=0$이고 $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=0$이다.
따라서 ㉣에서 $a=2$ ($\because a\ne0$)이고 이를 ㉢에 대입하면 $b=4$이므로
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-2} & (x\ne2)\\ 2 & (x=2)\end{cases}$, $g(x)=x^2-4x+4$
$\therefore f(3)g(3)=3\times1=3$

11. 두 곡선 $y=f(x)$, $g=f(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 즉, 삼차방정식 $x^3-3ax^2+12a^2-8a=0$이 서로 다른 두 실근만을 갖기 위해서는 중근과 하나의 실근을 가져야 한다.
$h(x)=x^3-3ax^2+12a^2-8a$라 하면
$h(x)=(x-t)^2(x-s)$ (단, $t\ne s$)이므로
$h(t)=0$, $h'(t)=0$이고 $h(s)=0$
$h'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=2a$ (단, $a\ne0$)
(i) $t=0$인 경우
$h(0)=12a^2-8a=0$에서 $a=0$ 또는 $a=\dfrac{2}{3}$이다.
$\therefore a=\dfrac{2}{3}$
(ii) $t=2a$인 경우
$h(2a)=-4a^3+12a^2-8a=0$에서
$a=0$ 또는 $a=1$ 또는 $a=2$
$\therefore a=1$ 또는 $a=2$
(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 실수 a의 값의 합은
$\dfrac{2}{3}+1+2=\dfrac{11}{3}$

12. $f'(x)=3x^2-4ax+a$이므로 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은
$y=(3t^2-4at+a)(x-t)+t^3-2at^2+at$
위의 식에 $x=0$을 대입하면 $y=-2t^3+2at^2$
$\therefore g(t)=-2t^3+2at^2$
따라서 함수 $h(t)$는
$h(t)=|t\times(-2t^3+2at^2)|=|2t^4-2at^3|$
$k(t)=2t^4-2at^3$이라 하면
$k'(t)=8t^3-6at^2$
$=2t^2(4t-3a)$
에서 함수 $y=h(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $h(t)-\dfrac{27}{8}=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는 경우는 함수 $h(t)$의 극댓값이 $\dfrac{27}{8}$인 경우이다. 즉, $h\left(\dfrac{3}{4}a\right)=\dfrac{27}{8}$이다.
$h\left(\dfrac{3}{4}a\right)=\left|2\times\left(\dfrac{3}{4}a\right)^4-2a\times\left(\dfrac{3}{4}a\right)^3\right|$
$=\left|2\times\left(\dfrac{3}{4}a\right)^3\left(\dfrac{3}{4}a-a\right)\right|=\dfrac{1}{2}a\times\left(\dfrac{3}{4}a\right)^3=\dfrac{27}{8}$
$a^4=16$에서 $a>0$이므로 $a=2$

13. $\left|a_k-\left(k+\dfrac{1}{4}\right)^2\right|$의 값은 자연수 l에 대하여
(i) $k=2l-1$이면 $\left(2l-\dfrac{3}{4}\right)^2=4l^2-3l+\dfrac{9}{16}$이므로
$a_{2l-1}=4l^2-3l+1$이다.
$\therefore \left|a_{2l-1}-\left(2l-\dfrac{3}{4}\right)^2\right|=\boxed{\dfrac{7}{16}}$
(ii) $k=2l$이면 $\left(2l+\dfrac{1}{4}\right)^2=4l^2+l+\dfrac{1}{16}$이므로
$a_{2l}=4l^2+l$이다. $\quad \therefore \left|a_{2l}-\left(2l+\dfrac{1}{4}\right)^2\right|=\dfrac{1}{16}$
따라서 b_n은 자연수 m의 값에 따라 다음과 같이 구할 수 있다.
① $n=2m-1$일 때
$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left|a_k-\left(k+\dfrac{1}{4}\right)^2\right|$
$=\sum_{l=1}^{m}\left|a_{2l-1}-\left(2l-\dfrac{3}{4}\right)^2\right|$
$+\sum_{l=1}^{m-1}\left|a_{2l}-\left(2l+\dfrac{1}{4}\right)^2\right|$
$=\dfrac{7m}{16}+\dfrac{m-1}{16}=\boxed{\dfrac{4n+3}{16}}$
② $n=2m$일 때
$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left|a_k-\left(k+\dfrac{1}{4}\right)^2\right|$
$=\sum_{k=1}^{n-1}\left|a_k-\left(k+\dfrac{1}{4}\right)^2\right|+\left|a_{2m}-\left(2m+\dfrac{1}{4}\right)^2\right|$
$=\dfrac{8m-1}{16}+\dfrac{1}{16}=\boxed{\dfrac{n}{4}}$

따라서 $p=\frac{7}{16}$, $f(n)=\frac{4n+3}{16}$, $g(n)=\frac{n}{4}$이므로

$p+f(5)+g(6)=\frac{7}{16}+\frac{23}{16}+\frac{3}{2}=\frac{27}{8}$

14. 두 번째 항부터 부호에 따라서 구하여 보면

(ⅰ) $a_2\geq0$이면 $a_2=-10+d\geq0$에서 $d\geq10$이다.

$|a_1|+|a_2|-|a_3|+|a_4|-|a_5|+|a_6|$
$=3d=15$

따라서 $d=5$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a_2<0$이고 $a_3\geq0$이면 $a_2=-10+d<0$과
$a_3=-10+2d\geq0$에서 $5\leq d<10$이다.

$|a_1|+|a_2|-|a_3|+|a_4|-|a_5|+|a_6|$
$=20+d=15$

따라서 $d=-5$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $a_3<0$이고 $a_4\geq0$이면 $a_3=-10+2d<0$과
$a_4=-10+3d\geq0$에서 $\frac{10}{3}\leq d<5$이다.

$|a_1|+|a_2|-|a_3|+|a_4|-|a_5|+|a_6|$
$=5d=15$

따라서 $d=3$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $a_4<0$, $a_5\geq0$이면 $a_4=-10+3d<0$과
$a_5=-10+4d\geq0$에서 $\frac{5}{2}\leq d<\frac{10}{3}$이다.

$|a_1|+|a_2|-|a_3|+|a_4|-|a_5|+|a_6|$
$=20-d=15$

따라서 $d=5$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅴ) $a_5<0$, $a_6\geq0$이면 $a_5=-10+4d<0$과
$a_6=-10+5d\geq0$에서 $2\leq d<\frac{5}{2}$이다.

$|a_1|+|a_2|-|a_3|+|a_4|-|a_5|+|a_6|$
$=7d=15$

$d=\frac{15}{7}$에서 $2\leq\frac{15}{7}<\frac{5}{2}$이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅵ) $a_6<0$이면 $-10+5d<0$에서 $d<2$이다.

$|a_1|+|a_2|-|a_3|+|a_4|-|a_5|+|a_6|$
$=20-3d=15$

$d=\frac{5}{3}$에서 $\frac{5}{3}<2$이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅰ)~(ⅵ)에 의하여 $\frac{15}{7}+\frac{5}{3}=\frac{80}{21}$이다.

15. 조건 (가)에서 밑이 c인 로그로 변형하면

$\frac{1}{\log_c(a+b)}=\frac{1}{\log_c(a-b)}\times\frac{2-\log_c(a+b)}{\log_c(a+b)}$
$\log_c(a-b)=2-\log_c(a+b)$
$\log_c(a-b)(a+b)=2$
$c^2=a^2-b^2\quad\therefore b^2=a^2-c^2\quad\cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 $\log_2 b=\log_2 3+\log_2(a-c)$
$b=3(a-c)\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $9(a-c)^2=a^2-c^2$
$a-c\neq0$이므로 $9(a-c)=a+c$
$a=\frac{5}{4}c\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $b=\frac{3}{4}c\quad\cdots\cdots$ ㉣

$a+b+c=3c$이므로 c가 최소일 때 $a+b+c$도 최솟값을 갖는다.
㉢, ㉣에서 c는 4의 배수이므로 c의 최솟값은 4이다.
따라서 $a+b+c$의 최솟값은 12

16. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2+a_4=2a+4d=2\quad\therefore a+2d=1\quad\cdots\cdots$ ㉠
$a_4+a_6=2a+8d=10\quad\therefore a+4d=5\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=-3$, $d=2$
$\therefore a_9=a+8d=-3+16=13$

17. $g'(x)=(2x+2)f(x)+(x^2+2x)f'(x)$

위의 식에 $x=1$을 대입하면 $g'(1)=4f(1)+3f'(1)$
$26=8+3f'(1)\quad\therefore f'(1)=6$

18. 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=3x^2+x+f(x)$에서 $f'(x)=3x+1$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x+1)dx$
$=\frac{3}{2}x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

주어진 식에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=\frac{3}{2}$이므로 $C=-1$

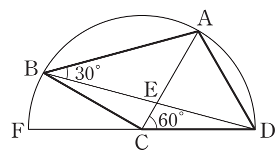
$\therefore f(4)=\frac{3}{2}\times4^2+4-1=27$

19. 조건 (가)에서

$\log_2\frac{n}{3\times5^k}=k+2$, $\frac{n}{3\times5^k}=2^{k+2}$
$\therefore n=2^{k+2}\times3\times5^k$

조건 (나)에서 n의 양의 약수의 개수가 240 이하이므로
$2(k+1)(k+3)\leq240$, $(k+1)(k+3)\leq120$
이 부등식을 만족시키는 자연수 k는 $k=1, 2, \cdots, 9$
따라서 구하는 자연수 k의 값의 합은 45이다.

20. 삼각형 ACD가 정삼각형이므로 $\angle ACD=60°$이다.
조건 (가)에서 $\angle ABD=30°$이므로 두 점 B, D는 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원 위의 점이다.



이때 두 대각선 AC, BD가 만나려면 점 B는 그림과 같은 반원에서 호 AF 위의 점이므로
$0<\overline{AB}\leq4\sqrt{3}$이고 6 이하의 자연수 k에 대하여 $\overline{AB}=k$라 하면 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이가 4이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{k}{\sin\theta_k}=8\qquad\therefore\sin\theta_k=\frac{k}{8}$

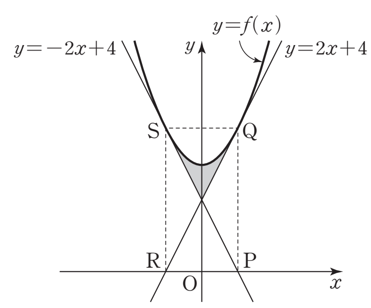
$\therefore\sum_{k=1}^{6}\sin\theta_k=\frac{1}{8}\times\frac{6\times7}{2}=\frac{21}{8}\qquad\therefore p+q=29$

21. 점 P의 좌표를 $(a, 0)(a\neq0)$이라 하면 점 Q의 좌표는 $\left(a, \frac{1}{2}a^2+6\right)$이고 $f'(x)=x$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q에서의 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{2}a^2+6\right)=a(x-a)\qquad\therefore y=ax-\frac{1}{2}a^2+6$

곡선 $y=f(x)$가 y축에 대하여 대칭이므로 직선 l_2가 점 P를 지나려면 두 점 P, R가 y축에 대하여 대칭이어야 한다. 즉, 직선 l_1이 x축과 만나는 점은 $R(-a, 0)$이므로

$0=-\frac{3}{2}a^2+6$에서 $a=-2$ 또는 $a=2$이다.



두 접선의 방정식은 $y=2x+4$, $y=-2x+4$이므로 곡선 $y=f(x)$와 두 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

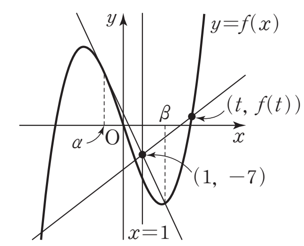
$S=2\int_0^2\left\{\frac{1}{2}x^2+6-(2x+4)\right\}dx$
$=2\int_0^2\left(\frac{1}{2}x^2-2x+2\right)dx=2\left[\frac{1}{6}x^3-x^2+2x\right]_0^2$
$=2\left(\frac{4}{3}-4+4\right)=\frac{8}{3}\qquad\therefore q-p=5$

22. 조건 (가)에서 $\frac{f(a)-f(2)}{a-2}$의 값은 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(2, f(2))$를 지나는 직선의 기울기이고, $\frac{f(b)-f(2)}{b-2}$의 값은 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(b, f(b))$, $(2, f(2))$를 지나는 직선의 기울기이다.

이때 $\frac{f(a)-f(2)}{a-2}<0$, $\frac{f(b)-f(2)}{b-2}>0$이면 구간 $(1, 2)$에 있는 임의의 a에 대하여 $f(a)>f(2)$이고 구간 $(2, 3)$에 있는 임의의 b에 대하여 $f(b)>f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
또한 $\frac{f(a)-f(2)}{a-2}>0$, $\frac{f(b)-f(2)}{b-2}<0$이면 같은 방법으로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
$\therefore f'(2)=0$
이때 조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 원점에 대칭인 함수이므로 $f'(-2)=0$이다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 갖고 $x=2$에서 극솟값을 가지므로 $f'(x)=3(x+2)(x-2)$

$f(x)=\int(3x^2-12)dx=x^3-12x+C$
(단, C는 적분상수)

조건 (나)에서 주어진 식에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$
$\therefore f(x)=x^3-12x$
함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 16, $x=2$에서 극솟값 -16을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $(t-1)\{f(x)-f(t)\}-\{f(t)+7\}(x-t)=0$에서 $t=1$이면 방정식의 근은 $x=1$로 실근의 개수는 하나이고 $t\neq1$일 때, 방정식 $f(x)=\frac{f(t)+7}{t-1}(x-t)+f(t)$에서 직선 $y=\frac{f(t)+7}{t-1}(x-t)+f(t)$는 점 $(1, -7)$과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$를 지나는 직선이므로 위의 그림과 같다.
점 $(1, -7)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 x좌표를 α라 하고, 이 접선과 곡선 $y=f(x)$가 만나는 접점이 아닌 점의 x좌표를 β라 하자.

(ⅰ) $t>\beta$일 때 $g(t)=3$ (ⅱ) $t=\beta$일 때 $g(t)=2$
(ⅲ) $1\leq t<\beta$일 때 $g(t)=1$ (ⅳ) $\alpha<t<1$일 때 $g(t)=3$
(ⅴ) $t=\alpha$일 때 $g(t)=2$ (ⅵ) $t<\alpha$일 때 $g(t)=3$

(ⅰ)~(ⅵ)에 의하여 구간 (c, ∞)에서 $g(t)$가 연속이기 위한 c의 최솟값은 β이다.
접점이 $(\alpha, \alpha^3-12\alpha)$이고 $f'(x)=3x^2-12$에서 접선의 방정식은 $y-(\alpha^3-12\alpha)=(3\alpha^2-12)(x-\alpha)$
이 접선이 점 $(1, -7)$을 지나므로
$2\alpha^3-3\alpha^2+5=(\alpha+1)(2\alpha^2-5\alpha+5)=0$
$\therefore\alpha=-1$
따라서 점 $(1, -7)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은 $y=-9x+2$이고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-9x+2$의 교점의 x좌표를 구하면
$x^3-12x=-9x+2$에서
$x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)=0\qquad\therefore m=2$
$\therefore|f(m)|=|f(2)|=|2^3-12\times2|=16$

● 선택 - 확률과 통계

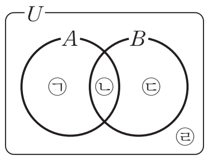
23. $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$, $P(A)=\frac{1}{3}$이고 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이므로 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$P(B)=P(A\cup B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$\therefore P(A)-P(B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

24. $(1-x)^9$의 전개식의 일반항은
${}_9C_r(-x)^r\ (r=0, 1, 2, \cdots 9)$
이므로 다항식 $(x+1)(1-x)^9$의 전개식에서 x의 계수는 $x\times{}_9C_0(-x)^0+1\times{}_9C_1(-x)^1=-8x$이므로 -8이다.

25. 벤다이어그램으로 나타내면 서로소인 네 집합 $A-B$, $A\cap B$, $B-A$, $U-(A\cup B)$로 나누어지고 이를 각각 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣이라 하자.



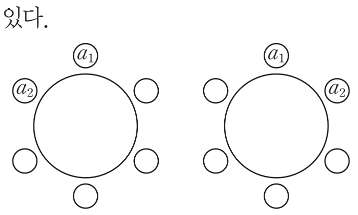
$n(U)=6$이고 $n(A\cap B)=1$이므로 ㉡에 들어갈 원소를 정하는 경우의 수는 ${}_6C_1=6$
이 각각에 대하여
$n(A\cup B)=4$이므로 남은 5개의 원소 중 ㉠ 또는 ㉢에 들어갈 3개의 원소를 정하는 경우의 수는 ${}_5C_3=10$
이 각각에 대하여 정한 3개의 원소는 ㉠ 또는 ㉢에 있어야 하므로 3개의 원소가 들어갈 부분을 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_3=2^3=8$
따라서 구하는 경우의 수는 $6\times10\times8=480$

26. 주어진 시행을 1회 하였을 때, 1점을 받을 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, 2점을 받을 확률은 $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$이다.
주어진 시행을 4회 반복할 때 받은 점수의 합이 짝수인 사건을 A라 하면 A^C은 받은 점수의 합이 홀수인 사건이다. 네 점수의 합이 홀수이려면 받은 네 점수가 '1점 1개, 2점 3개' 또는 '1점 3개, 2점 1개'이어야 하므로 A^C이 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A^C)={}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3+{}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{40}{81}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{40}{81}=\frac{41}{81}$$

27. 1학년 학생 2명을 a_1, a_2라 하고 2학년 학생 2명을 b_1, b_2라 하고 3학년 학생 2명을 c_1, c_2라 하자.
1학년 학생 중 a_1이 앉을 자리의 경우의 수는 1이고, a_2는 a_1과 이웃하게 앉아야하므로 그 경우는 그림과 같이 2가지가 있다.



[그림 1] [그림 2]

(i) [그림 1]의 경우
네 학생 b_1, b_2, c_1, c_2 중에서 a_1의 옆자리에 앉을 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$
이 각각에 대하여 2학년 학생과 3학년 학생은 같은 학년의 학생끼리 이웃하지 않게 앉아야 하므로 a_1의 옆자리에 앉은 학생과 같은 학년의 학생은 a_1의 맞은편 자리에 앉아야 한다. 남은 같은 학년의 학생 2명이 남은 2개의 의자에 앉는 경우의 수는 $2!=2$
그러므로 이 경우의 수는 $4\times2=8$
(ii) [그림 2]의 경우
[그림 1]과 마찬가지 방법으로 이 경우의 수는 8
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $8+8=16$

28. 10장의 카드가 들어 있는 주머니에서 동시에 3장의 카드를 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_{10}C_3=120$
꺼낸 3장의 카드에 적혀 있는 수의 최댓값과 최솟값의 합이 5인 경우는 다음과 같다.
(i) 최댓값이 4, 최솟값이 1인 경우
1이 적힌 카드 2장과 4가 적힌 카드 2장, 즉 4장의 카드 중에서 3장의 카드를 꺼내면 1 또는 4가 적힌 카드가 적어도 1장씩 나오므로 경우의 수는 ${}_4C_3=4$
1이 적힌 카드 1장, 2 또는 3이 적힌 카드 1장, 4가 적힌 카드 1장을 꺼내는 경우의 수는
${}_2C_1\times{}_4C_1\times{}_2C_1=16$
그러므로 이 경우의 확률은 $\frac{4+16}{120}=\frac{1}{6}$
(ii) 최댓값이 3, 최솟값이 2인 경우
2가 적힌 카드 2장과 3이 적힌 카드 2장, 즉 4장의 카드 중에서 3장의 카드를 꺼내면 2 또는 3이 적힌 카드가 적어도 1장씩 나오므로 경우의 수는 ${}_4C_3=4$
따라서 이 경우의 확률은 $\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$
따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{6}+\frac{1}{30}=\frac{1}{5}$

29. a, b, c는 모두 0 이상 10 이하인 정수이고 10 이하인 자연수 중 3의 배수는 3, 6, 9이므로 다음과 같이 나누어 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구할 수 있다.
(i) $abc=0$일 때
$abc=0$이려면 a, b, c 중에서 적어도 하나 이상이 0이어야 하고 세 수의 합이 10이어야 한다. 따라서 $abc=0$일 때 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
0, 0, 10 또는 0, 1, 9 또는 0, 2, 8 또는 0, 3, 7 또는 0, 4, 6 또는 0, 5, 5
를 각각 일렬로 나열하는 경우의 수의 합과 같으므로

$$\frac{3!}{2!}+3!+3!+3!+3!+\frac{3!}{2!}=30$$

(ii) $abc\neq0$일 때
$abc\neq0$이고 abc의 값이 3의 배수이려면 a, b, c는 모두 자연수이고 a, b, c 중에 3 또는 6이 하나 이상 있어야 한다.
① a, b, c 중에 3이 하나 이상 있는 경우
이 경우 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
3, 1, 6 또는 3, 2, 5 또는 3, 3, 4
를 각각 일렬로 나열하는 경우의 수의 합과 같으므로

$$3!+3!+\frac{3!}{2!}=15$$

② a, b, c 중에 6이 하나 이상 있는 경우
이 경우 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
6, 1, 3 또는 6, 2, 2
를 각각 일렬로 나열하는 경우의 수의 합과 같으므로

$$3!+\frac{3!}{2!}=9$$

①, ②에서 3, 1, 6을 일렬로 나열하는 경우인 $3!=6$가지가 중복되므로 $abc\neq0$일 때 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$15+9-6=18$
(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$30+18=48$

30. 집합 A에서 A로의 함수 중에서 함수 f가 주어진 두 조건을 만족시키는 사건을 A, 함수 f가 일대일대응인 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

조건 (나)에서 $i^{f(1)+f(2)}=i^{f(3)+f(4)}$이 성립하려면 $f(1)+f(2)=f(3)+f(4)$이거나 두 값 $f(1)+f(2)$, $f(3)+f(4)$의 차가 4의 배수이어야 한다.
이때 조건 (가)에서 $f(1)+f(2)\leq f(3)+f(4)$이고 $f(1)+f(2)$, $f(3)+f(4)$의 값은 모두 2 이상 8 이하이므로 $f(1)+f(2)=f(3)+f(4)$ 또는 $\{f(1)+f(2)\}+4=f(3)+f(4)$이어야 한다.
한편 집합 A의 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)+f(b)$의 값에 따라 $f(a)$, $f(b)$의 값을 정하는 경우의 수는 다음과 같다.
$f(a)+f(b)=2$일 때, $f(a)=f(b)=1$로 1
$f(a)+f(b)=3$일 때, $f(a)=1$, $f(b)=2$ 또는 $f(a)=2$, $f(b)=1$로 2
$f(a)+f(b)=4$일 때, $f(a)=1$, $f(b)=3$ 또는 $f(a)=2$, $f(b)=2$ 또는 $f(a)=3$, $f(b)=1$로 3
$f(a)+f(b)=5$일 때, $f(a)=1$, $f(b)=4$ 또는 $f(a)=2$, $f(b)=3$ 또는 $f(a)=3$, $f(b)=2$ 또는 $f(a)=4$, $f(b)=1$로 4
$f(a)+f(b)=6$일 때, $f(a)=2$, $f(b)=4$ 또는 $f(a)=3$, $f(b)=3$ 또는 $f(a)=4$, $f(b)=2$로 3
$f(a)+f(b)=7$일 때, $f(a)=3$, $f(b)=4$ 또는 $f(a)=4$, $f(b)=3$으로 2
$f(a)+f(b)=8$일 때, $f(a)=f(b)=4$로 1
$f(1)+f(2)$의 값에 따라 사건 A의 함수 f의 개수는 다음과 같다.

$f(1)+f(2)$의 값	$f(3)+f(4)$의 값	함수 f의 개수
2	2 또는 6	$1\times(1+3)=4$
3	3 또는 7	$2\times(2+2)=8$
4	4 또는 8	$3\times(3+1)=12$
5	5	$4\times4=16$
6	6	$3\times3=9$
7	7	$2\times2=4$
8	8	$1\times1=1$

$n(A)=4+8+12+16+9+4+1=54$
집합 A의 모든 원소의 합이 $1+2+3+4=10$이므로 함수 f가 일대일대응이려면
$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=10$ …… ㉠
위 표에서 ㉠을 만족시키는 경우는
$f(1)+f(2)=3$, $f(3)+f(4)=7$ …… ㉡
$f(1)+f(2)=5$, $f(3)+f(4)=5$ …… ㉢
㉡을 만족시키는 함수 f는
$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$, $f(4)=4$ 또는
$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=4$, $f(4)=3$ 또는
$f(1)=2$, $f(2)=1$, $f(3)=3$, $f(4)=4$ 또는
$f(1)=2$, $f(2)=1$, $f(3)=4$, $f(4)=3$
이므로 함수 f의 개수는 4
㉢을 만족시키는 함수 f는
$f(1)=1$, $f(2)=4$, $f(3)=2$, $f(4)=3$ 또는
$f(1)=1$, $f(2)=4$, $f(3)=3$, $f(4)=2$ 또는
$f(1)=4$, $f(2)=1$, $f(3)=2$, $f(4)=3$ 또는
$f(1)=4$, $f(2)=1$, $f(3)=3$, $f(4)=2$ 또는
$f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=1$, $f(4)=4$ 또는
$f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=4$, $f(4)=1$ 또는
$f(1)=3$, $f(2)=2$, $f(3)=1$, $f(4)=4$ 또는
$f(1)=3$, $f(2)=2$, $f(3)=4$, $f(4)=1$
이므로 함수 f의 개수는 8
$\therefore n(A\cap B)=4+8=12$
따라서 $\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{2}{9}$이므로 $p+q=11$

● 선택 – 미적분

23. $\lim_{x\to0}\frac{\sin4x\cos4x}{e^{2x}-1}$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin4x}{4x}\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\times2\cos4x\right)=2$$

24. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은
$-1<5-3\log_8 k\leq1$이므로
$-1<5-\log_2 k\leq1$, $-6<-\log_2 k\leq-4$
$4\leq\log_2 k<6$, $2^4\leq k<2^6$ $\quad\therefore 16\leq k<64$
따라서 자연수 k의 개수는 48이다.

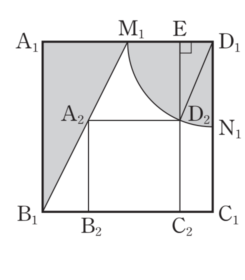
25. $S_n=n^2+3n$이므로
(i) $a_1=S_1=4$
(ii) $n\geq2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=(n^2+3n)-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$$
$$=2(n+1)$$

(i), (ii)에서 $a_n=2(n+1)\ (n\geq1)$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{20}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{20}{2(k+1)\times2(k+2)}$$
$$=5\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=5\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{20}{a_na_{n+1}}=5\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{5}{2}$$

26. 삼각형 $\mathrm{A_1B_1M_1}$의 넓이는
$\frac{1}{2}\times2\times1=1$
부채꼴 $\mathrm{D_1M_1N_1}$의 넓이는
$\frac{1}{4}\times\pi\times1^2=\frac{\pi}{4}$
$\therefore S_1=1+\frac{\pi}{4}$



정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 $a\,(0<a<2)$라 하고 점 D_2에서 선분 A_1D_1에 내린 수선의 발을 E라 하면 $\overline{D_2E}=2-a$

두 삼각형 $A_1B_1M_1$, $B_2A_2B_1$은 서로 닮음이므로

$$\overline{A_1B_1}:\overline{A_1M_1}=\overline{A_2B_2}:\overline{B_1B_2},\ \overline{B_1B_2}=\frac{a}{2}$$

$$\overline{ED_1}=\overline{C_2C_1}=2-(\overline{B_1B_2}+\overline{B_2C_2})=2-\frac{3}{2}a$$

따라서 직각삼각형 D_1ED_2에서 $\overline{ED_1}^2+\overline{ED_2}^2=\overline{D_1D_2}^2$

$$\left(2-\frac{3}{2}a\right)^2+(2-a)^2=1^2,\ (13a-14)(a-2)=0$$

이때 $0<a<2$이므로 $a=\frac{14}{13}$

따라서 S_n은 공비가 $\left(\frac{7}{13}\right)^2=\frac{49}{169}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1+\frac{\pi}{4}}{1-\frac{49}{169}}=\frac{169(4+\pi)}{480}$$

27. $g(x)=\frac{f(x)}{x}-f(x)$에서

$$g\left(\frac12\right)=\frac{f\left(\frac12\right)}{\frac12}-f\left(\frac12\right)=f\left(\frac12\right)$$

이때 $f\left(\frac12\right)+g\left(\frac12\right)=2$이므로 $f\left(\frac12\right)=g\left(\frac12\right)=1$

$g(x)=\frac{f(x)}{x}-f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}-f'(x)$이므로

$$g'\left(\frac12\right)=\frac{\frac12 f'\left(\frac12\right)-f\left(\frac12\right)}{\frac14}-f'\left(\frac12\right)=f'\left(\frac12\right)-4$$

$$f'\left(\frac12\right)=g'\left(\frac12\right)+4$$

이때 $f'\left(\frac12\right)g'\left(\frac12\right)=-4$이므로

$$\left\{g'\left(\frac12\right)+4\right\}g'\left(\frac12\right)=-4$$

$g'\left(\frac12\right)=t$라 하면 $t(t+4)=-4$

$$(t+2)^2=0\quad \therefore t=g'\left(\frac12\right)=-2$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(\frac12,\ g\left(\frac12\right)\right)$에서의 접선의 방정식은

$$y-g\left(\frac12\right)=g'\left(\frac12\right)\left(x-\frac12\right),\ y-1=-2\left(x-\frac12\right)$$

$$y=-2x+2$$

이므로 이 직선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac12\times1\times2=1$$

28. 선분 OB를 $2:1$로 내분하는 점이 Q이므로

$$\overline{OQ}=\frac23\times3=2$$

$\angle AOP=\theta\ \left(0<\theta<\frac23\pi\right)$라 하면 $\angle QOP=\frac23\pi-\theta$

사각형 OAPQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$$\begin{aligned}S(\theta)&=\frac12\times\overline{OP}\times\overline{OA}\times\sin\theta\\&\quad+\frac12\times\overline{OP}\times\overline{OQ}\times\sin\left(\frac23\pi-\theta\right)\\&=\frac12\times3\times3\times\sin\theta\\&\quad+\frac12\times3\times2\times\left(\sin\frac23\pi\cos\theta-\cos\frac23\pi\sin\theta\right)\\&=6\sin\theta+\frac{3\sqrt3}{2}\cos\theta\end{aligned}$$

$$S'(\theta)=6\cos\theta-\frac{3\sqrt3}{2}\sin\theta$$

이때 $S'(\theta)=0$에서 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{12}{3\sqrt3}$, $\tan\theta=\frac{4\sqrt3}{3}$이므로

$\tan\alpha=\frac{4\sqrt3}{3}\ \left(0<\alpha<\frac23\pi\right)$라 하자.

열린구간 $\left(0,\ \frac23\pi\right)$에서 함수 $S(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\frac23\pi\right)$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗	극대	↘	

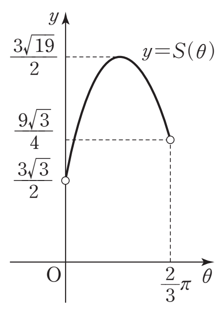
따라서 함수 $S(\theta)$는 $\theta=\alpha$에서 극대이면서 동시에 최대이고 $\tan\alpha=\frac{4\sqrt3}{3}$에서 $\sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{19}}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt3}{\sqrt{19}}$이므로

$$S(\alpha)=6\sin\alpha+\frac{3\sqrt3}{2}\cos\alpha=\frac{57}{2\sqrt{19}}=\frac{3\sqrt{19}}{2}$$

$$\lim_{\theta\to0+}S(\theta)=\lim_{\theta\to0+}\left(6\sin\theta+\frac{3\sqrt3}{2}\cos\theta\right)=\frac{3\sqrt3}{2}$$

$$\lim_{\theta\to\frac{2\pi}{3}-}S(\theta)=\lim_{\theta\to\frac{2\pi}{3}-}\left(6\sin\theta+\frac{3\sqrt3}{2}\cos\theta\right)=\frac{9\sqrt3}{4}$$

$6<\frac{3\sqrt{19}}{2}<7$, $2<\frac{3\sqrt3}{2}<3$, $3<\frac{9\sqrt3}{4}<4$이므로 곡선 $y=S(\theta)$의 그래프는 그림과 같다.



a_n의 값은 $0<\theta<\frac23\pi$에서 곡선 $y=S(\theta)$와 직선 $y=n$의 교점의 개수이므로

$$a_1=a_2=a_7=a_8=a_9=a_{10}=0,$$
$$a_3=1,$$
$$a_4=a_5=a_6=2$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_n=0\times6+1\times1+2\times3=7$$

29. $P_n\left(2^n,\ 2^{\frac n2}\right)$, $Q_n(2^n,\ 0)$이므로

$P_{n+2}\left(2^{n+2},\ 2^{\frac n2+1}\right)$, $Q_{n+2}(2^{n+2},\ 0)$

사각형 $P_nQ_nQ_{n+2}P_{n+2}$의 넓이 S_n은

$$\begin{aligned}S_n&=\frac12\times\left(2^{\frac n2}+2^{\frac n2+1}\right)\times(2^{n+2}-2^n)\\&=\frac92\times2^{\frac{3n}{2}}=\frac92\times\left(2^{\frac32}\right)^n=\frac92\times(\sqrt8)^n\end{aligned}$$

$$S_{n+1}=9\sqrt2\times(\sqrt8)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}+k^{\frac n2}}{S_n+k^{\frac n2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9\sqrt2\times(\sqrt8)^n+(\sqrt k)^n}{\frac92\times(\sqrt8)^n+(\sqrt k)^n}$$

이때 자연수 k의 값에 따라 극한값은 다음과 같다.

(i) $0<k<8$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}+k^{\frac n2}}{S_n+k^{\frac n2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9\sqrt2\times(\sqrt8)^n+(\sqrt k)^n}{\frac92\times(\sqrt8)^n+(\sqrt k)^n}=\frac{9\sqrt2+0}{\frac92+0}=2\sqrt2>2$$

(ii) $k=8$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}+k^{\frac n2}}{S_n+k^{\frac n2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9\sqrt2\times(\sqrt8)^n+(\sqrt8)^n}{\frac92\times(\sqrt8)^n+(\sqrt8)^n}=\frac{9\sqrt2+1}{\frac{11}{2}}=\frac{2(9\sqrt2+1)}{11}$$

$$\frac{2(9\sqrt2+1)}{11}-2=2\times\frac{9\sqrt2-10}{11}$$

이고 $9\sqrt2-10=\sqrt{162}-\sqrt{100}>0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}+k^{\frac n2}}{S_n+k^{\frac n2}}=\frac{2(9\sqrt2+1)}{11}>2$$

(iii) $k>8$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}+k^{\frac n2}}{S_n+k^{\frac n2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9\sqrt2\times(\sqrt8)^n+(\sqrt k)^n}{\frac92\times(\sqrt8)^n+(\sqrt k)^n}=\frac{0+1}{0+1}=1<2$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 k의 값은 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8$이므로 그 합은 $\sum_{k=1}^{8}k=\frac{8\times9}{2}=36$

30. 조건 (가)에서

$f(x)=-\sin^3x$ 또는 $f(x)=\sin x\cos x-\sin x$

$g(x)=-\sin^3x$, $h(x)=\sin x\cos x-\sin x$라 하자.

$g'(x)=-3\sin^2x\cos x$이므로 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 방정식 $g'(x)=0$의 근은 $x=\frac\pi2$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac32\pi$

닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac\pi2$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac32\pi$	$\cdots$	2π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↘	극소	↗	0	↗	극대	↘	0

따라서 함수 $g(x)$는 $x=\frac\pi2$에서 극솟값 $g\left(\frac\pi2\right)$를 갖고, $x=\frac32\pi$에서 극댓값 $g\left(\frac32\pi\right)$를 갖는다.

$$g\left(\frac\pi2\right)=-\sin^3\frac\pi2=-1,\ g\left(\frac32\pi\right)=-\sin^3\frac32\pi=1$$

$$\begin{aligned}h'(x)&=\cos^2x-\sin^2x-\cos x=2\cos^2x-\cos x-1\\&=(2\cos x+1)(\cos x-1)\end{aligned}$$

이므로 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 방정식 $h'(x)=0$의 근은

$$x=\frac23\pi \text{ 또는 } x=\frac43\pi$$

닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac23\pi$	$\cdots$	$\frac43\pi$	$\cdots$	2π
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	↘	극소	↗	극대	↘	0

따라서 함수 $h(x)$는 $x=\frac23\pi$에서 극솟값 $h\left(\frac23\pi\right)$를 갖고, $x=\frac43\pi$에서 극댓값 $h\left(\frac43\pi\right)$를 갖는다.

$$h\left(\frac23\pi\right)=\sin\frac23\pi\cos\frac23\pi-\sin\frac23\pi=-\frac{3\sqrt3}{4},$$

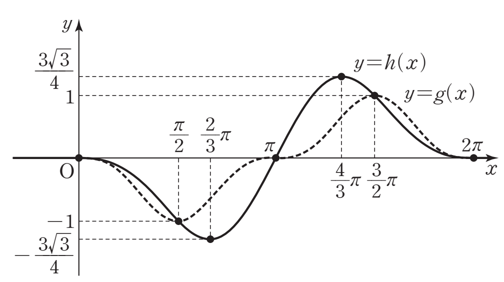
$$h\left(\frac43\pi\right)=\sin\frac43\pi\cos\frac43\pi-\sin\frac43\pi=\frac{3\sqrt3}{4}$$

또한 방정식 $g(x)=h(x)$에서

$$-\sin^3x=\sin x\cos x-\sin x$$
$$\sin x\cos x(\cos x-1)=0$$

닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 방정식 $g(x)=h(x)$의 근은 $x=0$ 또는 $x=\frac\pi2$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac32\pi$ 또는 $x=2\pi$

따라서 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 두 조건 (가), (다)에 의하여 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 가능한 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & \left(0\le x\le\frac\pi2 \text{ 또는 } \pi\le x\le\frac32\pi\right)\\ h(x) & \left(\frac\pi2\le x\le\pi \text{ 또는 } \frac32\pi\le x\le2\pi\right)\end{cases}$$

…… ㉠

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & \left(\frac\pi2\le x\le\pi \text{ 또는 } \frac32\pi\le x\le2\pi\right)\\ h(x) & \left(0\le x\le\frac\pi2 \text{ 또는 } \pi\le x\le\frac32\pi\right)\end{cases}$$

…… ㉡

함수 $f(x)$가 ㉠이면

$$f\left(\frac23\pi\right)+f\left(\frac43\pi\right)=h\left(\frac23\pi\right)+g\left(\frac43\pi\right)=-\frac{3\sqrt3}{8}$$

함수 $f(x)$가 ㉡이면

$$f\left(\frac23\pi\right)+f\left(\frac43\pi\right)=g\left(\frac23\pi\right)+h\left(\frac43\pi\right)=\frac{3\sqrt3}{8}$$

조건 (나)를 만족시키는 함수 $f(x)$는 ㉡이다.

방정식 $2f(x)+3=n$에서 $f(x)=\frac{n-3}{2}$이므로 a_n은 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=\frac{n-3}{2}$과 만나는 서로 다른 점의 개수이므로 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=a_5=2$

$\therefore \sum_{n=1}^{5} a_n=1+2+3+2+2=10$

● 선택 – 기하

23. 평행사변형 OABC에서 $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}$이므로

$|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|=|\vec{a}+(\vec{a}+\vec{c})-\vec{c}|=|2\vec{a}|=2|\vec{a}|=4$

$|\vec{a}|=2$

$\therefore |\vec{c}-\vec{b}|=|\vec{c}-(\vec{a}+\vec{c})|=|-\vec{a}|=|\vec{a}|=2$

24. 포물선 $y^2=4(x-1)$은 초점이 $(1,\ 0)$인 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 포물선 $y^2=4(x-1)$의 초점은 $\mathrm{F}(2,\ 0)$이다.

점 $\mathrm{F}(2,\ 0)$이 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{k}=1$의 초점이므로 $k<8$이고 $8-k=2^2$에서 $k=4$

타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$의 장축의 길이는 $a=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$이고 단축의 길이는 $b=2\sqrt{4}=4$ $\quad\therefore \frac{a}{b}=\frac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$

25. 타원 $x^2+16y^2=16$ 위의 점 $\mathrm{A}\left(2,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선 l의 방정식은 $2x+16\times\frac{\sqrt{3}}{2}y=16$, $x+4\sqrt{3}y-8=0$

타원 $x^2+16y^2=16$은 원점 O에 대하여 대칭이므로 두 직선 l, m도 원점 O에 대하여 대칭이다. 그러므로 점 A와 직선 m 사이의 거리는 원점과 직선 l 사이의 거리의 2배이므로 $2\times\frac{|-8|}{\sqrt{1^2+(4\sqrt{3})^2}}=\frac{16}{7}$

26. $2k\vec{b}-\vec{a}=k^2\vec{b}-2\vec{a}$에서 $\vec{a}=(k^2-2k)\vec{b}$

이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 모두 영벡터가 아니므로

$k^2-2k\neq0$, 즉 $k\neq0$, $k\neq2$

$|\vec{a}+\vec{b}|=|(k^2-2k)\vec{b}+\vec{b}|=|k^2-2k+1||\vec{b}|$

$2|\vec{a}-\vec{b}|=2|(k^2-2k)\vec{b}-\vec{b}|=|2k^2-4k-2||\vec{b}|$

따라서

$|k^2-2k+1||\vec{b}|=|2k^2-4k-2||\vec{b}|$

$|k^2-2k+1|=|2k^2-4k-2|$

이므로

$k^2-2k-3=0$ 또는 $3k^2-6k-1=0$

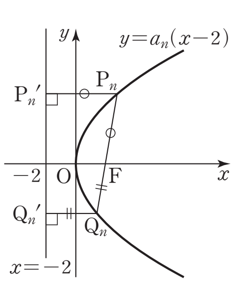
$k^2-2k-3=0$에서 $k=-1$ 또는 $k=3$

$3k^2-6k-1=0$에서 $k=\frac{3\pm2\sqrt{3}}{3}$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-1+3+\frac{3-2\sqrt{3}}{3}+\frac{3+2\sqrt{3}}{3}=4$

27. 포물선 $y^2=8x$의 초점을 F라 하면 $\mathrm{F}(2,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-2$이다. 직선 $y=a_n(x-2)$은 포물선 $y^2=8x$의 초점 F를 지나는 직선이므로 두 점 P_n, Q_n에서 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 P_n', Q_n'이라 하면 포물선의 정의에 의하여



$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{F}}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_n'}$, $\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{F}}=\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_n'}$

두 점 P_n, Q_n의 x좌표를 b_n, c_n이라 하면 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=10n$이므로 $(b_n+2)+(c_n+2)=10n$

$b_n+c_n=10n-4$ …… ㉠

한편, 포물선 $y^2=8x$와 직선 $y=a_n(x-2)$에서

$\{a_n(x-2)\}^2=8x$

$a_n^2x^2-4(a_n^2+2)x+4a_n^2=0$

이차방정식의 두 근이 b_n, c_n이므로 근과 계수의 관계에 의하여

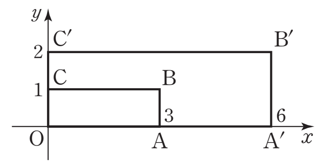
$b_n+c_n=\frac{4(a_n^2+2)}{a_n^2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$10n-4=\frac{4(a_n^2+2)}{a_n^2}=4+\frac{8}{a_n^2}$, $\frac{4}{a_n^2}=5n-4$

$\sum_{n=1}^{10}\frac{4}{a_n^2}=\sum_{n=1}^{10}(5n-4)=5\times\frac{10\times11}{2}-4\times10=235$

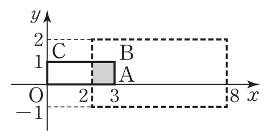
28.



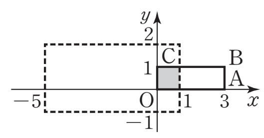
벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 나타내는 도형은 직사각형 OABC이고, 벡터 $2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$는 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 방향이 같고 크기가 2인 벡터이므로 벡터 $2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 나타내는 도형은 네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A'}(6,\ 0)$, $\mathrm{B'}(6,\ 2)$, $\mathrm{C'}(0,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 직사각형 OA′B′C′이다.

이때 벡터 $2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\vec{a}$, 즉 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$가 나타내는 도형은 직사각형 OA′B′C′을 x축의 방향으로 a_1만큼, y축으로 방향으로 a_2만큼 평행이동한 직사각형이고, a_1, a_2가 모두 정수이므로 점 Q가 나타내는 도형과 직사각형 OABC가 겹쳐지는 부분의 넓이가 1인 경우는 다음과 같이 $a_1=2$인 경우 $a_1=-5$인 경우가 있다.

(i) $a_1=2$인 경우
가능한 a_2의 값은 0 또는 -1이므로 a_1+a_2의 값은 2 또는 1이다.



(ii) $a_1=-5$인 경우
가능한 a_2의 값은 0 또는 -1이므로 a_1+a_2의 값은 -5 또는 -6이다.



$\therefore M+m=2+(-6)=-4$

29. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$라 하면

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60^\circ=3\times4\times\frac{1}{2}=6$

삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2-2\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\cos60^\circ$

$=3^2+4^2-2\times3\times4\times\frac{1}{2}=13$

$\overline{\mathrm{AB}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{13}$

이때 점 P는 선분 AB를 $1:m$으로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\frac{1}{m+1}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{\sqrt{13}}{m+1}$

점 Q는 선분 AB를 $m:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{BQ}}=\frac{1}{m+1}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{\sqrt{13}}{m+1}$

따라서

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{AB}}-(\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BQ}})$

$\frac{\sqrt{13}}{5}=\sqrt{13}-\left(\frac{\sqrt{13}}{m+1}+\frac{\sqrt{13}}{m+1}\right)$, $m=\frac{3}{2}$

이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\frac{9}{25}\times3^2+\frac{12}{25}\times6+\frac{4}{25}\times4^2=\frac{217}{25}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=\frac{4}{25}\times3^2+\frac{12}{25}\times6+\frac{9}{25}\times4^2=\frac{252}{25}$

이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\frac{\sqrt{217}}{5}$, $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\frac{6\sqrt{7}}{5}$이고

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{6}{25}\times3^2+\frac{13}{25}\times6+\frac{6}{25}\times4^2=\frac{228}{25}$

$\cos\theta=\frac{\frac{228}{25}}{\frac{\sqrt{217}}{5}\times\frac{6\sqrt{7}}{5}}=\frac{38}{217}\sqrt{31}$

따라서 $p=217$, $q=38$이므로 $p+q=255$

30. 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{8}=1$의 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$ $(c>0)$이므로 $c=\sqrt{1+8}=3$

쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{8}=1$ 위의 제1사분면 위의 한 점을 P라 하면 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{8}=1$의 주축의 길이는 2이므로 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2$, 즉 $\overline{\mathrm{PF'}}\neq\overline{\mathrm{PF}}$

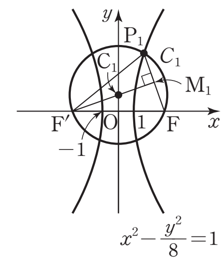
따라서 삼각형 PF′F가 이등변삼각형이려면 $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}$인 이등변삼각형이거나 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{FF'}}$인 이등변삼각형이어야 한다. 이때 점 P_1의 x좌표가 $c=3$보다 작으므로 삼각형 $\mathrm{P_1F'F}$는 $\overline{\mathrm{P_1F'}}=\overline{\mathrm{FF'}}$인 이등변삼각형이고 삼각형 $\mathrm{P_2F'F}$는 $\overline{\mathrm{P_2F}}=\overline{\mathrm{FF'}}$인 이등변삼각형이다.

(i) 이등변삼각형 $\mathrm{P_1F'F}$의 외접원 C_1

$\overline{\mathrm{P_1F'}}=\overline{\mathrm{FF'}}=6$이므로

$\overline{\mathrm{P_1F}}=\overline{\mathrm{P_1F'}}-2=4$

이때 원 C_1의 중심을 $\mathrm{C_1}$, 선분 $\mathrm{P_1F}$의 중점을 $\mathrm{M_1}$이라 하면 점 $\mathrm{C_1}$은 선분 FF′의 수직이등분선인 y축과 선분 $\mathrm{F'M_1}$의 교점이다.



원점 O에 대하여

$\angle\mathrm{C_1F'O}=\theta_1$이라 하면 직각삼각형 $\mathrm{F'FM_1}$에서

$\sin\theta_1=\frac{\overline{\mathrm{FM_1}}}{\overline{\mathrm{FF'}}}=\frac{1}{3}$, $\cos\theta_1=\sqrt{1-\sin^2\theta_1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

이므로 직각삼각형 $\mathrm{C_1F'O}$에서

$\overline{\mathrm{C_1F'}}=\frac{\overline{\mathrm{OF'}}}{\cos\theta_1}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$, $\overline{\mathrm{OC_1}}=\overline{\mathrm{C_1F'}}\sin\theta_1=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

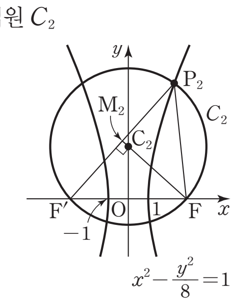
그러므로 원 C_1은 중심이 $\mathrm{C_1}\left(0,\ \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$이고, 반지름의 길이가 $\frac{9\sqrt{2}}{4}$인 원이다.

(ii) 이등변삼각형 $\mathrm{P_2F'F}$의 외접원 C_2

$\overline{\mathrm{P_2F}}=\overline{\mathrm{FF'}}=6$이므로

$\overline{\mathrm{P_2F'}}=\overline{\mathrm{P_2F}}+2=8$

이때 원 C_2의 중심을 $\mathrm{C_2}$, 선분 $\mathrm{P_2F'}$의 중점을 $\mathrm{M_2}$라 하면 점 $\mathrm{C_2}$는 선분 FF′의 수직이등분선인 y축과 직선 $\mathrm{FM_2}$의 교점이다.



$\angle\mathrm{F'FC_2}=\theta_2$라 하면 직각삼각형 $\mathrm{F'FM_2}$에서

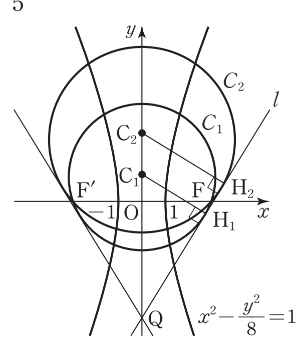
$\sin\theta_2=\frac{\overline{\mathrm{F'M_2}}}{\overline{\mathrm{FF'}}}=\frac{2}{3}$, $\cos\theta_2=\sqrt{1-\sin^2\theta_2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

이므로 직각삼각형 $\mathrm{C_2OF}$에서

$\overline{\mathrm{C_2F}}=\frac{\overline{\mathrm{OF}}}{\cos\theta_2}=\frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{9\sqrt{5}}{5}$이므로

$\overline{\mathrm{OC_2}}=\overline{\mathrm{C_2F}}\sin\theta_2=\frac{9}{5}\sqrt{5}\times\frac{2}{3}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

그러므로 원 C_2는 중심이 $\mathrm{C_2}\left(0,\ \frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{9\sqrt{5}}{5}$인 원이다.



두 원 C_1, C_2에 동시에 접하는 직선을 l이라 하고 직선 l이 y축과 만나는 점을 Q, 직선 l이 두 원 C_1, C_2에 접하는 점을 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하자.

두 삼각형 $\mathrm{QH_1C_1}$, $\mathrm{QH_2C_2}$는 닮음이므로

$\overline{\mathrm{QC_1}}:\overline{\mathrm{C_1H_1}}=\overline{\mathrm{QC_2}}:\overline{\mathrm{C_2H_2}}$

$\overline{\mathrm{OQ}}=k$라 하면

$\left(k+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right):\frac{9\sqrt{2}}{4}=\left(k+\frac{6\sqrt{5}}{5}\right):\frac{9\sqrt{5}}{5}$

$k=\frac{3\sqrt{10}}{4\sqrt{5}-5\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+\sqrt{5}$

따라서 y절편은 $-2\sqrt{2}-\sqrt{5}$이므로

$a^2-b^2=(-2)^2-(-1)^2=3$