출제 및 해설 : 띵수학 연구실 (정다움, 양민석, 김서천)

공통과목				선택과목					
				확률과 통계		미적분		기하	
문항번호	정답	문항번호	정답	문항번호	정답	문항번호	정답	문항번호	정답
1	④	12	⑤	23	⑤	23	⑤	*	*
2	②	13	①	24	③	24	①	*	*
3	①	14	③	25	④	25	⑤	*	*
4	⑤	15	①	26	②	26	②	*	*
5	④	16	4	27	①	27	④	*	*
6	③	17	13	28	③	28	④	*	*
7	②	18	22	29	190	29	48	*	*
8	④	19	10	30	54	30	7	*	*
9	⑤	20	44						
10	④	21	9						
11	③	22	87						

문항의 이용을 원하시거나 모의고사 출제 관련 문의사항이 있으신 경우 math_dding@hanmail.net 로 연락주시기 바랍니다.

해설강의는 띵수학 유튜브에서 찾아보실 수 있습니다!
https://www.youtube.com/c/띵수학mathdding/playlists

2023년 3월 공통 전 문항 해설 강의

공통과목

1. 정답) ④ [수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수]

해설 : $2^{-\frac{2}{3}} \times \frac{4}{\sqrt[3]{2}} = 2^{-\frac{2}{3}} \times 2^{2-\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}+2-\frac{1}{3}} = 2$

2. 정답) ② [수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속]

해설 : $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1}(x+1)(\sqrt{x+3}+2) = 2 \times 4 = 8$

3. 정답) ① [수학Ⅰ - 수열]

해설 : 등차중항의 성질에 의해 $a_1 a_5 = a_3^2 = 3a_3$이고 $a_3 = 3 > 0$이다.

공비를 r라 할 때, $a_2 = 2$에서 $\frac{a_3}{a_2} = \frac{3}{2} = r$이고

$\frac{a_6}{a_4} = \frac{a_4 \times r^2}{a_4} = r^2 = \frac{9}{4}$이다.

4. 정답) ⑤ [수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속]

해설 : $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 1+} f(x) = 3$이므로 $\lim_{x \to 0} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x) = 5$이다.

5. 정답) ④ [수학Ⅰ - 삼각함수]

해설 : $3\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta} = -2$의 양변에 $\cos\theta$를 곱하면

$3\cos^2\theta - 1 = -2\cos\theta$이고 정리하면

$3\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1 = (3\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0$이다.

$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$이므로 $\cos\theta > 0$이고 $\cos\theta = \frac{1}{3}$이다.

$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$에서 $\sin\theta < 0$, $\tan\theta < 0$이고

$\sin\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\tan\theta = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$이므로

$\sin\theta - \tan\theta = \frac{4\sqrt{2}}{3}$이다.

6. 정답) ③ [수학Ⅱ - 미분]

해설 : 방정식 $x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+k=0$의 실근의 개수는

곡선 $y=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+k$와 x축의 교점의 개수와 같다.

함수 $y=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+k$의 도함수는 $y'=3x^2-9x+6$이고

$y'=3(x-1)(x-2)=0$에서 함수 $y=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+k$는

$x=1$에서 극댓값 $\frac{5}{2}+k$, $x=2$에서 극솟값 $2+k$를 가진다.

곡선 $y=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+k$와 x축의 교점의 개수가 2이려면

극값이 0이어야 하고, $\frac{5}{2}+k=0$ 또는 $2+k=0$에서

$k=-\frac{5}{2}$ 또는 $k=-2$이다.

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 5이다.

7. 정답) ② [수학Ⅱ - 적분]

해설 : $x^2-3x+2=x-1$에서 $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=0$이고

곡선 $y=x^2-3x+2$와 직선 $y=x-1$이 만나는 두 점의 x좌표는

각각 1 또는 3이다.

$\int_1^3(x^2-4x+3)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3=-\frac{4}{3}$이므로

곡선 $y=x^2-3x+2$와 직선 $y=x-1$로

둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{4}{3}$이다.

$x^2=ax$에서 $x^2-ax=x(x-a)=0$이고

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=ax$가 만나는 두 점의 x좌표는

각각 0 또는 a이다.

$\int_0^a(x^2-ax)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^a=\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{2}=-\frac{a^3}{6}$이므로

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=ax$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{a^3}{6}$이고

$\frac{a^3}{6}=\frac{4}{3}$에서 $a^3=8$, $a=2$이다.

8. 정답) ④ [수학Ⅰ - 삼각함수]

해설 : $g(t)=\frac{f(t+1)-f(t)}{t+1-t}$

$=f(t+1)-f(t)$

$=\sin\pi(t+1)-\sin\pi t$

$=-\sin\pi t-\sin\pi t$

$=-2\sin\pi t$

이다.

$|g(t)|=1$을 만족시키는 t는 $|-2\sin\pi t|=1$에서

$\sin\pi t=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin\pi t=-\frac{1}{2}$이다.

$0\le t\le 3$에서

$\sin\pi t=\frac{1}{2}$을 만족시키는 t의 값은 $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{17}{6}$이고

$\sin\pi t=-\frac{1}{2}$을 만족시키는 t의 값은 $\frac{7}{6}$, $\frac{11}{6}$이다.

따라서 모든 t의 값의 합은 $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}+\frac{13}{6}+\frac{17}{6}+\frac{7}{6}+\frac{11}{6}=9$이다.

9. 정답) ⑤ [수학Ⅰ - 수열]

해설 : 모든 자연수 n에 대하여 $(4a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}-2a_n)=0$에서

$a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n$ 또는 $a_{n+1}=2a_n$이고

$a_{n+1}=k_na_n$이라 할 때, $k_n=\frac{1}{4}$ 또는 $k_n=2$이다.

이 때, $a_1=a_4$이므로

$a_4=k_1k_2k_3a_1$이고 $k_1k_2k_3=1$이다.

즉, k_1, k_2, k_3 중 2개의 수는 2이고, 나머지 1개의 수는 $\frac{1}{4}$이다.

(1) $k_1=\frac{1}{4}$인 경우

$a_1=1$, $a_2=\frac{1}{4}$, $a_3=\frac{1}{2}$이고 $\sum_{k=1}^{3}a_k=\frac{7}{4}$이다.

(2) $k_2=\frac{1}{4}$인 경우

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=\frac{1}{2}$이고 $\sum_{k=1}^{3}a_k=\frac{7}{2}$이다.

(3) $k_3=\frac{1}{4}$인 경우

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$이고 $\sum_{k=1}^{3}a_k=7$이다.

즉, $k_3=\frac{1}{4}$일 때, $\sum_{k=1}^{3}a_k=7$로 최댓값을 가진다.

이는 $a_4=a_7$에서 $a_7=k_4k_5k_6a_4$, $k_4k_5k_6=1$인 세 수 k_4, k_5, k_6에서도 동일하고, $k_6=\frac{1}{4}$일 때, $\sum_{k=4}^{6}a_k=7$로 최댓값이므로

$\sum_{k=1}^{6}a_k=\sum_{k=1}^{3}a_k+\sum_{k=4}^{6}a_k\le 14$에서 $\sum_{k=1}^{6}a_k$의 최댓값은 14이다.

10. 정답) ④ [수학Ⅱ - 적분]

해설 : $f(x)=x^3+ax^2+bx+\int_1^x t^2f'(t)dt$에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=1+a+b$이다.

양변을 미분하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b+x^2f'(x)$이고

$(1-x^2)f'(x)=3x^2+2ax+b$이다.

$f'(x)$도 다항함수이므로 양변의 최고차항이 같으려면

$f'(x)=-3$이어야하고,

$-3(1-x^2)=3x^2-3=3x^2+2ax+b$에서

$a=0$, $b=-3$이다.

$f(1)=1+a+b=-2$이고 $f'(x)=-3$에서 $f(x)=-3x+1$이다.

$\int_0^\alpha f(x)dx=\int_0^\alpha(-3x+1)dx=\left[-\frac{3}{2}x^2+x\right]_0^\alpha=-\frac{3}{2}\alpha^2+\alpha=0$이고

$\alpha=\frac{2}{3}$이다.

11. 정답) ③ [수학Ⅰ - 삼각함수]

해설 : 엇각에 의해 $\angle\mathrm{CPQ}=\angle\mathrm{BCP}$이고

$\cos(\angle\mathrm{CPQ})=\cos(\angle\mathrm{BCP})=\frac{3}{4}$이다.

삼각형 CPQ에 코사인법칙을 적용하면

$\overline{\mathrm{CQ}}^2=2^2+5^2-2\times2\times5\times\frac{3}{4}=14$에서 $\overline{\mathrm{CQ}}=\sqrt{14}$이고

삼각형 BCP에 코사인법칙을 적용하면

$\overline{\mathrm{BP}}^2=6^2+5^2-2\times6\times5\times\frac{3}{4}=16$에서 $\overline{\mathrm{BP}}=4$이다.

두 삼각형 APQ, ABC는 서로 닮음이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=6$에서

닮음비는 $1:3$이다. 닮음비에 의해 $\overline{\mathrm{AQ}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$, $\overline{\mathrm{AP}}=2$이다.

따라서 삼각형 APQ는 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$인 이등변삼각형이고

선분 AQ의 중점을 M이라 할 때, 직선 PM은 선분 AQ를 수직이등분하고, $\cos(\angle\mathrm{PQM})=\frac{\overline{\mathrm{MQ}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\frac{\frac{\sqrt{14}}{4}}{2}=\frac{\sqrt{14}}{8}$이다.

따라서 $\sin(\angle\mathrm{PQM})=\frac{5\sqrt{2}}{8}$이므로

삼각형 APQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{14}}{2}\times\frac{5\sqrt{2}}{8}=\frac{5\sqrt{7}}{8}$이다.

12. 정답) ⑤ [수학Ⅰ - 수열]

해설 : 두 점 $(k,\ a_k)$, $(8-k,\ -a_{8-k})$를 지나는 직선의 기울기가 일정하므로

$\frac{-a_{8-k}-a_k}{8-k-k}=\frac{-2a_4}{8-2k}$가 3 이하의 모든 자연수 k에 대하여 같은 값을 가져야 하고

분모인 $8-2k$가 k에 따라 달라지므로 $a_4=0$이어야 한다.

이때, $a_n=(n-4)d$이다.

$a_m=12$이므로 $(m-4)d=12$이다. $m-4$는 -3 이상의 정수이므로

$|d|$는 12의 양의 약수이어야 하고

$m<4$일 때, $d=-4,\ -6,\ -12$

$m>4$일 때, $d=1,2,3,4,6,12$가 가능하므로 정수 d의 개수는 9이다.

13. 정답) ① [수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속]

해설 : $\lim_{x\to t}\frac{x-t}{x^2-2tx+f(t)}$의 분자는 0으로 가고 극한값이 존재하지 않으려면 $x\to t$일 때 분모가 0으로 가야한다.

이때, $t^2-2t^2+f(t)=0$에서 $f(t)=t^2$이면

$\lim_{x\to t}\frac{x-t}{x^2-2tx+f(t)}=\lim_{x\to t}\frac{x-t}{x^2-2tx+t^2}=\lim_{x\to t}\frac{1}{x-t}$이므로

극한값이 존재하지 않는다.

즉, $f(t)=t^2$인 t가 2뿐이다.

ⅰ) $f(x)$의 최고차항의 계수가 1인 경우

$f(x)=x^2+a(x-2)$ 꼴이고

$f(3)=0$에서 $a=-9$, $f(x)=x^2-9(x-2)$이다.

이때, $f(0)=18$이다.

ⅱ) $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이 아닌 경우

$f(x)=x^2+b(x-2)^2$ 꼴이고

$f(3)=0$에서 $b=-9$, $f(x)=x^2-9(x-2)^2$이다.

이때, $f(0)=-36$이다.

따라서 ⅰ), ⅱ)에 의해 $f(0)$의 최댓값은 18, 최솟값은 -36이고

합은 -18이다.

14. 정답) ③ [수학Ⅱ - 미분]

해설 : $g(x)=f(x)\times|x^2-p^2|$은 $x\neq -p$, $x\neq p$인 모든 실수 x에서는 다항함수의 일부이므로 미분가능하다. $x=-p$, $x=p$에서의 미분가능성을 확인해주면

(1) $x=-p$

$$\lim_{x\to -p-}\frac{g(x)-g(-p)}{x+p}=\lim_{x\to -p-}\frac{f(x)\times(x+p)(x-p)}{x+p}$$
$$=\lim_{x\to -p-}f(x)\times(x-p)=-2pf(-p)$$
$$\lim_{x\to -p+}\frac{g(x)-g(-p)}{x+p}=\lim_{x\to -p-}\frac{-f(x)\times(x+p)(x-p)}{x+p}$$
$$=\lim_{x\to -p+}-f(x)\times(x-p)=2pf(-p)$$

에서 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$-2pf(-p)=2pf(-p)$이고 $p>0$이므로 $f(-p)=0$이다.

(2) $x=p$

(1)과 같은 방식으로 하면 $-2pf(p)=2pf(p)$에서 $f(p)=0$이다.

ㄱ. $f(x)$가 이차식일 때, $f(-p)=0$, $f(p)=0$이면 $x+p$, $x-p$를 인수로 가져야 하고 $f(x)=k(x+p)(x-p)\,(k\neq 0)$이라 할 때,

$g(x)=k(x^2-p^2)|x^2-p^2|$에서

$g(-1)=k(1-p^2)|1-p^2|$, $g(1)=k(1-p^2)|1-p^2|$이므로

$g(-1)=g(1)$이다. (참)

ㄴ. 반례로 상수함수 $f(x)=0$이면 $f(p)=f(-p)=0$이므로 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $g(x)=0$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}$의 값은 존재한다. (거짓)

ㄷ. $\{x|x>3\}=\{x|g(x)>0\}$에서 $g(x)$는 $x=3$에서만 부호변화가 있어야 한다.

$g(x)=f(x)\times|x^2-p^2|$에서 $|x^2-p^2|\geq 0$이므로

$f(x)$는 $x=3$에서만 부호변화가 있어야 하고 $f(-p)=0$, $f(p)=0$이어야 하는데,

$f(x)$가 상수함수인 경우, $f(x)=0$이고 부호변화가 존재하지 않는다.

$f(x)$가 일차함수인 경우, $f(-p)=0$, $f(p)=0$을 만족시키지 못한다.

$f(x)$가 이차함수인 경우 $x=-p$, $x=p$에서 모두 부호변화가 존재한다.

$f(x)$가 삼차함수인 경우, $f(-p)=0$, $f(p)=0$이고 부호변화가 $x=3$에서만 존재하려면 $f(x)=k(x+3)^2(x-3)$이어야 한다.

이때, $p=3$이다.

$f'(x)=2k(x+3)(x-3)+k(x+3)^2$이고

$f(0)=-27k$, $f'(0)=-9k$에서

구하는 접선의 방정식은 $y=-9kx-27k=-9k(x+3)$이고

점 $(-3,0)$을 지난다. (참)

15. 정답) ① [수학Ⅰ - 수열]

해설 : ⅰ) $k=1$인 경우

$1\leq a_1<2$이다.

$a_1\geq 1$이므로 $a_2=a_1$이다. $(1\leq a_2<2)$

$a_2<2$이므로 $a_3=a_2+2$이다. $(3\leq a_3<4)$

$a_3\geq 3$이므로 $a_4=a_3$이다. $(3\leq a_4<4)$

$a_4<4$이므로 $a_5=a_4+4$이다. $(7\leq a_5<8)$

$a_5\geq 5$이므로 $a_6=a_5$이다. $(7\leq a_6<8)$

⋮

$a_7\geq 7$이므로 $a_8=a_7$이다. $(7\leq a_8<8)$

$a_8<8$이므로 $a_9=a_8+8$이다. $(15\leq a_9<16)$

$a_9\geq 9$이므로 $a_{10}=a_9$이다. $(15\leq a_{10}<16)$

⋮

$a_{15}\geq 15$이므로 $a_{16}=a_{15}$이다. $(15\leq a_{16}<16)$

$$\sum_{n=1}^{16}a_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+\cdots+a_8)+(a_9+\cdots+a_{16})$$
$$=2a_1+2(a_1+2)+4(a_1+2+4)+8(a_1+2+4+8)$$
$$=16a_1+4+24+112$$
$$=16a_1+140$$

이고 $\sum_{n=1}^{16}a_n=168$이므로 $16a_1+140=168$에서

$a_1=\frac{28}{16}=\frac{7}{4}$이다.

ⅱ) $k=2$인 경우

$3\leq a_1<4$이다.

$a_1\geq 1$이므로 $a_2=a_1$이다. $(3\leq a_3<4)$

$a_2\geq 2$이므로 $a_3=a_2$이다. $(3\leq a_3<4)$

$a_3\geq 3$이므로 $a_4=a_3$이다. $(3\leq a_4<4)$

$a_4<4$이므로 $a_5=a_4+4$이다. $(7\leq a_5<8)$

$a_5\geq 5$이므로 $a_6=a_5$이다. $(7\leq a_6<8)$

$\vdots$

$a_7 \geq 7$이므로 $a_8 = a_7$이다. $(7 \leq a_8 < 8)$

$a_8 < 8$이므로 $a_9 = a_8 + 8$이다. $(15 \leq a_9 < 16)$

$a_9 \geq 9$이므로 $a_{10} = a_9$이다. $(15 \leq a_{10} < 16)$

$\vdots$

$a_{15} \geq 15$이므로 $a_{16} = a_{15}$이다. $(15 \leq a_{16} < 16)$

$$\sum_{n=1}^{16} a_n = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + \cdots + a_8) + (a_9 + \cdots + a_{16})$$

$$= 4a_1 + 4(a_1 + 4) + 8(a_1 + 4 + 8)$$

$$= 16a_1 + 16 + 96$$

$$= 16a_1 + 112$$

이고 $\sum_{n=1}^{16} a_n = 168$이므로 $16a_1 + 112 = 168$에서

$a_1 = \frac{56}{16} = \frac{7}{2}$이다.

ⅲ) $k = 3$인 경우

$7 \leq a_1 < 8$이다.

$a_1 \geq 1$이므로 $a_2 = a_1$이다. $(7 \leq a_2 < 8)$

$a_2 \geq 2$이므로 $a_3 = a_2$이다. $(7 \leq a_3 < 8)$

$\vdots$

$a_7 \geq 7$이므로 $a_8 = a_7$이다. $(7 \leq a_8 < 8)$

$a_8 < 8$이므로 $a_9 = a_8 + 8$이다. $(15 \leq a_9 < 16)$

$a_9 \geq 9$이므로 $a_{10} = a_9$이다. $(15 \leq a_{10} < 16)$

$\vdots$

$a_{15} \geq 15$이므로 $a_{16} = a_{15}$이다. $(15 \leq a_{16} < 16)$

$$\sum_{n=1}^{16} a_n = (a_1 + \cdots + a_8) + (a_9 + \cdots + a_{16})$$

$$= 8a_1 + 8(a_1 + 8)$$

$$= 16a_1 + 64$$

이고 $7 \leq a_1 < 8$에서 $176 \leq \sum_{n=1}^{16} a_n < 192$이므로

$\sum_{n=1}^{16} a_n = 168$에 모순이다.

ⅳ) $k \geq 4$인 경우

$2^k - 1 \leq a_1 < 2^k$이다.

$a_1 \geq 1$이므로 $a_2 = a_1$이다. $(2^k - 1 \leq a_2 < 2^k)$

$a_2 \geq 2$이므로 $a_3 = a_2$이다. $(2^k - 1 \leq a_3 < 2^k)$

$\vdots$

$a_{15} \geq 15$이므로 $a_{16} = a_{15}$이다. $(2^k - 1 \leq a_{16} < 2^k)$

$\sum_{n=1}^{16} a_n = (a_1 + \cdots + a_{16}) = 16a_1$이고 $2^k - 1 \leq a_1 < 2^k$에서

$240 \leq 2^{k+4} - 2^4 \leq \sum_{n=1}^{16} a_n < 2^{k+4}$이므로 $\sum_{n=1}^{16} a_n = 168$에

모순이다.

따라서 ⅰ)~ⅳ)에 의해 가능한 모든 a_1의 값의 합은

$\frac{7}{4} + \frac{7}{2} = \frac{21}{4}$이다.

16. 정답) 4 [수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수]

해설 : $\log_3 18 + \frac{1}{2}\log_3 \frac{81}{4} = \log_3 18 + \log_3 \frac{9}{2}$

$$= \log_3\left(18 \times \frac{9}{2}\right)$$

$$= \log_3 81$$

$$= 4$$

17. 정답) 13 [수학Ⅱ - 미분]

해설 : $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$의 양변을 부정적분하면

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + C$이다. (단, C는 적분상수)

$f(1) = 1 - 2 + 1 + C = C = 1$에서

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$이므로

$f(3) = 27 - 18 + 3 + 1 = 13$이다.

18. 정답) 22 [수학Ⅰ - 수열]

해설 : $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 3$이고

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k - 2)^2 = \sum_{k=1}^{10} \{a_k^2 - 4a_k + 4\}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - 4\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 4$$

$$= 43 - 4\sum_{k=1}^{10} a_k = 4$$

에서 $\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{39}{4}$이다.

$\sum_{k=1}^{10}\left(2a_k + \frac{1}{4}\right) = 2\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{4} = \frac{39}{2} + \frac{5}{2} = 22$이다.

19. 정답) 10 [수학Ⅱ - 적분]

해설 : 점 P의 시각 t에서의 위치와 가속도를 각각 $x(t)$, $a(t)$라 할 때,

$x(t)=\int_0^t v(t)dt=\frac{1}{2}at^2+bt$, $a(t)=v'(t)=a$이다.

$x(2)=2a+2b=4$, $a(2)=a=4$에서 $a=4$, $b=-2$이다.

점 P가 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 움직인 거리는

$$\int_0^k |v(t)|dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\{-v(t)\}dt+\int_{\frac{1}{2}}^k v(t)dt$$

$$=\left[-2t^2+2t\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[2t^2-2t\right]_{\frac{1}{2}}^k$$

$$=2k^2-2k+1$$

이다. 움직인 거리가 25 이하이므로 $2k^2-2k+1\le 25$에서

$2k^2-2k-24=2(k+3)(k-4)\le 0$, $-3\le k\le 4$이다.

범위 내의 모든 자연수 k의 값의 합은 $1+2+3+4=10$이다.

20. 정답) 44 [수학Ⅱ - 미분 + 적분]

해설 : $f(x_2)-f(x_1)>(x_2-x_1)(x_2+x_1)$에서

$f(x_2)-f(x_1)>(x_2)^2-(x_1)^2$

$f(x_2)-(x_2)^2>f(x_1)-(x_1)^2$

이고 $x_1<x_2$이므로 $f(x)-x^2$는 실수 전체에서 증가하는 함수이다.

$g(x)=f(x)-x^2$이라 할 때, $g'(x)=f'(x)-2x$이고

$f'(1)=2$에서 $g'(1)=0$이다.

$g(x)$가 증가함수이므로 $g'(x)\ge 0$이고

$g'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로 $g'(1)=0$에서

$g'(x)=3(x-1)^2=3x^2-6x+3$이다.

양변을 부정적분하면 $g(x)=x^3-3x^2+3x+C$이고

$f(1)=2$에서 $g(1)=f(1)-1^2=1$, $C=0$이다.

$g(x)=x^3-3x^2+3x$에서 $g(4)=28$이고

$g(4)=f(4)-16$이므로 $f(4)=44$이다.

21. 정답) 9 [수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수]

해설 : 삼각형 BDP의 넓이가 삼각형 OBD의 넓이의 두 배이고,

두 삼각형의 높이가 $\overline{\mathrm{BD}}$로 같으므로 $\overline{\mathrm{PD}}=2\overline{\mathrm{OD}}$이고,

점 D는 선분 OP의 내분점이므로 $\mathrm{D}\left(\frac{k}{3},\ 0\right)$이다.

점 B는 직선 $y=-x+k$ 위의 점이고 x좌표가 점 D와 같으므로

$\mathrm{B}\left(\frac{k}{3},\ \frac{2k}{3}\right)$이다.

$\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{CP}}$에서 $\overline{\mathrm{OD}}=\frac{k}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OC}}=\frac{k}{3}$이고

$\overline{\mathrm{OP}}=k$에서 $\overline{\mathrm{OC}}=\frac{2k}{3}$, $\mathrm{C}\left(\frac{2k}{3},\ 0\right)$이다.

점 A는 직선 $y=-x+12$ 위의 점이고 x좌표가 점 C와 같으므로

$\mathrm{A}\left(\frac{2k}{3},\ 12-\frac{2k}{3}\right)$이다.

두 점 A, B가 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로

$\frac{2k}{3}=a^{\frac{k}{3}}$, $12-\frac{2k}{3}=a^{\frac{2k}{3}}$이고

두 식을 연립하면 $12-a^{\frac{k}{3}}=a^{\frac{2k}{3}}$에서

$a^{\frac{2k}{3}}+a^{\frac{k}{3}}-12=\left(a^{\frac{k}{3}}+4\right)\left(a^{\frac{k}{3}}-3\right)=0$, $a^{\frac{k}{3}}=3$이다.

$\frac{2k}{3}=a^{\frac{k}{3}}$에서 $\frac{2k}{3}=3$이고 $k=\frac{9}{2}$, $a^{\frac{k}{3}}=a^{\frac{3}{2}}=3$이므로

$a^3=9$이다.

22. 정답 : 87 [수학Ⅱ - 미분]

해설 : 조건 (가)에서 $n=1$일 때, $f(1)-f(0)=f'(1)-2$이고 양변의 항들을 적당히 이항하면 $f(1)-f'(1)=f(0)-2$이고 $f'(0)=2$이므로 $f(1)-f'(1)=f(0)-f'(0)$이다.

$n=2,\ 3$일 때, $\sum_{k=1}^{n}\{f(k)-f(k-1)\}-\sum_{k=1}^{n-1}\{f(k)-f(k-1)\}$

$$=f(n)-f(n-1)=f'(n)-f'(n-1)$$

이고 양변의 항들을 적당히 이항하면

$f(n)-f'(n)=f(n-1)-f'(n-1)$이다.

따라서 함수 $g(x)=f(x)-f'(x)$에 대하여

위에 의해 $g(0)=g(1)=g(2)=g(3)$이므로

사차함수 $g(x)$는 나머지정리에 의해

$g(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)+b\ (a\neq 0)$

$$=ax^4-6ax^3+11ax^2-6ax+b$$

로 나타낼 수 있다.

$g(x)=f(x)-f'(x)$에서

$f(x)-f'(x)$의 사차항은 ax^4이므로 $f(x)$의 사차항도 ax^4이다.

$f(x)=ax^4+bx^3+\cdots$라 둘 때, $f'(x)=4ax^3+3bx^2+\cdots$이고

두 식을 연립하면 $f(x)-f'(x)=ax^4+(b-4a)x^3+\cdots$이다.

이때, $g(x)=ax^4-6ax^3+11ax^2-6ax+b$이므로 계수비교법에 의해

$b-4a=-6a$이고 $b=-2a$이다. 즉, $f(x)$의 삼차항은 $-2ax^3$

같은 방법으로 계산하면

$f(x)-f'(x)$의 이차항은 $11ax^2$, $f'(x)$의 이차항은 $-6ax^2$에서

$f(x)$의 이차항은 $5ax^2$이다.

$f(x)-f'(x)$의 일차항은 $-6ax$, $f'(x)$의 일차항은 $10ax$에서

$f(x)$의 일차항은 $4ax$이다.

이때, $f'(x)$의 상수항은 $(-4ax)'=4a$이고

$f'(x)=4ax^3-6ax^2+10ax+4a$, $f'(0)=4a=2$에서 $a=\frac{1}{2}$이다.

이에 따라 (나) 조건을 해석해보면

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4ax^3-18ax^2+22ax-6a \\ &= 2x^3-9x^2+11x-3 \\ &= (2x-3)(x^2-3x+1) \end{aligned}$$

에서 함수 $g(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 극댓값을, $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$에서 극솟값을 가진다.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 $g(x)=\frac{1}{2}x(x-1)(x-2)(x-3)+b$에서 직선 $x=\frac{3}{2}$에 대칭이고, 따라서 두 극솟값은 같다.

즉, (가) 조건에서 방정식 $f(x)-f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $g(x)$의 극댓값이 0이어야 한다.

$$\begin{aligned} g\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)\left(\frac{3}{2}-3\right)+b \\ &= \frac{9}{32}+b=0 \end{aligned}$$

에서 $b=-\frac{9}{32}$이고 $g(x)=\frac{1}{2}x(x-1)(x-2)(x-3)-\frac{9}{32}$이다.

$g(0)=f(0)-f'(0)=f(0)-2=-\frac{9}{32}$에서 $f(0)=\frac{55}{32}$이고

$p+q=87$이다.

확률과 통계

23. 정답) ⑤ [확률과 통계 - 경우의 수]

해설 : ${}_3\Pi_4=3^4=81$

24. 정답) ③ [확률과 통계 - 경우의 수]

해설 : 전체 경우의 수는 $\frac{7!}{4!\,2!}=105$이고

b끼리 이웃하는 경우의 수는 $\frac{6!}{4!}=30$이므로

구하는 경우의 수는 $105-30=75$이다.

25. 정답) ④ [확률과 통계 - 경우의 수]

해설 : 서로 같은 사탕 6개를 세 학생이 최소 1개 이상

나누어가지는 경우의 수는 ${}_3H_3={}_5C_3=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$이다.

서로 다른 초콜릿 4개를 세 학생에게

나누어 주는 경우의 수는 ${}_3\Pi_4=3^4=81$이고

모든 학생이 초콜릿을 받는 경우는 세 학생에게

$(2,\ 1,\ 1)$과 같이 초콜릿이 분배되었을 때이므로

초콜릿을 2개 받을 학생을 고르는 경우의 수 ${}_3C_1=3$

초콜릿 2개를 고르는 경우의 수 ${}_4C_2=6$

초콜릿을 1개 받는 두 학생에게

남은 초콜릿을 나눠주는 경우의 수 $2!=2$

에서 초콜릿을 나눠주는 총 경우의 수는

여사건을 이용하면 $81-3\times6\times2=45$이다.

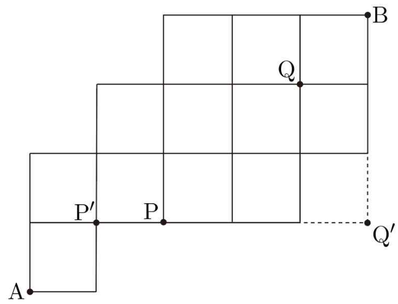
위 과정에 따라 구하는 경우의 수는 $10\times45=450$이다.

26. 정답) ② [확률과 통계 - 경우의 수]

해설 : 점 A에서 점 P까지 도달하는 경우의 수는

아래 그림의 점 A에서 점 P′까지 도달하는 경우의 수와 같고

이는 $2!=2$이다.



조건을 만족하면서 점 P에서 점 B까지 도달하는 경우의 수는

그림에서 점선으로 그려진 길까지 포함해서

총 $\frac{6!}{3!3!}=20$가지의 경로 중

두 점 Q, Q′을 지나지 않는 경로를 제외하면 되므로

$20-\frac{4!}{2!2!}\times 2!-1=7$이다.

위에 따라 구하는 경우의 수는 $2\times 7=14$이다.

27. **정답) ① [확률과 통계 - 경우의 수]**

해설 : 5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$가 5의 배수가 되도록 하는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 4)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$, $(4,\ 1)$, $(5,\ 5)$이므로

$f(1)$ 또는 $f(3)$의 값에 따라 $f(2)$, $f(4)$의 값이 결정된다.

따라서 $f(1)\le f(3)\le f(5)$를 만족하는 함수 f의 개수가

주어진 조건을 만족하는 함수 f의 개수가 되므로

${}_5H_3={}_7C_3=35$

28. **정답) ③ [확률과 통계 - 경우의 수]**

해설 : ⅰ) A, B가 이웃하지 않은 경우

A와 B 사이에 다른 여학생 한 명이 앉아야 하고,

A, B, 다른 여학생 한 명을 한 묶음으로 보고 원순열을 이용하면

$2\times 4!=48$

ⅱ) A, B가 이웃한 경우

A와 B의 한쪽에는 남학생이 앉아야 하고,

남학생 두 명과 A, B를 한 묶음으로 보고 원순열을 이용하면

${}_4C_1\times{}_3C_1\times 2!\times 3!=144$

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $48+144=192$

29. **정답) 190 [확률과 통계 - 경우의 수]**

해설 : $a+b+c=x$, $d+e=y$라 하면

a, b, c, d, e는 자연수이므로 $x\ge 3$, $y\ge 2$이다.

조건 (가)에서 $x+y=12$이고, 조건 (나)에 의해 x는 y의 배수이어야 하므로 가능한 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(10,\ 2)$, $(9,\ 3)$, $(8,\ 4)$, $(6,\ 6)$이다.

ⅰ) $a+b+c=10$, $d+e=2$

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$, $e=e'+1$

이라 하면 a', b', c', d', e'은 5 이하의 음이 아닌 정수이고

$a'+b'+c'=7$, $d'+e'=0$을 모두 만족하는 모든 순서쌍

$(a',\ b',\ c',\ d',\ e')$의 개수를 구하면

${}_3H_7\times 1={}_9C_2=36$

a', b', c' 중 하나가 6 또는 7인 것을 제외하면

$36-\left(3!+\frac{3!}{2!}\right)=27$

ⅱ) $a+b+c=9$, $d+e=3$

$a'+b'+c'=6$, $d'+e'=1$이고

${}_3H_6\times{}_2H_1={}_8C_2\times{}_2C_1=28\times 2=56$

a', b', c' 중 하나가 6인 것을 제외하면

$56-\frac{3!}{2!}\times 2=50$

ⅲ) $a+b+c=8$, $d+e=4$

$a'+b'+c'=5$, $d'+e'=2$이고

${}_3H_5\times{}_2H_2={}_7C_2\times{}_3C_1=21\times 3=63$

ⅳ) $a+b+c=6$, $d+e=6$

$a'+b'+c'=3$, $d'+e'=4$이고

${}_3H_3\times{}_2H_4={}_5C_2\times{}_5C_1=10\times 5=50$

ⅰ)~ⅳ)에 의해 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는

$27+50+63+50=190$이다.

30. **정답) 54 [확률과 통계 - 경우의 수]**

해설 : ⅰ) 노란색 카드를 받는 학생이 1명인 경우

노란색 카드를 2장 받으므로, 조건 (나), (다)에 의해

빨간색 또는 파란색 카드를 3장 받아야 하고,

파란색 카드를 3장 받은 경우, 다른 두 학생이 빨간색, 파란색 카드를 각각 적어도 1장씩 받을 수 없다.

따라서 세 학생 중 한 명은 노란색 카드 2장과 빨간색 카드 3장을 받고, 남은 빨간색 카드 3장과 파란색 카드 4장을 다른 두 명의 학생에게 각각 적어도 1장씩 나누어 주는 경우의 수는 ⇨

${}_2H_1\times{}_2H_2=6$

$\therefore\ {}_3C_1\times 6=18$

ⅱ) 노란색 카드를 받는 학생이 2명인 경우

노란색 카드를 받는 2명의 학생이 모두 파란색 카드를 받는다고 하면, 남은 카드는 빨간색 카드 뿐이므로 조건을 만족시킬 수 없

다.

ⅱ-1) 노란색 카드를 받는 2명의 학생이 모두 빨간색 카드를 적어도 2장 받는 경우

다른 한 학생은 빨간색 카드를 적어도 1장 받아야 하고,

노란색 카드를 받은 두 학생은 파란색 카드를 받을 수 없고, 5장 이하로 카드를 받아야 한다는 규칙을 고려해 남은 빨간색 카드 1장을 두 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 ⇨ ${}_2H_1 = 2$

$\therefore\ {}_3C_2 \times 2 = 6$

ⅱ-2) 노란색 카드를 받는 2명의 학생 중 한 명은 빨간색 카드를 적어도 2장, 다른 한 명은 파란색 카드를 적어도 2장 받는 경우

다른 한 학생은 빨간색 카드와 파란색 카드를 적어도 1장씩 받아야 하고,

남은 빨간색 카드 3장과 파란색 카드 1장을 이미 빨간색 또는 파란색 카드를 받은 학생들에게만 나누어 주는 경우의 수는 ⇨ ${}_2H_3 \times {}_2H_1 = 8$

이때, 5장 이하로 카드를 받아야 한다는 규칙을 고려하면 노란색 카드 1장과 빨간색 카드 5장을 받는 경우 2가지, 빨간색 카드 4장과 빨간색 카드 2장을 받는 경우 1가지를 제외해야한다.

$\therefore\ {}_3C_2 \times 2 \times (8-3) = 30$

따라서 구하는 경우의 수는 $18+6+30=54$

미적분

23. 정답) ⑤ [미적분 - 수열의 극한]

해설 : $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\times 4^n + 3^n}{4^{n-1}+3}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4^n}} = 3\times 4 = 12$$

24. 정답) ① [미적분 - 수열의 극한]

해설 : $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \alpha,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n = \beta$라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n + \lim\limits_{n\to\infty}b_n = \alpha+\beta = 8$이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n - b_n) = 3\lim\limits_{n\to\infty}a_n - \lim\limits_{n\to\infty}b_n = 0,\ 3\alpha-\beta=0$이다.

따라서 $\alpha = 2,\ \beta = 6$이고

$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n = \lim\limits_{n\to\infty}a_n \times \lim\limits_{n\to\infty}b_n = \alpha\beta = 12$

25. 정답) ⑤ [미적분 - 수열의 극한]

해설 : 수열 $\left\{(x^2-25)\left(\frac{x}{3}\right)^n\right\}$이 수렴하기 위해서는

$x^2-25=0$ 또는 $-1 < \frac{x}{3} \le 1$을 만족시켜야 한다.

범위를 정리하면 $x=5,\ x=-5,\ -3<x\le 3$이고

범위 내에서 수열이 수렴하도록 하는 모든 정수 x는 $-5,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5$이므로 총 8개다.

26. 정답) ② [미적분 - 수열의 극한]

해설 : $y=x^2+n+1$와 $y=(n+2)x$이 만나는 점을 구해보면

$x^2+n+1=(n+2)x$에서

$x^2-(n+2)x+n+1=(x-1)(x-n-1)=0$

이에 따라 교점의 x좌표는 $x=1,\ n+1$이고

교점의 좌표는 $(1,\ n+2),\ (n+1,\ (n+2)(n+1))$이다.

$$\overline{PQ} = \sqrt{(n+1-1)^2+\{(n+2)(n+1)-(n+2)\}^2}$$
$$= \sqrt{n^2+n^2(n+2)^2}$$
$$= n\sqrt{1+(n+2)^2} = a_n$$

이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-n^2}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+(n+2)^2}-n\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{\sqrt{1+(n+2)^2}+n}$$
$$=2$$

27. 정답) ④ [미적분 - 수열의 극한]

해설 : 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을 $a_n = ar^{n-1}$이라 두면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_{2n}+a_{2n+2}}}{2^n+3^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{ar^{2n-1}+ar^{2n+1}}}{2^n+3^{n-1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a(r+r^3)}\times\left(\frac{\sqrt{r^2}}{3}\right)^{n-1}}{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+1} = k$$

이고 수렴 값이 $k \neq 0$인 실수 k가 되려면

$r = \pm 3$이어야 한다.

이때, 모든 항이 양수이므로 $r=3$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_{2n}+a_{2n+2}}}{2^n+3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a(r+r^3)}\times\left(\frac{\sqrt{r^2}}{3}\right)^{n-1}}{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{30a}\times 1^{n-1}}{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+1}$$

$$=\sqrt{30a}=k$$

이 때, $\sqrt{30a}=k$에서 $a=\frac{k^2}{30}$이고

$a_n = ar^{n-1}=\frac{k^2}{30}\times 3^{n-1}$이고

$a_2=\frac{k^2}{10}$에서 $\frac{k^2}{10}\geq 5$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 8

28. 정답) ④ [미적분 - 수열의 극한]

해설 : 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 점 O와 C가 있으므로

원주각의 성질에 의해 $\angle AOB=\angle ACB=\frac{\pi}{2}$이다.

이에 따라, 먼저 두 직선 OA와 OB가 수직이므로

두 직선의 기울기의 곱이 -1이다.

점 B의 좌표를 $(a_n,\ (a_n)^2)$이라 할 때,

직선 OA의 기울기는 $\frac{4n^2}{-2n}=-2n$이고,

직선 OB의 기울기는 $\frac{(a_n)^2}{a_n}=a_n$이므로

$-2n\times a_n=-1$에서 $a_n=\frac{1}{2n}$이다.

똑같이 두 직선 AC와 BC도 수직이므로

두 직선의 기울기의 곱이 -1이다.

점 C의 좌표를 $(0,\ b_n)$이라 할 때,

직선 AC의 기울기는 $\frac{4n^2-b_n}{-2n}$이고,

직선 BC의 기울기는 $\frac{\frac{1}{4n^2}-b_n}{\frac{1}{2n}}=\frac{1-4n^2b_n}{2n}$이므로

$\frac{4n^2-b_n}{-2n}\times\frac{1-4n^2b_n}{2n}=-1$에서

$4n^2(b_n)^2-(1+16n^4)b_n=0,\ b_n=\frac{1}{4n^2}+4n^2$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+\frac{1}{8n^3}}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{8n^4}\right)=2$$

29. 정답) 48 [미적분 - 수열의 극한]

해설 : $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+x+b}{x^{2n+1}+3x^{2n}+1}$를 구간별로 정리해보면

구간 $(-3,\ -1)$에서 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+x+b}{x^{2n+1}+3x^{2n}+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{1}{x^{2n-1}}+\frac{b}{x^{2n}}}{x+3+\frac{1}{x^{2n}}}$$

$$=\frac{a}{x+3}$$

$x=-1$일 때, $f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{a-1+b}{-1+3+1}=\frac{a+b-1}{3}$

구간 $(-1,\ 1)$에서, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+x+b}{x^{2n+1}+3x^{2n}+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x+b}{1}=x+b$$

$x=1$일 때, $f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{a+1+b}{1+3+1}=\frac{a+b+1}{5}$

구간 $(1,\ \infty)$에서 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+x+b}{x^{2n+1}+3x^{2n}+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{1}{x^{2n-1}}+\frac{b}{x^{2n}}}{x+3+\frac{1}{x^{2n}}}$$

$$=\frac{a}{x+3}$$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이기 위해서는

$\lim_{x\to -1-} f(x)=f(-1)=\lim_{x\to -1+} f(x)$이고

$\frac{a}{2}=\frac{a+b-1}{3}=b-1$에서 $a=2b-2$이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이기 위해서는

$\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)=\lim_{x\to 1+} f(x)$이고

$b+1=\frac{a+b+1}{5}=\frac{a}{4}$에서 $a=4b+4$이다.

두 식을 연립하면 $a=-8, b=-3$이다.

이에 따라 함수 $f(x)$를 구간별로 정리해보면

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{8}{x+3} & (-3<x<-1 \text{ 또는 } x\geq 1) \\ x-3 & (-1\leq x<1) \end{cases}$$

$g(a)$는 $f(x)=a$를 만족시키는 x의 값이고

$f(-2)=-8$이므로 $g(a)=-2$이다.

$g(b)$는 $f(x)=b$를 만족시키는 x의 값이고

$f(0)=-3$이므로 $g(b)=0$이다.

$\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=\frac{2}{5}=k$이고 $300k^2=48$이다.

30. **정답) 7 [미적분 - 수열의 극한]**

해설 : 먼저, 1열부터 2^n열까지 모든 공의 개수는

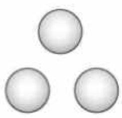
$\sum_{k=1}^{2^n} k=\frac{2^n(2^n+1)}{2}=\frac{4^n+2^n}{2}$개이다.

색칠을 끝마친 공은 모두 하얀색 혹은 검은색 공이므로

하얀색 공과 검은색 공의 개수의 합이

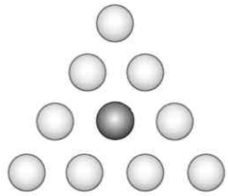
모든 공의 개수이고 $a_n+b_n=\frac{4^n+2^n}{2}$이다.

1열부터 2^1열까지의 색칠을 끝마친 공의 분포는



이고 $a_1=3,\ b_1=0$이다.

1열부터 2^2열까지의 색칠을 끝마친 공의 분포는



이다. 이 때, 1열부터 2^1열까지의 공의 분포가

2^1+1열부터 2^2열 사이에

두 번 더 반복해서 나타남을 관찰 할 수 있고

1열부터 2^2열 사이의 공의 분포는

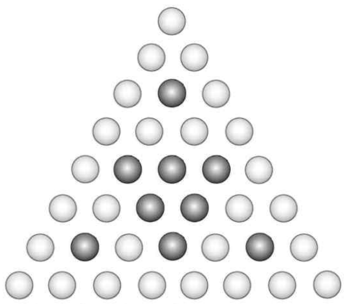
$3\times$(1열부터 2^1열까지의 공의 분포) + (나머지 공)

임을 알 수 있다.

$a_2=3a_1=9$이고

$a_2+b_2=\frac{4^2+2^2}{2}=10$에서 $b_2=1$이다.

1열부터 2^3열까지의 색칠을 끝마친 공의 분포는



이다. 이 때, 1열부터 2^2열까지의 공의 분포가

2^2+1열부터 2^3열 사이에

두 번 더 반복해서 나타남을 관찰 할 수 있고

1열부터 2^3열 사이의 공의 분포는

$3\times$(1열부터 2^2열까지의 공의 분포) + (나머지 공)

임을 알 수 있다.

$a_3=3a_2=27$이고

$a_3+b_3=\frac{4^3+2^3}{2}=36$에서 $b_3=9$이다.

⋮

1열부터 2^n열 사이의 공의 분포는

$3\times$(1열부터 2^{n-1}열까지의 공의 분포) + (나머지 공)

임을 알 수 있다.

$a_n=3a_{n-1}$이고 $a_1=3$이므로

이 점화식에서 $a_n=3^n$임을 알 수 있다.

$a_n+b_n=\frac{4^n+2^n}{2}$에서 $b_n=\frac{4^n+2^n-2\times3^n}{2}$이다.

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^n+2^n-2\times3^n}{2\times3^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이고

모든 자연수 n에 대하여 부등식

$\frac{4^n-2\times3^n}{2\times3^n}<\frac{4^n+2^n-2\times3^n}{2\times3^n}<\frac{4^n}{2\times3^n}$에서

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{3}\right)^n-1<\frac{4^n+2^n-2\times3^n}{2\times3^n}<\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{3}\right)^n$이다.

이 때, $\frac{4^n+2^n-2\times3^n}{2\times3^n}$의 양쪽에 $a\times\left(\frac{4}{3}\right)^n$꼴의 수열이 있게

부등식을 만들면 수열의 극한의 대소관계에 의해

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}$의 극한 값을 구할 수 있다.

이에 따라 적당한 수열 $a\times\left(\frac{4}{3}\right)^n$을 만들어보면

$\frac{5}{64}\times\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{3}\right)^3-1$에서

3 이상의 자연수 n에 대하여 부등식

$\frac{5}{64}\times\left(\frac{4}{3}\right)^n\le\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{3}\right)^n-1$이 성립하므로

3 이상의 자연수 n에 대하여

$\frac{5}{64}\times\left(\frac{4}{3}\right)^n<\frac{4^n+2^n-2\times3^n}{2\times3^n}<\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{3}\right)^n$이 성립한다.

이에 따라

$\left\{\frac{5}{64}\times\left(\frac{4}{3}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}<\left(\frac{4^n+2^n-2\times3^n}{2\times3^n}\right)^{\frac{1}{n}}<\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{3}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}$이고

$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{3}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}=\frac{4}{3}\times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{4}{3}$

$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{5}{64}\times\left(\frac{4}{3}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}=\frac{4}{3}\times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{64}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{4}{3}$이므로

수열의 극한의 대소관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^n+2^n-2\times3^n}{2\times3^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{4}{3}$이고

$p=3$, $q=4$, $p+q=7$이다.