제 2 교시

수학 영역

5 지 선 다 형

1. $(3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

$3\sqrt{3} = 3\times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$

$(3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} = (3^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}}$

준식 $= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} = 3^{2} = 9$

2. 함수 $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$ 에 대하여 $f'(-1)$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 3x^2+4x+3$

$f'(-1) = 3\cdot(-1)^2+4(-1)+3 = 2$

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_4 = 6, \quad 2a_7 = a_{19}$$

일 때, a_1 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

공차 d 라고 놓자.

$a_4 = a_1 + 3d = 6$ — (*)

$a_7 = a_1 + 6d$, $a_{19} = a_1 + 18d$

$2(a_1+6d) = a_1 + 18d$

$2a_1 + 12d = a_1 + 18d$

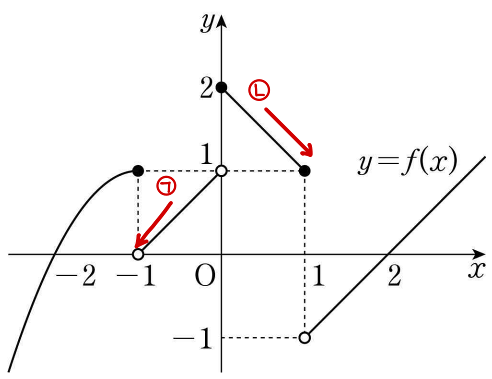
$a_1 = 6d$

(*)에 대입

$6d + 3d = 6$ $\quad\therefore d = \frac{2}{3}$

$\therefore a_1 = 6\cdot\frac{2}{3} = 4$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1+} f(x) + \lim_{x\to 1-} f(x)$ 의 값은? [3점]

㉠ ㉡

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$0+1=1$

5. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\cos\theta\tan\theta=\frac{1}{2}$일 때, $\cos\theta+\tan\theta$의 값은? [3점]

✓① $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ② $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 이므로 $\cos\theta\cdot\tan\theta=\sin\theta=\frac{1}{2}$ 이다

θ가 2사분면각이므로 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

$\cos\theta+\tan\theta=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{5\sqrt{3}}{6}$

6. 함수 $f(x)=2x^2-3x+5$에서 x의 값이 a에서 $a+1$까지 변할 때의 평균변화율이 7이다. $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 6 ② 8 ✓③ 10 ④ 12 ⑤ 14

평균변화율 $\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}=\{2(a+1)^2-3(a+1)+5\}-(2a^2-3a+5)$

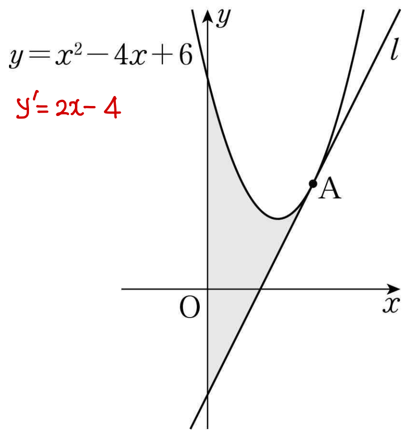
$=4a-1=7$

$\therefore a=2$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot 2=f'(a)\cdot 2=2f'(2)$

$f'(x)=4x-3$ 이므로 $2\cdot f'(2)=2\cdot 5=10$

7. 그림과 같이 곡선 $y=x^2-4x+6$ 위의 점 A(3, 3)에서의 접선을 l이라 할 때, 곡선 $y=x^2-4x+6$과 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]



① $\frac{26}{3}$ ✓② 9 ③ $\frac{28}{3}$ ④ $\frac{29}{3}$ ⑤ 10

접선 l의 기울기 $=y'_{x=3}=2$

l : $y-3=2(x-3)$, $y=2x-3$

구하고자하는 넓이 $\int_0^3\{(x^2-4x+6)-(2x-3)\}dx$

$=\int_0^3(x^2-6x+9)dx$

$=\boxed{\int_0^3(x-3)^2dx}$

$=\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_0^3=9$

짚고가자!!

이차함수 $f(x)$, 일차함수(접선) $g(x)$ 라고 하자.

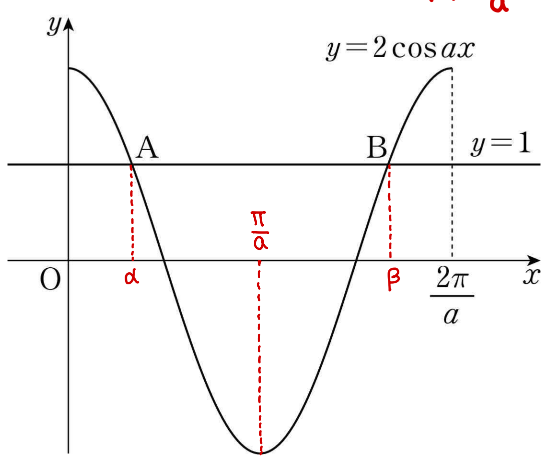
$x=3$에서 접하고 이차항의 계수 1 이므로

$f(x)-g(x)=(x-3)^2$

임을 쉽게 알수 있답니다!!~*

8. 그림과 같이 양의 상수 a에 대하여 곡선 $y=2\cos ax\left(0\le x\le \frac{2\pi}{a}\right)$와 직선 $y=1$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{8}{3}$일 때, a의 값은? [3점]

주기 $\frac{2\pi}{a}$



① $\frac{\pi}{3}$　② $\frac{5\pi}{12}$　③ $\frac{\pi}{2}$　④ $\frac{7\pi}{12}$　⑤ $\frac{2\pi}{3}$

$\cos a\alpha=\cos a\beta=\frac{1}{2}$

$a\alpha=\frac{\pi}{3}$, $a\beta=\frac{5\pi}{3}$

$\overline{AB}=\frac{8}{3}$이므로 $\beta-\alpha=\frac{8}{3}$이다.

여기서 $a\beta-a\alpha=\frac{4\pi}{3}$이므로 $\frac{8a}{3}=\frac{4\pi}{3}$이다

따라서 $a=\frac{\pi}{2}$이다

9. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2+at$$

이다. 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치와 시각 $t=6$에서의 점 P의 위치가 서로 같을 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 64　② 66　③ 68　④ 70　⑤ 72

t초일때 위치 S(t)라고 할때

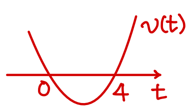
$S(0)=S(6)$ 이므로　$\int_0^6 v(t)\,dt=\int_0^6(3t^2+at)\,dt=0$ 이다.

정리하면　$\left[t^3+\frac{1}{2}at^2\right]_0^6=6^3+\frac{1}{2}a\cdot 6^2=0$

$\therefore a=-12$

$t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리 $\int_a^b |v(t)|\,dt$

$\int_0^6|3t^2-12t|\,dt=-\int_0^4(3t^2-12t)\,dt+\int_4^6(3t^2-12t)\,dt$



$=-\left[t^3-6t^2\right]_0^4+\left[t^3-6t^2\right]_4^6$

$=-(4^3-6\cdot 4^2)+6^3-6^3-(4t^3-6\cdot 4^2)$

$=64$

10. 두 함수

$$f(x)=x^2+2x+k,\quad g(x)=2x^3-9x^2+12x-2$$

에 대하여 함수 $(g\circ f)(x)$의 최솟값이 2가 되도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

① 1　② $\frac{9}{8}$　③ $\frac{5}{4}$　④ $\frac{11}{8}$　⑤ $\frac{3}{2}$

$f(x)=(x+1)^2+k-1$ 이므로

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge k-1$ 이다.

따라서 $f(x)=t$로 치환하여 정리하면

$g\circ f(x)=g(t)=2t^3-9t^2+12t-2$ $(t\ge k-1)$ 이다.

여기서 함수 $g(t)$의 그래프 개형이 필요하다

$g'(t)=6t^2-18t+12=6(t-2)(t-1)$ 이므로

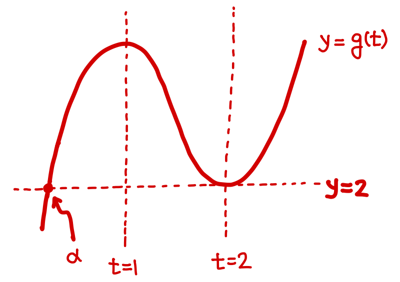
함수 $g(t)$는 $t=1$에서 극대, $t=2$에서 극소를 갖는다.

함수 $g\circ f(x)$가 최솟값 2를 갖는다는 것은

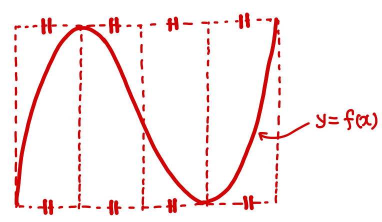
함수 $g(t)$가 $t\ge k-1$에서 최솟값 2를 갖는다 뜻이다.

그렇다면 $g(2)$ 값을 알아봐야 한다.

$g(2)=2$ 이므로 $k-1\ge\alpha$ 이어야 한다.



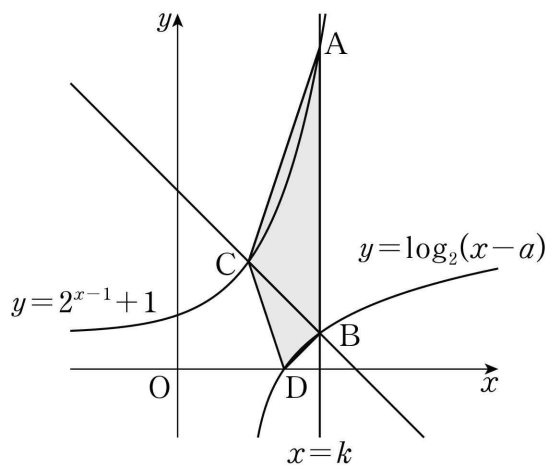
f(x) : 삼차함수



따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$ 이므로 $k-1\ge\frac{1}{2}$이 되어 $k\ge\frac{3}{2}$이다.

k의 최솟값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

11. 그림과 같이 두 상수 a, k에 대하여 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2^{x-1}+1$, $y=\log_2(x-a)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-1}+1$과 만나는 점을 C라 하자.
$\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=2\sqrt{2}$일 때, 곡선 $y=\log_2(x-a)$가 x축과 만나는 점 D에 대하여 사각형 ACDB의 넓이는? (단, $0<a<k$) [4점]



① 14 ② 13 ③ 12 ④ 11 ⑤ 10

그래프 문제는 먼저 좌표 표현이 중요!!

$A(k,\ 2^{k-1}+1)$, $B(k,\ \log_2(k-a))$, C ?? , $D(a+1,\ 0)$

why? $\log_2(x-a)=0$
$x-a=1$
$\therefore x=a+1$

여기서 $\overline{AB}=8$ 이므로

$2^{k-1}+1-\log_2(k-a)=8$ —— ⑦ 이다.

그러나 계산이 ??

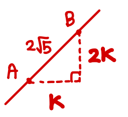
이제는 $\overline{BC}=2\sqrt{2}$ 인 것을 이용해야 하는데 점C 좌표를 모른다... ㅠㅠ

여기서 **기울기 −1** 임을 이용

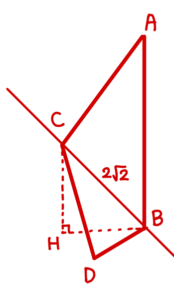
짚고가자

기울기는 x의 증가량에 대한 y의 증가량의 **비**이다.

이를 자주 이용. 예를 들어 기울기2, $\overline{AB}=2\sqrt{5}$ 이면



이므로 $k=2$가 된다.



기울기: −1 이므로

$\overline{BH}=\overline{CH}$ 이다.

$\boxed{\text{삼각형 ABC 넓이} = \frac{1}{2}\times 8\times 2 = 8}$

$\overline{BC}=2\sqrt{2}$ 이므로 $\boxed{\overline{BH}=\overline{CH}=2}$가 되어 $C(k-2,\ \log_2(k-a)+2)$ 이다

여기서 점C의 좌표가 함수 $y=2^{x-1}+1$ 위의 점이므로

$2^{k-3}+1=\log_2(k-a)+2$ 이다.

⑦에 의해 $2^{k-1}-7$ 대입

$2^k=t$로 치환.

$\frac{1}{8}t+1=\frac{1}{2}t-5$, $t=16$ 이 되어 $k=4$가 된다.

위식에 대입. $\log_2(4-a)=1$ 이므로 $a=2$ 이다.

여기서 $B(4,1)$, $D(3,0)$ 이며 두점사이의 기울기가 1 이므로

$\angle DBC=90^\circ$ 임을 알수 있다.

이를 통해 삼각형 DBC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ 이다

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 10 이다.

12. $a>2$인 상수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x\le 2) \\ -x^2+ax & (x>2) \end{cases}$$

라 하자. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(1)+h(3)$의 값은? [4점]

(가) $x\ne 1$, $x\ne a$일 때, $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$이다.

(나) $h(1)=h(a)$

① $-\frac{15}{6}$ ② $-\frac{7}{3}$ ③ $-\frac{13}{6}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{11}{6}$

$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=k(\ne 0)$ 일때, $\lim_{x\to a}f(x)=0$ 이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$ 이다

함수 $h(x)$가 모든실수 x에 대하여 연속

먼저 함수 $f(x)$로 인하여

$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{-x^2+ax}=\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{x^2-4x+3}$ 가 되어야 한다.

$\frac{g(2)}{-4+2a}=\frac{g(2)}{-1}$ 이므로 $g(2)=0$ 이다.

또한, $f(1)=f(a)=0$ 이므로 $g(1)=g(a)=0$ 이어야 한다.

여기서 함수 $g(x)$가 삼차함수이므로 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ 라고 놓을수 있다.

이제 조건(나)에서

$h(1)=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(x-1)(x-3)}=\frac{1-a}{2}$ 이고

$h(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{-x(x-a)}=\frac{(a-1)(a-2)}{-a}$ 이다.

$h(1)=h(a)$ 이므로

$a>2$ 에 의해 $\frac{1}{2}=\frac{a-2}{a}$ 가 되어 $a=4$ 임을 알수 있다.

위 풀이속에 $h(1)=\frac{1-4}{2}=-\frac{3}{2}$ 를 구할수 있다.

$h(3)=\frac{g(3)}{f(3)}=\frac{2\cdot 1\cdot(-1)}{-3^2+4\cdot 3}=-\frac{2}{3}$ 이다

따라서 $h(1)+h(3)=\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{13}{6}$

13. 첫째항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$|S_3| = |S_6| = |S_{11}| - 3$$

을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 합은? [4점]

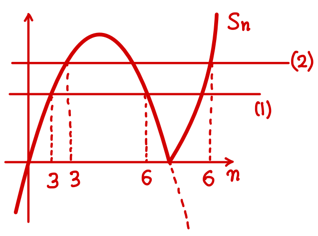
① $\frac{31}{5}$　② $\frac{33}{5}$　③ 7　④ $\frac{37}{5}$　⑤ $\frac{39}{5}$

첫째항부터 n항까지의 합 S_n에서 $|S_n| = |S_m|$ 라는 것은 첫째항과 공차의 **부호**가 다르다. 는 의미이다.

$S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \left(a-\frac{d}{2}\right)n$ 이다

여기서 중요!! **n에 관한 이차식**이다.

첫째항이 양수이므로 주어진 조건 $|S_3| = |S_6|$ 을 만족하기 위해서는 **공차는 음수**이다. 즉 S_n은 최고차항이 음수인 이차식이다.



(1) $S_3 = S_6 = -S_{11} - 3$

음수일수 밖에 없다!!

$\frac{3(2a+2d)}{2} = \frac{6(2a+5d)}{2} = -\frac{11(2a+10d)}{2} - 3$

정리

$3(a+d) = 3(2a+5d)$

$\therefore$ **$a = -4d$**

위식에 대입하여 정리하면

$-9d = -11d - 3$,　**$d = -\frac{3}{2}$**

이 되어 **$a = 6$**이다.

(2) $S_3 = -S_6 = -S_{11} - 3$

$3(a+d) = -3(2a+5d) = -11(a+5d) - 3$

정리

$\therefore$ **$a = -2d$**

위식에 대입하여 정리하면

$-3d = -33d - 3$.　**$d = -\frac{1}{10}$**

이 되어 **$a = \frac{1}{5}$** 이다.

첫째항들의 합　$6 + \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$

14. 두 함수

$$f(x) = x^3 - kx + 6, \quad g(x) = 2x^2 - 2$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

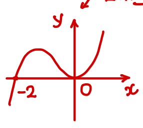
ㄱ. $k=0$일 때, 방정식 $f(x)+g(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 k의 값은 4뿐이다.

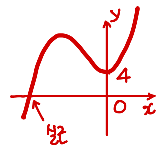
ㄷ. 방정식 $|f(x)| = g(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 5가 되도록 하는 실수 k가 존재한다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f(x) + g(x) = x^3 + 6 + 2x^2 - 2 = \underbrace{x^3+2x^2}_{\text{그래프 모양!!}} + 4$



y축방향으로 4만큼평행이동



(참)

ㄴ. $f(x) - g(x) = x^3 - kx + 6 - (2x^2 - 2)$

$= x^3 - 2x^2 - kx + 8 = 0$

이 삼차방정식이 실근 2개를 갖는다?? **중근**을 갖는다는 의미!!

이를 다시 정리하면...

$x^3 - 2x^2 + 8 = kx$ 에서 함수 $x^3 + 2x^2 + 8$ 와 직선 $y = kx$는 **접한다.** 이다.

즉 원점에 그은 접선의 기울기 k의 값을 구해본다.

접점을 $(t, t^3 - 2t^2 + 8)$라고 하자.

접선 : $y - (t^3 - 2t^2 + 8) = (3t^2 - 4t)(x - t)$

원점대입하면　$-t^3 - 2t^2 - 8 = -3t^3 + 4t^2$

$2t^3 - 2t^2 - 8 = 0$,　$t^3 - t^2 - 4 = (t-2)\underbrace{(t^2+t+2)}_{\text{서로 다른 두 허근}} = 0$,　$t = 2$.

접선의 기울기　$k = 3\cdot2^2 - 4\cdot2 = 4$.　(참)

ㄷ. 방정식 $|f(x)| = g(x)$ 에서 $|\underbrace{x^3-kx+6}|$ 미지수로 인하여 그래프로 알아보는것이 힘들어 보인다. ㅠㅠ

그리고 $g(x) = 2x^2 - 2$ 이므로 이차함수이다. 더욱더 그래프로 알아보기 힘듦!!

이대로는 **진행불가!!** 식의 변형이 필요.

단순하게... $x^3 - kx + 6 = 2x^2 - 2$ 또는 $x^3 - kx + 6 = -2x^2 + 2$ 이다. 이를 정리하면

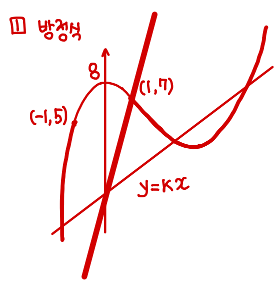
[1] $x^3 - 2x^2 + 8 = kx$ 또는 [2] $x^3 + 2x^2 + 4 = kx$이다.

또 문제발생!!　위 방정식을 가지고 풀면 된다??

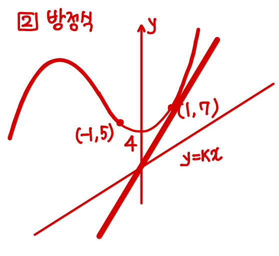
방정식 $|f(x)| = g(x)$ 에서 좌변 ≥ 0 이므로 해는 우변인 $g(x) \geq 0$을 만족해야 한다.

따라서 $2x^2 - 2 \geq 0$. 즉 해는 **$x \leq -1$, $x \geq 1$** 에서 존재해야 한다.

[1] 방정식



[2] 방정식



위그림에서는 **3개 + 1개 = 4개** 인데...

혹시? 점(1, 7)을 지나면　3개 + 3개 ($x=1$ 중복) = **5개**가 되지 않을까?

[1]은 확실히 세 개의 점에서 만난다.

그러나 $x^3 + 2x^2 + 4 \xrightarrow{\text{미분}} 3x^2 + 4x$　엥?? $x=1$ 대입 **7!! 뚜둥~**

아~ $y = 7x$는 접선이 된다는 의미입니다.

3개 + 2개 ($x=1$ 중복) 으로 **4개**가 됩니다.

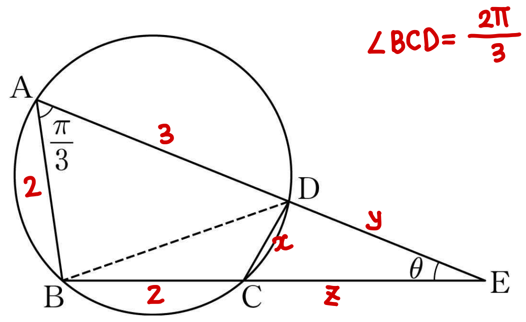
따라서 5개는 불가능!! **거짓.**

15. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$$\overline{AB}=\overline{BC}=2,\quad \overline{AD}=3,\quad \angle BAD=\frac{\pi}{3}$$

이다. 두 직선 AD, BC의 교점을 E라 하자.

$\angle BCD=\frac{2\pi}{3}$



다음은 $\angle AEB=\theta$일 때, $\sin\theta$의 값을 구하는 과정이다.

> 삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하면
>
> $\overline{CD}=$ (가)
>
> 이다. 삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서
>
> $\angle AEB$는 공통, $\angle EAB=\angle ECD$
>
> 이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다.
> 이를 이용하면
>
> $\overline{ED}=$ (나)
>
> 이다. 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면
>
> $\sin\theta=$ (다)
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $(p+q)\times r$의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ ③ $\frac{9\sqrt{3}}{14}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{3}}{14}$

(가)를 구해보자. 코사인법칙 이용하라네요^^

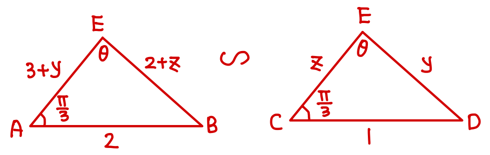
$\overline{BD}^2 = 2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cdot\cos\frac{\pi}{3}$ ← 삼각형 ABD 에서

$= 2^2+x^2-2\cdot2\cdot x\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$ ← 삼각형 BCD 에서

정리하면

$7 = 4+x^2+2x$, $x^2+2x-3=0$ 이므로 가$=1$

(나)를 구해보자. 닮음을 이용하라네요.



닮음비 2 : 1

$3+y=2z$
$2+z=2y$ 이므로 이를 연립하면 $y=\frac{7}{3}$, $z=\frac{8}{3}$ 이 된다.

따라서 나$=\frac{7}{3}$

이제 (다)를 구해보자. 사인법칙 이용하라네요^^

$\frac{\overline{EB}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{\sin\theta}$ 에서 $\sin\theta=\frac{3}{14}\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$ 이 되어

다$=\frac{3\sqrt{3}}{14}$ 이다.

$(p+q)\times r=($가$+$나$)\times$다$=\left(1+\frac{7}{3}\right)\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{5\sqrt{3}}{7}$

단 답 형

16. $\frac{\log_5 72}{\log_5 2}-4\log_2\frac{\sqrt{6}}{2}$의 값을 구하시오. [3점]

↳

$\log_2 72-\log_2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^4$

$=\log_2\left(72\times\frac{2^4}{6^2}\right)$

$=\log_2 2^5$

$=5$

17. $\int_{-3}^{2}(2x^3+6|x|)dx-\int_{-3}^{-2}(2x^3-6x)dx$의 값을 구하시오. [3점]

동그라미 표시 때문에

$\int_{-3}^{2}(2x^3+6|x|)dx=\int_{-3}^{-2}(2x^3-6x)dx+\int_{-2}^{2}(2x^3+6|x|)dx$

따라서

준식 $=\int_{-2}^{2}(2x^3+6|x|)dx=2\cdot\int_0^2 6x\,dx=\left[6x^2\right]_0^2=24$

why??

$2x^3$: 기함수

$6|x|$: 우함수

18. 부등식 $\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1} < \sum_{k=1}^{n} (2k-1) < \sum_{k=1}^{5} (2 \times 3^{k-1})$ 을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [3점]

$\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1} = \frac{2^5 - 1}{2-1} = 31$

$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

$\sum_{k=1}^{5} (2 \times 3^{k-1}) = 2 \cdot \frac{3^5 - 1}{3-1} = 242$

정리하면 $31 < n^2 < 242$

을 만족하는 자연수 n은 $6 \sim 15$ 이다.

따라서 합은 $\frac{10(6+15)}{2} = 105$ 이다.

19. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + k \geq 0$$

이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값을 구하시오. [3점]

MATH 사차부등식이다. 그래프를 이용하자!!

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + k$ 라고 하자

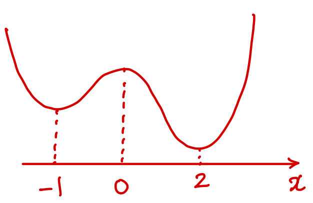
$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x-2)(x+1)$

이므로 함수 $f(x)$는

$x = -1, 2$ 에서 극소, $x = 0$에 극대이다.

여기서 극솟값 $f(-1) = k-5$, $f(2) = k-32$ 이므로

함수 $f(x)$의 최솟값은 $k-32$ 이다.



$k - 32 \geq 0$

$k \geq 32$

32.

20. 수열 $\{a_n\}$은 $1 < a_1 < 2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 2 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_7 = -1$일 때, $40 \times a_1$의 값을 구하시오. [4점]

위식으로 부터 $a_n < 0$ 일때 $a_{n+1} > 0$ 이므로

$a_6 \geq 0$ 임을 알수 있다. 따라서 $a_6 = 1$ 이다

$a_5 = 3$ 또는 $-\frac{1}{2}$ 이라는 것은 쉽게 유추할수 있다.

하지만 a_4은 경우가 많아서 일단 잠시...

$1 < a_1 < 2$ 이므로 $a_2 = a_1 - 2 < 0$ 이다

따라서 $a_3 = -2(a_1 - 2) = -2a_1 + 4 > 0$ 이다

오호~^^ 계속 Go

$a_4 = -2a_1 + 4 - 2 = -2a_1 + 2 < 0$ 이다.

$a_5 = -2(-2a_1 + 2) = 4a_1 - 4 > 0$ 이므로

위에서 구한 것으로 부터

$4a_1 - 4 = 3$ 이다

$\therefore a_1 = \frac{7}{4}$

$40 \times a_1 = 70$

이런 유형문제에 대해 어려움을 느끼다보니
쉬운문제가 출제가 되어도 괜히 두려움이 생겨
회피하게 됩니다.
당연히 어려운 문제도 있습니다.
하지만 숫자들의 조합으로 구성되는것이니
피하지 마시고 자주 도전하세요!!^*
풀수있는 기분 좋은 경험도 하실수 있습니다^^

21. 상수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 좌표평면의 점 A$(a,\ b)$가 오직 하나 존재한다.

(가) 점 A는 곡선 $y=\log_2(x+2)+k$ 위의 점이다.
(나) 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 곡선 $y=4^{x+k}+2$ 위에 있다.

$a\times b$의 값을 구하시오. (단, $a\neq b$) [4점]

$b=\log_2(a+2)+k$, $a=4^{b+k}+2$

$\Downarrow$ 정리

$2^{b-k}=a+2$

이 두식을 정리하면

$a=2^{2b+2k}+2=2^{b-k}-2$ 이다. 이를 b에 관한 지수방정식으로!!

$2^{2k}\cdot 2^{2b}-2^{-k}\cdot 2^{b}+4=0$

$2^b=t$로 치환

$2^{2k}\cdot t^2-2^{-k}\cdot t+4=0$ — (*)

여기서 먼저 실근을 가져야 하므로

판별식 $D=(-2^{-k})^2-4\cdot 2^{2k}\cdot 4\geq 0$

$2^{-2k}-16\cdot 2^{2k}\geq 0$, $2^{4k}\leq \frac{1}{16}$ 이다

따라서 $k\leq -1$ 이다.

문제의 조건에서 점A가 **오직 하나** 존재한다 라는 의미는

(*)의 방정식이 **양수인 중근** 또는 **서로 다른 부호 실근**을 갖는다는 뜻이다.

여기서 (*)의 방정식에서

두실근의 합 : $2^{-k}>0$, 두 실근의 곱 : $\frac{4}{2^{2k}}>0$

이므로 서로 다른 부호 실근을 가질수 없다.

따라서 $k=-1$ 이 되어

$\frac{1}{4}t^2-2t+4=0$, $t^2-8t+16=0$, $(t-4)^2=0$ 이다.

$t=2^b=4$ 가 되어 $b=2$ 이다.

$k=-1$, $b=2$를 처음식에 대입

$\therefore\ a=6$

따라서 $a\times b=12$

22. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$가 있다. 양의 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $x|g(x)|=\displaystyle\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt$이다.
(나) 방정식 $g(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$\displaystyle\int_{-2a}^{2a}f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

조건(가)에서 $x=2a$를 대입 $(a>0)$

우변$=0$ 이므로 $g(2a)=0$ 이다.

따라서 $g(x)=x(x-2a)(x-b)$라고 놓을수 있다 (단, b는 상수)

$$x|g(x)|=\begin{cases} xg(x) & (g(x)\geq 0)\\ -xg(x) & (g(x)<0)\end{cases}$$ 인데...

여기서 우변 함수를 관찰하자. $f(x)$가 모든 실수x에 대하여 연속이므로

함수 $(a-x)f(x)$도 모든 실수x에 대하여 연속이다.

그렇다면... $(a-x)f(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt$ 이므로

함수 $x|g(x)|$는 **미분가능한** 함수이다.

여기서 $x=0$ 에서는 미분가능하므로 $x=2a$, $x=b$ 에서 미분가능하려면

중근을 갖는 형태가 되어야 한다.

$g(x)=x(x-2a)^2$ 이다

이제 조건(나)에서 방정식 $g(f(x))=0$ 의 실근이 α라고 할때

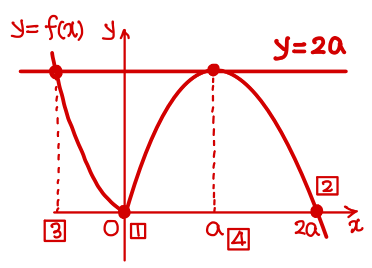
$f(\alpha)=0$ 또는 $f(\alpha)=2a$ 가 된다.

함수 $f(x)$를 구해야 한다!! 다시 돌아가서

$$\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt=\begin{cases} x^2(x-2a)^2 & (x\geq 0)\\ -x^2(x-2a)^2 & (x<0)\end{cases}$$ 이므로 미분 Go!

$$(a-x)f(x)=\begin{cases} 4x(x-a)(x-2a) & (x\geq 0)\\ -4x(x-a)(x-2a) & (x<0)\end{cases}$$ 이다. 이를 정리하면

$$f(x)=\begin{cases} -4x(x-2a) & (x\geq 0)\\ 4x(x-2a) & (x<0)\end{cases}$$ 이다.



실근α가 4개가 되기 위해서는

그림과 같이 $f(a)=2a$ 이어야 한다.

$f(a)=-4a\cdot(-a)=2a$, $a=\frac{1}{2}$ $(a>0)$

이어서 진행

$\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}4x(x-1)\,dx+\int_{0}^{1}-4x(x-1)\,dx$

$\left[\frac{4}{3}x^3-2x^2\right]_{-1}^{0}=\frac{10}{3}$

$\frac{4}{6}(1-0)^3=\frac{2}{3}$

따라서 4.

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.