1012 N제

기출 (20190617)

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $4f(x) = f'(x)^2 + x^2 + 4$를 만족시킨다. $f(2)$의 값을 구하시오.

1. $f(x)=f(-x)$를 만족하고 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\frac{1}{2}f'(x)=\sqrt{f(x)}+2x^3-x^2+2x-1$을 만족시킨다. $f(1)$의 값은?

STEP1) 우함수 $\longrightarrow$ $f(x)$ 차수 : 짝수

if) $f(x)$가 2차면 1차 $\neq$ 3차 $\rightarrow$ 성립X

$f(x)$가 4차면 3차 $=$ 3차 $\rightarrow$ 성립 $\Rightarrow f(x)=x^4+ax^2+b$

STEP2) $\frac{1}{2}(4x^3+2ax)=\sqrt{x^4+ax^2+b}+2x^3-x^2+2x-1$

$\cancel{2x^3}+ax-\cancel{2x^3}+x^2-2x+1=\sqrt{x^4+ax+b}$

$x^2+(a-2)x+1=\sqrt{x^4+ax^2+b}$

제곱하면 $x^4+(a-2)^2x^2+\underbrace{1}_{\to\, b=1}+\underbrace{2x^3(a-2)}_{\to\, a=2}+(a-2)x+x^2=x^4+ax^2+b$

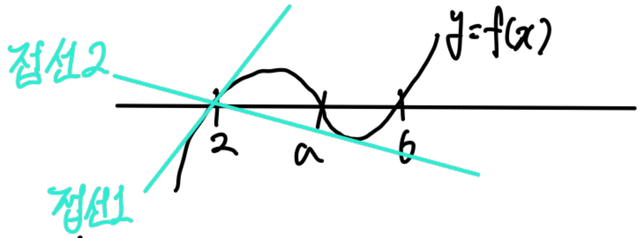
STEP3) $f(x)=x^4+2x^2+1$ $\quad$ $f(1)=4$

기출 (20200317)

$0 < a < 6$인 실수 a에 대하여 원점에서 곡선 $y = x(x-a)(x-6)$에 그은 두 접선의 기울기의 곱의 최솟값은?

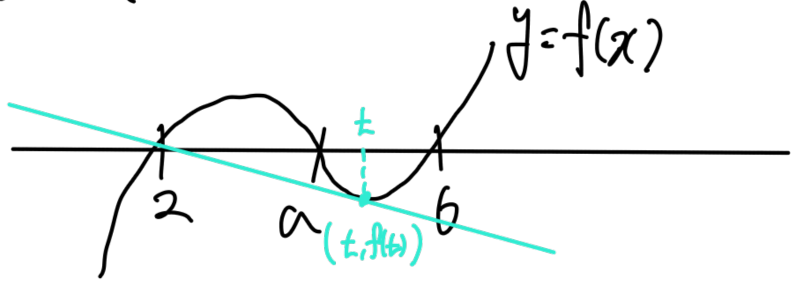
2. $2 < a < 6$인 실수 a에 대하여 $(2, 0)$에서 곡선 $y=(x-2)(x-a)(x-6)$에 그은 두 접선의 기울기의 곱을 $h(a)$라고 하자. $h'(2)$의 값은?

STEP1) $f(x)=(x-2)(x-a)(x-6)$ 이라 하자.



STEP2) 접선1 : $f'(2)$

접선2 : $(2,0)$과 $f(x)$ 위의 점 $(t, (t-2)(t-a)(t-6))$과의 기울기



접선1 : $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2} = f'(2) = \lim_{x\to2}(x-a)(x-6) = -4(2-a) = 4(a-2)$

접선2 : 삼차 & 직선 근.계수 관계 $\to 2t+2 = a+2+6$

$2t = a+6$

$t = \frac{a+6}{2}$

대입하면 $\frac{f(t)}{t-2} = \frac{\left(\frac{a+2}{2}\right)\left(\frac{6-a}{2}\right)\left(\frac{a-6}{2}\right)}{\frac{a+2}{2}} = \frac{-2\cancel{(a+2)}(a-6)^2}{8\cancel{(a+2)}} = -\frac{1}{4}\times(a-6)^2$

STEP3) $h(a) = 4(a-2)\times -\frac{1}{4}(a-6)^2$

$h'(2) = \lim_{a\to2}\frac{h(a)}{a-2} = \lim_{a\to2} -(a-6)^2 = -16$

기출 (20140617)

곡선 $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하다. 점 A의 x좌표가 3일 때, 점 B에서의 접선의 y절편의 값은?

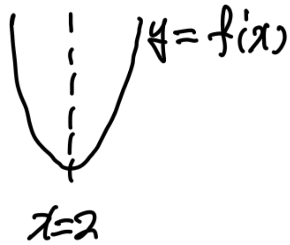
3. 곡선 $y = 2x^3 - 12x^2 + 2x + 20$ 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하다. 점 A의 x좌표가 1일 때, 점 B에서의 접선의 y절편의 값은?

STEP1) 접선이 평행 → 접.기 같다 = 도함수의 y값이 같다.

STEP2) $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 2x + 20$ 이라고 하자.

$f'(x) = 6x^2 - 24x + 2$

$f''(x) = 12x - 24 = 12(x-2)$ →



점 A의 x좌표가 1이다 → $x=2$ 대칭이므로 점 B의 x좌표는 3

$f'(3) = -16$, $f(3) = -28$

STEP3) 점 B에서의 접선: $y = -16(x-3) - 28$

y절편: 20

기출 (20081106)

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

조건

$f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근 $\alpha, \beta, \gamma (\alpha<\beta<\gamma)$를 갖고,

$f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<0$이다.

[보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. $f(a)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 β보다 작은 실근을 갖는다.

4. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

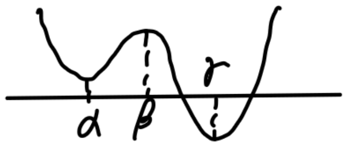
> 조건
>
> $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근 $\alpha, \beta, \gamma(\alpha<\beta<\gamma)$를 갖고,
> $f(\alpha)f(\beta)>0$, $f(\beta)f(\gamma)<0$을 만족시킨다.

[보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

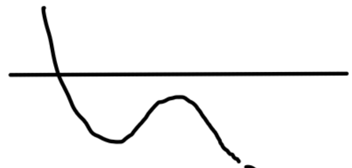
> [보기]
>
> ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖는다.
>
> ㄴ. $f(x)=f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$는 서로 다른 네 실근을 가진다.
>
> ㄷ. $\dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=f'(k)$인 k값은 1개이다.

STEP1) 그래프 개형찾기

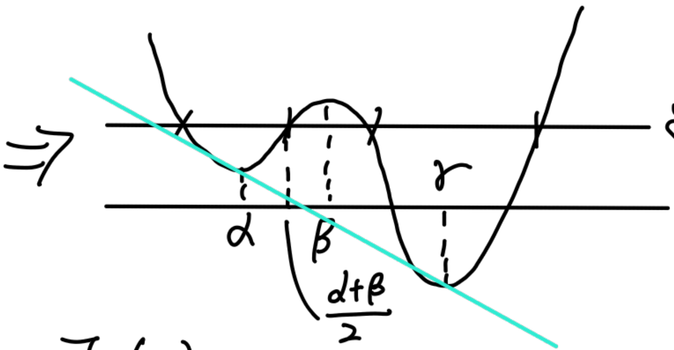
	$f(\alpha)$	$f(\beta)$	$f(\beta)$	$f(\gamma)$	
case1)	+	+	+	−	→ (o)
case2)	−	−	−	+	→ (X)



(o)


(X)

$f(\gamma)$이 +가 될 수 없음



ㄴ $y=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

ㄱ, (o)
ㄴ, (o)
ㄷ, (X) ← 수정사항

기출 (20150721)

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)|$가 다음 조건을 만족시킨다.

조건

(가) $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하고 $g(1)=g'(1)$이다.

(나) $g(x)$는 $x=-1, x=0, x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$g(2)$의 값은?

5. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)|$가 다음 조건을 만족시킨다.

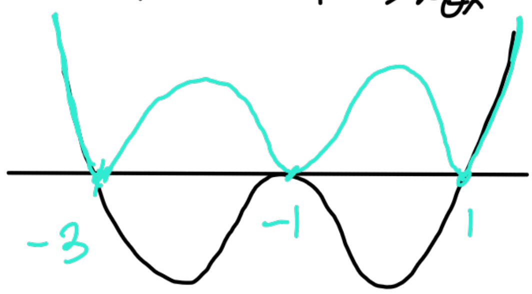
조건
(가) $g(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하고 $g(-1)=g'(-1)$이다.
(나) $x=-3, x=-1, x=1$에서 극솟값을 가진다.

$g(x)$의 극댓값을 α, β라고 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? (단, α, β는 같을 수도 있고 다를 수도 있다.)

STEP 1) 그래프 개형 찾기

① $g(x)$가 $x=-1$ 미.가 , $g(-1)=g'(-1) \rightarrow x=-1$에서  이런모양

② $x=-3$, $x=-1$, $x=1$ 극솟값 → $f(x)$는 $x=-3$, $x=1$에서 + → - 되어야함

⇒ 

STEP2) $f(x)=(x+3)(x+1)^2(x-1)$

$$f'(x)=(x+1)^2(x-1)+(x+3)2(x+1)(x-1)+(x+3)(x+1)^2$$
$$=(x+1)\{x^2-1+2x^2+4x-6+x^2+4x+3\}$$
$$=(x+1)\{4x^2+8x-4\}=4(x+1)(x^2+2x-1)$$

$x=-1\pm\sqrt{2}$

STEP3) $f(-1+\sqrt{2})=(2+\sqrt{2})(\sqrt{2})^2(-2+\sqrt{2})$

$$=-2\times 2=-4$$

$g(x)=|f(x)|$ 이므로 α, β는 4 $\quad \alpha+\beta=8$

기출 (20191021)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

조건

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 $\alpha, \beta\,(\alpha<\beta)$뿐이다.

(나) 함수 $f(x)$의 극솟값은 -4이다.

[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f'(\alpha)=0$

ㄴ. $\beta=\alpha+3$

ㄷ. $f(0)=16$이면 $\alpha^2+\beta^2=18$이다.

6. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

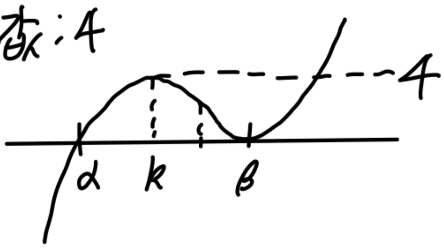
> 조건
>
> (가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 $\alpha, \beta\,(\alpha<\beta\le 2)$뿐이다.
>
> (나) 함수 $f(x)$의 극댓값은 4이다.

[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

> 보기
>
> ㄱ. $f'(a)=0$　　ㄴ. $\beta=\alpha+3$
>
> ㄷ. $f(0)=20$이면 $\alpha^2-\beta^2=21$이다. ㄹ. $\lim_{x\to-3}\frac{f(x)}{x+3}=-2$ 이다.

STEP1) 그래프 개형찾기

극댓값 : 4

$\Rightarrow$ 

STEP3) ㄴ, ㄷ

STEP2) ㄱ, $f'(a)>0 \rightarrow (X)$

ㄴ, $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2$

비율관계 $\Rightarrow k=\alpha+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)=\frac{1}{3}(\beta+2\alpha)$

$f\left(\frac{\beta+2\alpha}{3}\right)=\left(\frac{\beta-\alpha}{3}\right)\left(\frac{2(\alpha-\beta)}{3}\right)^2=4$　$(\alpha-\beta)^3=-27$

$\alpha-\beta=-3$

$\frac{-4}{27}(\alpha-\beta)^3=4$　$\beta=\alpha+3$ (o)

ㄷ, $f(0)=20 \Rightarrow -\alpha\beta^2=20$

$-\alpha(\alpha+3)^2=20$

$\alpha=-5,\ \beta=-2$

$\alpha^2-\beta^2=21$

(o)

ㄹ, 응 극한이 수렴 $\Rightarrow f(-3)=0$

$\Rightarrow -3$은 α 아 β 중 하나

$f'(\alpha)>0,\ f'(\beta)=0$ 이므로

(X)

기출 (2021 경찰대 13번)

곡선 $y = x^3 + 1$위의 점 $(1,2)$에서의 접선을 ℓ이라 하자. 중심이 y축 위에 있는 원이 점 $(1,2)$에서 직선 ℓ에 접할 때, 이 원의 넓이는?

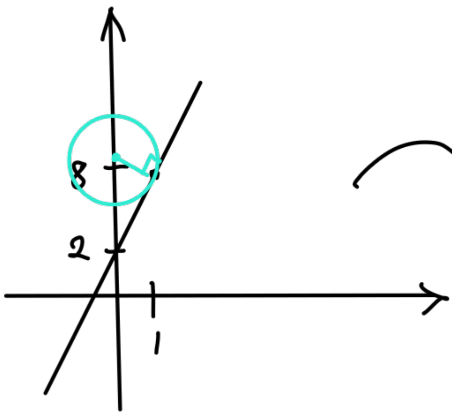
7. x^3+3x+4위의 점 $(1,8)$에서의 접선을 ℓ이라 하자. y축 위에 있는 원이 점 $(1,8)$에서 직선 ℓ에 접할 때, 원의 넓이를 $\frac{q}{p}\pi$라 하자. $q-p$의 값은?

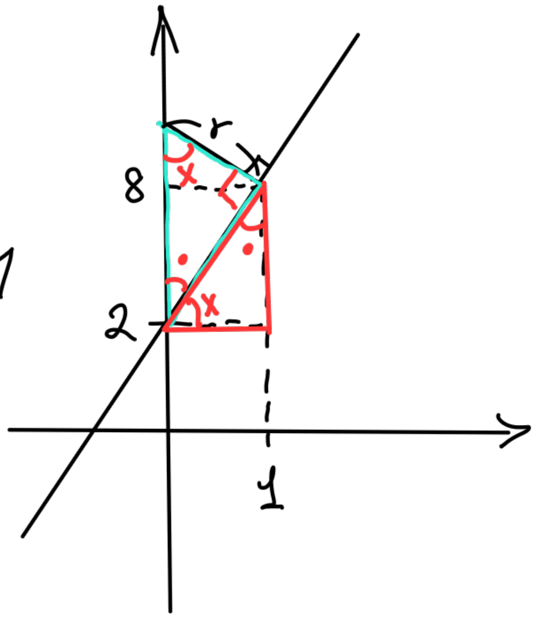
STEP 1) $f(x)=x^3+3x+4$ 라고 하자.

$f'(x)=3x^2+3$

$l=6(x-1)+8$

STEP2)





"닮음이용"

길이비 ⇒ $1:6=r:\sqrt{37}$

$r=\frac{\sqrt{37}}{6}$

$r^2\pi=\frac{37}{36}\pi$

STEP3) $q-p=1$

기출 (2022 수능 예시문항 11번)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

방정식 $f(x)=9$은 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근은 크기 순서대로 등비수열을 이룬다.

$f(0)=1$, $f'(2)=-2$일 때, $f(3)$의 값은?

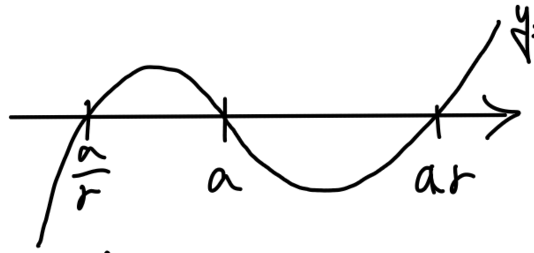
8. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다,

> 방정식 $f(x)=30$은 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근은 크기 순서대로 등비수열을 이룬다.

$f(0)=3, f'(3)=-12$ 일 때, $|f(5)|$의 값은?

STEP1) $f(x)=30 \rightarrow f(x)-30=0$

$y=f(x)-30$ 과 $y=0$ 의 그래프로 해석



$f(x)=\left(x-\frac{a}{r}\right)(x-a)(x-ar)+30$

STEP2) ① $f(0)=3$

② $f'(3)=-12$

① $-a^3+30=3$

$a^3=27 \quad a=3$

$f(x)=\left(x-\frac{3}{r}\right)(x-3)(x-3r)+30$

② $f'(3)=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-30}{x-3}=\lim_{x\to3}\left(x-\frac{3}{r}\right)(x-3r)$

$=9-9r-\frac{9}{r}+9=-12$

$-9\left(r+\frac{1}{r}\right)=-30$

$r+\frac{1}{r}=\frac{10}{3}$

$r=3$ or $r=\frac{1}{3}$

STEP3) $f(x)=(x-1)(x-3)(x-9)+30$

$|f(5)|=|4\times2\times-4+30|=2$

기출 (2016 경찰대 11)

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$인 다항함수 $f(x)$가 $f(-1)=2$,

$\lim_{x\to -1}\frac{f(1)-f(-x)}{x^2-1}=3$을 만족시킬 때, $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)^2-4}{x+1}$의 값은?

9. 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$인 다항함수 $f(x)$가

$f(-2)=4$, $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(2)-f(-x)}{x^2-4}=7$을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은?

sol1) $\frac{0}{0}$ 꼴이 수렴하므로 $f(2)=4$, $f(-2)=-f(2)=4$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+4}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\frac{f'(2)}{4}=7 \quad f'(2)=28$$

sol2) 로피탈의 정리 사용

$f(-x)=-f(x) \longrightarrow -f'(-x)=-f'(x) \Rightarrow f'(x)=f'(-x)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(2)-f(-x)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{f'(-x)}{2x}=\frac{f'(-2)}{4}=7$$

$f'(-2)=f'(2)$

$\therefore f'(2)=28$

기출 (20160621)

자연수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수$f(x)$의 극댓값을 a_n이라 하자.

조건

(가) $f(n)=0$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x) \geq 0$ 이다.

a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은?

10. 음수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$가 있다.

4차

조건

(가) $f(n)=0$

$(x-(n+2))f(x) \geq 0$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $(x-n-2)f(x) \geq 0$ 이다.

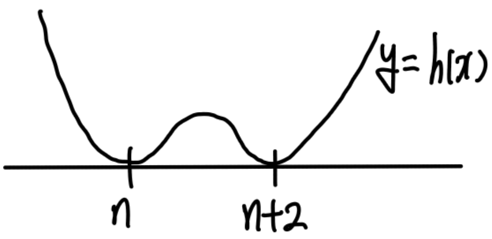
$f(x)$의 극댓값의 x좌표를 α, 극솟값의 x좌표를 β, $y=f(x)$와 x 축의 교점의 x좌표를 γ라 하자. α, β, γ는 순서대로 등비수열을 이룬다. n의 값은? (단, $\alpha \neq \gamma$ 이다.)

STEP1) $f(x)=(x-n)(x^2+\sim)$

STEP2) $h(x)=(x-(n+2))f(x)$ 라 하자.

$h(x) \geq 0$ 이므로

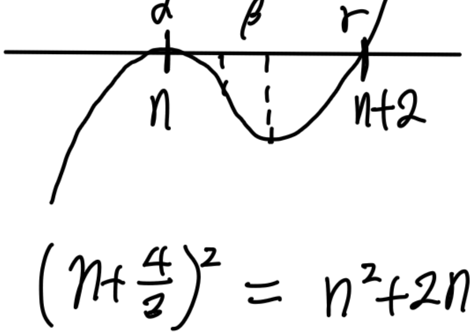
$h(x)=(x-(n+2))(x-n)(x^2+\sim) \geq 0$ 이 된다.



$h(x)=(x-n)^2(x-(n+2))^2$

이므로

$f(x)=(x-n)^2(x-(n+2))$ 이 된다.



$\beta = n + \frac{2}{3}(n+2-n)$

$= n + \frac{4}{3}$

STEP3) $\left(n+\frac{4}{3}\right)^2 = n^2+2n$

$\frac{8}{3}n + \frac{16}{9} = 2n \quad \frac{2}{3}n = -\frac{16}{9}$

$n = -\frac{8}{3}$