[문제 1]

(1) P(A)는 10개의 수를 나열하는 방법 중에서 2개를 골라서 대소에 맞게 a_1, a_2를 배치하는 방법의 확률이므로

$$P(A) = \frac{{}_{10}C_2 \times 8!}{10!} = \frac{1}{2}$$

따라서 $P(A) = \frac{1}{2}$이다.

(2) $P(A) = \frac{1}{2}$ ($\because$ (1)), P(B)는 P(A)와 같은 방법으로 $\frac{1}{2}$이다.

그리고 $P(A \cap B)$는 $a_1 < a_2 < a_3$를 만족시켜야 하므로 (1)에서 썼던 논리를 3개를 고르는 확률에 적용시키면 $P(A \cap B) = \frac{{}_{10}C_3 \times 7!}{10!} = \frac{1}{6}$이다.

$\therefore$ $P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \neq P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ 이므로 사건 A와 사건 B는 종속이다. Good

(3)

(1)에서 썼던 논리를 4개를 고르는 확률에 적용시키면

$$P(C) = \frac{{}_{10}C_4 \times 6!}{10!} = \frac{1}{24}$$

따라서 $P(C) = \frac{1}{24}$ 이다.

((4)은 뒤에)

문제	번

첨삭자 코드

문제 1 번	(4)

$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 을 만족할 확률은
(1)에서 쓰인 논리를 n개 고르는 확률에 적용시키면

$$\frac{{}_{10}C_n \times (10-n)!}{10!} = \frac{1}{10!} \times \frac{10!}{(10-n)!\,n!} \times (10-n)! = \frac{1}{n!} \text{ 이다.}$$

$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 을 만족하는 자연수 n의 최댓값을 확률변수 X라 하여 확률 분포표를 그려보자.

X	1	2	3	4	$\cdots$	10
P(X)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{30}$	$\cdots$	$\frac{10}{11!}$

$\because$ 위에서 구한 확률 $\frac{1}{n!}$은 $P(X \geq n)$ 이기 때문에 $P(X=n)$은 아래와 같이 구할 수 있다.

$$P(X \geq n+1) = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$- \quad P(X \geq n) = \frac{1}{n!}$$

$$\therefore P(X=n) = \frac{n}{(n+1)!}$$

따라서

$$1 < E(X) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{100}{11!} < \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{8} + 10(P(X \geq 4))$$

$$= \frac{37}{24} + \frac{10}{4!} = \frac{27}{24} < 2 \text{ 이다.}$$

따라서 $1 < E(X) < 2$ 가 성립한다.

첨삭자 코드

Good

완벽한 답안 :)

문제 2 번

[문제 2]

[2-1]

항상 홀수 번째에 제비를 뽑는 A가 최초로 당첨제비를 뽑기 위해서는 (2k-1)번에 최초로 당첨제비가 뽑혀야 하고 (2k-2)번째 까지는 당첨제비가 나오지 않아야한다.

이때 k는 1이상 n-1 이하의 자연수이다. Good

(∵ 시행이 끝났을때 당첨제비가 2개는 남아야 하므로)

따라서 위의 상황이 될 확률은

$$\frac{2n-3}{2n} \times \frac{2n-4}{2n-1} \times \cdots \times \frac{2n-2k}{2n-2k+3} \times \frac{3}{2n-2k+2}$$

$$= \frac{\cancel{(2n-2k+2)}(2n-2k+1)(2n-2k)}{2n(2n-1)(2n-2)} \times \frac{3}{2n-2k+2} = \frac{3(2n-2k+1)(n-k)}{n(2n-1)(2n-2)}$$ 이다.

따라서 $1 \le k \le n-1$ 이므로 구하려는 정답은

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{3(2n-2k+1)(n-k)}{n(2n-1)(2n-2)} = \frac{3}{2n(2n-1)(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \left(+2k^2+(-4n-1)k+2n^2+n\right)$$

$$= \frac{3}{2n(n-1)(2n-1)} \times \left\{ \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3} + (-4n-1) \times \frac{n(n-1)}{2} + n(2n+1)(n-1) \right\}$$

$$= \frac{4n+1}{8n-4}$$ 이다.

따라서, A가 당첨제비를 뽑을 확률은 $\frac{4n+1}{8n-4}$ 이다.

첨삭자 코드

문제 2 번	[2-2]

주사위 100개를 던질 때, 1 또는 2의 눈이 나오는 주사위의 개수가 홀수일 확률 $P=\sum_{k=1}^{50} {}_{100}C_{2k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{101-2k}$ 이다.

($\because$ 주사위가 1,2의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$)

이항정리를 이용하여 P를 유도해보자.

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^{100}=\sum_{k=0}^{100} {}_{100}C_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{100-k}$$

$$-\ \left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)^{100}=\sum_{k=0}^{100} {}_{100}C_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(-\frac{2}{3}\right)^{100-k}$$

$$\therefore 1^{100}-\left(\frac{1}{3}\right)^{100}=2\times P$$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^{100}}=P$ 이므로 ~~P가 유도되었다.~~

~~그러므로~~ $E(X)=ap+b(1-p)=\frac{a}{2}-\frac{a}{2\cdot3^{100}}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2\cdot3^{100}}$

$=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2\cdot3^{100}}$ 이다.

Good.

첨삭자 코드	

[문제3]

(a)

제시문에서의 f(x) 전개식과 소문항 (a)의 f(x)를 전개한 식과의 각각 차수의 계수를 비교해보자.

3차항의 계수 : $6a+2 = A+B$

2차항의 계수 : $11a^2+10a+1 = 3a^2+6a+1+AB$

1차항의 계수 : $6a^3+14a^2+4a = (3a^2+5a+1)B+aA$

위의 식을 정리하면 $\begin{cases} A+B=6a+2 \\ AB=8a^2+4a \end{cases}$ 를 구할 수 있고

A, B를 두근으로 갖는 P에 대한 이차방정식을 세우면

$P^2-(6a+2)P+8a^2+4a=\{P-(4a+2)\}\{P-(2a)\}=0$ 이다.

$P=4a+2$, $2a$ 인데 1차항의 계수가 같은 것끼리 고려하면 $A=4a+2$ 이고 $B=2a$ 임을 알 수 있다.

따라서 $A=4a+2$, $B=2a$ 이다.

(b)

(a)에서의 결과를 이용하여 $\begin{cases} g(x)=(x^2+(4a+2)x+3a^2+5a+1) \\ h(x)=x^2+2ax+a \end{cases}$ 라 하자.

$\therefore f(x)=g(x)h(x)$

이때 g(x)와 h(x)의 판별식이 $4(a^2-a)$로 같다.

i) $a^2-a\le 0 \Leftrightarrow 0\le a\le 1$

모든 실수 x에 대해 $g(x)\ge 0$, $h(x)\ge 0$ 이므로

$f(x)\ge 0$ 이다.

(뒤에 이어서)

문제 3 번

첨삭자 코드

문제 3 번

(b) (이어서)

ii) $a^2-a>0 \Leftrightarrow a>1,\ a<0$

일반적인 상황에서는 $g(x)h(x)<0$ 인 x가 존재할 수밖에 없다.
단, g와 h의 두 근이 같을 때는 모든 실수 x에 대해

$f(x)=g(x)h(x)\geq 0$ 이다.

이때는 두 이차함수의 최고차항의 계수가 같기 때문에
축이 같을 때이다.

$$\frac{4a+2}{-2}=\frac{2a}{-2} \qquad \therefore a=-1$$

i), ii)에 의해서 $\{a \mid M_a \geq 0\} = \{a \mid a$는 $0\leq a\leq 1$인 실수$\} \cup \{-1\}$이다.

Good.

음, 1~3번은 너무 잘 썼습니다 :)

(문제 4는 생략)

첨삭자 코드