문제	번

[1-1] 1부터 10까지의 자연수 중 2개를 선택하여 $a_1 < a_2$ 를 만족하는 순서쌍 (a_1, a_2) 의 개수는 ${}_{10}C_2 = 45$(개) 이다. 나머지 $a_3, a_4, \cdots a_{10}$ 의 8개의 수를 나열하는 개수는 $8!$ 이므로 $P(A)$를 구하면

$$P(A) = \frac{{}_{10}C_2 \cdot 8!}{10!} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$$ 이다.

[1-2] 문제 [1-1] 에서와 같이 사건 B의 확률 $P(B)$ 를 구하면 $P(B) = \frac{1}{2}$ 이다.

이때 $a_1 < a_2 < a_3$ 인 사건이 $A \cap B$ 이므로 확률 $P(A \cap B)$를 구하자.

1부터 10까지의 자연수 중 3개를 선택해 사건 $A \cap B$를 만족하는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3) 의 개수는 ${}_{10}C_3 = 120$(개) 이고, 나머지 $a_4, a_5, \cdots, a_{10}$ 의 7개의 수를 나열하는 개수는 $7!$ 이므로, $P(A \cap B)$를 구하면

$$P(A \cap B) = \frac{{}_{10}C_3 \times 7!}{10!} = \frac{120}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{6}$$ 이다.

따라서, $P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4}$ 이므로 사건 A, B는 종속이다.

[1-3] 위의 두 문제와 같은 방법으로 확률 $P(C)$ 를 구하면

$$P(C) = \frac{{}_{10}C_4 \times 6!}{10!} = \frac{210}{10 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{1}{24}$$ 이다.

[1-4] 위의 문제에서와 같은 방법으로 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 인 사건의 확률을 구하면 $\frac{{}_{10}C_n \cdot (10-n)!}{10!} = \frac{1}{n!}$ 이다.

따라서 $P(X \geq n) = \frac{1}{n!}$ 이므로 $P(X = n)$을 구하면

$$P(X = n) = P(X \geq n) - P(X \geq n+1) = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$
$$= \frac{n}{(n+1)!}$$

정규인 잘 느껴네요,,

이다. 이제 $E(X)$를 구하자.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{10} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{10} \frac{k^2}{(k+1)!} \left(= \sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1) - (k+1) + 1}{(k+1)!} \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right)$$
$$= \frac{1}{0!} + \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{(k-1)!} - \left(1 - \frac{1}{11!}\right)$$
$$= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} + \frac{1}{11!} \quad (\because 0! = 1)$$

NICE.

첨삭자 코드

문제 1, 2 번	

[1-4] 에서

이때, $\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{9!}+\frac{1}{11!}$ 가 양수이므로 0보다 크고,

$$\underbrace{\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{9!}+\frac{1}{11!}}_{7\text{개}} < \frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{7}{4!}$$

$$= \frac{23}{24} < 1$$ 이 성립하므로

$0 < \frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{9!}+\frac{1}{11!} < 1$ 이 성립한다.

따라서 $1 < \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{9!}+\frac{1}{11!} < 2$ 가 성립하므로

$1 < E(X) < 2$ 가 만족함을 알 수 있다.

[2-1] A가 $(2k-1)$번째에 처음으로 당첨제비를 뽑을 확률을 P_k라고 하자.

A와 B가 $(2k-2)$번째까지 번갈아가면서 당첨이 아닌 제비를 뽑을 확률은

$\frac{{}_{2n-3}C_{2k-2}}{{}_{2n}C_{2k-2}}$ 이고, A가 $(2k-1)$번째에 당첨제비를 뽑을 확률은 $\frac{{}_{3}C_{1}}{{}_{2n-(2k-2)}C_{1}}$

이므로 $P_k = \frac{{}_{2n-3}C_{2k-2}}{{}_{2n}C_{2k-2}} \times \frac{{}_{3}C_{1}}{{}_{2n-2k+2}C_{1}}$

$$= \frac{(2n-2k)(2n-2k+1)(2n-2k+2)}{2n(2n-1)(2n-2)} \times \frac{{}_{3}C_{1}}{2n-2k+2}$$

$$= \frac{3(n-k)(2n-2k+1)}{2n(2n-1)(n-1)} \quad \cdots ①$$ 이다.

따라서

$$\sum_{k=1}^{n-1} P_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3(n-k)(2n-2k+1)}{2n(n-1)(2n-1)} \quad (\because ①)$$

$$= \frac{3}{2n(n-1)(2n-1)} \sum_{k=1}^{n} (2n^2+(1-4k)n+2k^2-k) \quad (\because P_n = 0)$$ Good.

$$= \frac{3}{2n(n-1)(2n-1)} \left(2n^3 - 4n \times \frac{n(n+1)}{2} + n^2 + \frac{2}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2n(n-1)(2n-1)} \left(\frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n\right)$$

$$= \frac{1}{4n(n-1)(2n-1)} (4n^3 - 3n^2 - n)$$

$$= \frac{n(4n+1)(n-1)}{4n(n-1)(2n-1)}$$

첨삭자 코드

문제 2,3 번

[2-1] 이에서

$= \frac{4n+1}{8n-4}$

이므로, A가 당첨제비를 뽑아 시행을 끝낼 확률은 $\frac{4n+1}{8n-4}$ (단, n은 1보다 큰 자연수) 이다.

[2-2] 주사위 100개를 동시에 던질때, 1또는 2의 눈이 나오는 주사위의 개수가 홀수일 확률을 p, 짝수일 확률을 $1-p$ 라고 하자. (단, 0도 짝수로 간주한다.)

이항정리를 이용하면.

$$p = \sum_{k=1}^{50} {}_{100}C_{2k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{101-2k}, \quad 1-p = \sum_{k=0}^{50} {}_{100}C_{2k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{100-2k}$$

이므로

$$(1-p)-p = \sum_{k=0}^{50} {}_{100}C_{2k} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{100-2k} - \sum_{k=1}^{50} {}_{100}C_{2k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{101-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{100} {}_{100}C_k \left(-\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{100-k}$$

$$= \left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^{100} = \frac{1}{3^{100}}$$

$\Rightarrow p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^{100}}$ 이다

따라서 $E(X)$를 구해주면.

$$E(X) = ap + (1-p)b$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^{100}}\right)a + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^{100}}\right)b$$

$$= \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2\cdot 3^{100}}$$

임을 알 수 있다.

3-(a) 주어진 $f(x)$를 전개하자.

$$f(x) = (x^2+Ax+3a^2+5a+1)(x^2+Bx+a)$$

$$= x^4 + (A+B)x^3 + (AB+3a^2+6a+1)x^2 + (aA+(3a^2+5a+1)B)x + 3a^3+5a^2+a$$

항등식에 의하여 x^3과 x의 계수는 $A+B = 6a+2$, $aA+(3a^2+5a+1)B = 6a^3+14a^2+4a$ 가 성립한다. 이를 이용하면

$$aA+(3a^2+5a+1)B = a(A+B)+(3a^2+4a+1)B = 6a^3+14a^2+4a$$

$$\Rightarrow (3a^2+4a+1)B = 6a^3+14a^2+4a - a(A+B)$$

$$= 6a^3+8a^2+2a$$

$$= 2a(3a^2+4a+1)$$

이므로 $B=2a$ 이고, $A=4a+2$ 로 나타낼수 있다.

첨삭자 코드

문제 3 번	

3-(b)

3-(a)에 의하여 $f(x)=(x^2+(4a+2)x+3a^2+5a+1)(x^2+2ax+a)$ 이다.

$g(x)=x^2+(4a+2)x+3a^2+5a+1$, $h(x)=x^2+2ax+a$ 라고하고

각각의 판별식을 D_1, D_2라고 하자.

$D_1=(4a+2)^2-4(3a^2+5a+1)=4(a^2-a)$,

$D_2=(2a)^2-4\times a=4(a^2-a)$

이므로 $D_1=D_2$ 이다. 따라서 $g(x)$와 $h(x)$의 실근의 개수는 항상 같다.

(i) $0\le a\le 1$ 일때, ($D_1, D_2\le 0$)

두 함수 $g(x)$와 $h(x)$가 실근을 가지지 않거나 중근을 가지므로,

$g(x)\ge 0$, $h(x)\ge 0$ 이 성립한다. 따라서 $f(x)=g(x)h(x)\ge 0$

이 성립하므로. $f(x)$의 최솟값인 m_a 또한 0 이상이다.

(ii) $a>1$, $a<0$ 일때, ($D_1, D_2>0$)

두 함수 $g(x)$, $h(x)$가 2개의 실근을 가지므로.

$f(x)=h(x)\cdot g(x)=0$ 는 4개의 실근 ①, 2개의 실근 1개의 중근 ② 또는 2개의 중근을 ③

가질수 있다.

이때 ①, ②의 경우에는 $m_a\ge 0$ 이 성립할 수 없다.

③의 경우에는 $f(x)\ge 0$ 이 성립하므로. $m_a\ge 0$ 이 성립한다.

$f(x)$가 두개의 중근을 가지기 위해선 $g(x)$와 $h(x)$가 일치해야 하므로

$g(x)=h(x)$

$\Leftrightarrow x^2+(4a+2)x+3a^2+5a+1=x^2+2ax+a$

$\Leftrightarrow 4a+2=2a$ 이고 $3a^2+5a+1=a$

$\Leftrightarrow a=-1$

따라서 이를 만족하는 a는 -1 뿐이다.

(i), (ii)를 종합하여 집합 $\{a\mid m_a\ge 0\}$ 을 구하면

$\{a\mid m_a\ge 0\}=\{a\mid a$는 $0\le a\le 1$ 인 실수, $a=-1\}$ 이다.

첨삭자 코드

[4-1] 함수 $y=e^x$의 위의 점 $(0,1)$에서의 접선은

$y=e^0(x-0)+1=x+1$ 이고, $y=e^x$가 아래로 볼록한 함수이므로

$x>0$ 에서 다음이 성립한다.

$e^x > x+1 \cdots ㉠$

함수 $g(x)=x-\ln(1+x)$ $(x>0)$ 라고 하면

$g'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0$ 이므로

$g(x)$는 증가 함수이다. 따라서 $g(x)=x-\ln(1+x)>g(0)=0$

이므로 $f(x)=\frac{x^2-x\ln(x+1)}{e^x}$

$=\frac{x(x-\ln(x+1))}{e^x}>0$ 즉, $f(x)>0 \cdots ①$ 이다.

이제 함수 $h(x)=\frac{1}{2}e^x+\ln(x+1)-x$ $(x>0)$ 라고하자.

$h'(x)=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{x+1}-1$

$=\frac{1}{2}e^x-\frac{x}{x+1}>\frac{1}{2}(x+1)-\frac{x}{x+1}$ $(\because ㉠)$

$=\frac{(x+1)^2-2x}{2(x+1)}=\frac{x^2+1}{2(x+1)}>0$

이므로 $h(x)$는 증가 함수이다. 따라서 $h(x)>h(0)=\frac{1}{2}>0$

이 성립하므로 $\frac{1}{2}e^x>x-\ln(x+1)$ 이 성립하므로.

$\frac{x-\ln(x+1)}{e^x}<\frac{1}{2}$ 이 성립하므로.

$f(x)=\frac{x(x-\ln(x+1))}{e^x}<\frac{1}{2}x \cdots ②$ 가 성립한다.

그러므로 ①, ② 를 종합하면 $x>0$ 일때, $0<f(x)<\frac{1}{2}x$ 가 성립한다.

문제 4 번

첨삭자 코드

문제 4 번	[4-2] 문제 [4-1]의 부등식에 $x=a_1$, $x=a_2$, $\cdots$, $x=a_n$을 대입하자.

$$0 < f(a_1) < \frac{1}{2}a_1$$
$$0 < f(a_2) < \frac{1}{2}a_2$$
$$\vdots$$
$$0 < f(a_n) < \frac{1}{2}a_n$$

$a_{n+1} = f(a_n)$ 임을 이용하여 부등식의 각 변을 곱하여 정리하면

$$0 < f(a_1)\cdot f(a_2)\cdots f(a_n) < \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$
$$\Rightarrow 0 < a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot f(1) \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$$
$$\Rightarrow 0 < a_{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot f(1) < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad (\because f(1) < \frac{1}{2})$$
$$\therefore 0 < a_{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

이 부등식의 각 변에 $\lim$ 을 취하면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ 이므로
극한의 대소관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다.

Good.

잘 썼습니다요.

첨삭자 코드