문제 1 번

[1] 8시와 9시 사이 간격은 1시간이다. $n=1$일때 홍익이가 1시간보다 오래 버스를 기다리는 사건은 주어진 상황 내에서 일어날 수 없다.

따라서 $P(A_1)=0$이다.

$n=2$일때 2일동안 하루도 빠짐 없이 30분보다 긴 시간을 기다릴 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$이다. 따라서 $P(A_2)=\frac{1}{4}$이다.

[2] 홍익이가 하루에 $\frac{1}{n}$시간보다 긴 시간을 버스를 기다릴 확률은 $1-\frac{1}{n}$이고 각각의 등교일에 $\frac{1}{n}$시간보다 긴 시간을 버스를 기다리는 사건은 독립이므로 $P(A_n)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$이다.

Good.

[3]

$\ln f(x)=\ln\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\right\}=x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$이므로

$\frac{d}{dx}\ln f(x)=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}$이다.

[4] [3]에 의하여 $\frac{d}{dx}\ln f(x)=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}=\ln(x-1)-\ln x+\frac{1}{x-1}$

$=-\frac{(\ln x-\ln(x-1))}{1}+\frac{1}{x-1}$이고 $-\frac{(\ln x-\ln(x-1))}{1}+\frac{1}{x-1}>0$이므로

$\ln(f(x))$는 구간 $(1,\infty)$에서 증가함수이다. 이때 제시문 (나)-(b)에 의하여 로그함수는 증가함수이므로 $f(x)$도 증가함수임을 알 수 있다. 따라서

$P(A_{n+1})>P(A_n)$이다.

[5] 사건 B_n은 사건 A_n의 여사건이다. 즉 $P(B_n)=1-P(A_n)=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$이다.

이 식에 $\lim_{n\to\infty}$를 취하면 $\lim_{n\to\infty}P(B_n)=\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right)^{-1}\right\}$

$=1-\frac{1}{e}$을 얻는다. $1-\frac{1}{e}>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$이므로

모든 자연수 n에 대하여 $P(B_n)>\frac{1}{2}$이다.

Good.

첨삭자 코드

문제 2 번

-1~2

[1] $f(x)=0$의 실근을 $x=x_i$라 하자. $(i=1,2,3,\cdots,k_0)$

$a_0>0$일때 $f(x)$의 함숫값의 부호 변화를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	x_1	$\cdots$	x_2	$\cdots$	x_3	$\cdots$	$\cdots$	x_{k_0}	$\cdots$
$f(x)$	+	+	0	−	0	+	0	−	$\cdots$	0	$(-1)^{k_0}$

이때 $x>x_{k_0}$일때 $f(x)$의 부호는 +여야 하므로

k_0는 짝수임을 알 수 있다. $\left(\because \lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty\right)$

$a_0<0$일때 $f(x)$의 함숫값의 부호 변화를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	x_1	$\cdots$	x_2	$\cdots$	x_3	$\cdots$	$\cdots$	x_{k_0}	
$f(x)$	−	−	0	+	0	−	0	+	$\cdots$	0	$(-1)^{k_0+1}$

이때 $x>x_{k_0}$일때 $f(x)$의 부호는 +여야 하므로

k_0는 홀수임을 알 수 있다 $\left(\because \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty\right)$

[2] $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=\cdots=f(x_{k_0})=0$ 이므로

롤의 정리에 의하여 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c_1)=0$을 만족하는

c_1이 x_1과 x_2 사이에 적어도 하나 존재한다.

계속 해보면 롤의 정리에 의하여 $\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=f'(c_2)=0$

을 만족하는 c_2가 x_2와 x_3 사이에 적어도 하나 존재한다.

계속 해보면 롤의 정리에 의해 x_m과 x_{m+1} 사이에는 $f'(c_m)=0$을 만족하는

c_m이 적어도 하나 존재함을 알 수 있다. $(m=1,2,3,\cdots,k_0-1)$

따라서 $k_1\geq k_0-1$ 이므로 $k_0\leq k_1+1$ 이 성립한다.

첨삭자 코드

문제 2 번
-325

a_0와 a_1의 부호가 같고

[3] [1]에 의하여 최고차항의 계수가 양수이므로 K_0와 K_1의 홀짝성은 동일하다. 즉 [2]에 의하여 $K_1 - K_0 \geq -1$ 이므로 $K_1 - K_0 = 0, 2, 4, 6 \cdots$ 이 가능하다. 따라서 $K_1 - K_0 \geq 0$ 이므로 $K_1 \geq K_0$가 성립한다. Good.

[4] [1]에 의하여 a_1과 a_2의 부호가 같으면 K_1과 K_2의 홀짝성은 동일하다. [1], [2], [3]에 의하여 $K_2 - K_1 = 0, 2, 4, 6 \cdots$ 이므로 $K_2 \geq K_1$이 성립한다. 그런데 [3]에 의하여 $K_1 \geq K_0$ 이므로 $K_2 \geq K_1 \geq K_0$가 성립한다. 따라서 $K_2 \geq K_0$임을 알 수 있다. Good

[5] 편의상 $2718 = a$, $-2818 = b$, $-3141 = c$, $-5926 = d$라 하자.

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$ 이고 $f''(x)$의 판별식 $D > 0$ 이므로 $f''(x) = 0$의 실근은 2개이다. [4]에 의하여 $f(x) = 0$의 실근의 개수는 $f'(x) = 0$의 실근의 ~~개수보다~~ 적다. 그런데 [1]에 의해 $f(x) = 0$의 실근의 개수는 홀수개이므로 $f(x) = 0$의 실근의 개수는 1개이다.

첨삭자 코드

문제 3 번	
	[1] 구하고자 하는 평균은 $\frac{(\text{두 공장에서 생산에 투입되는 사과주스의 양})}{(\text{두 공장에서 생산되는 병의 총 개수})}$ 이므로 $\frac{n_a \times m_a + n_b \times m_b}{n_a + n_b}$ 이다. [2] 구하고자 하는 편차는 $\frac{(\sigma_a^2 + m_a^2) \times n_a + (\sigma_b^2 + m_b^2) \times n_b}{n_a + n_b} - \frac{(n_a m_a + n_b m_b)^2}{(n_a + n_b)^2}$ 이므로 이 식을 정리하면, $\left(\frac{n_a}{n_a+n_b}\right) \times \sigma_a^2 + \left(\frac{n_b}{n_a+n_b}\right) \times \sigma_b^2 + \frac{(m_a - m_b)^2}{(n_a+n_b)^2}$ 을 얻을 수 있다. 따라서 ㉠ : $\frac{n_a}{n_a+n_b}$, ㉡ : $\frac{n_b}{n_a+n_b}$, ㉢ : $(m_a - m_b)^2$ 이다. [3] [2]의 ㉢에서 $m_a = m_b$로 만들면 평균이 같아져 분산이 가장 작아질 것이다. 이 경우 분산은 $\left(\frac{n_a}{n_a+n_b}\right) \times \sigma_a^2 + \left(\frac{n_b}{n_a+n_b}\right) \times \sigma_b^2$ 이다. Good.
첨삭자 코드	퍼펙트 답안입니다.