(1) 공원의 다람쥐 n마리 중 25마리를 뽑는 경우의 수가 $_NC_{25}$이고
문제의 사건이 발생할 경우의 수는 표식이 있는 20마리 중 3마리를 뽑는 경우의 수인
$_{20}C_3$ ~~×~~, 표식이 없는 N−20마리 중 22마리를 뽑는 경우의 수인 $_{N-20}C_{22}$로
이 사건의 확률은 $f(N)=\dfrac{_{20}C_3\cdot{}_{N-20}C_{22}}{_NC_{25}}$ 이다.

를 곱하면 되므로

(2)

$$f(N)={}_{20}C_3\cdot\frac{\frac{(N-20)!}{(N-42)!\,22!}}{\frac{N!}{(N-25)!\,25!}}$$ 이므로 $$f(N+1)={}_{20}C_3\frac{\frac{(N-19)!}{(N-41)!\cdot 22!}}{\frac{(N+1)!}{(N-24)!\cdot 25!}}$$ 이다.

$$g(N)=\frac{f(N+1)}{f(N)}$$

$$=\frac{\frac{(N-19)!\,(N-24)!\cdot 25!}{(N-41)!\,(N+1)!\,22!}}{\frac{(N-20)!\,(N-25)!\,25!}{N!\,(N-42)!\,22!}}=\frac{\frac{N-19}{N-41}}{\frac{N+1}{N-24}}$$

$$\therefore g(N)=\frac{(N-19)(N-24)}{(N-41)(N+1)}=\frac{N^2-43N+456}{N^2-40N-41}$$ O

Good.

(3) $42\le N \Rightarrow f(N)>0$ 이므로

$f(N+1)>f(N) \Leftrightarrow 1<\dfrac{f(N+1)}{f(N)}$

$=1<\dfrac{N^2-43N+456}{N^2-40N-41}$

즉, $N^2-43N+456>N^2-40N-41$이다.

$3N<497$ $\therefore N<\dfrac{497}{3}=165.666\cdots$ 이다.

N은 자연수이므로 $42\le N\le 165$가 성립한다.

마찬가지로 $f(N+1)<f(N)\Leftrightarrow N>165.666\cdots$이다.

N은 자연수이므로 $N\ge 166$이다. O

(4) (3)에 의해 42이상의 자연수로 이루어진 집합에서 정의된 함수
$f(n)$에 대해, $42\le n\le 165$일 때, $f(N)<f(N+1)$이고,
$N\ge 166$일 때, $f(N)>f(N+1)$이 된다.
$f(42)<f(43)<\cdots<f(165)<f(166)>f(167)>f(168)\cdots$ 이므로
$\therefore N=166$일 때 $f(N)$이 최대가 된다. O

문제 1 번

첨삭자 코드

첨 삭

답안작성 예비구역

문제 2-1, 2-2 번	
	문항(1)

제 1사분면에서

F(x)는 좌표평면 상에서 중심이 원점이고 반지름이 x인 원 안에 포함된 정수 순서쌍의 개수와 같다. 원점을 제외한 임의의 한 점이 이러한 원 안에 포함되면, 90°씩 회전할 때 나타나는 4개의 점들이 동시에 포함된다. 따라서 원점을 제외하고 원 안에 포함된 점의 개수는 4의 배수이고, 원점이 항상 포함되므로 점들의 총 개수를 4로 나눈 나머지는 항상 1이다.

문항(2)

$F(\sqrt{115})$는 $m^2+n^2 \le 115$의 모든 정수 순서쌍의 개수이고,
$F(\sqrt{116})$은 $m^2+n^2 \le 116$의 모든 정수 순서쌍의 개수이다.

Good 👍 이때 m^2+n^2은 항상 정수이므로 $115 < m^2+n^2 < 116$인 순서쌍은 존재하지 않는다. 따라서 $F(\sqrt{116})$에 추가되는 점들은 $m^2+n^2=116$을 만족하는 정수 순서쌍 (m,n)의 개수이다.

한편 116을 두 제곱수의 합으로 나타내면 ~~된다~~ 보면

$116 < 11^2$이므로 10^2이하의 제곱수들의 집합 $\{0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \cdots 10^2\}$을 고려하면 조건을 만족하는 경우는 $116 = 100+16$ 또는 $16+100$ 뿐이다.

$\therefore (m,n) = (10,4), (-10,-4), (4,10), (-4,-10),$
$(-10,4), (10,-4), (-4,10), (4,-10)$

$F(\sqrt{116}) = F(\sqrt{115}) + 8 = 357 + 8 = 365$이다. O

논리는 완벽 👍

첨삭자 코드

문제 2-3, 2-4 번

문항(3)

주어진 그림처럼 중심이 원점이고 반지름이 x인 원 안에 포함된 정수 순서쌍 (m,n)에 그 점을 중심으로 하는 단위면적의 정사각형과의 일대일 대응을 고려하면, 색칠된 영역은 이 정사각형들의 합집합이므로 $F(x)$와 넓이가 같다. 색칠된 영역 안에 있는 임의의 점 (a,b)는 원점으로부터의 거리가 x이하인 어떤 정수 순서쌍 (m,n)을 중심으로 갖는 단위 정사각형에 포함되므로 (m,n)과 (a,b) 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이하이다. 삼각형에서 한 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합 이하이므로 (a,b)와 원점 사이의 거리는 $x+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이하이다.

따라서 색칠된 영역은 반지름 $x+\frac{\sqrt{2}}{2}$인 원 안에 포함되므로, 두 넓이를 비교하면 $F(x)\le\pi(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2$이다.

비슷하게 색칠된 영역 밖에 있는 임의의 점 (c,d)는 원점으로부터의 거리가 x보다 큰 어떤 정수 순서쌍 (m,n)을 중심으로 하는 단위 정사각형에 포함되고, (m,n)과 (c,d) 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이하이므로 (c,d)와 원점 사이의 거리는 $x-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 보다 크다. 즉 반지름이 $x-\frac{\sqrt{2}}{2}$인 원은 색칠된 영역에 해당하므로 $\pi(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2\le F(x)$이다.

Good

문항(4)

$x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, 문항(3)에 의한 식

$\pi(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2\le F(x)\le\pi(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2$으로부터

부등식 $\frac{\pi(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{x^2}\le\frac{F(x)}{x^2}\le\frac{\pi(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{x^2}$을 얻는다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{x^2}=\pi=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{x^2}$이므로

조임정리에 의해 $\frac{F(x)}{x^2}$도 π로 수렴한다.

Good

첨삭자 코드

첨 삭

답 안 작 성 예 비 구 역

문제 3-1, 3-2, 3-3 번	
	(1) 정n각형에서 인접한 두 꼭짓점 사이의 중심각은 $\frac{2\pi}{n}$이므로 i번째와 j번째 사이의 중심각은 $k=j-i$라 하면 $1\le k\le\frac{n}{2}$일 때 $\frac{2\pi}{n}k$, $\frac{n}{2}\le k\le n-1$일 때 $2\pi-\frac{2\pi}{n}k$이다. 반지름이 1인 원에서 중심각이 θ인 $(0\le\theta\le\pi)$인 현의 길이는 $2\sin\frac{\theta}{2}$이고, 중심각이 $2\pi-\theta$인 $(\pi\le\theta\le2\pi)$인 현의 길이도 $2\sin\frac{2\pi-\theta}{2}=2\sin(\pi-\frac{\theta}{2})=2\sin\frac{\theta}{2}$이므로 $\overline{P_iP_j}=2\sin\frac{\pi}{n}k$이다. Good. (2) 꼭짓점 P_i와 다른 꼭짓점을 이은 선분들의 길이의 평균은 각 $1\le i\le n$에 대해 모두 동일하게 L_n이다. $L_n=\frac{1}{n-1}(\overline{P_1P_2}+\overline{P_1P_3}+\cdots+\overline{P_1P_n})$ (P_1와 다른 꼭짓점을 이은 선분의 길이의 평균) $=\frac{1}{n-1}(\overline{P_2P_2}+\overline{P_2P_3}+\cdots+\overline{P_2P_n})$ (P_2와 다른 꼭짓점을 이은 선분의 길이의 평균) $=\frac{1}{n-1}(\overline{P_nP_2}+\overline{P_nP_3}+\cdots+\overline{P_nP_{n-1}})$ (P_n와 다른 꼭짓점을 이은 선분의 길이의 평균) 두 꼭짓점을 잇는 선분은 위의 n개의 식의 우변에서 두 번씩 나타난다. 예를 들어, 꼭짓점 P_i, P_j를 잇는 선분은 i번째, j번째에서 한 번씩 나타난다. 따라서 위의 식을 전부 더하면 $n\cdot L_n=\frac{1}{n-1}\cdot2\cdot$(모든 선분의 길이의 합) $=\frac{1}{n-1}\cdot2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot M_n=n\cdot M_n$이고, 따라서 $L_n=M_n$이다. (3) (1)과 (2)에 의해 $M_n=N_n=\frac{1}{n-1}(\overline{P_1P_2}+\overline{P_1P_3}+\cdots+\overline{P_1P_n})$ $=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}2\sin(\pi\cdot\frac{k}{n})=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2\sin(\pi\cdot\frac{k}{n})$ $(\because \sin\pi\cdot\frac{n}{n}=0)$ $=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n-1})\cdot\int_0^1 2\sin\pi x\,dx=1\cdot2\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sin t\,dt$ $=\frac{2}{\pi}[-\cos t]_0^\pi=\frac{4}{\pi}$이므로 $\lim_{n\to\infty}M_n=\frac{4}{\pi}$이다.
첨삭자 코드	Good.

문제	3-4, 3-5	번

(4)

정2n각형에서 검은색, 흰색 꼭짓점들은 각각 n개 있다.

서로 다른 색인 꼭짓점을 잇는 선분의 개수는 검은색 꼭짓점 중 1개, 흰색 중 1개를 선택하는 경우의 수와 같으므로 $n \cdot n = n^2$이다.

서로 같은 색인 꼭짓점을 잇는 선분의 개수는 전체−(다른 색 꼭짓점을 잇는 선분의 개수)이므로

${}_{2n}C_n - n^2 = \frac{2n(2n-1)}{2} - n^2 = n(n-1)$이다.

(5)

정2n각형에서 검은색 꼭짓점들은 정n각형의 꼭짓점들이다.

따라서 정2n각형에서 두 꼭짓점이 모두 검은색인 선분의 개수는 정n각형의 두 꼭짓점을 잇는 선분의 개수인 $\frac{n(n-1)}{2}$이고, 길이의 평균은 M_n이다.

두 꼭짓점이 모두 흰색일 때 선분의 개수와 길이의 평균도 마찬가지이다.

∴ 같은색 꼭짓점을 잇는 선분의 길이의 평균은

$F_n = \frac{1}{2}M_n + \frac{1}{2}M_n = M_n$이고, 극한은 $\lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty} M_n = \frac{4}{\pi}$이다.

정2n각형의 두 꼭짓점을 잇는 선분들의 길이의 평균으로부터

$$M_{2n} = \frac{n(n-1)}{\frac{2n(2n-1)}{2}} F_n + \frac{n^2}{\frac{2n(2n-1)}{2}} G_n$$

$= \frac{n-1}{2n-1} F_n + \frac{n}{2n-1} G_n$이라는 식을 도출할 수 있다.

$\lim_{n\to\infty} M_{2n} = \lim_{n\to\infty} M_n = \frac{4}{\pi}$이므로

$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\pi} + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} G_n = \frac{4}{\pi}$이다.

즉, $\lim_{n\to\infty} G_n = \frac{4}{\pi}$이다.

전체 Comment: 너무 잘써서 감동. 문제만 잘 풀면 되겠습니다용

첨삭자 코드