x_1, x_2, x_3의 값들을 각각 계산하여 아래 일반항을 이끌어낸 과정을 보여주면 더 좋을 것 같습니다.

성윤 친구가 생각해 낸 일반항이 아직 맞는지 틀린지 모르기 때문에 '가정'이라는 표현보다는 '추측'이라는 표현이 더 좋습니다.

추측한 뒤, 이를 수학적 귀납법을 통해 증명해보자.

	문제 1,2번

1) 수열 x_n의 일반항을 $x_n = \frac{2^{n+1}-1}{2^n-1}$ 이라 ~~가정하면~~

i) $n=1$ 일 때,

$x_1 = \frac{2^{1+1}-1}{2^1-1} = 3$ 이므로 ~~$x_{n+1} + \frac{2}{x_n} = 3$을~~ $x_n = \frac{2^{n+1}-1}{2^n-1}$ 만족한다.

ii) $\cancel{x}$ $n=k$일 때, $x_k = \frac{2^{k+1}-1}{2^k-1}$ 이 성립한다고 가정하자. …①

$x_{k+1} + \frac{2}{x_k} = 3$

$x_{k+1} = 3 - \frac{2}{x_k}$

$= 3 - \frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}-1}$ $(\because ①)$

$= \frac{3\cdot 2^{k+1} - 3 - 2^{k+1} + 2}{2^{k+1}-1}$

$= \frac{2^{k+2}-1}{2^{k+1}-1}$ 이므로 ~~$x_{n+1} + \frac{2}{x_n} = 3$을 만족한다.~~ $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n에 대한 수열 $\{x_n\}$의 일반항은 $x_n = \frac{2^{n+1}-1}{2^n-1}$ 이다.

2-1) $f(x) = (x^3+1)h(x) + ax^2+bx+c$ 라 하자.

$f(x) = (x+1)(x^2-x+1)h(x) + a(x^2-x+1) + (b+a)x + (c-a)$

다항식 $f(x)$를 x^2-x+1로 나눈 나머지는 $x-1$ 이므로

$a+b=1$ …①, $c-a=-1$ …②

다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는 -1 이므로

$f(-1) = a-b+c = -1$ …③

~~$a+b=1,\ c-a=-1,\ a-b+c=-1$ 를~~ ①,②,③을 연립하면

$a = \frac{1}{3},\ b = \frac{2}{3},\ c = -\frac{2}{3}$ 이다.

따라서 다항식 $f(x)$를 x^3+1로 나눈 나머지는

$\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ 이다.

첨삭자 코드

문제 2,3 번	2-2) $f^n(x)$를 x^2-x+1로 나누면 나머지가 항상 -1로 일정함을 수학적 귀납법으로 나타내보자.

i) $n=1$ 일 때,

$f(x) = x(x^3+1)-1$

$= x(x+1)(x^2-x+1)-1$ 이므로

$f(x)$를 x^2-x+1로 나누면 나머지는 -1이다.

ii) $n=k$ 일 때, $g^k(x)$를 x^2-x+1로 나눈 나머지가 -1이라 하자.

즉, $g^k(x) = (x^2-x+1)\cdot Q_k(x)-1$을 만족하는 다항식 $Q_k(x)$가 존재 …①

$f^{k+1}(x) = f(f^k(x))$

$= f^k\{(f^k)^3+1\}-1$

$= f^k[(f^k+1)\{(f^k)^2-f^k+1\}\ \cancel{+1}]-1$

$= g^k\cdot(x^2-x+1)\cdot Q_k(x)\cdot\{(g^k)^2-g^k+1\}-1$ ($\because$ ①) 이므로,

~~$f^k(x) = (x^2-x+1)Q_k-1$ 이므로~~

$f^{k+1}(x)$를 x^2-x+1로 나누면 나머지는 -1이다 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 수학적귀납법에 의해 모든 자연수에 대하여 $f^n(x)$를 x^2-x+1로 나눈 나머지는 -1로 ~~일정~~하다.

3) 자연수 k가 $1\le k\le n$에 대하여 성립한다고 가정하면

$k^2-k \le k(k+1) \le n(k+1)$ 이 성립한다. … ①

$\dfrac{n}{n+k}\times\dfrac{n}{2n+1-k}\le\dfrac{1}{2}$ … ②

$\Leftrightarrow 2n^2\le(n+k)(2n+1-k)$

$\Leftrightarrow k^2-k\le n(k+1)$ 이므로 참이다. ($\because$ ①)

$\dfrac{n^n\times n!}{(2n)!}\le\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

$\Leftrightarrow \dfrac{n\times n\times\cdots\times n}{(n+1)(n+2)\times\cdots\times(n+n)}\le\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{n}{n+1}\times\dfrac{n}{n+n}\right)\times\left(\dfrac{n}{n+2}\times\dfrac{n}{n+n-1}\right)\times\cdots\le\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

①, ②에 의해 $\dfrac{n}{n+1}\times\dfrac{n}{n+n}$, $\dfrac{n}{n+2}\times\dfrac{n}{n+n-1}$, … 는 각각 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 보다 작으므로 되감에 (이어서)

첨삭자 코드	

(이어서)

	문제 3,4 번

모든 자연수 n에 대하여 부등식 $\frac{n^n \times n!}{(2n)!} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$이 성립한다.

4-1) i) $n=1$일 때 $a_1=4$ 이므로 $a_1>2$

ii) $n=k$일 때 $a_k>2$가 성립한다고 가정하면 … ①

$a_{k+1} > \frac{1}{2}\sqrt{a_k \times \frac{4}{a_k}}$ 이므로 $a_k>2$가 성립한다.

$a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{4}{a_k}\right)$

$\geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a_k \cdot \frac{4}{a_k}}$ (산.기.평)인데

①에 의해 $a_{k+1}>2$ 이므로 $n=k+1$ 일때도 성립.

따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>2$ 성립.

4-2) 4-1)에서 $a_{n+1}-2 = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{4}{a_n} - 4\right)$, $a_n>2$ 이므로

$a_{n+1}-2 < \frac{1}{2}(a_n-2)$ 는 성립한다

식 전개과정을 좀 더 보여주면 좋을 것 같습니다.

4-3) 4-2)에서 $a_{n+1}-2 < \frac{1}{2}(a_n-2)$ 이므로

4-1)에서 $a_{n+1}>2$이고,

$0 < a_{n+1}-2 < \frac{1}{2}(a_n-2)$

$0 < a_{n+1}-2 < \frac{1}{2^2}(a_{n-1}-2)$

$0 < a_{n+1}-2 < \frac{1}{2^3}(a_{n-2}-2)$

⋮

$0 < a_{n+1}-2 < \frac{1}{2^n}(a_1-2)$ 이다.

$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-2) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{a_1-2}{2^n}$ 이므로

샌드위치 법칙에 의하여 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-2)=0$

정리

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ 이다.

첨삭자 코드