제 2 교시

수학 영역

2018학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 가형

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$ 의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

5. 함수 $f(x)=e^x(2x+1)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① $8e$　② $7e$　③ $6e$　④ $5e$　⑤ $4e$

16. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2+k & (x \le 2) \\ \ln(x-2) & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 직선 $y=x+t$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 한 개일 때, k의 값은? [4점]

① -2 ② $-\frac{9}{4}$ ③ $-\frac{5}{2}$ ④ $-\frac{11}{4}$ ⑤ -3

20. 양수 a와 실수 b에 대하여 함수 $f(x)=ae^{3x}+be^{x}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [4점]

(가) $x_1<\ln\frac{2}{3}<x_2$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이다.

(나) 구간 $[k, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, $f(2m)=-\frac{80}{9}$이다.

① -15 ② -12 ③ -9 ④ -6 ⑤ -3

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

$$F(x)=\ln|f(x)|$$

라 하고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여

$$G(x)=\ln|g(x)\sin x|$$

라 하자.

$$\lim_{x\to 1}(x-1)F'(x)=3,\quad \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\frac{1}{4}$$

일 때, $f(3)+g(3)$의 값은? [4점]

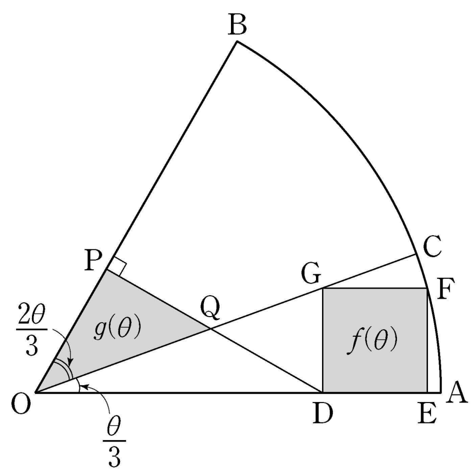
① 57 ② 55 ③ 53 ④ 51 ⑤ 49

24. $\int_{2}^{4}2e^{2x-4}dx=k$일 때, $\ln(k+1)$의 값을 구하시오. [3점]

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점을 C라 하자. 변 DE가 선분 OA 위에 있고, 꼭짓점 G, F가 각각 선분 OC, 호 AC 위에 있는 정사각형 DEFG의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. 점 D에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 P, 선분 DP와 선분 OC가 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OQP의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{f(\theta)}{\theta \times g(\theta)} = k$일 때, $60k$의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$이고, $\overline{\mathrm{OD}} < \overline{\mathrm{OE}}$이다.) [4점]



30. 실수 a와 함수 $f(x) = \ln(x^4+1) - c$ ($c > 0$인 상수)에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

라 하자. 함수 $y = g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ (m은 자연수)이다.

$a = \alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x = 1$에서 극솟값을 갖는다.
(나) $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)\,dx = k\alpha_m \int_0^1 |f(x)|\,dx$

$mk \times e^c$의 값을 구하시오. [4점]

2018학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 나형

1. $3 \times 27^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

10. 닫힌 구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 5$의 최솟값은? [3점]

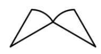
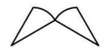
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

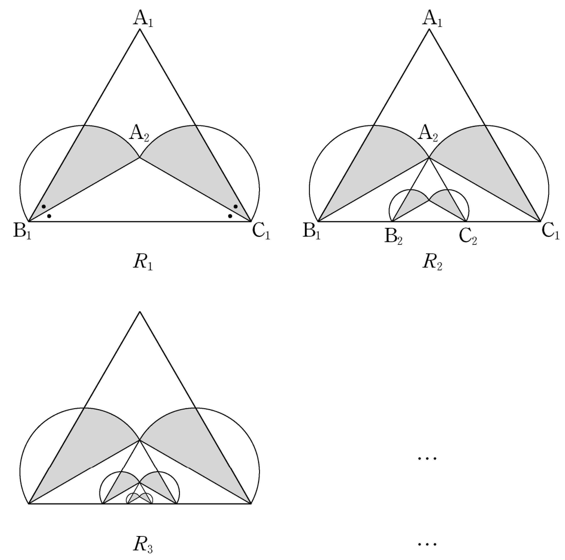
17. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치 x가

$$x=t^3-12t+k \quad (k\text{는 상수})$$

이다. 점 P의 운동 방향이 원점에서 바뀔 때, k의 값은? [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

18. 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 그림과 같이 $\angle A_1B_1C_1$의 이등분선과 $\angle A_1C_1B_1$의 이등분선이 만나는 점을 A_2라 하자. 두 선분 B_1A_2, C_1A_2를 각각 지름으로 하는 반원의 내부와 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 내부의 공통부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 A_2를 지나고 선분 A_1B_1에 평행한 직선이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 B_2, 점 A_2를 지나고 선분 A_1C_1에 평행한 직선이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 C_2라 하자. 그림 R_1에 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 정삼각형 $A_2B_2C_2$의 내부에  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



20. 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+1 \ (k>0\text{인 상수})$$

의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선 l, m의 기울기가 모두 $3k^2$이다. 곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 두 직선과 접선 l, m으로 둘러싸인 도형의 넓이가 24일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

29. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{b_n\}$은

$$b_1=a_1$$

이고, 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases} b_{n-1}+a_n & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ b_{n-1}-a_n & (n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다. $b_{10}=a_{10}$일 때, $\frac{b_8}{b_{10}}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 α가 존재한다.
> (나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하시오. [4점]

2018학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 가형

18. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(t,\ f(t))\ (t>0)$에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하고, 점 A를 지나고 점 A에서의 접선과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자. 모든 양수 t에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^{t})$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $e-2$ ② e ③ $e+2$ ④ $e+4$ ⑤ $e+6$

21. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = -1, \qquad a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-2}} \ (n \geq 2)$$

이다. 구간 $[-1,\ 2)$에서 정의된 함수 $f(x)$가
모든 자연수 n에 대하여

$$f(x) = \sin(2^n \pi x) \ \left(a_n \leq x \leq a_{n+1}\right)$$

이다. $-1 < \alpha < 0$인 실수 α에 대하여 $\int_{\alpha}^{t} f(x)\,dx = 0$을 만족시키는 $t\,(0 < t < 2)$의 값의 개수가 103일 때, $\log_2\left(1 - \cos(2\pi\alpha)\right)$의 값은? [4점]

① -48 ② -50 ③ -52 ④ -54 ⑤ -56

30. 함수 $f(x) = \ln(e^x + 1) + 2e^x$에 대하여 이차함수 $g(x)$와 실수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $h(x) = \lvert g(x) - f(x-k) \rvert$는 $x = k$에서 최솟값 $g(k)$를 갖고, 닫힌 구간 $[k-1,\ k+1]$에서 최댓값 $2e + \ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$를 갖는다.

$g'\left(k - \frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. (단, $\frac{5}{2} < e < 3$이다.) [4점]

2018학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 나형

8. 함수 $f(x)=\int_{1}^{x}(t-2)(t-3)dt$ 에 대하여 $f'(4)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

11. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n+b_n=10$을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=160$일 때, $\sum_{k=1}^{10}b_k$의 값은? [3점]

① 60 ② 70 ③ 80 ④ 90 ⑤ 100

12. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$
(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

$f(2)$의 값은? [3점]

① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

13. 두 실수 a, b가

$$ab = \log_3 5, \quad b - a = \log_2 5$$

를 만족시킬 때, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$의 값은? [3점]

① $\log_5 2$ ② $\log_3 2$ ③ $\log_3 5$ ④ $\log_2 3$ ⑤ $\log_2 5$

19. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = (a_{n+1})^2 - (a_n)^2, \qquad b_{n+1} = a_n - b_n + n$$

을 만족시킨다. $b_{20} = 14$일 때, k의 값은? [4점]

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

20. 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수를 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(x)=x^3$이면 함수 $g(t)$는 상수함수이다.

ㄴ. 삼차함수 $f(x)$에 대하여, $g(1)=2$이면 $g(t)=3$인 t가 존재한다.

ㄷ. 함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

26. 곡선 $y=6x^2-12x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

29. 두 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$$

을 만족시킨다. $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가질 때, $f'(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ x & (x>0)\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}x(2-x) & (|x-1|\le 1)\\ 0 & (|x-1|>1)\end{cases}$$

이다. 양의 실수 k, a, b $(a<b<2)$에 대하여, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=k\{f(x)-f(x-a)-f(x-b)+f(x-2)\}$$

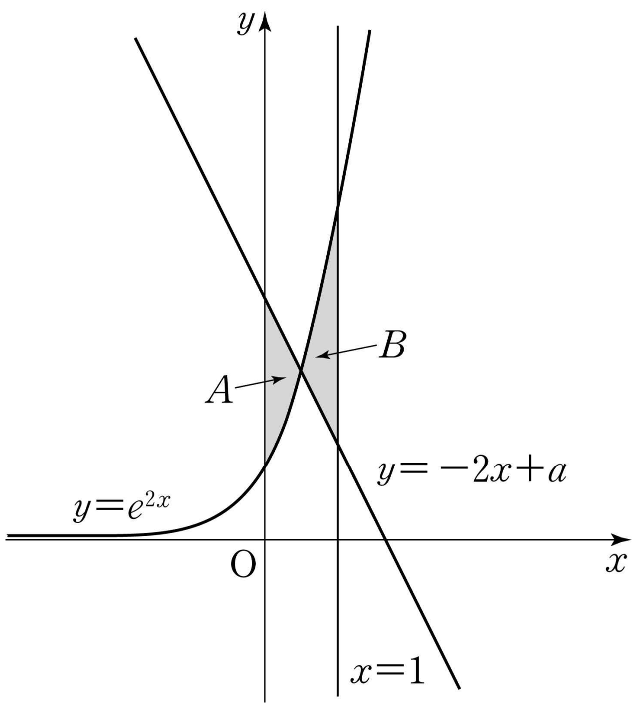
라 정의하자. 모든 실수 x에 대하여 $0\le h(x)\le g(x)$일 때, $\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx$의 값이 최소가 되게 하는 k, a, b에 대하여 $60(k+a+b)$의 값을 구하시오. [4점]

2018학년도 대학수학능력시험 가형

12. 곡선 $y=e^{2x}$과 y축 및 직선 $y=-2x+a$로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=e^{2x}$과 두 직선 $y=-2x+a$, $x=1$로 둘러싸인 영역을 B라 하자. A의 넓이와 B의 넓이가 같을 때, 상수 a의 값은? (단, $1<a<e^2$) [3점]

① $\frac{e^2+1}{2}$ ② $\frac{2e^2+1}{4}$ ③ $\frac{e^2}{2}$

④ $\frac{2e^2-1}{4}$ ⑤ $\frac{e^2-1}{2}$



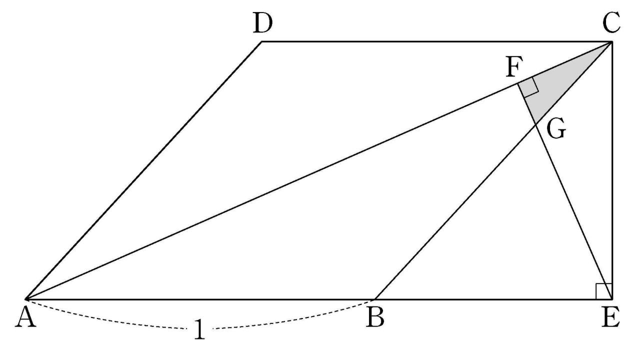
15. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}dt$$

일 때, $(f\circ f)(a)=\ln 5$를 만족시키는 실수 a의 값은? [4점]

① $\ln 11$ ② $\ln 13$ ③ $\ln 15$ ④ $\ln 17$ ⑤ $\ln 19$

17. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 마름모 ABCD가 있다. 점 C에서 선분 AB의 연장선에 내린 수선의 발을 E, 점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 F, 선분 EF와 선분 BC의 교점을 G라 하자. $\angle\mathrm{DAB}=\theta$일 때, 삼각형 CFG의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{16}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

21. 양수 t에 대하여 구간 $[1, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\ln x & (1 \le x < e)\\ -t+\ln x & (x \ge e)\end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y=g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

1 이상의 모든 실수 x에 대하여 $(x-e)\{g(x)-f(x)\} \ge 0$ 이다.

미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 a가 $h(a)=\dfrac{1}{e+2}$ 을 만족시킨다. $h'\left(\dfrac{1}{2e}\right) \times h'(a)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{(e+1)^2}$ ② $\dfrac{1}{e(e+1)}$ ③ $\dfrac{1}{e^2}$
④ $\dfrac{1}{(e-1)(e+1)}$ ⑤ $\dfrac{1}{e(e-1)}$

24. 곡선 $2x+x^2y-y^3=2$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기를 구하시오. [3점]

30. 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}1-|x-t| & (|x-t|\le 1)\\ 0 & (|x-t|>1)\end{cases}$$

이라 할 때, 어떤 홀수 k에 대하여 함수

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$

함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 극소이고 $g(\alpha)<0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, $\cdots$, α_m (m은 자연수)라 할 때, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=45$이다.

$k-\pi^2\sum_{i=1}^{m}g(\alpha_i)$의 값을 구하시오. [4점]

2018학년도 대학수학능력시험 나형

14. 등차수열 $\{a_n\}$이

$$a_5+a_{13}=3a_9,\quad \sum_{k=1}^{18}a_k=\frac{9}{2}$$

를 만족시킬 때, a_{13}의 값은? [4점]

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

16. 1보다 큰 두 실수 a, b에 대하여

$$\log_{\sqrt{3}} a = \log_9 ab$$

가 성립할 때, $\log_a b$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

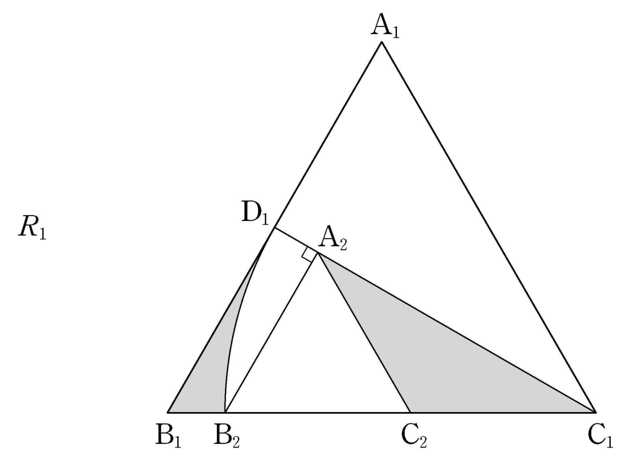
18. 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

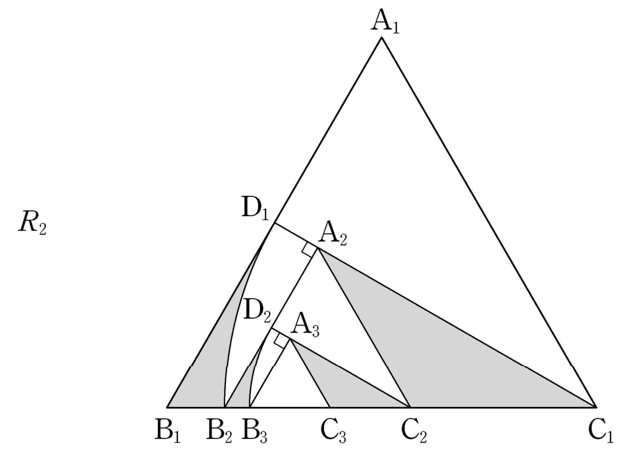
$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2} = \frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

19. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 선분 A_1B_1의 중점을 D_1이라 하고, 선분 B_1C_1 위의 $\overline{C_1D_1}=\overline{C_1B_2}$인 점 B_2에 대하여 중심이 C_1인 부채꼴 $C_1D_1B_2$를 그린다. 점 B_2에서 선분 C_1D_1에 내린 수선의 발을 A_2, 선분 C_1B_2의 중점을 C_2라 하자. 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 D_1B_2로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_1A_2C_2$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
위의 $\overline{C_2D_2}=\overline{C_2B_3}$인 점 B_3에 대하여 중심이 C_2인 부채꼴 $C_2D_2B_3$을 그린다. 점 B_3에서 선분 C_2D_2에 내린 수선의 발을 A_3, 선분 C_2B_3의 중점을 C_3이라 하자. 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 D_2B_3으로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_2A_3C_3$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]





⋮ ⋮

① $\dfrac{11\sqrt{3}-4\pi}{56}$ ② $\dfrac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$ ③ $\dfrac{15\sqrt{3}-6\pi}{56}$
④ $\dfrac{15\sqrt{3}-6\pi}{52}$ ⑤ $\dfrac{15\sqrt{3}-4\pi}{52}$

20. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(0)=0$, $f'(2)=16$
(나) 어떤 양수 k에 대하여 두 열린 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, k)$에서 $f'(x)<0$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 열린 구간 $(0, 2)$에서 한 개의 실근을 갖는다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $f(0)=0$이면, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq -\dfrac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

26. 곡선 $y=-2x^2+3x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

27. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=28,\ \sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+1)=16$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2$의 값을 구하시오. [4점]

29. 두 실수 a와 k에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le a)\\ (x-1)^2(2x+1) & (x>a)\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}0 & (x\le k)\\ 12(x-k) & (x>k)\end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge g(x)$이다.

k의 최솟값이 $\frac{q}{p}$일 때, $a+p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 이차함수 $f(x)=\dfrac{3x-x^2}{2}$에 대하여 구간 $[0,\infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0\le x<1$일 때, $g(x)=f(x)$이다. (나) $n\le x<n+1$일 때, $g(x)=\dfrac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}+x$ 이다. (단, n은 자연수이다.)

어떤 자연수 $k(k\ge 6)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases}g(x) & (0\le x<5 \text{ 또는 } x\ge k)\\ 2x-g(x) & (5\le x<k)\end{cases}$$

이다. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\int_0^n h(x)dx$라 할 때,

$\lim_{n\to\infty}(2a_n-n^2)=\dfrac{241}{768}$이다. k의 값을 구하시오. [4점]