

다항식

개념 01 다항식의 연산법칙

다항식 A, B, C 에 대하여 다음과 같은 연산법칙이 성립한다.

- ① 교환법칙 : $A + B = B + A, AB = BA$
- ② 결합법칙 : $(A + B) + C = A + (B + C), (AB)C = A(BC)$
- ③ 분배법칙 : $A(B + C) = AB + AC, (A + B)C = AC + BC$

개념 02 다항식의 덧셈과 뺄셈

- ① 괄호가 있는 경우 괄호부터 푼다.
(괄호 앞에 '-' 가 있으면 괄호 안의 각 항의 부호를 바꾼다.)
- ② 다항식을 한 문자에 대해 내림차순으로 정리한다.
- ③ 동류항끼리 모아서 간단히 한다.

개념 03 - 다항식의 곱셈

(1) 다항식의 곱셈은 분배법칙을 이용하여 다음과 같이 계산한 후, 동류항을 간단히 정리한다. 이 때, 괄호를 풀어 하나의 다항식으로 나타내는 것을 전개한다고 하고, 그 다항식을 전개식이라 한다.

(2) 곱셈 공식

- ① $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- ② $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- ③ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
- ④ $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$
- ⑤ $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
- ⑥ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- ⑦ $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3, (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
- ⑧ $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc$
- ⑨ $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
- ⑩ $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$

(3) 곱셈 공식의 변형

- ① $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = (a - b)^2 + 2ab$
- ② $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b), a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$
- ③ $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$
- ④ $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$
- ⑤ $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$
이때, $a + b + c = 0$ 또는 $a = b = c$ 이면 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

07

삼차식 $f(x)$ 와 일차식 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(-2)=0, 3-f(-1)=g(-1), g(1)=8$
- (나) $f(x)+g(x)$ 를 x^2-1 로 나눈 나머지는 $ax+5$ 이다.
- (다) $f(x)g(x)$ 를 x^2+x-2 로 나눈 나머지는 $R(x)$ 이다.

$R(-5)+a$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.)

- ① 7
- ② 8
- ③ 9
- ④ 10
- ⑤ 11

08

홀수인 모든 자연수 n 과 2이상의 자연수 m 에 대하여 다항식 $x^{n+1}(x^3-2x^2+ax+b)$ 를 $(x+2)^m$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $2^{n+2}(x+2)$ 일 때, $a-b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

세미나(3)

조립제법의 고찰

조립제법은 제수가 이차식 이상일 때도 사용할 수 있다.

예를 들어 $(ax^3 + bx^2 + cx + d) \div (x^2 + px - q)$

을 조립제법을 이용하여 구할 때 표의 왼쪽에 오는 수는 $x^2 + px - q = 0$ 에서 $x^2 = q - px$ 의 우변의 상수항과 계수들을 세로로 나열시킨 뒤 맨 아랫줄의 수들과 곱한 수는 같은 줄에 오도록 한다.

	a	b	c	d
q			aq	$-apq + bq$
$-p$		$-ap$	$ap^2 - bp$	
	a	$b - ap$	$c + aq + ap^2 - bp$	$d - apq + bq$

관련 문제

다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 4$ 가 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b 을 구하여라.

일반 풀이

주어진 다항식을 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^3 + ax^2 + bx + 4 = (x-1)^2 Q(x) \quad \text{..... ㉠}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1 + a + b + 4 = 0 \quad \therefore b = -a - 5 \quad \text{..... ㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$x^3 + ax^2 - ax - 5x + 4 = (x-1)^2 Q(x)$$

$$(x-1)\{x^2 + (a+1)x - 4\} = (x-1)^2 Q(x)$$

양변을 $x-1$ 로 나누면

$$x^2 + (a+1)x - 4 = (x-1)Q(x)$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1 + a + 1 - 4 = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad \text{..... ㉢}$$

㉢을 ㉡에 대입하면 $b = -7$

랑데뷰 풀이

	1	a	b	4
-1			-1	$-a-2$
2		2	$2a+4$	
	1	$a+2$	$2a+b+3$	$-a+2$

$$2a + b + 3 = 0, \quad -a + 2 = 0$$

$$a = 2, \quad b = -7$$

브라마굽타-피보나치 항등식

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

관련 문제 $a^2 + b^2 = 2, c^2 + d^2 = 2, ac + bd = \frac{1}{2}$ 일 때, $ad - bc$ 의 값을 구하여라. (단, $ad > bc$)

일반 풀이

먼저 $ac + bd = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하여 $a^2c^2 + b^2d^2$ 을 구한다.

$$ac + bd = \frac{1}{2} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$(ac + bd)^2 = \frac{1}{4}$$

$$a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a^2c^2 + b^2d^2 = \frac{1}{4} - 2abcd \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a^2 + b^2 = 2, c^2 + d^2 = 2 \text{ 이므로}$$

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 4$$

$$a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = 4$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$a^2d^2 + b^2c^2 + \frac{1}{4} - 2abcd = 4$$

$$(ad - bc)^2 + \frac{1}{4} = 4 \quad \therefore (ad - bc)^2 = \frac{15}{4}$$

그런데 $ad > bc$ 이므로

$$ad - bc = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

랑데뷰 풀이

브라마굽타-피보나치 항등식

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \text{ 에서}$$

$$2 \times 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (ad - bc)^2 \text{ 이므로}$$

$$(ad - bc)^2 = \frac{15}{4}$$

그런데 $ad > bc$ 이므로

$$ad - bc = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

브라마굽타-피보나치 항등식의 응용

$$\begin{aligned} (a^2 + kb^2)(c^2 + kd^2) &= (ac + kbd)^2 + k(ad - bc)^2 \\ &= (ac - kbd)^2 + k(ad + bc)^2 \end{aligned}$$

대칭식에서 $x+y$ 가 인수이면 $y+z, z+x$ 도 인수이다.

- (1) [대칭식이 어떤 형태의 항을 포함하면 반드시 이 형태와 같은 종류의 항을 포함한다.]의 대칭식의 성질을 이용하여 $x+y$ 가 인수 이면 $y+z, z+x$ 도 인수임을 직관적으로 이해할 수 있다.
- (2) x, y, z 의 대칭식 $f(x, y, z)$ 가 $x+y$ 를 인수로 가지면 $f(x, -x, z) = 0$ 을 만족한다.
 역으로 $f(x, -x, z) = 0$ 을 만족하면 $f(x, y, z)$ 은 $x+y$ 를 인수로 갖는다. 대칭식의 정의에 의해
 $f(x, -x, z) = 0 \rightarrow f(z, -x, x) = 0 \rightarrow f(z, x, -x) = 0$ 에서 z 을 x 로, x 을 y 로 바꾸면
 $f(x, y, -y) = 0$ 이고 이것은 $f(x, y, z)$ 가 $y+z$ 를 인수로 갖는 것을 의미한다.
 또한 $f(x, -x, z) = 0 \rightarrow f(-x, x, z) = 0 \rightarrow f(-x, z, x) = 0$ 에서 z 을 y 로, x 을 z 로 바꾸면
 $f(-z, y, z) = 0$ 이고 이것은 $f(x, y, z)$ 가 $z+x$ 를 인수로 갖는 것을 의미한다.
 따라서 $x+y$ 가 인수 이면 $y+z, z+x$ 도 인수이다.

① $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ 을 인수분해 하여라.

풀이 $f(x, y, z) = (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ 라 두면 $f(x, y, z)$ 는 3차 대칭식이고
 $f(x, -x, z) = (x-x+z)^3 - x^3 - (-x)^3 - z^3 = z^3 - z^3 = 0$ 이므로 $f(x, y, z)$ 는 $x+y$ 를 인수로 갖는다.
 따라서 대칭식의 성질에 의해 $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = A(x+y)(y+z)(z+x)$ 이고 $x=1, y=1, z=1$ 을 대입하면
 $24 = 8A$ 에서 $A=3$
 $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x)$

② $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc$ 을 인수분해 하여라.

풀이 $f(a, b, c) = a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc$ 라 두면 $f(a, b, c)$ 는 3차 대칭식이고
 $f(a, -a, c) = a^2(-a+c) + a^2(c+a) + c^2(a-a) + 2a(-a)c = -a^3 + a^2c + a^2c + a^3 - 2a^2c = 0$
 이므로 $f(a, b, c)$ 는 $a+b$ 를 인수로 갖는다. 따라서 대칭식의 성질에 의해
 $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc = A(a+b)(b+c)(c+a)$ 에
 $a=b=c=1$ 을 대입하면 $2+2+2+2 = 8A$ 이므로 $A=1$
 $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc = (a+b)(b+c)(c+a)$

③ $(a+b)(b+c)(c+a) + abc$ 을 인수분해 하여라.

풀이 $f(a, b, c) = (a+b)(b+c)(c+a) + abc$ 라 두면 $f(a, b, c)$ 는 3차 대칭식이고
 $f(a, -a, c) = -a^2c \neq 0$ 이므로 대칭식이지만 $a+b$ 를 인수로 갖지 않는다. 따라서 $A(a+b)(b+c)(c+a)$ 꼴로는 인수분해
 되지 않는다. 대칭식이므로 기본 대칭식으로 표현해 보면
 $(a+b)(b+c)(c+a) + abc = A(a+b+c)^3 + B(a+b+c)(ab+bc+ca) + Cabc$ 이고 계수 비교하면 $A=0$
 $(a+b)(b+c)(c+a) + abc = B(a+b+c)(ab+bc+ca) + Cabc$ 에 $a=1, b=-1, c=1$ 을 대입하면
 $-1 = -B - C$ 이고 $a=1, b=1, c=-2$ 을 대입하면 $0 = -2C$ 따라서 $B=1, C=0$
 $(a+b)(b+c)(c+a) + abc = (a+b+c)(ab+bc+ca)$



심화유형 1-1

31

3이하의 자연수 n 에 대하여 A_n 을 다음과 같이 정의한다.

- (가) $A_1 = 9 + 99 + 999$
- (나) $A_n =$ (세 수 9, 99, 999에서 서로 다른 $n(n \geq 2)$ 개를 택하여 곱한 수의 총합)

이때, $A_1 + A_2 + A_3 - 3$ 의 값을 100으로 나눈 나머지를 구하시오.

32

3이하의 자연수 n 에 대하여 A_n 을 다음과 같이 정의한다.

- (가) $A_1 = 5 + 55 + 555$
- (나) $A_n =$ (세 수 5, 55, 555에서 서로 다른 $n(n \geq 2)$ 개를 택하여 곱한 수의 총합)

이때, $\frac{A_1 A_2 - A_3}{1000}$ 의 값의 일의 자리 수를 구하시오.

33

4이하의 자연수 n 에 대하여 A_n 을 다음과 같이 정의한다.

- (가) $A_1 = 3 + 55 + 777 + 9999$
- (나) $A_n =$ (네 수 3, 55, 777, 9999에서 서로 다른 $n(n \geq 2)$ 개를 택하여 곱한 수의 총합)

이때, $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ 의 값을 10000으로 나눈 나머지의 일의 자리 수를 구하시오.

95

이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0) = 0$
 (나) $f(x) \leq f(6)$

실수 p 에 대하여 $p+2 \leq x \leq p+4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 $m(p)$ 라 할 때, 함수 $m(p)$ 의 최댓값이 7이면 $f(10)$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 4
 ④ 8 ⑤ 16

96

이차항의 계수가 1인 두 이차함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 점 $(t, 4)$ 에서 서로 만난다. 두 이차함수에 대하여 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x < t) \\ g(x) & (x \geq t) \end{cases}$$

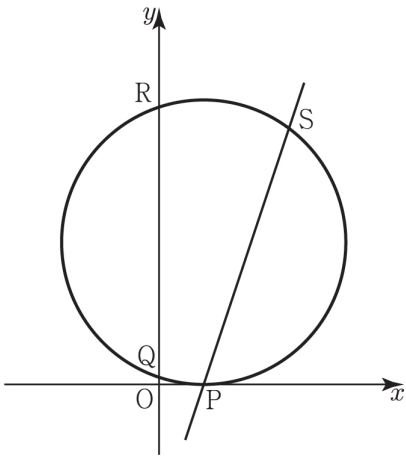
이라 하자. 임의의 실수 k 에 대하여 x 의 범위 $k \leq x \leq k+2$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최솟값을 $m(k)$ 라고 할 때, $m(k)$ 는 아래와 같다.

$$m(k) = \begin{cases} f(k-2) & (k < -2) \\ f(0) & (-2 \leq k < 1 - \sqrt{3}) \\ g(k+2) & (1 - \sqrt{3} \leq k < 1) \\ g(3) & (1 \leq k < 3) \\ g(k) & (3 \leq k) \end{cases}$$

직선 $y = ax + b$ 가 두 이차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프와 동시에 접할 때, $a + 4b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b, t 는 상수)

251

그림과 같이 중심이 제1사분면 위에 있고 x 축과 점 P에서 접하며 y 축과 두 점 Q, R에서 만나는 원이 있다. 점 P를 지나고 기울기가 3인 직선이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 S라 할 때, $\overline{QR} = \overline{PS} = 6$ 를 만족시킨다. 원 위의 점 S를 지나는 접선의 방정식의 x 절편은?

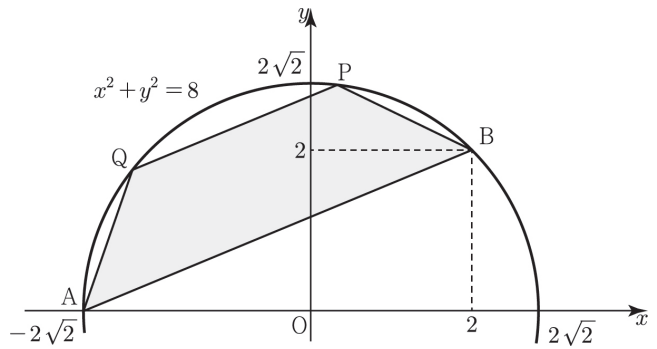


- ① $1 + \sqrt{10}$ ② $2 + \sqrt{10}$ ③ $1 + 3\sqrt{10}$
- ④ $2 + 2\sqrt{10}$ ⑤ $2 + 3\sqrt{5}$

252

그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 8$ 위의 두 점 $A(-2\sqrt{2}, 0)$, $B(2, 2)$ 과 호 AB 위의 서로 다른 두 점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 에 대하여 사각형 ABPQ의 넓이의 최댓값은?

(단, $-2\sqrt{2} < c < a < 2$, $b > 0$, $d > 0$)



- ① $4\sqrt{2}$ ② $12 - 4\sqrt{2}$ ③ $8\sqrt{2} - 4$
- ④ $20 - 8\sqrt{2}$ ⑤ $16\sqrt{2} - 8$

Sarrus법칙 (사선공식)

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

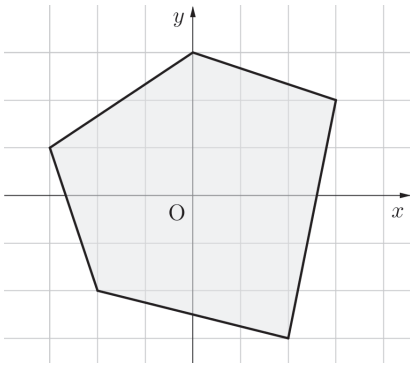
→ 세 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 에서 세 꼭짓점의 좌표를 세로로 차례로 쓴다. 단, 처음 쓴 좌표는 마지막에 다시 한 번 더 써야 한다. 그런 다음, 사선 방향으로 11시에서 5시 방향 선끼리, 1시에서 7시 방향 선끼리 각각 곱해서 더한다.

5시 방향으로 곱해서 더한 것은 $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1$, **7시 방향으로 곱해서 더한 것은** $x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3$

이 결과끼리 서로 뺀 것의 절댓값의 반 ($\frac{1}{2} |(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)|$) 이 삼각형의 넓이다. **이**

법칙은 삼각형뿐만 아니라 모든 다각형에도 똑같이 적용된다. (변 따라 움직이기!!)

관련 문제 꼭짓점이 $(0, 3), (3, 2), (2, -3), (-2, -2), (-3, 1)$ 인 오각형의 넓이를 구하여라.



랑데뷰 풀이

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} | (0-9-4-2-9) - (9+4+6+6+0) | \\ &= \frac{1}{2} |-24-25| = \frac{49}{2} \end{aligned}$$

설명 점 A와 직선 BC사이 거리 d 라 하면

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times d \text{에서}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \text{이고}$$

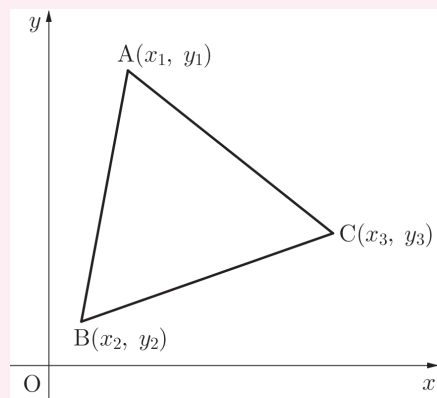
$$\text{직선 BC의 방정식 } y - y_3 = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}(x - x_3)$$

$$\rightarrow (y_2 - y_3)x - (x_2 - x_3)y + (x_2 - x_3)y_3 - (y_2 - y_3)x_3 = 0$$

$$d = \frac{|(y_2 - y_3)x_1 - (x_2 - x_3)y_1 + (x_2 - x_3)y_3 - (y_2 - y_3)x_3|}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} \text{이므로}$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times d$$

$$= \frac{1}{2} |(y_2 - y_3)x_1 - (x_2 - x_3)y_1 + (x_2 - x_3)y_3 - (y_2 - y_3)x_3| =$$



$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

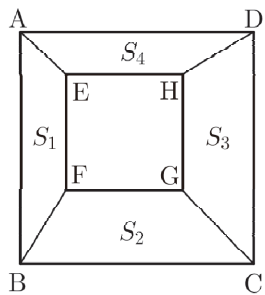
심화유형 3-3

275

다음 그림은 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD의 내부에 한 변의 길이가 2인 정사각형 EFGH를 두 선분 AB와 EF가 평행하도록 그린 것이다. 네 사다리꼴 ABFE, BCGF, CDHG, DAEH의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4 라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $\overline{AE}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{DH}^2$
 ㄴ. $\overline{AE} = \overline{BF}$ 이면 $\overline{CG} = \overline{DH}$ 이다.
 ㄷ. $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$



- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

276

다음은 량량이네 가족의 대화이다. 읽고 물음에 답하여라.

화랑 : 누나, 삼각형 무게중심은 구할 수 있는데 사각형 무게중심은 어떻게 구하는지 알아?
 사랑 : 음... 사각형의 한 대각선을 그으면 두 삼각형으로 나뉘잖아. 그 두 삼각형의 각각의 무게중심을 구한 뒤 그 무게중심들을 지나는 직선과 같은 방법으로 나머지 다른 대각선을 그어 생긴 두 삼각형의 무게중심들을 지나는 직선의 교점이 사각형의 무게중심이야.
 화랑 : 음... 복잡한데... 다른 방법은 없어?
 아빠 : □ABCD에서 누나 말처럼 대각선 AC를 그은 뒤 나오는 두 삼각형의 무게중심과 각각의 넓이를 구해서 구해도 되. 예를 들어 △ABC의 무게중심이 G_1 넓이가 n , △ACD의 무게중심이 G_2 넓이가 m 일 때, □ABCD의 무게중심 G 는 G_1 과 G_2 를 $m:n$ 으로 내분하는 점이야.

$A(-3, 0), B(6, 0), C(3, 9), D(0, 12)$ 으로 주어지는 사각형 ABCD의 무게중심의 좌표 (a, b) 를 구할 때, $7(a+b)$ 의 값을 구하시오.

277

정사각형 OABC의 한 변 AB가 직선 $kx + (1-k)y - 1 = 0$ 위에 있고, 이 변이 직선 $y = x$ 에 의해 이등분될 때, 가능한 모든 상수 k 의 값의 곱을 구하시오. (단, 0는 원점이다.)

01 정답 ④

문항 선별 : 천동T

[출제자 : 민지애T]

ㄱ. (거짓)

$(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5)$ 가 3개 곱해진 모형이므로
최저차가 3이고 최고차가 15인 다항식인 모형, 즉

$$a_3x^3 + a_4x^4 + \dots + a_{15}x^{15} \text{ 꼴이므로}$$

항의 개수는 13개이다.

ㄴ. (참)

$$f(x) = (x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5)^3 \text{ 라 하면}$$

상수항을 포함한 모든 항의 계수는 $f(1)$ 이므로

$$f(1) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^3 = 15^3 \text{ 이다.}$$

ㄷ. (참)

x^{10} 의 계수는

$$x \times 4x^4 \times 5x^5 = 20x^{10} \text{ 이고 이 모양은 6개이므로}$$

$$\Rightarrow 20 \times 6 = 120$$

$$2x^2 \times 3x^3 \times 5x^5 = 30x^{10} \text{ 이고 이 모양은 6개이므로}$$

$$\Rightarrow 30 \times 6 = 180$$

$$2x^2 \times 4x^4 \times 4x^4 = 32x^{10} \text{ 이고 이 모양은 3개이므로}$$

$$\Rightarrow 32 \times 3 = 96$$

$$3x^3 \times 3x^3 \times 4x^4 = 36x^{10} \text{ 이고 이 모양은 3개이므로}$$

$$\Rightarrow 36 \times 3 = 108$$

$$\therefore 120 + 180 + 96 + 108 = 504$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ 이다.

02 정답 ②

문항 선별 : 천동T

[출제자 : 민지애T]

$$x^2 + ax - y^2 + by - \frac{1}{4}p = 0 \text{ 이라 하면}$$

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4y^2 - 4by + p}}{2} \text{ 에서 두 일차식으로}$$

인수분해 되려면

$$a^2 + 4y^2 - 4by + p \text{ 가 완전제곱이어야 하므로}$$

$$\frac{D}{4} = 4b^2 - 4(a^2 + p) = 0 \text{ 즉, } b^2 - a^2 = p$$

이때, $p = (b+a)(b-a)$ 꼴이고

p 가 소수이므로 $b+a$, $b-a$ 중 작은 수인 $b-a=1$ 이다.

$b+a$ 의 값에 의해 p 가 결정되고, p 가 소수이며 가장

작은 수는 $b+a=3$ 일 때이다.

따라서 $b=2$, $a=1$ (b 가 소수)

$\therefore p$ 의 최솟값은 3이다.

03 정답 ③

문항 선별 : 천동T

[출제자 : 민지애T]

$$\sqrt{483} = a, \sqrt{42} = b \text{ 라 하면}$$

$$483\sqrt{483} = a^3, 42\sqrt{42} = b^3$$

$$(a^3 + b^3)(a^3 - b^3) = a^6 - b^6 = 483^3 - 42^3 \text{ 이고 여기서}$$

$$483 = 21 \times 23, 42 = 21 \times 2$$

$$21^3 \times 23^3 - 21^3 \times 2^3 = 21^3 \times (23^3 - 2^3)$$

$$= 21^3 \times (23 - 2)(23^2 + 23 \times 2 + 2^2)$$

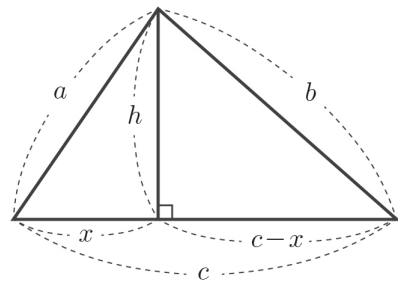
$$= 21^4 \times m \text{ 에서}$$

$$\therefore m = 23^2 + 23 \times 2 + 2^2 = 579$$

04 정답 ②

문항 선별 : 천동T

[출제자 : 민지애T]



$$h^2 = a^2 - x^2 = b^2 - (c-x)^2$$

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } h^2 &= a^2 - x^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right)^2 \\ &= \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{4c^2} \end{aligned}$$

또

$$a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \text{ 이므로}$$

$$24 = 64 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 20 \text{ 이다.}$$

$$\therefore S^2 = \left(\frac{1}{2}ch\right)^2$$

15 정답 ③

[출제자 : 오세준T]

조건 (가)에서

$$f(x) = \{g(x) - x^3 + 2x^2\}(x^2 + 3) + g(x) - kx^2$$

$$f(x) - g(x) = \{g(x) - x^3 + 2x^2\}(x^2 + 3) - kx^2 \dots \dots \textcircled{㉠}$$

조건 (나)에 의해

㉠에 $x = -1$ 을 대입하면

$$f(-1) - g(-1) = \{g(-1) + 3\} \times 4 - k = -k$$

이므로 $g(-1) = -3$

㉠에 $x = 3$ 를 대입하면

$$f(3) - g(3) = \{g(3) - 9\} \times 12 - 9k = -9k$$

이므로 $g(3) = 9$

조건 (다)에 의해

$g(x)$ 는 $(-1, -3), (3, 9)$ 을 지나는 일차식이다.

따라서 $g(x) = 3x$

㉠에 대입하여 정리하면

$$f(x) = (-x^3 + 2x^2 + 3x)(x^2 + 3) - kx^2 + 3x$$

$f(2) = -12$ 이므로 대입하면

$$f(2) = 6 \times 7 - 4k + 6 = -12$$

$\therefore k = 15$

16 정답 ②

[출제자 : 최성훈T]

조건 (가)에서

$$\{f(x)\}^3 - \{g(x)\}^3$$

$$= \{f(x) - g(x)\} \{f(x)^2 + f(x)g(x) + g(x)^2\}$$

$f(x) - g(x)$ 는 일차식이므로 $(x+1)^2$ 을 인수로 갖기 위해서는

$f(x)^2 + f(x)g(x) + g(x)^2$ 는 $(x+1)$ 를 인수로 가져야 한다.

따라서

$$f(-1)^2 + f(-1)g(-1) + g(-1)^2 = 0 \text{ 이고,}$$

$f(-1)$ 과 $g(-1)$ 의 값은 실수이므로

$$f(-1) = 0, g(-1) = 0 \text{ 이다.}$$

따라서

$$f(x) = (x+1)(x-\alpha), g(x) = (x+1)(x-\beta)$$

(단, $\alpha \neq \beta$) ㉠

조건 (나)에서

$$\{f(x)\}^3 + \{g(x)\}^3$$

$$= \{f(x) + g(x)\} \{f(x)^2 - f(x)g(x) + g(x)^2\}$$

$f(x)^2 - f(x)g(x) + g(x)^2$ 이 $(x+3)$ 로 나누어 떨어지면,
 $f(-3)^2 - f(-3)g(-3) + g(-3)^2 = 0$ 이므로 $f(-3) = 0$,
 $g(-3) = 0$ 이다. 즉 $\alpha = \beta$ 이므로 모순이다.
 따라서 $f(-3) + g(-3) = 0$ 이고 ㉠에 대입하여 정리하면
 $\alpha + \beta = -6$ ㉡

조건 (다)에서

$$f(-2)g(-4) = -3,$$

$$-(-2-\alpha) \times (-3) \times (-4-\beta) = -3 \text{ 즉}$$

$$(\alpha+2)(\beta+4) = -1 \text{ 이고 } \beta = -\alpha - 6 \text{ 을 대입하면}$$

$$(\alpha+2)(-\alpha-2) = -1 \text{ 이고 정리하면 } (\alpha+2)^2 = 1$$

따라서 $\alpha = -1$ 또는 $\alpha = -3$ 이다.

$\alpha = -3$ 이면 ㉡에서 $\beta = -3$ 이 되어 $\alpha = \beta$ 이므로 모순이다.

따라서 $\alpha = -1, \beta = -5$

$$f(x) = (x+1)^2, g(x) = (x+1)(x+5)$$

$$\text{따라서 } f(0) - g(0) = 1 - 5 = -4$$

량데뷰링

실수 x, y 에 대해서 방정식 $x^2 + xy + y^2 = 0$,

$$\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0 \text{ 이므로}$$

$$x + \frac{y}{2} = 0 \text{ 이고, } \frac{3}{4}y^2 = 0 \text{ 이어야 하므로 방정식의}$$

근은 $x = y = 0$ 이다.

같은 방법으로 $x^2 - xy + y^2 = 0$ 의 실수인 근도

$x = y = 0$ 이다.

17 정답 ④

[출제자 : 오세준T]

$$\omega^3 = 1 \text{ 에서 } \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

주어진 식에 $x = \omega$ 를 대입하면

$$(1 + \omega)^{50}$$

$$= a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \dots + a_{49}\omega^{49} + a_{50}\omega^{50}$$

$$= (a_0 + a_3 + \dots + a_{48}) + (a_1 + a_4 + \dots + a_{49})\omega$$

$$+ (a_2 + a_5 + \dots + a_{50})\omega^2$$

$$(1 + \omega)^{50} = (-\omega^2)^{50} = \omega^{100} = \omega \text{ 이므로}$$

$$\omega = (a_0 + a_3 + \dots + a_{48}) + (a_1 + a_4 + \dots + a_{49})\omega$$

$$+ (a_2 + a_5 + \dots + a_{50})\omega^2 \dots \dots \textcircled{㉠}$$

㉔에 의하여 $f(-2) = 4a - 2b + 8 = 4$ 이므로

$$b = 2a + 2$$

$$\therefore f(x) = ax^2 + (2a+2)x + 8$$

$$f(x^2+2x) = a(x^2+2x)^2 + (2a+2)(x^2+2x) + 8$$

$$= ax^4 + 4ax^3 + (6a+2)x^2 + (4a+4)x + 8 \quad \dots \dots \textcircled{㉔}$$

$$x^2f(x) + 8x + 8 = ax^4 + (2a+2)x^3 + 8x^2 + 8x + 8$$

$$\dots \dots \textcircled{㉕}$$

㉔=㉕이므로

$$ax^4 + 4ax^3 + (6a+2)x^2 + (4a+4)x + 8$$

$$= ax^4 + (2a+2)x^3 + 8x^2 + 8x + 8 \text{에서}$$

$$4a = 2a + 2, \quad 6a + 2 = 8, \quad 4a + 4 = 8$$

$$\therefore a = 1$$

따라서 $f(x) = x^2 + 4x + 8$ 이므로

$$f(1) = 1 + 4 + 8 = 13$$

38 정답 2

등식 $f(x^2-x) = x^2f(x) + 2x - 1$ 에서

양변에 $x=0$ 를 대입하면

$$f(0) = -1 \quad \dots \dots \textcircled{㉑}$$

양변에 $x=1$ 를 대입하면

$$f(0) = f(1) + 2 - 1, \quad -1 = f(1) + 1 \quad (\because \textcircled{㉑})$$

$$\therefore f(1) = -2 \quad \dots \dots \textcircled{㉒}$$

이때, 다항식 $f(x)$ 의 차수를 n 차라 하면 $f(x^2-x)$

의 차수는 $2n$ 차, $x^2f(x) + 2x - 1$ 의 차수는 $n+2$ 차

$$\therefore 2n = n + 2 \quad \therefore n = 2$$

즉, $f(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하면

$$\textcircled{㉑} \text{에 의하여 } f(0) = c = -1 \text{이므로 } c = -1$$

$$\textcircled{㉒} \text{에 의하여 } f(1) = a + b - 1 = -2 \text{이므로}$$

$$b = -a - 1$$

$$\therefore f(x) = ax^2 - (a+1)x - 1$$

$$f(x^2-x) = a(x^2-x)^2 - (a+1)(x^2-x) - 1$$

$$= ax^4 - 2ax^3 - x^2 + (a+1)x - 1 \quad \dots \dots \textcircled{㉓}$$

$$x^2f(x) + 2x - 1 = ax^4 - (a+1)x^3 - x^2 + 2x - 1 \quad \dots \dots \textcircled{㉔}$$

㉓=㉔이므로

$$\therefore a = 1$$

따라서 $f(x) = x^2 - 2x - 1$ 이므로

$$\therefore f(-1) = 2$$

39 정답 396

$$f(x+1) - f(x) = f(x) - f(x-1) + 4 \text{에서}$$

$$g(x) = f(x) - f(x-1) \text{라 두면}$$

$$g(x+1) = g(x) + 4 \text{에서}$$

$x=1, 2, 3, \dots, x-1$ 을 대입하면

$$g(2) = g(1) + 4$$

$$g(3) = g(2) + 4$$

$$g(4) = g(3) + 4$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$g(x) = g(x-1) + 4$ 변끼리 더하면

$$\therefore g(x) = g(1) + 4(x-1) \text{에서}$$

$$g(1) = f(1) - f(0) = 0 \text{이다.}$$

$$\therefore f(x) - f(x-1) = 4x - 4$$

$$f(100) - f(99) = 4 \times 100 - 4 = 396$$

40 정답 -6

다항식 $x^{n+2} + px^{n+1} + qx^n$ 을 $(x-2)^2$ 으로 나눈

몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $2^n(x-2)$ 이므로

$$x^{n+2} + px^{n+1} + qx^n = (x-2)^2 Q(x) + 2^n(x-2)$$

$$x^n(x^2 + px + q) = (x-2)\{(x-2)Q(x) + 2^n\} \quad \dots \dots \textcircled{㉑}$$

㉑의 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $2^n(4+2p+q) = 0$

$$2^n \neq 0 \text{이므로 } 4 + 2p + q = 0$$

$$\therefore q = -2p - 4 \quad \dots \dots \textcircled{㉒}$$

㉒을 ㉑에 대입하면

$$x^n\{x^2 + px + (-2p-4)\} = (x-2)\{(x-2)Q(x) + 2^n\}$$

$$x^n(x-2)(x+p+2) = (x-2)\{(x-2)Q(x) + 2^n\}$$

$x \neq 2$ 일 때도 등식이 성립해야 하므로

$$x^n(x+p+2) = (x-2)Q(x) + 2^n \quad \dots \dots \textcircled{㉓}$$

㉓의 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $2^n(2+p+2) = 2^n$

$2^n \neq 0$ 이므로 위의 등식의 양변을 2^n 으로 나누면

$$4+p=1 \text{에서 } p=-3 \quad \therefore q=2 \quad (\because \textcircled{㉒})$$

$$\therefore pq = (-3) \times 2 = -6$$

랑데뷰팁

$x^n(x^2 + px + q) = (x-2)^2 Q(x) + 2^n(x-2)$ 는

x 에 대한 항등식이므로 $n=0$ 을 대입하면

$$x^2 + px + q = (x-2)^2 Q(x) + (x-2) \text{에서 } Q(x) = 1$$

이므로

95 정답 ③

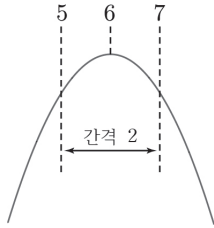
문항 선별 : 천동T

[출제자 : 안형진T]

(가), (나)에 의해

$f(x) = -a(x-6)^2 + 36a$ ($a > 0$)으로 나타낼 수 있다.

먼저 $p+2 \leq x \leq p+4$ 에서 최댓값을 구해보자.



① $p+4 < 7$ 즉, $p < 3$ 이면 $x = p+2$ 일 때 최소이므로

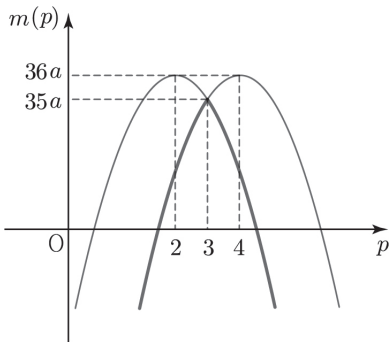
최솟값 $= -a(p-4)^2 + 36a$

② $p+4 \geq 7$ 즉, $p \geq 3$ 이면 $x = p+4$ 일 때 최소이므로

최솟값 $= -a(p-2)^2 + 36a$

따라서 $m(p) = \begin{cases} -a(p-4)^2 + 36a & (p < 3) \\ -a(p-2)^2 + 36a & (p \geq 3) \end{cases}$ 이고

그래프를 그려보면 다음 그림과 같다.



$m(p)$ 의 최댓값은 $35a$ 이고 이 값이 7이므로

$a = \frac{1}{5}$ 이다.

따라서 $f(x) = -\frac{1}{5}(x-6)^2 + \frac{36}{5}$

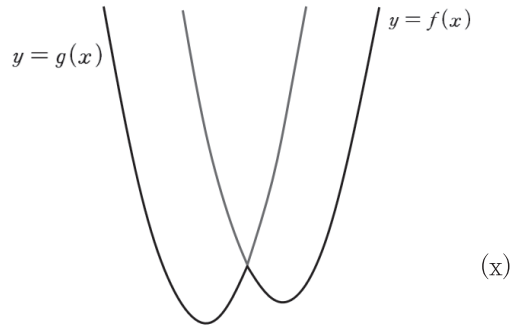
$\therefore f(10) = -\frac{16}{5} + \frac{36}{5} = \frac{20}{5} = 4$

96 정답 10

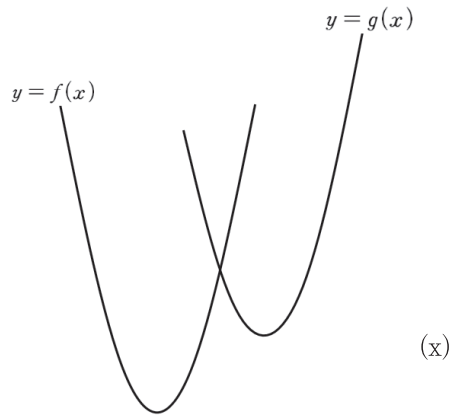
문항 선별 : 천동T

[출제자 : 안형진T]

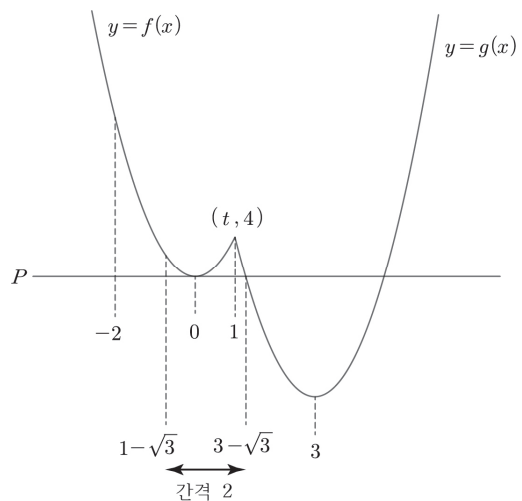
i) $m(k)$ 가 $h(x)$ 의 최솟값으로 정의된 함수이다.



$m(k)$ 의 구간별 함수값 모형과 맞지 않으므로 $f(x)$ 가 왼쪽, $g(x)$ 가 오른쪽에 위치해야 함을 알 수 있다.

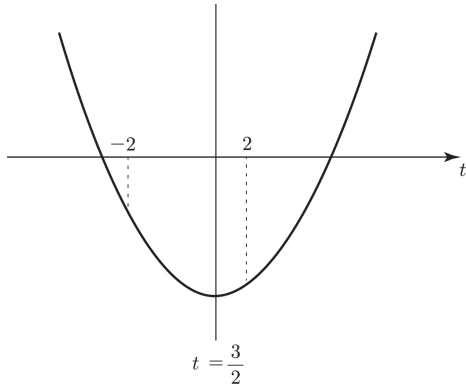


$m(k)$ 식 아래 셋째 줄에서 k 값이 커질수록 g 의 함수값으로 최솟값이 정의되므로 g 가 f 보다 더 낮게 그려져야 함을 알 수 있다.



간격 2를 고려하면서 $h(x)$ 의 개형을 추정해보면 위 그림과 같다.

ii) $f(0)$ 을 P 라하면 $f(x) = x^2 + P$,



①식에서 $x^2 - tx + 1 = 0$ 의 $D > 0$ 에서 $t < -2$ or $t > 2$ 이다. 이때 t 의 값 두 개가 모두 2보다 크거나 -2보다 작으면 ②식에서 두 근의 합=3에 위배되므로 t 값 중 하나는 2보다 크고, 나머지 하나는 -2보다 작아야 한다.

$f(t) = t^2 - 3t + a - 2$ 라 하면 위 그림과 같으므로 $f(-2) < 0, f(2) < 0$ 이다.
 $f(-2) < 0 \rightarrow a < -8$
 $f(2) < 0 \rightarrow a < 4$
 $\therefore a < -8$
 따라서 $m = -9$ 이고 $m^2 = 81$

101 정답 243

문항 선별 : 천동T

[출제자 : 이호진T]

$x + y + z = 3, xy + yz + zx = -1, xyz = -3$ 에서
 $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$
 $= 9 - (-2) = 11$

x, y, z 를 세 근으로 하는 3차 방정식은

$$t^3 - 3t^2 - t + 3 = 0$$

나머지 정리에 의하여

$$t^5 = (t^3 - 3t^2 - t + 3)(t^2 + 3t + 10) + 30t^2 + t - 30 \text{ 이므로}$$

$$\therefore x^5 + y^5 + z^5 = 30(x^2 + y^2 + z^2) + (x + y + z) - 30 \times 3$$

$$= 30 \times 11 + 1 \times 3 - 30 \times 3$$

$$= 243$$

랑데뷰립

(교과과정 외)

$A_n = x^n + y^n + z^n$ 이라 하면

(풀이1) 과정처럼 x, y, z 를 세 근으로 하는 방정식은 $t^3 - 3t^2 - t + 3 = 0$ 이다.

이때, $t^3 = 3t^2 + t - 3$ 이므로

$\Rightarrow A_{n+3} = 3A_{n+2} + A_{n+1} - 3A_n$ 의 점화 관계로 표현한다.

$A_0 = 3$	$(x^0 + y^0 + z^0 = 3)$
$A_1 = 3$	$(x + y + z = 3)$
$A_2 = 11$	$(x^2 + y^2 + z^2 = 11)$
$A_3 = 27$	
$A_4 = 83$	
$A_5 = 243$	

102 정답 ④

문항 선별 : 천동T

[출제자 : 이호진T]

$x^2 = X$ 라고 하면

$$X^2 - (2a + 1)X + (a - 1)(a + 2) = 0$$

$X = a - 1$ 또는 $a + 2$

$x^2 = a - 1$ 또는 $a + 2$ 에서

$$a < -2 \text{ 일 때 } f(a) = 0$$

$$a = -2 \text{ 일 때 } f(a) = 1$$

$$-2 < a < 1 \text{ 일 때 } f(a) = 2$$

$$a = 1 \text{ 일 때 } f(a) = 3$$

$$a > 1 \text{ 일 때 } f(a) = 4$$

$\therefore f(-\sqrt{3}) + f(-1) + f(\sqrt{2}) + f(5) = 2 + 2 + 4 + 4 = 12$ 이다.

103 정답 ③

문항 선별 : 천동T

[출제자 : 이호진T]

$x^2 = t$ 라고 하면

$$t^2 + (2a + 1)t + (a + 3)(a - 2) = 0 \dots \textcircled{1}$$

풀에서 x 가 실근과 허근을 가지려면 t 는 음수근과 0 이상의 근을 가진다.

①을 인수분해하면

$$(t + a + 3)(t + a - 2) = 0 \text{ 에서}$$

$(-a - 3) < (-a + 2)$ 이므로 $t = -a - 3$ 은 음수인

$$a(3+2\sqrt{2})+b(\sqrt{2}+2)+c=0$$

$$(3a+2b+c)+(2a+b)\sqrt{2}=0$$

a, b, c 가 유리수 이므로
 $3a+2b+c=0, 2a+b=0$ 이 성립한다.

$$b=-2a, c=a$$

따라서

$$ax^2 + \sqrt{2}bx + c$$

$$= a(x^2 - 2\sqrt{2}x + 1) = 0$$

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \text{에서}$$

두 근을 $\alpha = 1 + \sqrt{2}, \beta$ 라 하면

$$\alpha + \beta = 2\sqrt{2}$$

$$(1 + \sqrt{2}) + \beta = 2\sqrt{2}$$

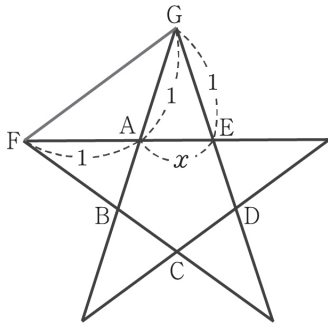
$$\text{따라서 } \beta = \sqrt{2} - 1$$

그러므로 다른 한 근은 $\sqrt{2} - 1$ 이다.

113 정답 $-3\sqrt{5}$

[출제자 : 이정배T]

다음 그림과 같이 직선 AB와 ED의 교점을 G라 하고 선분 FG를 그으면



$\triangle FEG \sim \triangle GEA$ 이고 $\overline{GE} = 1$ 이다.

이때, $\overline{FE} : \overline{EG} = \overline{GE} : \overline{EA}$ 이므로

$$1 + x : 1 = 1 : x$$

$$\therefore x^2 + x - 1 = 0$$

양변을 x 로 나누어 정리하면 $x - \frac{1}{x} = -1$

$$x^4 - \frac{1}{x^4} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \text{에서}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4 = 5 \text{이므로}$$

$$x + \frac{1}{x} = \sqrt{5} \quad (\because x > 0) \text{이고}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 3 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } x^4 - \frac{1}{x^4} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -1 \times \sqrt{5} \times 3$$

$$= -3\sqrt{5}$$

114 정답 -2

[출제자 : 최성훈T]

(i) $\frac{z}{1+z^2}$ 이 실수이므로

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$

$$\text{즉 } z(1+\bar{z}^2) = \bar{z}(1+z^2)$$

$$z + z\bar{z}^2 - \bar{z} - \bar{z}z^2 = 0$$

$$(z - \bar{z}) - \bar{z}z(z - \bar{z}) = 0$$

$$(z - \bar{z})(1 - z\bar{z}) = 0$$

$$z \neq \bar{z} \text{이므로 } z\bar{z} = 1$$

(ii) $\frac{z^2}{1+z}$ 이 실수이므로

$$\frac{z^2}{1+z} = \overline{\left(\frac{z^2}{1+z}\right)} = \frac{\bar{z}^2}{1+\bar{z}}$$

$$\text{즉 } z^2(1+\bar{z}) = \bar{z}^2(1+z)$$

$$z^2 + z^2\bar{z} - \bar{z}^2 - z\bar{z}^2 = 0$$

$$(z^2 - \bar{z}^2) + z\bar{z}(z - \bar{z}) = 0$$

$$(z - \bar{z})(z + \bar{z} + z\bar{z}) = 0$$

$$z \neq \bar{z} \text{이므로 } z + \bar{z} = -z\bar{z} = -1$$

$$z^2 + \bar{z}^2 = (z + \bar{z})^2 - 2z\bar{z}$$

$$= (-1)^2 - 2 \cdot 1$$

$$= -1$$

$$\therefore 2(z^2 + \bar{z}^2) = -2$$

115 정답 -9

[출제자 : 최성훈T]

$$ab = -5 < 0 \text{이므로 } \frac{b}{a} < 0, \frac{a}{b} < 0$$

$$\therefore \left(\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 2\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$= \frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}}$$

량대부립

n 이 소수이고 $x^n = 1$ 이 허근 z 를 가지면 n 개의 수 $1, z, z^2, \dots, z^{n-1}$ 은 $x^n = 1$ 의 서로 다른 해이다.

설명

방정식 $x^n = 1$ 이 허근 z 를 가지면 $z^n = 1$ 이다.

$(z^n)^k = (z^k)^n = 1$ 이므로

z^k ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$)은 $x^n = 1$ 의 해이다.

여기서 z^k ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$) 중 같은 수가

있다고 가정하면 $z^\alpha = z^\beta$ ($0 < \alpha < \beta < n$)인

자연수 α, β 가 존재한다. 양변을 z^α 로 나누면

$z^{\beta-\alpha} = 1$ 이고

$(z^{\beta-\alpha})^t = 1$ 이므로 n 은 $\beta-\alpha$ 의 배수가 된다.

이는 n 이 소수라는 가정에 모순이므로

z^k ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$) 중 같은 수는 존재할 수 없다.

따라서 n 이 소수일 때는 $1, z, z^2, \dots, z^{n-1}$ 은 모두 다른 값이다.

144 정답 $\frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

$z^7 = 1$ 에서 $\overline{(z^7)} = 1$ 이므로 $(\bar{z})^7 = 1$ 이다.

$(z \cdot \bar{z})^7 = 1$ 이므로 $z \cdot \bar{z} = 1 \therefore z = \frac{1}{\bar{z}}$

$z^4 + z^2 + z = \alpha$ 라 두면

$\bar{\alpha} = \overline{z^4 + z^2 + z} = (\bar{z})^4 + (\bar{z})^2 + (\bar{z}) = z^3 + z^5 + z^6$

$\left(\because \overline{(z^4)} = \frac{1}{z^4} = z^3, \overline{(z^2)} = \frac{1}{z^2} = z^5, \overline{(z)} = \frac{1}{z} = z^6 \right)$

이고 $z^7 - 1 = 0, z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ 에서

$\alpha + \bar{\alpha} = (z^4 + z^2 + z) + (z^3 + z^5 + z^6) = -1$

$\alpha \times \bar{\alpha} = (z^4 + z^2 + z) \times (z^3 + z^5 + z^6)$

$= z^7 + z^9 + z^{10} + z^5 + z^7 + z^8 + z^4 + z^6 + z^7$

$= 3 + (z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z) = 3 - 1 = 2$

$x^2 + x + 2 = 0$ 의 두 근을 $\alpha, \bar{\alpha}$ 라 하면

$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

[다른 풀이]

$z^7 - 1 = 0, z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ 에서

$z^4 + z^2 + z = \alpha$ 라 두면

$z^6 + z^5 + z^3 = -1 - \alpha$ 이고 양변을 제곱하면

$$z^{12} + z^{10} + z^6 + 2(z^{11} + z^9 + z^8) = \alpha^2 + \alpha + 1$$

$$z^5 + z^3 + z^6 + 2(z^4 + z^2 + z) = \alpha^2 + \alpha + 1$$

$$-1 - \alpha + 2\alpha = \alpha^2 + 2\alpha + 1$$

$$\alpha^2 + \alpha + 2 = 0 \text{에서 } \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

145 정답 30

$z = a + bi$ 에서 $\bar{z} = a - bi$ 이므로 $z^2 - \bar{z} = 0$ 에서

$$(a + bi)^2 - (a - bi) = 0$$

$$(a^2 - b^2 - a) + (2ab + b)i = 0$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2 - b^2 - a = 0, 2ab + b = 0$$

(i) $2ab + b = 0$ 에서 $b(2a + 1) = 0$

$$\therefore a = -\frac{1}{2} (\because b > 0)$$

(ii) $a^2 - b^2 - a = 0$ 에서 $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - b^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0,$

$$b^2 = \frac{3}{4} \therefore b = \frac{\sqrt{3}}{2} (\because b > 0)$$

(i), (ii)에서 $z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 이므로 $2z + 1 = \sqrt{3}i$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$4z^2 + 4z + 1 = -3, 4z^2 + 4z + 4 = 0$$

$$\therefore z^2 + z + 1 = 0$$

위의 식의 양변에 $z - 1$ 을 곱하면

$$(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0, z^3 - 1 = 0 \therefore z^3 = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore (z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + 1)^n &= (z^2 + z + 1 - z)^n \\ &= (-z)^n = (-z^3)^{\frac{n}{3}} = (-1)^{\frac{n}{3}} \end{aligned}$$

따라서 n 은 3의 배수인 두 자리의 자연수이므로 30개다.

량대부립

$z^2 = \bar{z}$ 이므로

$z = \overline{(\bar{z})} = \overline{(z^2)} = (\bar{z})^2 = (z^2)^2 = z^4$ 에서

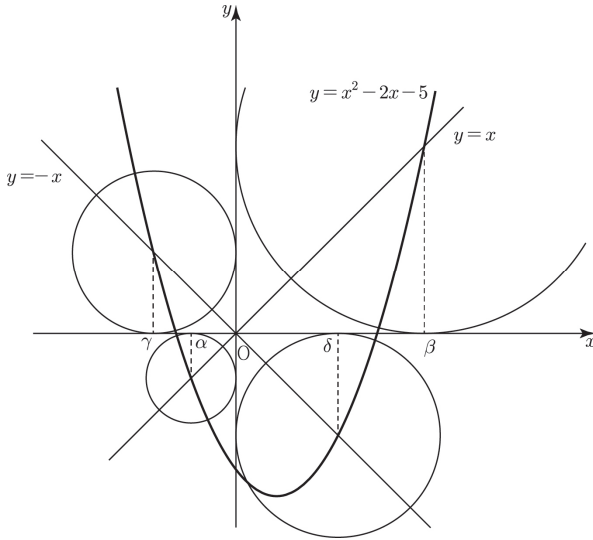
$$z^4 - z = 0, z(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$$

$$z^2 + z + 1 = 0 (\because z \neq 0, z \neq 1)$$

146 정답 0, 3

$\bar{z} = -z^2$ 에서

$y = x^2 - 2x - 5$ 와 $y = -x$ 의 교점의 x 좌표를 γ, δ 라 하자.



각 원의 반지름의 길이는 $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|, |\delta|$ 이므로 찾는 값은 $\pi(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)$ 이다.

(i) $x^2 - 2x - 5 = x$

$x^2 - 3x - 5 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = -5$

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 3^2 - 2(-5) \\ &= 19 \end{aligned}$$

(ii) $x^2 - 2x - 5 = -x$

$x^2 - x - 5 = 0$ 의 두 근이 γ, δ 이므로

$\gamma + \delta = 1, \gamma\delta = -5$

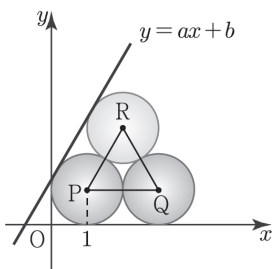
$$\begin{aligned} \gamma^2 + \delta^2 &= (\gamma + \delta)^2 - 2\gamma\delta \\ &= 1^2 - 2(-5) \\ &= 11 \end{aligned}$$

$\therefore \pi(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = 30\pi$

268 정답 3

[출제자 : 최성훈]

직선 $l: y = ax + b$ 라 하면



$\triangle PQR$ 은 정삼각형이므로 $\angle RPQ = 60^\circ, \overline{PR} \parallel l$

$\therefore a = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

l 이 중심이 점 P 인 원 P 에 접하므로 중심 P 와 직선 l 사이의 거리는 1이다.

$P(1,1)$ 이고 $\sqrt{3}x - y + b = 0$ 이므로

$$\frac{|\sqrt{3}-1+b|}{\sqrt{3+1}} = 1$$

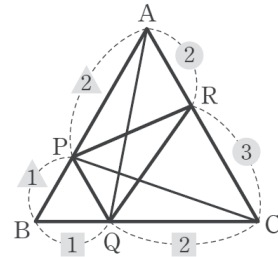
$|b + \sqrt{3} - 1| = 2$

$b = 3 - \sqrt{3}$ 또는 $b = -1 - \sqrt{3}$

$b > 0$ 이어야 하므로 $b = 3 - \sqrt{3}$

$\therefore a + b = \sqrt{3} + (3 - \sqrt{3}) = 3$

269 정답 9 : 2



그림과 같이 선분 PC 를 그으면 삼각형 APC 에서

$\overline{AR} : \overline{RC} = 2 : 3$ 이므로 $\triangle APR = \frac{2}{5} \triangle APC$

삼각형 ABC 에서 $\overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 1$ 이므로

$\triangle APC = \frac{2}{3} \triangle ABC$

이때, $\triangle ABC$ 의 넓이는 S 이므로

$\triangle APR = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} \triangle ABC = \frac{4}{15} S$ ㉠

또한, $\triangle PBQ \sim \triangle ABC$ 이고, $\overline{BP} : \overline{BA} = 1 : 3$ 이므로

$\triangle PBQ : \triangle ABC = 1 : 9$

$\therefore \triangle PBQ = \frac{1}{9} \triangle ABC = \frac{1}{9} S$ ㉡

선분 AQ 를 그으면 삼각형 ABC 에서

$\overline{BQ} : \overline{QC} = 1 : 2$ 이므로 $\triangle AQC = \frac{2}{3} \triangle ABC$ 이고,

$\triangle RQC = \frac{3}{5} \triangle AQC$ 이므로

$\triangle RQC = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} \triangle ABC = \frac{2}{5} S$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 삼각형 PQR 의 넓이는

정답 및 해설

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 13$$

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} = \sqrt{2(a-b)^2} = \sqrt{26}$$

319 정답 $\sqrt{13} - \frac{2}{13}\sqrt{39}$

점 C는 점 A를 x 축으로 2만큼, y 축으로 -2 만큼 평행이동한 점이므로 점 A가 직선 $3x-2y+20=0$ 위를 움직일 때, 점 C는 $3(x-2)-2(y+2)+20=0$ 즉, $3x-2y+10=0$ 위를 움직인다.

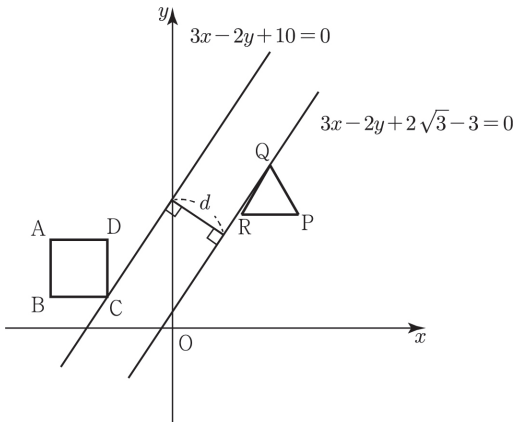
또한 점 Q는 점 P를 x 축으로 -1 만큼, y 축으로 $\sqrt{3}$ 만큼 평행이동한 점이므로 점 P가

직선 $3x-2y-6=0$ 위를 움직일 때, 점 Q는

$$3(x+1)-2(y-\sqrt{3})-6=0$$

즉, $3x-2y+2\sqrt{3}-3=0$ 위를 움직인다.

따라서 두 점 C와 Q 사이 거리 d 의 최솟값은 두 직선 $3x-2y+10=0$, $3x-2y+2\sqrt{3}-3=0$ 사이의 거리이다.



따라서

$$d \geq \frac{10 - (2\sqrt{3} - 3)}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{13 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} - \frac{2}{13}\sqrt{39}$$

320 정답 $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

중심의 좌표가 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 이고, 반지름의 길이가 1인

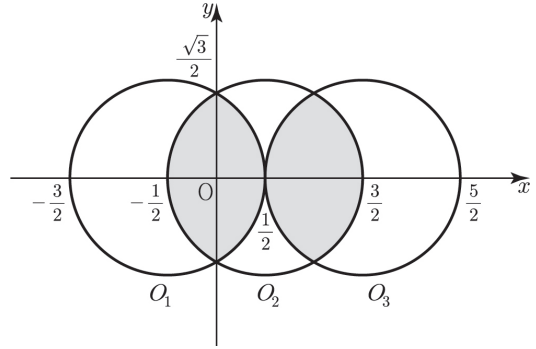
원 O_1 의 방정식은 $(x + \frac{1}{2})^2 + y^2 = 1$

원 O_1 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원 O_2 의 방정식

은 $(-x + \frac{1}{2})^2 + y^2 = 1$

$$\therefore (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = 1$$

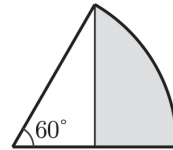
따라서 구하는 공통부분의 넓이의 합은 다음 그림에서 어두운 부분의 넓이의 합과 같다.



이때, 어두운 부분의 넓이의 합을 S 라 하면 S 는 반지름의 길이가 1이고, 중심각의 크기가 60° 인

부채꼴의 넓이에서 밑변의 길이가 $\frac{1}{2}$ 이고 높이가

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 인 직각삼각형의 넓이를 뺀 것의 8배와 같으므로



$$S = 8 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$$

321 정답 $\sqrt{6}$

두 원의 공통현의 방정식은

$$6x - 8y + 10r = 0 \rightarrow 3x - 4y + 5r = 0 \text{이다.}$$

원 C_1 은 중심이 $(0, 0)$, 반지름의 길이가 $2r$ 인 원이다.

이 때, 그림과 같이 공통현과 원 C_1 이 만나는 점을

A, B라 하고 원의 중심 O에서 공통현에 내린 수선의 발을 H라 하자.

