# 수학, 알고 있니?

방정식 f ( x ) = f ( 3 )  x=?

[ 3 ] 이라고 대답한 너! 들어와

by. Sueal_

$f(x) = f(3)$이라는 방정식에서

x 는 몇일까요?

직접 생각해봅시다

.

.

.

x=3 이라고 쉽게 찾아지죠?

그런데 여기서

이상하다는 생각이

1도 안들었다면

이 칼럼을 정독하세요

우선 $f(x)=f(3)$ 이라는 방정식을 해석할 때

여러분은 머릿속에

함수의 그래프가 떠올라야 합니다

방정식을 푸는데 웬 그래프일까요?

자 이 방정식을 먼저 해석해보겠습니다

$$x^2-2x-3=0$$

이 방정식의 근이 $-1$, $3$ 이라는 것은

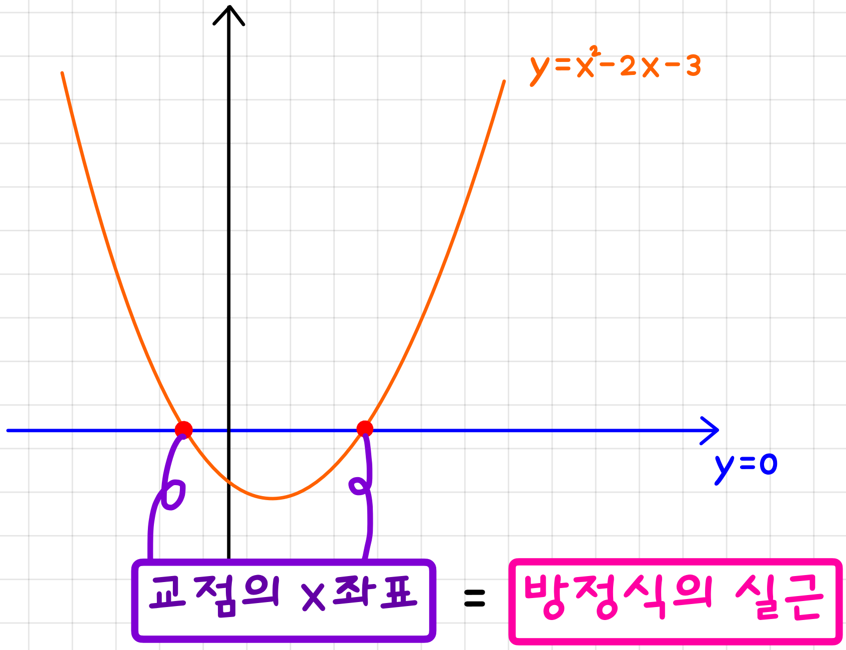
모두 쉽게 찾을 수 있을겁니다

하지만 이제 여러분은

위 방정식의 실근을

이렇게 이해할 수 있어야합니다

$y=x^2-2x-3$ 와 $y=0$ ( x축 ) 의 교점의 x좌표




위 그림에서 처럼

$y=x^2-2x-3$ 과 $y=0$ 의 교점의 x좌표인

$-1$ 과 $3$이

방정식의 실근입니다

여기서 포인트는

$x^2-2x-3=0$ 이라는 방정식을 봤을 때

인수분해하여 $-1$ , $3$ 만 찾을줄 안다고

방정식을 제대로 풀거나 이해한 것이 아니라

위의 그래프 상황으로

이해할 줄 알아야 한다는 것입니다

자 이제 여러분은 너무너무 중요한

수능에 무조건 나오는

방정식의 그래프를 이용한 해석을

이해하였습니다

이제, 한 번 쉬운 예제를 봅시다

$$2^x = 4$$

의 실근은 무엇인가요?

방금 설명한 것을 바탕으로

그래프를 이용하여 실근을 생각해보세요

.

.

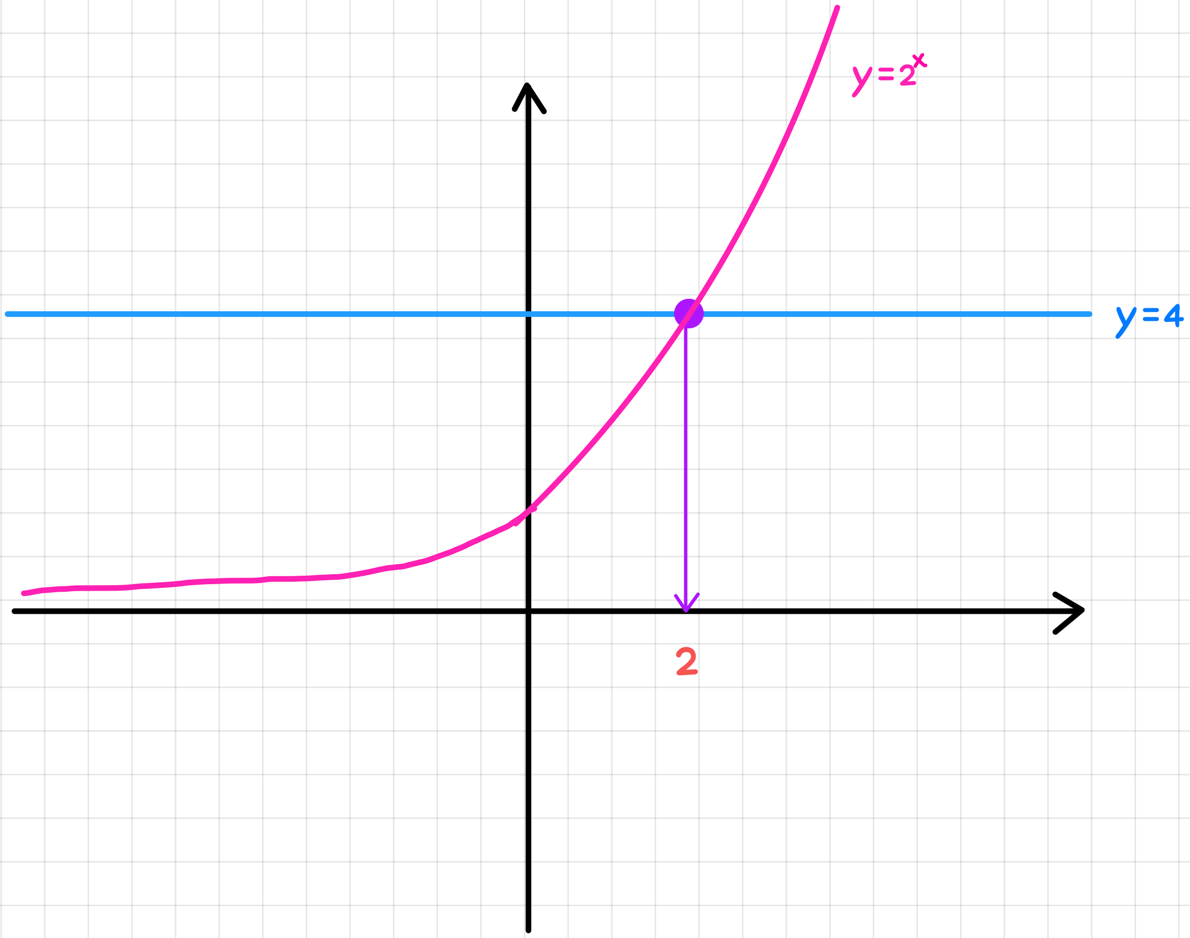
.

위 방정식의 실근은

$y=2^x$와 $y=4$의 교점의 $x$좌표

로 해석할 수 있습니다

이를 그래프를 이용해 표현해보면




이와 같이 그래프가 그려지고

곡선과 직선의 교점의 $x$좌표인

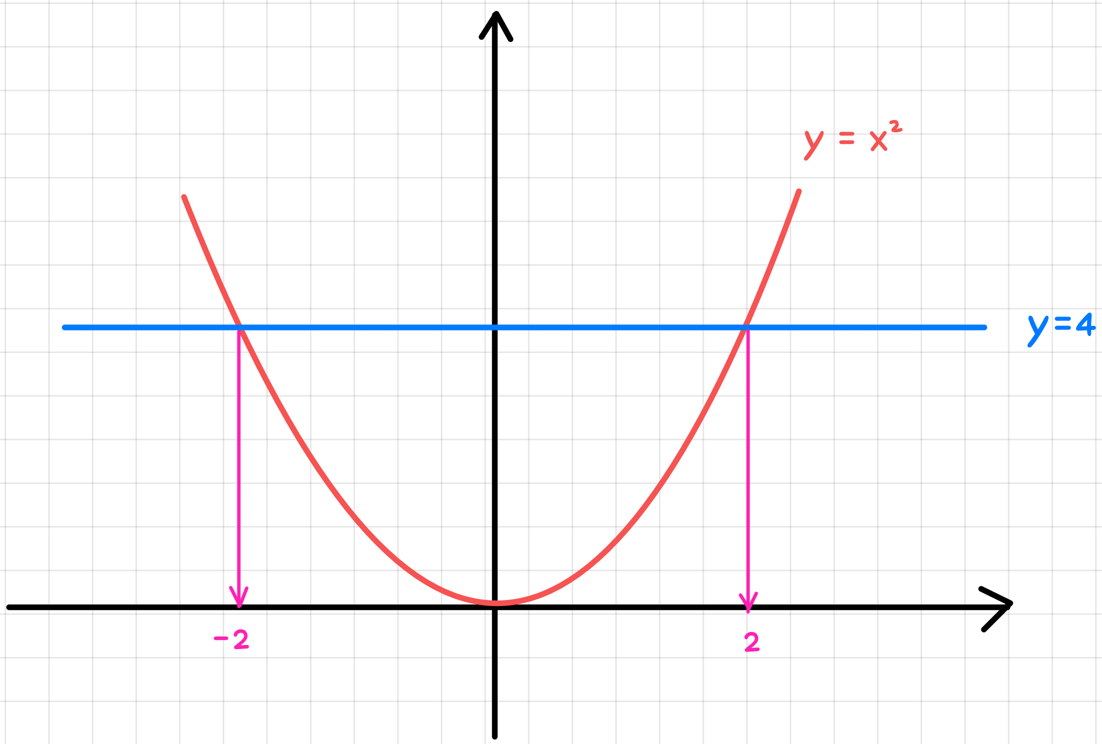
2가 방정식의 실근이 됩니다

자 이번에는 비슷하지만

조금 다른 상황인

$x^2 = 4$

를 해석해봅시다




위 그래프에서

$y=x^2$과 $y=4$의 교점의 x좌표가

$-2$ , $2$ 이므로

$x^2 = 4$의 실근도 $-2$, $2$입니다

여기서 주목할 점은

$f(x) = x^2$ 라 했을 때

$x^2 = 4$ 라는 방정식을 다시 쓰면

$f(x) = f(2)$

로 쓸 수 있는데

그렇다 해서 $x = 2$ 라고만 답하면

안된다는 것입니다

실제로는 $x$가 $-2$, $2$ 둘 다 되니까요

이 것이 어떤 방정식을 봤을 때

그 실근을 양쪽 그래프의 교점의 $x$좌표로

이해할 수 있는 사람과

없는 사람의

차이입니다

그런데,

$f(x) = f(3)$을 보고

이 방정식을 만족하는 $x$가

3 밖에 없음을

보장할 수 있을 때가 있습니다

언제일까요?

바로 $f(x)$가

일대일함수

일 때 입니다

일대일 함수가 무엇인가요?

교과서의 정의를 보면

정의역내의 임의의 원소 $x_1$, $x_2$에 대하여

$$x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

라고 되어있습니다

즉, 서로 다른 x 값에 대한

함숫값은 무조건 다르다는겁니다

다르게 말하면

하나의 함숫값(y값)에는 하나의 x값만이 매칭된다

입니다

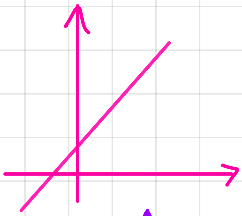
이는 정의의 대우 명제인

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

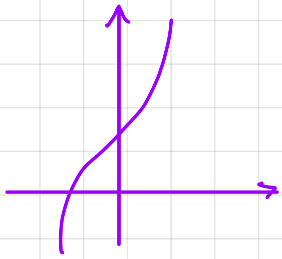
로 표현될 수 있죠

대표적인 함수는

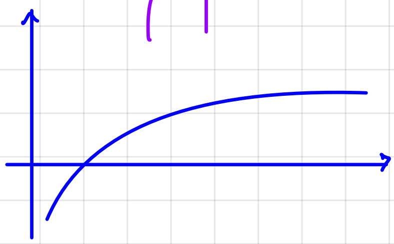
일차함수 전체

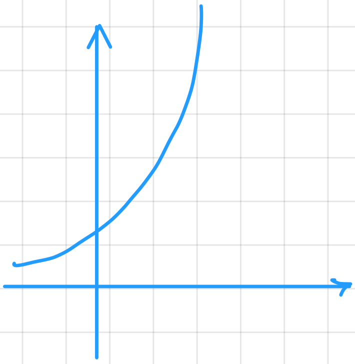


홀수차 다항함수 중 일부



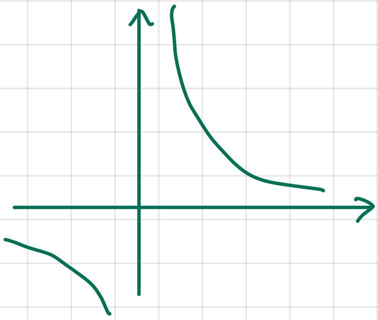
로그함수



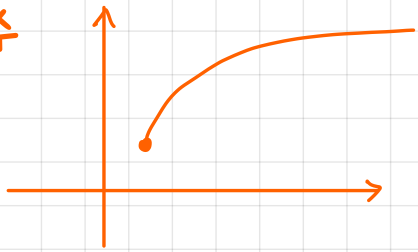


지수함수

기본 유리함수



기본 무리함수



가 있습니다

$\log a = \log b$ 이면 $a = b$ 일까요?

생각해봅시다

.

.

.

.

.

.

.

생각하셨나요? 근거도 말할 수 있나요?

$f(x) = \log x$ 라 하면

주어진 명제를

$f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$이다

로 쓸 수 있고

$f(x)$가 로그함수로 일대일 함수이므로

참이다

라고 대답했다면 된겁니다

$a^2 = b^2$ 이면 $a = b$ 이다

이 명제는요?

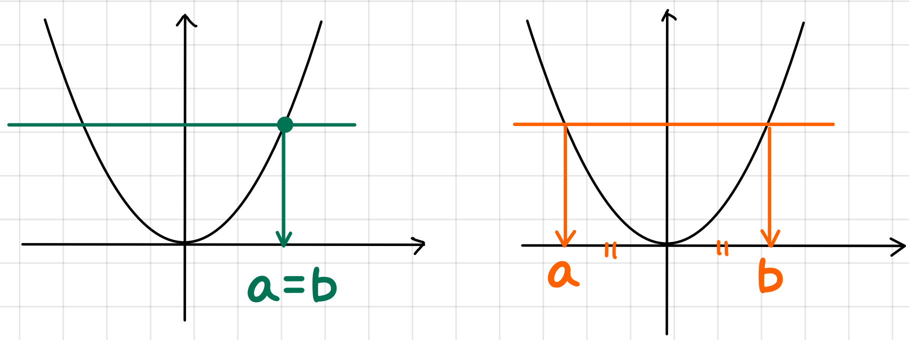
$f(x) = x^2$ 라 하면

$f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$ 이다로

명제를 바꿔쓸 수 있고

$f(x)$ 는 일대일 함수가 아니므로

다음 그림과 같이




$a = b$ 뿐만 아니라

$a = -b$ 일수도 있다는 것을

함수의 그래프를 그릴 수 있다면

완벽하게 이해할 수 있을겁니다

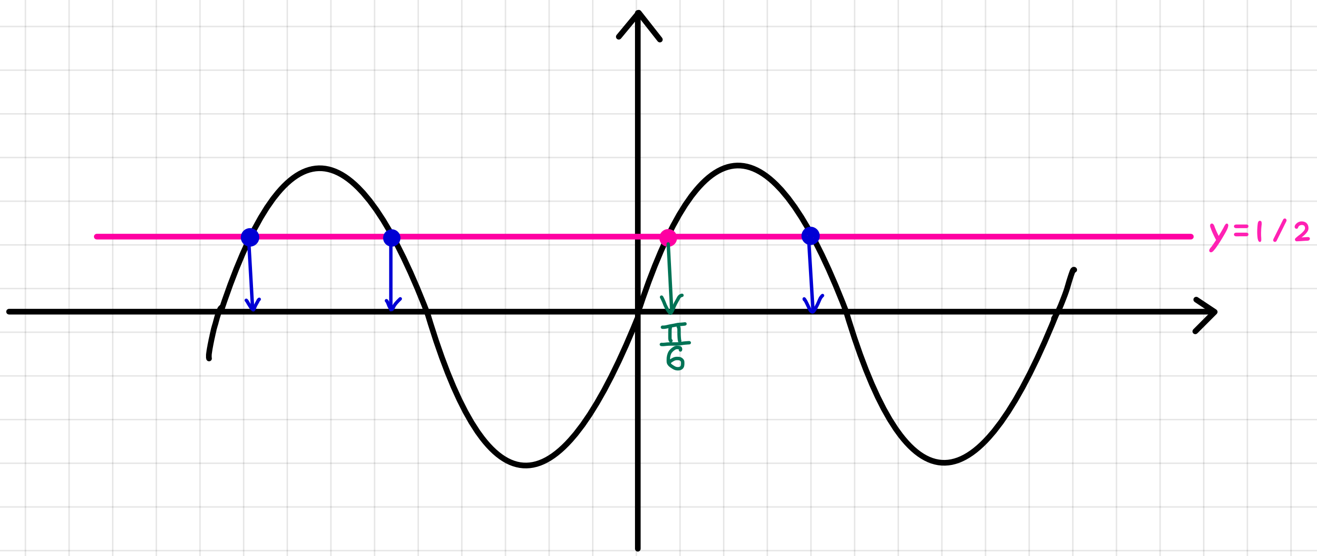
이제 여러분은

$\sin a = 1/2$를 보면

삼각비를 떠올려

$a = 30°$ ( 즉, $\pi/6$ )

만 생각나는 것이 아니라




그림에 파란색으로 표시된

x값들도 a가 될 수 있음을

빠르게 캐치 할 수 있을겁니다

이번 칼럼을 요약하자면,

첫 째, 방정식의 실근을

함수 그래프를 통해

교점의 x좌표로 이해해야한다

둘 째, 일대일 함수의 개념을 정확히 알고

그동안 대충 그러려니~ 하던 명제들을

더 정확한 근거를 기반으로

판단해낼 수 있어야 한다

가 되겠습니다

-끝-