P A R K   D A E   S U N G

수학 행동영역 칼럼

제 1장

결론에 근거하기

반갑습니다.
저는 메가스터디 러셀 출강하게 된 수학강사 박대성이라고 합니다. 여러분들 '행동영역'이란 말은 한 번쯤은 들어보셨으리라 생각합니다. 그런데 현재 평가원에서 얘기하는 '행동영역'에 관하여 정확한 전달과 이해를 돕는 강의나 교재 등이 부족하다고 생각됩니다. 교육과정평가원도 이에 관한 문제의식을 지니고 있으나 현실적으로 공교육이든 사교육이든 적절한 제시안을 주고 있다 보기 어려운 것이 현실입니다.

저는 이러한 문제 인식으로부터 출발하여 직접 연구한 것들을 여러분들과 공유하고 도움 드리고자 작성하게 되었습니다.

행동 영역이란?

교과 내용의 학습 목표와 평가원의 출제원칙에 근거하여 **문제에 접근하는 태도**를 뜻합니다. 직접적으로 문제에 나타난 표현과 단서들을 활용하여 교과서의 내용으로 정리하고 연결하여 **단순화하는 능력**이라 표현할 수 있습니다.

사실 이러한 원론적인 설명만으로는 이해하기 어렵습니다.
그래서 행동 영역이 무엇인가에 대해 직접 전달하고자 합니다.

왜 행동영역을 알아야하는가?

고등학교 수학교육의 주된 목적은 **사고력 증진**에 있다고 합니다. 이를 목적으로 만들어 진 것들이 수학 문제입니다. 이러한 문제들은 결국 다양한 수학적 사고 함양을 목적에 두고 교육 및 평가하기 위해 존재하는 것들입니다. 어떠한 시험 형태이든 이러한 본질은 같습니다.
따라서 수학적 개념을 이해하고 문제를 해결하는 것에 있어서 많은 생각들을 요구하게 됩니다.
하지만 사고 능력을 경험과 학습량에만 의존하여 만들어 내는 것은 개인의 역량에 따라 차이가 상당합니다.

그런데 만약 문제 해결 과정에서 수학적 사고 능력이 무엇인가에 관한 이해를 바탕으로 체계적인 학습을 할 수 있다면 보다 효율적인 성장이 누구에게나 가능할 것이 분명합니다.

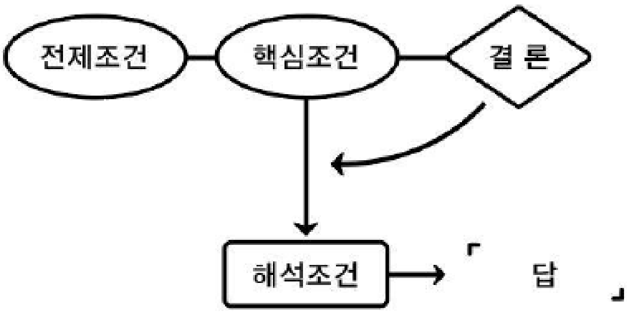
본 칼럼은 수능 수학을 베이스로 제가 분석한 10가지의 행동 영역 중 가장 기본이 첫 번째 주제에 대한 칼럼이니 반복하여 읽어주시길 바랍니다.

1 결론에 근거하기

전제조건 : 조건 해석을 위한 전제 사항

핵심조건 : 해석의 대상이 되는 조건

결론 : 구하고자 하는 것



결론에 근거한다는 것은 무엇일까?

결론부터 얘기하자면 문제 속에서 구하고자 하는 것을 **어떻게 인식**해야하는가 그것에 필요한 여러 가지 생각들을 의미합니다. 아직은 추상적이게 들리시겠지만 이것들은 너무나 중요하며 이미 여러분이 어느 정도 무의식적으로 이해하고 있는 것들이기도 합니다.
무의식을 의식화해보도록 합시다.

간단한 문제를 통해 기본이 되는 이야기부터 시작해봅시다.

“양수 a,b에 관하여 $a^2=9+4\sqrt{5}$, $b^2=9-4\sqrt{5}$ 일 때, $a+b=?$”

주어진 결론은 $a+b$ 입니다. 이로부터 두 가지 생각을 해 볼 수 있습니다.

첫째, $a+b$의 값을 구하기 위해 a와 b를 **각각** 구하여 더한다.
둘째, $a+b$를 하나로 인식하여**(덩어리)** 구한다.

두 가지 인식으로부터 두 가지 풀이 과정을 정리해보도록 하겠습니다.

ⅰ) $a^2=9+4\sqrt{5}$, $b^2=9-4\sqrt{5}$이고 a,b는 양수이므로 $a=\sqrt{9+4\sqrt{5}}$, $b=\sqrt{9-4\sqrt{5}}$
이고 정리하면 $a=\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{4})^2}, b=\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{4})^2}$ 이므로 $a=\sqrt{5}+\sqrt{4}$ $b=\sqrt{5}-\sqrt{4}$
$a+b=2\sqrt{5}$입니다. (해당 내용은 현재 교과과정 외입니다.)

ⅱ) 조건 a^2 및 b^2이 주어진 상황입니다. 결론 $a+b$와 조건 a^2, b^2의 관련된 교과과정 내용을 생각해봅시다.

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 라는 곱셈공식변형을 떠올릴 수 있고 $a+b$를 구하기 위해 ab를 먼저 구해야합니다. ab를 구하기 위해 조건 a^2, b^2를 서로 곱해보면 $a^2b^2=1$이므로 $ab=1$ 따라서 $a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$ 이므로 $a+b=2\sqrt{5}$입니다.

쉬운 문제이지만 해당 과정을 통해 몇 가지를 사실을 유추해 볼 수 있습니다.

우선 두 풀이를 참고해보면 결론을 **어떻게 인식**하는가에 따라 조건 해석의 방향이 달라질 수 있음을 알 수 있고 이것을 확장시켜 생각해보면 <u>풀이의 다양성이 결론으로부터</u> 시작됨을 알 수 있습니다.

이러한 사실을 개인의 학습과 연결시켜 생각해보도록 합시다.
예를 들어 해당 문제를 보고 첫 번째 풀이로 풀게 된 학생이 있다고 합시다. 해당 학생이 두 번째 풀이를 해설지에서 보게 된다면 해당 풀이 과정을 열심히 공부하게 될 것입니다.

하지만 $a+b$를 구해야 되는 하나의 대상으로 인식하는 것의 중요성을 놓친다면?

결국 본인에겐 시험장에서 구사하기 힘든 풀이일 것이며 반복 학습의 대상이 될 뿐입니다.
물론 해당 예시는 쉽기 때문에 그런 문제가 발생하지 않겠지만 이 글을 읽는 여러분들이 시험장에서 풀게 될 문제들은 그렇지 않음을 알고 계실 것입니다.

새로운 풀이과정을 학습하게 될 경우 해당 과정을 자연스럽게 나의 것으로 만든다는 것은 주로 **결론**에 그 답이 있음을 명심하시길 바랍니다.

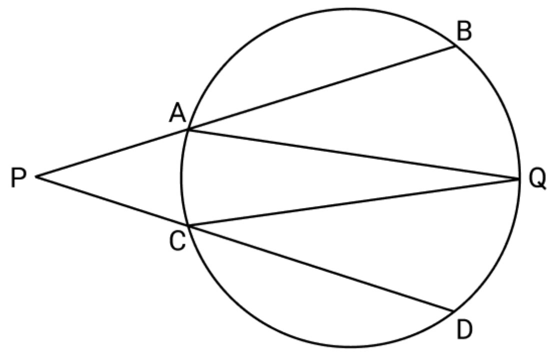
1 결론에 근거하기

수능 수준의 문제들을 통하여 결론(구하는 것)에 근거하여 조건을 해석한다는 것이 무엇인지 같이 얘기해보도록 합시다. 대표적으로 결론(구하는 것)은 크게 두 가지로 보면 변화하는 것과 변하지 않는 것 두 가지로 나누어 볼 수 있습니다. 아래는 간단한 목차입니다.

Ⅰ.결정되어있는 결론(유일성)

Ⅱ.변화하는 결론 (함수)

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원의 외부에 한 점 P가 있다.
$\overset{\frown}{\mathrm{BQ}}=0.29$, $\overset{\frown}{\mathrm{QD}}=0.31$일 때, $\angle \mathrm{P}+\angle \mathrm{Q}$ 의 값을 구하여라.



우선 풀어보신 후에 혹은 풀지 못하더라도 3분 이상은 고민해보시고 뒷장을 참고하시길 바랍니다.

해당 문제를 통해 말하고자 하는 것은 두 가지입니다.
습관적으로 결론의 인식을 항상 한 가지 이상 열어 둘 것 그리고 유일성

전자에 관하여 먼저 얘기하자면 예를 들어 $f(x)$를 다항함수라 할 때, $f(2)$라는 결론을 항상 $f(x)$를 구하는 것으로만 여기는 사람과 $(x-2)$로 나눈 나머지까지 같이 생각하는 사람은 분명 문제 해결 능력에 있어 다를 수밖에 없습니다.

'**유일성**'은 수학에서 매우 중요한 화두입니다. 입시 수학에서도 마찬가지이고 이는 모든 행동 영역과 직결된 문제이기에 후편의 칼럼들에서도 여러 번 언급하게 될 것입니다.
우선 문제를 풀이와 함께 이와 관련된 이야기를 해보겠습니다.

결론 $\angle P+\angle Q$를 두고 앞서 처음 다루었던 문항처럼 두 가지 생각을 할 수 있습니다.

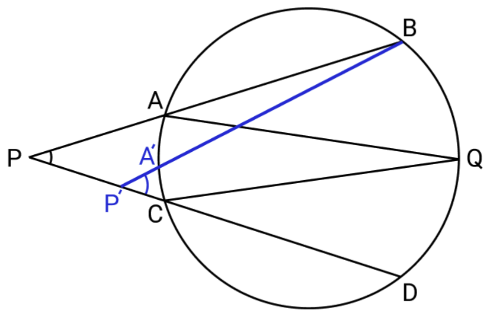
" 각각 구할 것인가? 아니면 하나의 값으로 구할 것 인가?"

각각의 값을 결정지으려고 해보면 가능하지 않습니다. 따라서 $\angle P+\angle Q$를 하나의 값으로 인식하여 구해봅시다. 사각형 ACPQ에서 $\angle A+\angle C$의 값을 구한다면 $\angle P+\angle Q$의 값을 구할 수 있습니다. $\angle A+\angle C$의 값은?
$\angle BAQ+\angle DCQ$의 값을 구하면 $\angle A+\angle C$의 값도 알 수 있습니다.
또한 사각형 내각의 합은 360°이고 $\angle BAQ+\angle DCQ$와 $\angle A+\angle C$의합도 360°이므로 $\angle BAQ+\angle DCQ$가 곧 결론의 값과 같고 이를 근거하여 조건 $\overset{\frown}{BQ}=0.29$, $\overset{\frown}{QD}=0.31$를 고려해보면 원주각으로 해석함을 알 수 있고 따라서 답이 0.3임이 당연합니다.

제가 말하고자 하는 것은 답을 만드는 과정 따위가 아닙니다. 위 과정을 되짚어 봅시다. $\angle P+\angle Q$ 값을 하나로 인식하기 이전에 중요한 것은 $\angle P$, $\angle Q$의 값이 **각각 결정될 수 없음의 이유를 정확하게 아는 것**입니다. 유연하고 올바른 사고를 하기 위해서 이런 생각들은 아주 중요합니다. 사람은 대게 한 가지 생각을 시작하여 그것을 정확하게 가능하지 않다는 판단을 이끌어내기 이전엔 다른 방향으로 생각을 이어가기란 어렵기 때문입니다.
따라서 **가능하지 않음**을 확실히 판단하는 것 역시 중요한 수학적 사고라 할 수 있습니다.

<u>“왜 $\angle P, \angle Q$ 의 값은 각각 결정될 수 없는가?“</u>

결론부터 얘기해보면 $\angle P, \angle Q$ 가 모두 유일하지 않기 때문입니다.
다음 그림과 함께 구체적으로 이해해보도록 합시다.



조건 $\widehat{BQ}=0.29$, $\widehat{QD}=0.31$는 고정된 길이 값이지만 점 A는 원 위에서 움직일 수 있습니다. 그렇다면 주어진 조건 상황만으로는 위 그림과 같이 $\angle P$는 유일할 수 없습니다. 이것은 값이 결정될 수 없음을 의미합니다. 어떻게 보면 너무나 당연한 것입니다.

유일하다는 것은 구할 수 있다는 것이고 유일하지 않다는 것은 구할 수 없는 것.
당연하지만 여러분들 <u>머릿속에 이것을 따져보는 사고 활동이 자연스럽게 자리 잡혔는가?</u>
이것이 진짜 중요한 문제이지요.

수학을 잘하는 사람들 혹은 수학을 하는 사람들에게 어떤 존재가 유일한지 아닌지는 중요한 관심의 대상입니다. 이런 생각으로부터 출발하여 정의된 것들이 수능 수준의 교과 과정에서도 자주 등장합니다. 대표적으로 자연 상수 e와 같은 것들도 그렇습니다.

여러분들도 이미 수능 수학을 경험하기 이전에 이미 **유일성과 관련된 경험**을 해보셨으리라 생각됩니다. 예를 들어 중학생 시절 방정식의 활용 문제를 풀었을 때 어떤 길이나 형태에 변수를 취하고 난 후 관계식을 만들었더니 방정식이 아닌 항등식이 나오게 되어 값을 구해내지 못했던 경험 그런 일이 다들 한 번쯤은 분명 있으실 겁니다.

이런 여러 가지 것들을 생각해보면 유일성에 대한 생각이 얼마나 수학에서 중요한지에 대해 충분히 공감하시리라 생각됩니다. 수능을 포함한 모든 수학 문제 해결에서 마찬가지임이 당연합니다.

2019학년도 수능 수학 나형 21번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x(x+3)$이다.
(나) $g(0)=1$

$f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값은?

① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{5}{14}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{5}{17}$

우선 풀어보신 후에 혹은 못하더라도 최소 3분 이상은 고민해보시고 뒷장을 참고하시길 바랍니다.

풀어보셨나요?

해당 문제는 아주 어려운 문제는 아니였지만 행동 영역 관점에선 상당히 유의미한 문제였습니다. 어떤 유의미한 점이 있었는지 같이 알아보도록 합시다.

해당 문제의 주어진 결론은 “ $f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값은?”입니다.
이로부터 두 가지 포인트를 생각해 볼 수 있습니다.

첫째, $g(2)$의 최솟값이라는 결론은 어떻게 인식해야 될 대상인가?
둘째, 문제를 읽는 과정에서 $f(1)$이 자연수임은 어떻게 이해해야 하는가?

문제 풀이 과정과 함께 첫 번째 질문에 관한 답을 드리도록 하겠습니다.

우선 전제조건인 $f(x)$의 최고차항계수 1, $g(x)$의 실수 전체 집합에서의 연속성 그리고 핵심 조건인 (가)와 (나)를 함께 정리해보도록 합시다.

$g(0)=1$ 이고 조건 (가) $f(0)\times 1=0$ 이므로 $f(x)$는 x를 인수로 갖습니다.
$g(x)$는 모든 실수 집합에서 연속이고 $\dfrac{x(x+3)}{f(x)}$라 표현이 가능합니다.

그런데 만약 $f(x)$가 x를 2개 이상 인수로 갖는다면?
$g(x)$는 모든 실수 집합에서 연속일 수 없을 것 입니다. 따라서 오직 단 1개만을 갖고 이를 정리해보면 $f(x)=x(x^2+ax+b)$라 할 수 있고 $g(0)=1$이므로 $b=3$ 입니다.

그럼 이제 첫 번째 질문으로 돌아가 보도록 하겠습니다.

$g(2)$의 최솟값이란?
수학에서 최솟값 혹은 최댓값을 갖는다는 것은 그 값이 변화함을 이야기 합니다. 즉, 이것은 해당하는 값이 함수 값임을 의미합니다. $f(x), g(x)$ 이러한 수식 표현이 아닌 변화하는 대상 모두를 함수로 인식 할 수 있다는 것입니다.

그렇다면 변화하는 대상을 **함수로 인식한다는 것**이 무슨 의미를 지니고 있을까요?

함수 값은 그 자체가 스스로 변할 수 있는 존재가 아닙니다. 다른 무엇에 의해 변화되어지는 존재입니다. 그 다른 무엇을 수학에서는 **독립변수**라고 부릅니다. 하지만 이보다 더 중요한 것이 있습니다. 무엇의 범위 즉 수학에서 말하는 **정의역**입니다.

결론이 함수로 주어진 문제들의 난이도가 어려워질수록 이 정의역에 관한 물음을 까다롭게 설정해둔 경우가 많습니다. 따라서 함수 문제에서 정의역에 항상 주목해야함이 당연합니다.

문제의 결론이 함수로 주어졌다는 것은 다음과 같이 정리 할 수 있습니다.

> **“결론이 함수로 주어졌음은 무엇에 의해 그리고 그 무엇의 범위를 찾으라는 것이다.“**

문제 풀이를 이어가면서 두 번째 질문의 답을 해보도록 하겠습니다.
“문제를 읽는 과정에서 $f(1)$이 자연수임은 어떻게 이해해야 하는가?”
사실 첫 번째 질문의 답으로부터 $f(1)$이 자연수인 것이 왜 주어졌는가 정도는 쉽게 예상할 수 있습니다. 아마 $f(1)$이 자연수임은 함수 $g(2)$의 **정의역**과 관련성이 있을 것입니다.

위 과정으로부터 함수 $g(2)$는 $\dfrac{5}{7+2a}$라 정리 할 수 있고 정의역인 a의 범위는 전제조건인 $g(x)$의 연속성으로부터 방정식 $x^2+ax+3=0$ 가 실근을 갖지 않아야 하므로 판별식 $\mathrm{D}<0$ 의하여 a의 범위가 결정됩니다. 하지만 이것만으로는 $g(2)$의 최솟값을 결정지을 수 없으므로 $f(1)$이 자연수라는 것에 의하여 $f(1)=a+4 \ \leq 1$이므로 a는 -3는 큰 정수임을 알 수 있고 이를 정리해보면 최종적으로 정의역은 $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ 입니다.

문제의 답은 해결되었습니다. 그러나 여기서 한 걸음 더 나아가는 방법이 있습니다.
$f(1)$이 왜 꼭 자연수여야만 하는가에 관한 질문을 스스로 해보는 것입니다.

이렇게 생각해보시길 바랍니다. “$f(1)$은 꼭 자연수여야만 하는가? 만약 정수라면?”
생각해보시면 $f(1)$이 정수이면 a도 정수이고 따라서 $g(2)$의 정의역이
$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ 라는 사실엔 변화가 없습니다.

그렇다면 평가원이 수능이라는 중요한 시험에서 실수로 과 조건을 제시한 것일까요?
그렇지 않을 것입니다. $f(1)$이 정수였다면 $f(1)=a+4$ 이므로 a도 정수 정도의 생각까지만 가능했을 것입니다. 자연수라는 조건을 부여함으로써 a에 관한 부등식 즉 정의역의 설정을 자연스럽게 유도하려는 의도였겠구나! 생각해 볼 수 있습니다.

주어진 조건들을 비판적 태도로 왜 자연수여야만 하지? 유리수면? 정수면 안 되는 건가?
이러한 사고의 습관들은 문제를 읽는 과정에서 **풀이의 방향성**을 어느 정도 **예측**할 수 있게 만들어 줄 것입니다. 1편은 여기까지입니다. 감사합니다.