[한성은/황성필 모의고사]

3월 모의고사 연습

한성은

5A ACADEMY

반가워요. 열심히 합시다.

hansungeun.com/texta.html – 공개 모의고사 페이지
써밋 N제 수학1, 수학2, 미적분 출간 – 책 사주세요.

황성필

다원KNR

알아서 척척척 스스로 어린이.

blog.naver.com/mathppil - 아무것도 없습니다. 언젠간 하겠죠.
책은 해설지를 만들기 귀찮아 출간할 계획이 없습니다.

수학 영역

5지선다형

1. $\left(3^{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}} \times \left(3^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}}$의 값은? [2점]

① 3 ② 9 ③ 27
④ 81 ⑤ 243

2. $f(x)=3x^2+6x+1$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(2)=25$일 때, $F(1)$의 값은? [2점]

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

3. $\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta=0$일 때, $\cos\theta$의 값은? (단, $\pi<\theta<2\pi$) [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 1
④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

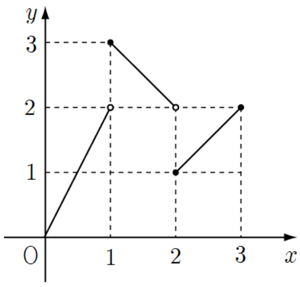
4. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+3}{x-1}=4, \quad \lim_{x\to 1}\frac{g(x)-2}{x^2-1}=3$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(1)$의 값은? [3점]

① -10 ② -12 ③ -14
④ -16 ⑤ -18

5. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 $x \geq 0$에서의 그래프가 아래 그림과 같다.



$\lim_{x \to 1+} f(x) + \lim_{x \to -2-} f(x)$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

6. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=6t-2$$

이다. $t=3$일 때, 점 P의 위치는? [3점]

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

7. $\overline{BC}=3$인 삼각형 ABC에 대하여 세 변의 길이 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$가 이 순서대로 등차수열을 이루고 $\cos(\angle ABC)=-\frac{1}{4}$일 때, $\overline{AB} \times \overline{CA}$의 값은? [3점]

① 7 ② $\frac{15}{2}$ ③ 8
④ $\frac{17}{2}$ ⑤ 9

8. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 25, \quad \sum_{k=1}^{10} a_k a_{k+1} = 170,$$
$$\sum_{k=1}^{10} (a_k - 1)(a_{k+1} + 2) = 165$$

일 때, $a_{11} - a_1$의 값은? [3점]

① 18 ② 16 ③ 14
④ 12 ⑤ 10

9. $\sum_{k=1}^{n} \log_2\left(1+\frac{1}{k}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 100 이하의 모든 자연수 n의 값의 합은? [4점]

① 100 ② 110 ③ 120
④ 130 ⑤ 140

10. $f(0)=f(4)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=0$
(나) $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{g(x)}$가 존재하지 않는다.
(다) $\lim_{x\to 2}\frac{g'(x)}{f(x)}=8$

$\frac{g(6)}{f(6)}$의 값을 구하여라. [4점]

① 5 ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{17}{3}$
④ 6 ⑤ $\frac{19}{3}$

11. 두 양의 실수 a, b에 대하여 곡선 $y=a\sin\frac{\pi x}{b}$와 직선 $3x+y=3b$의 교점의 개수가 3이고, 그 교점의 x좌표가 각각 x_1, x_2, x_3일 때,

$$x_1+x_2+x_3=9, \quad x_1x_2x_3=15$$

이다. ab의 값은? [4점]

① $12\sqrt{3}$ ② $6\sqrt{3}$ ③ $8\sqrt{3}$
④ $10\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

12. 두 함수

$$f(x)=|x^2-6x+a|, \quad g(x)=b|x-c|$$

에 대하여 함수 $h(x)=f(x)+g(x)$가 오직 $x=c+4$에서만 미분가능하지 않다. abc의 값은? [4점]

① -25 ② -20 ③ -15
④ -10 ⑤ -5

13. 함수 $f(x)=a^x$에 대하여 방정식 $f(x)+x=12$의 실근이 $3k$이고, 방정식 $f(f(x))+f(x)=12$의 실근이 $2k$일 때, a의 값은? (단, $a>1$이다.) [4점]

① $2^{\frac{1}{2}}$　② $2^{\frac{3}{4}}$　③ 2
④ $2^{\frac{5}{4}}$　⑤ $2^{\frac{3}{2}}$

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_1^x |f'(t)|dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(6)$의 값은? [4점]

(가) $g(1)=f(1)+1$
(나) 두 함수 $|g(x)-4|$, $|g(x)-8|$이 모두 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① 16　② 17　③ 18
④ 19　⑤ 20

15. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = -a_n + 1$
(나) $a_{2n+1} = 3a_n + 2$

$4a_1 = a_{45}$일 때, $a_m = 8$이 되도록 하는 63 이하의 자연수 m의 개수는? [4점]

① 16 ② 14 ③ 12 ④ 10 ⑤ 8

단답형

16. $\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 4x^2}{x-2}$의 값을 구하여라. [3점]

17. 함수 $f(x) = -3x^2 + px + 2$에 대하여

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h} = 6$$

일 때, p의 값을 구하여라. [3점]

18. 방정식 $\log_2 x^4 - (\log_2 x^2)^2 + 3 = 0$의 서로 다른 모든 실근의 곱을 구하여라. [3점]

19. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2^n - 1, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 4^n - 1$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{10} \frac{b_k}{a_k}$의 값을 구하여라. [3점]

20. $f(1)=0$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

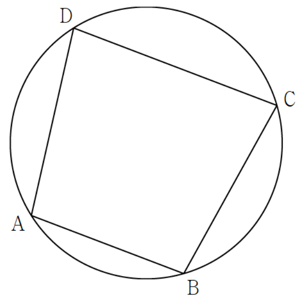
$$g(x) = \int_1^x (t-1)f(t)dt$$

가 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq 0$을 만족시킨다. $\int_0^2 g(x)dx = 4$일 때, $f(0)$의 값을 구하여라. [4점]

21. 반지름의 길이가 5인 원 위의 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $4\overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{CD}}$
> (나) $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{DA}}=5\sqrt{2}$

사각형 ABCD의 넓이를 구하여라. [4점]



22. $f(0)=6$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)$의 최솟값이 $f'(2)$이다. 실수 t에 대하여 집합

$$A=\{a \mid |f'(f(x))-t|\text{는 } x=a\text{에서 미분가능하지 않다.}\}$$

의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. $g(t)$가

$$\lim_{t\to 9-}g(t)-\lim_{t\to 9+}g(t)=4$$

를 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하여라. [4점]

5지선다형

23. ${}_{2}\Pi_{3}$의 값은? [2점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

24. $\sum_{n=3}^{10} {}_{n}\mathrm{C}_{n-3}$의 값은? [3점]

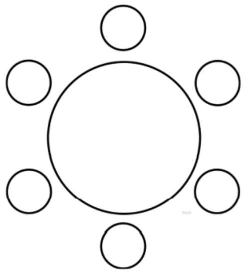
① 300 ② 310 ③ 320 ④ 330 ⑤ 340

25. 7개의 문자 a, a, a, b, b, c, d를 모두 일렬로 나열할 때, c와 d가 이웃하지 않게 되는 경우의 수는? [3점]

① 220 ② 240 ③ 260
④ 280 ⑤ 300

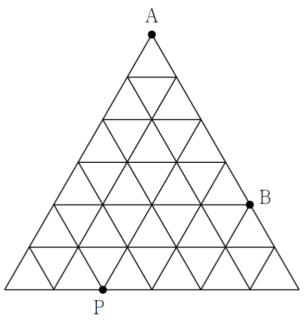
26. 네 학생 A, B, C, D를 포함한 6명의 학생이 있다. 이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

(가) A와 B는 이웃한다. (나) C와 D는 이웃한다.



① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

27. 그림과 같이 정삼각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? [3점]



① 80 ② 90 ③ 100
④ 110 ⑤ 120

28. 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 카드가 각각 2장씩 8장의 카드가 있다. 이 8장의 카드를 다음 조건을 만족시키도록 일렬로 나열하는 방법의 수는? [4점]

왼쪽에서부터 i번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수를 a_i이라 할 때, $a_i \geq a_{i+1}$을 만족시키는 가장 작은 자연수 i의 값은 3이다.

① 204 ② 216 ③ 228
④ 240 ⑤ 252

단답형

29. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to Y$의 개수를 구하여라. [4점]

> 집합 X의 모든 원소 x에 대하여
> $f(1) \le f(x) \le f(2)$
> 이다.

30. 다음 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수를 구하여라. [4점]

> (가) $a+b+c+d+e=12$
> (나) $(a+b+c-4)(d+e-4) \le 0$

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(2^{n+3}+1)}{4^{n+1}+2^n-1}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ 2 ⑤ 4

24. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=12,\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=3$$

일 때, a_1의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10

④ 12 ⑤ 14

25. 2 이상의 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 직선 $x+2y=2n$의 두 교점 사이의 거리를 l_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}$의 값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

26. $a_1=1$인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{S_{n+2}-S_n\}=4$이다. a_2의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2
④ 4 ⑤ 8

27. 모든 항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이

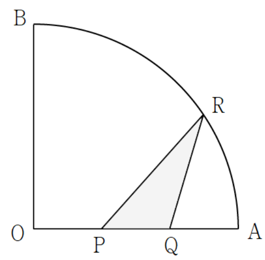
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{8},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}\sqrt{a_n}+a_n\sqrt{a_{n+1}}}=\frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [3점]

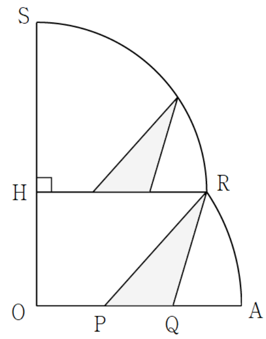
① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

28. 중심이 O, 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OA를 1:2, 2:1로 내분하는 점을 각각 P, Q라 하고, 호 AB 위의 점 R를 $\cos(\angle \mathrm{RQA})=\frac{\sqrt{3}}{6}$이 되도록 잡고, 삼각형 PQR에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
점 R에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 H라 하고 중심이 H, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{HR}}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 HRS를 그린다. 새로 그려진 부채꼴에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 삼각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



① $\frac{24\sqrt{11}}{11}$ ② $\frac{28\sqrt{11}}{11}$ ③ $\frac{32\sqrt{11}}{11}$
④ $\frac{36\sqrt{11}}{11}$ ⑤ $\frac{40\sqrt{11}}{11}$

단답형

29. 자연수 n과 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{n}\right)^m a_m}{\left(\frac{3}{n}\right)^m+1}=\alpha \ (\alpha\neq 0)$$

일 때, $b_n=\lim_{m\to\infty}\frac{a_{m+1}}{a_m}$이다. $\sum_{k=1}^{9}b_k$의 값을 구하여라. [4점]

30. 두 자연수 p, q와 함수 $f(x)=\frac{q(x+p)}{x}$에 대하여, 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(|x|)(2q)^n+\alpha|x|\{f(|x|)\}^n}{(2q)^n+\{f(|x|)\}^n}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(2)=q$
(나) 방정식 $g(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(k)$라 할 때, $\sum_{k=1}^{2q}h(k)=34$이다.

$\alpha+p+q$의 값을 구하여라. [4점]

5지선다형

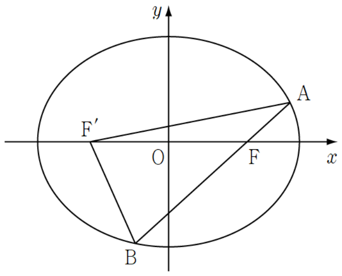
23. 포물선 $y^2=8x$의 초점 F에서 준선 l에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\mathrm{FH}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 타원 $\frac{x^2}{16}+y^2=1$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 두 직선 사이의 거리는? [3점]

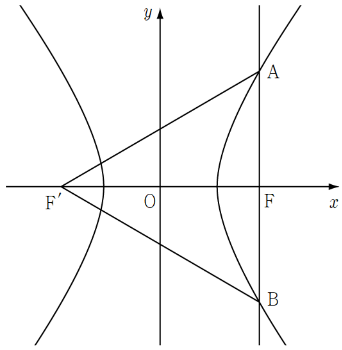
① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

25. 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$과 점 F를 지나는 직선의 두 교점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=8$일 때, $\overline{\mathrm{F'A}}+\overline{\mathrm{F'B}}$의 값은? [3점]



① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

26. 두 점 F, F′을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선의 두 교점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 F′AB가 한 변의 길이가 8인 정삼각형일 때, a^2b^2의 값은? [3점]

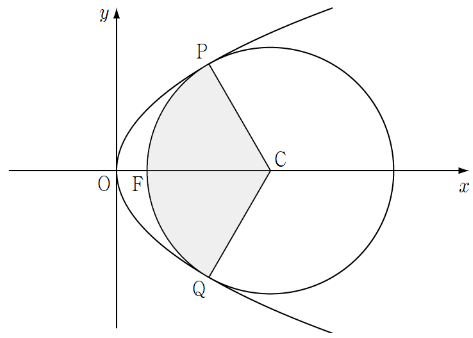


① 24 ② 26 ③ 28
④ 30 ⑤ 32

27. 두 초점이 F, F$'$이고 점근선의 방정식이 $y=\pm 2x$인 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{FP}}:\overline{\mathrm{F'P}}=2:3$일 때, $\cos(\angle \mathrm{F'PF})$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

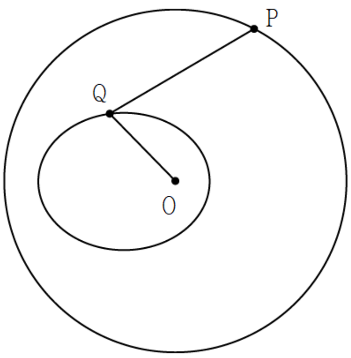
28. 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=12x$과 두 점 P, Q에서만 만나고 점 F를 지나는 원이 있다. 이 원의 중심을 C라 할 때, 부채꼴 CPQ의 넓이는? (단, 점 C의 x좌표는 점 F의 x좌표보다 크다.) [4점]



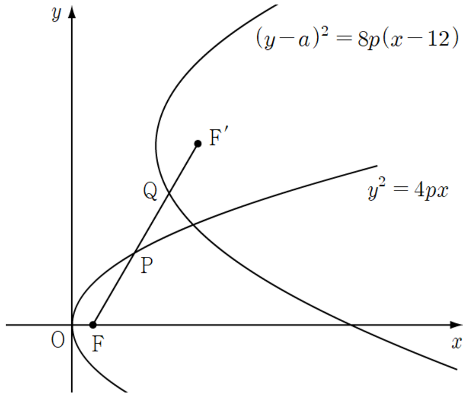
① 42π ② 44π ③ 46π
④ 48π ⑤ 50π

단답형

29. 그림과 같이 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 10인 원 위를 움직이는 점 P와 점 O를 한 초점으로 하고 장축의 길이가 10인 타원 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{PQ}}$의 최댓값이 6일 때, 타원의 단축의 길이를 구하여라. [4점]



30. 두 포물선 $y^2=4px$, $(y-a)^2=8p(x-12)$의 초점을 각각 F, F′이라 하고 선분 FF′이 두 곡선 $y^2=4px$, $(y-a)^2=8p(x-12)$과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{FF'}}=30$, $\overline{\mathrm{PQ}}=8$일 때, a^2의 값을 구하여라. (단, p, a는 모두 양수이고, 점 Q의 x좌표는 P의 x좌표보다 크다.) [4점]



[한성은/황성필 모의고사 3월 연습 정답표]

〈공통〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	④	02	②	03	⑤	04	①	05	③
06	①	07	③	08	⑤	09	③	10	④
11	①	12	②	13	②	14	④	15	⑤
16	16	17	8	18	4	19	30	20	40
21	49	22	38						

〈확률과 통계〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	①	24	④	25	⑤	26	③	27	②
28	②	29	196	30	184				

〈미적분〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	④	24	②	25	⑤	26	③	27	①
28	④	29	8	30	13				

〈기하〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	④	24	③	25	①	26	⑤	27	②
28	④	29	8	30	675				

COMMENT 10

$f(x)=kx(x-2)(x-4)$

$g(x)=2kx^2(x-4)^2$

COMMENT 12

함수 $g(x)$가 $x=c$에서 미분가능하지 않으므로 함수 $f(x)$가 $x=c$에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(x)$가 $x=c+4$에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$가 $x=c+4$에서 미분가능하지 않다.

$f(c)=0$, $f(c+4)=0$이므로 $a=5$, $c=1$이다. $\lim_{x\to c-}\{f'(x)+g'(x)\}=\lim_{x\to c+}\{f'(x)+g'(x)\}$에서 $b=-4$이다.

COMMENT 14

$g'(x)=|f'(x)|\ge 0$이므로 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이다. $g(a)=4$, $g(b)=8$라 하자.

두 함수 $|g(x)-4|$와 $|g(x)-8|$이 모두 미분가능하므로 $g'(a)=g'(b)=0$이고, $f'(x)=3(x-a)(x-b)$이다.

$$g(a)-g(1)=\int_1^a g'(x)dx=\int_1^a f'(x)dx=4,\quad g(b)-g(a)=\int_a^b g'(x)dx=-\int_a^b f'(x)dx=4$$

이다. 연립하여 풀면 $a=2$, $b=4$, $f'(x)=3(x-2)(x-4)$에 $f(1)=-1$을 얹으면 $f(x)=(x-1)(x-4)^2-1$이다.

COMMENT 15

$a_{45}=3a_{22}+2$, $a_{22}=-a_{11}+1$, $a_{11}=3a_5+2$, $a_5=3a_2+2$, $a_2=-a_1+1$이다.

$a_1=a$라 하면 $a_2=-a+1$, $a_5=-3a+5$, $a_{11}=-9a+17$, $a_{22}=9a-16$, $a_{45}=27a-46$이므로

$4a=27a-46$에서 $a=2$이다.

이제 대충 노가다 뛰어야 한다. 수열이 만들어지는 꼴을 보면

$$a_n=2 \begin{array}{l}\nearrow\ a_{2n}=-1\\ \searrow\ a_{2n+1}=8\end{array}\qquad a_n=-1 \begin{array}{l}\nearrow\ a_{2n}=2\\ \searrow\ a_{2n+1}=-1\end{array}$$

$$a_n=8 \begin{array}{l}\nearrow\ a_{2n}=-7\\ \searrow\ a_{2n+1}=26\end{array}\qquad a_n=-7 \begin{array}{l}\nearrow\ a_{2n}=8\\ \searrow\ a_{2n+1}=-19\end{array}$$

이다. 8이 한 번 나오면 2번 건너 다시 8이 나오며, -19나 26이 나오면 8에서 영원히 멀어진다.

COMMENT 20

$g(1)=0$이고 $g'(x)=(x-1)f(x)$이다.

$y=g(x)$의 그래프의 개형을 고려하면 $g'(x)$가 $x\le 0$에서 음수, $x\ge 0$에서 양수이다.

$$f(x)=k(x-1)^2\ (k>0)$$

각이다. $g'(x)=k(x-1)^3$이므로 $g(x)=\frac{k}{4}(x-1)^4$이다.

$$\int_0^2 g(x)dx=\int_0^2\frac{k}{4}(x-1)^4dx=\int_{-1}^1\frac{k}{4}x^4dx=\frac{k}{10}$$

이므로 $k=40$이다.

COMMENT 21

사인법칙에 의해 $\angle BAC = \angle ACB = 45^\circ$ 이다.

$\overline{AB} = 3x$, $\overline{CD} = 4x$, $\overline{AC} = l$이라 하면,

$$50 = 9x^2 + l^2 - 3\sqrt{2}xl, \quad 50 = 16x^2 + l^2 - 4\sqrt{2}xl$$

이다. 연립하여 풀면 $x = 2$, $l = 7\sqrt{2}$ 이다.

다른 풀이) 원의 중심을 O라 하자. 두 삼각형 AOD, BOC는 모두 직각삼각형이다.

$\angle AOB = \theta$라 하면 $\angle COD = \pi - \theta$이다. $\overline{AB} = 3x$, $\overline{CD} = 4x$라 하면,

$$(3a)^2 = 5^2 + 5^2 - 50\cos\theta, \quad (4a)^2 = 5^2 + 5^2 - 50\cos(\pi - \theta)$$

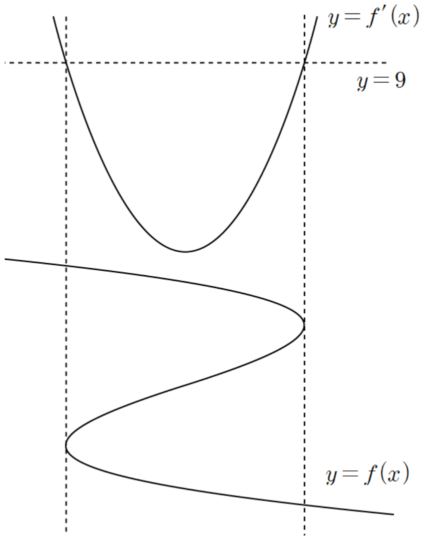
이다.

COMMENT 22

함수 $y = f'(x)$의 그래프는 $x = 2$에 대하여 대칭이다. $f'(u) = t$일 때,

집합 A의 원소는 $f(x) = u$의 근 또는 $f(x) = 4 - u$의 근이다. 근의 개수 차이가

4가 되려면 $f'(x) = 9$의 두 근이 각각 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값이 되어야 한다.



$f'(x) = 3k(x-2)^2 - l$이라 하자. $f'(x) = 9$의 두 근은 $2 \pm \sqrt{\dfrac{l+9}{3k}}$ 이다. $f'(x) = 0$의 두 근이 $2 \pm \sqrt{\dfrac{l}{3k}}$ 이므로

$f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차이는 $\dfrac{3k}{6}\left(2\sqrt{\dfrac{l}{3k}}\right)^3 = \dfrac{4l}{9}\sqrt{\dfrac{3l}{k}}$ 이다. $2\sqrt{\dfrac{l+9}{3k}} = \dfrac{4l}{9}\sqrt{\dfrac{3l}{k}}$ 에서 $l = 3$이다.

$f(2) = 2$이므로 $f(x) = k(x-2)^3 - 3x + 8$이다. $f(0) = 6$에서 $k = \dfrac{1}{4}$이다.

COMMENT 확률과 통계 27

A지점에서 P지점으로 가는 경우의 수 : ↘ 2개와 ↙ 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수 $\dfrac{6!}{4!2!} = 15$이다.

P지점에서 B지점으로 가는 경우의 수 : → 2개와 ↗ 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수인 $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$이다.

COMMENT 확률과 통계 28

Case1) (a_3, a_4)가 $(3, 3)$일 때, (a_1, a_2)는 $(1, 2)$이다. 나머지 1, 2, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수 12가지.

Case2) (a_3, a_4)가 $(3, 2)$일 때, (a_1, a_2)는 $(1, 2)$이다. $\Rightarrow$ 12가지.

Case3) (a_3, a_4)가 $(3, 1)$일 때, (a_1, a_2)는 $(1, 2)$이다. $\Rightarrow$ 12가지.

Case4) (a_3, a_4)가 $(4, 4)$일 때, (a_1, a_2)는 $(1, 2)$ 또는 $(1, 3)$ 또는 $(2, 3)$이다. $\Rightarrow$ 36가지.

Case5) (a_3, a_4)가 $(4, 3)$일 때, (a_1, a_2)는 $(1, 2)$ 또는 $(1, 3)$ 또는 $(2, 3)$이다. $\Rightarrow$ 48가지.

Case6) (a_3, a_4)가 $(4, 2)$일 때, (a_1, a_2)는 $(1, 2)$ 또는 $(1, 3)$ 또는 $(2, 3)$이다. $\Rightarrow$ 48가지.

Case7) (a_3, a_4)가 $(4, 1)$일 때, (a_1, a_2)는 $(1, 2)$ 또는 $(1, 3)$ 또는 $(2, 3)$이다. $\Rightarrow$ 48가지.

COMMENT 확률과 통계 29

Case1) $f(1)=f(2)$인 경우 : 6가지

Case2) $f(1)+1=f(2)$인 경우 $5\times 2^2=20$가지

Case3) $f(1)+2=f(2)$인 경우 $4\times 3^2=36$가지

Case4) $f(1)+3=f(2)$인 경우 $3\times 4^2=48$가지

Case5) $f(1)+4=f(2)$인 경우 $2\times 5^2=50$가지

Case6) $f(1)+5=f(2)$인 경우 $1\times 6^2=36$가지

COMMENT 확률과 통계 30

$a+b+c+d+e=12$인 경우의 수 330에서

ⅰ) $a+b+c=5$, $d+e=7$인 경우의 수 36,

ⅱ) $a+b+c=6$, $d+e=6$인 경우의 수 50,

ⅲ) $a+b+c=7$, $d+e=5$인 경우의 수 60

를 뺀다.

COMMENT 미적분 27

공차를 d라 하면,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{d\times a_1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}\sqrt{a_n}+a_n\sqrt{a_{n+1}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a_n a_{n+1}}(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}})}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{d\sqrt{a_n a_{n+1}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}-\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right)=\frac{1}{d\times\sqrt{a_1}}$$

이므로 $a_1=4$, $d=2$이다.

COMMENT 미적분 28

$\overline{QR}=a$라 두고, 삼각형 OQR에서 코사인을 돌리면

$$6^2=4^2+a^2-8a\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

이므로 $a=2\sqrt{3}$이다. 삼각형 PQR의 넓이는 $\sqrt{11}$이다.

$\overline{RH}=5$이므로 닮음비는 $6:5$, 공비는 $\frac{25}{36}$이다. 구하는 값은 $\dfrac{\sqrt{11}}{1-\frac{25}{36}}$이다.

COMMENT 미적분 29

n에 1부터 대입해보자.

$$\{b_n\} : \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6}, \frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \cdots$$

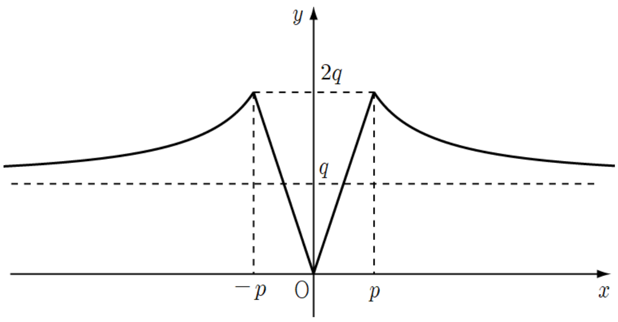
이다.

COMMENT 미적분 30

$f(p)=2q$이다. $2q$와 $f(x)$의 대소를 잘 째려보면,

$$g(x)=\begin{cases} f(-x) & (x \le -p) \\ \alpha|x| & (-p<x \le p) \\ f(x) & (p<x) \end{cases}$$

이다. $\alpha=\dfrac{2q}{p}$이고 $y=g(x)$의 그래프는 아래와 같다.



$$h(k)=\begin{cases} 2 & (k \le q) \\ 4 & (q<k<2q) \\ 2 & (k=2q) \\ 0 & (2q+1 \le k) \end{cases}$$

이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2q} h(k)=6q-2$이다. $q=6$이고 $g(2)=q$에서 $p=4$이다.

COMMENT 기하 28

$\mathrm{P}(a,\ \sqrt{12a})$라 하자. 직선 CP는 포물선 위의 점 P에서의 접선과 수직이므로

직선 CP의 방정식은 $y=-\sqrt{\dfrac{a}{3}}(x-a)+2\sqrt{3a}$이다. 점 C가 이 직선의 x절편이므로

$\mathrm{C}(a+6,\ 0)$이고, $\overline{\mathrm{FC}}=\overline{\mathrm{CP}}$를 풀면 $a=9$이다. 부채꼴의 중심각의 크기는 신기하게도 120°이다.

COMMENT 기하 29

타원의 초점 중 O가 아닌 것을 F라 하자. $\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}=10$이므로 $\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{PQ}}=10-(\overline{\mathrm{FQ}}+\overline{\mathrm{PQ}})$이다.

최댓값은 $\overline{\mathrm{FQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}$가 최소일 때다. $\overline{\mathrm{FO}}=6$이므로 단축의 길이는 8이다.

* 사실 타원의 정의를 갈 것도 없이 $\overline{\mathrm{OQ}}$가 최대가 되며 동시에 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 최소가 되는 경우를 생각할 수 있다. 몰랐지?

COMMENT 기하 30

선분 FF$'$의 기울기를 $\tan\theta$라 하면,

$$\overline{\mathrm{FP}}=\frac{2p}{1-\cos\theta},\quad \overline{\mathrm{F'Q}}=\frac{4p}{1+\cos\theta},\quad \cos\theta=\frac{12+p}{30}$$

이다. 연립하여 풀면 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$, $p=3$, $a=15\sqrt{3}$이다.