05 확통 01 여러가지순열

01 중복순열

04 중복순열4 (중복허락, 여사건)

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 11월 18

[출처] 2020 일반_기타개인 구분

[출처] 2020 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 고등 수학영역 확률과 통계(2020)(2021 수능대비)(EBS 수능특강) 대표 기출 문제

1. 서로 다른 공 4개를 남김없이 서로 다른 상자 4개에 나누어 넣으려고 할 때, 넣은 공의 개수가 1인 상자가 있도록 넣는 경우의 수는?
(단, 공을 하나도 넣지 않은 상자가 있을 수 있다.)

① 220 ② 216 ③ 212
④ 208 ⑤ 204

[출처] 2017 모의_공공 경찰대 고3 07월 13

2. 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 각각 적힌 5개의 공을 모두 3개의 상자 A, B, C에 넣으려고 한다. 각 상자에 넣어진 공에 적힌 수의 합이 11 이하가 되도록 공을 상자에 넣는 방법의 수는? (단, 빈 상자의 경우에는 넣어진 공에 적힌 수의 합을 0으로 생각한다.)

① 190 ② 195 ③ 200
④ 205 ⑤ 210

05 확통 01 여러가지순열

01 중복순열

05 중복순열5 (정수의 개수)

[출처] 2009 모의_공공 사관학교 고3 07월 23

[출처] 2009 모의_공공 사관학교 고3 07월 23

3. 최대공약수가 $5!$, 최소공배수가 $13!$이 되는 두 자연수 k, n $(k \le n)$의 순서쌍 (k, n)의 개수는?

① 25 ② 27 ③ 32

④ 36 ⑤ 49

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 07월 21

4. 세 수 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 다섯 개의 수를 택해 다음 조건을 만족시키도록 일렬로 배열하여 자연수를 만든다.

(가) 다섯 자리의 자연수가 되도록 배열한다.

(나) 1끼리는 서로 이웃하지 않도록 배열한다.

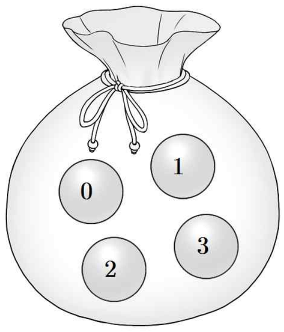
예를 들어 20200, 12201은 조건을 만족시키는 자연수이고 11020은 조건을 만족시키지 않는 자연수이다. 만들 수 있는 모든 자연수의 개수는?

① 88 ② 92 ③ 96

④ 100 ⑤ 104

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 03월 29

5. 주머니 속에 네 개의 숫자 0, 1, 2, 3이 각각 하나씩 적혀 있는 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이 과정을 3번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 차례로 a, b, c라 하자. $\frac{bc}{a}$가 정수가 되도록 하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하시오.



[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 확률과 통계 29

6. 숫자 1, 2, 3 중에서 모든 숫자가 한 개 이상씩 포함되도록 중복을 허락하여 6개를 선택한 후, 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수 중 일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 같은 자연수의 개수를 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 확률과 통계 30

7. 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수를 구하시오.

(가) 숫자 1은 한 번 이상 나온다. (나) 이웃한 두 수의 차는 모두 2 이하이다.

05 확통 01 여러가지순열

01 중복순열

06 중복순열6 (함수의 개수)

[출처] 2002 모의_공공 교육청 고3 06월 11

[출처] 2002 모의_공공 교육청 고3 06월 18

[출처] 2002 모의_공공 교육청 고3 06월 11

8. $A=\{1, 2, 3\}$에서 A로의 함수 f가 두 조건

i) 함수 f는 일대일대응이다.

ii) 합성함수 $f \circ f \circ f$는 함수 f와 같다.

를 만족하는 함수 f의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 09월 이산수학 29

9. 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$에서 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$로의 함수 중에서 다음 조건을 만족하는 함수 f의 개수는?

(가) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 2이다. (나) 합성함수 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수는 1이다.

① 36 ② 42 ③ 48
④ 54 ⑤ 60

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 확률과 통계 28

10. 두 집합

$X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는?

(가) $f(2)<f(3)<f(4)$ (나) $f(1)>f(3)>f(5)$

① 100 ② 102 ③ 104
④ 106 ⑤ 108

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 확률과 통계 28

11. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to X$의 개수는?

(가) $f(3)+f(4)$는 5의 배수이다.
(나) $f(1)<f(3)$이고 $f(2)<f(3)$이다.
(다) $f(4)<f(5)$이고 $f(4)<f(6)$이다.

① 384 ② 394 ③ 404
④ 414 ⑤ 424

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 28

12. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는?

(가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)\geq\sqrt{x}$이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128 ② 138 ③ 148
④ 158 ⑤ 168

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 확률과 통계 30

13. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$와 함수 $f:X\to X$에 대하여 함수 f의 치역을 A, 합성함수 $f\circ f$의 치역을 B라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오.

(가) $n(A)\leq 3$
(나) $n(A)=n(B)$
(다) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)\neq x$이다.

05 확통 01 여러가지순열

01 중복순열

07 중복순열7 (집합의 개수)

[출처] 2016 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

14. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$에 대하여

$$X\not\subset A,\ X\not\subset B,\ X\subset(A\cup B)$$

를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오.

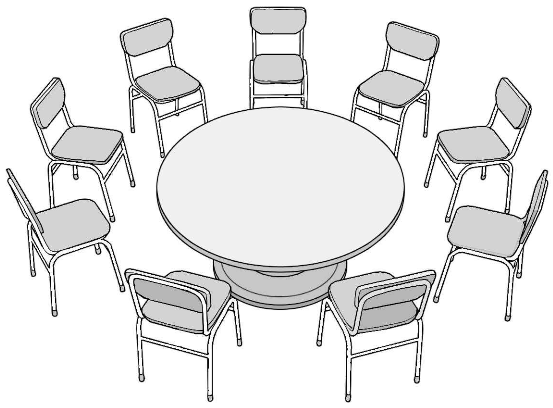
05 확통 01 여러가지순열

02 원순열

01 원순열1 (원순열)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 03월 15

15. 여학생 3명과 남학생 6명이 원탁에 같은 간격으로 둘러앉으려고 한다. 각각의 여학생 사이에는 1명 이상의 남학생이 앉고 각각의 여학생 사이에 앉은 남학생의 수는 모두 다르다. 9명의 학생이 모두 앉는 경우의 수가 $n\times 6!$일 때, 자연수 n의 값은?
(단, 회전하여 일치하는 것들은 같은 것으로 본다.)

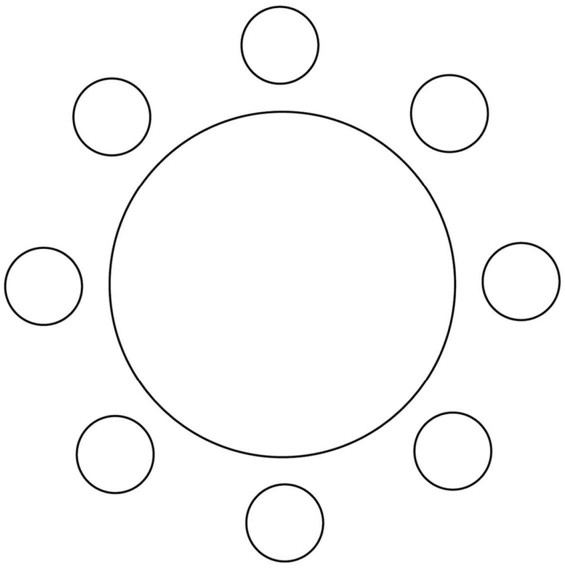


① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 확률과 통계 29

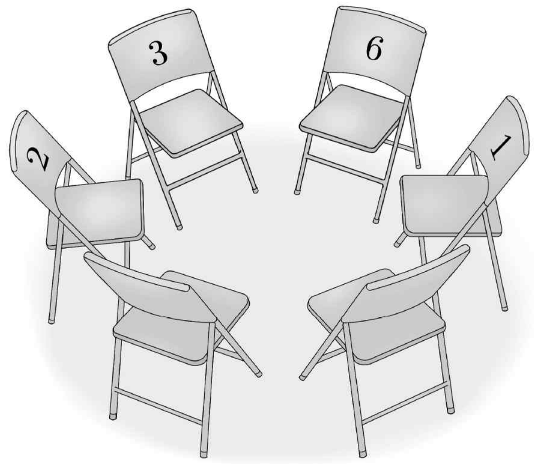
16. 두 남학생 A, B를 포함한 4명의 남학생과 여학생 C를 포함한 4명의 여학생이 있다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

(가) A와 B는 이웃한다. (나) C는 여학생과 이웃하지 않는다.



[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 확률과 통계 29

17. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



05 확통 01 여러가지순열

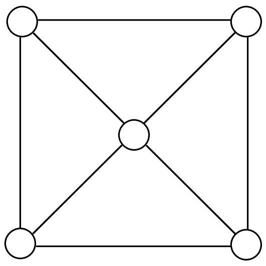
02 원순열

02 원순열2 (다각형)

[출처] 2007 모의_공공 사관학교 고3 07월 23

[출처] 2007 모의_공공 사관학교 고3 07월 23

18. 그림과 같이 정사각형과 서로 합동인 5개의 원으로 이루어진 놀이판이 있다. 각 원의 중심은 정사각형의 네 꼭짓점과 두 대각선이 만나는 점이다. 서로 다른 5개의 돌 중에서 3개를 뽑아 3개의 원 안에 각각 1개씩 올려놓는 방법의 수는?
(단, 회전하여 같은 경우는 한 가지로 계산한다.)



① 150 ② 160 ③ 170
④ 190 ⑤ 200

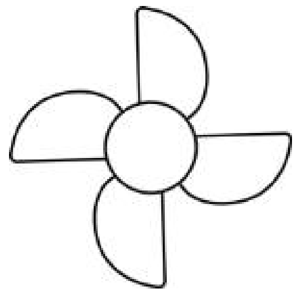
05 확통 01 여러가지순열

02 원순열

03 원순열3 (색칠)

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 03월 15

19. A, B, C, D 4가지 색의 일부 또는 전부를 사용하여 그림과 같은 프로펠러의 중앙 부분과 4개의 날개 부분을 모두 칠하려고 한다. 인접한 중앙 부분과 날개 부분은 서로 다른 색으로 칠하기로 할 때, 칠할 수 있는 방법의 수는?
(단, 4개의 날개는 모두 합동이고, 회전하여 같은 경우에는 한 가지 방법으로 한다.)

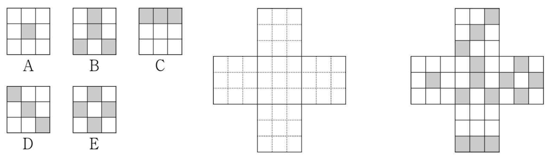


① 60 ② 72 ③ 84
④ 96 ⑤ 108

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 18

20. [그림 1]과 같이 5개의 스티커 A, B, C, D, E는 각각 흰색 또는 회색으로 칠해진 9개의 정사각형으로 이루어져 있다. 이 5개의 스티커를 모두 사용하여 [그림 2]의 45개의 정사각형으로 이루어진  모양의 판에 빈틈없이 붙여 문양을 만들려고 한다. [그림 3]은 스티커 B를  모양의 판의 중앙에 붙여 만든 문양의 한 예이다.



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

다음은 5개의 스티커를 모두 사용하여 만들 수 있는 서로 다른 문양의 개수를 구하는 과정의 일부이다. (단,  모양의 판을 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

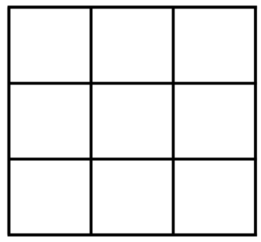
>  모양의 판의 중앙에 붙이는 스티커에 따라 다음과 같이 3가지 경우로 나눌 수 있다.
>
> (i) A 또는 E를 붙이는 경우
> 나머지 4개의 스티커를 붙일 위치를 정하는 경우의 수는 $3!$
> 이 각각에 대하여 4개의 스티커를 붙이는 경우의 수는 $1\times2\times4\times4$
> 그러므로 이 경우의 수는 $2\times3!\times32$
>
> (ii) B 또는 C를 붙이는 경우
> 나머지 4개의 스티커를 붙일 위치를 정하는 경우의 수는 $\boxed{(가)}$
> 이 각각에 대하여 4개의 스티커를 붙이는 경우의 수는 $1\times1\times2\times4$
> 그러므로 이 경우의 수는 $2\times\boxed{(가)}\times8$
>
> (iii) D를 붙이는 경우
> 나머지 4개
> 의 스티커를 붙일 위치를 정하는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$
> 이 각각에 대하여 4개의 스티커를 붙이는 경우의 수는 $\boxed{(다)}$
> 그러므로 이 경우의 수는 $\boxed{(나)}\times\boxed{(다)}$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값은?

① 52 ② 54 ③ 56
④ 58 ⑤ 60

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 27

21. 그림과 같이 합동인 9개의 정사각형으로 이루어진 색칠판이 있다.



빨간색과 파란색을 포함하여 총 9가지의 서로 다른 색으로 이 색칠판을 다음 조건을 만족시키도록 칠하려고 한다.

> (가) 주어진 9가지의 색을 모두 사용하여 칠한다.
> (나) 한 정사각형에는 한 가지 색만을 칠한다.
> (다) 빨간색과 파란색이 칠해진 두 정사각형은 꼭짓점을 공유하지 않는다.

색칠판을 칠하는 경우의 수는 $k\times7!$이다. k의 값을 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

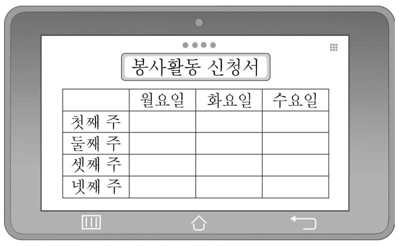
05 확통 01 여러가지순열

03 같은 것을 포함한 순열

01 같은 것을 포함한 순열1 (배열)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 19

22. 매주 월요일부터 수요일까지 총 4주에 걸쳐 서로 다른 세 종류의 봉사활동 A, B, C를 반드시 하루에 한 종류씩 다음 규칙에 따라 신청하려고 한다.



- 봉사활동 A, B, C를 각각 3회, 3회, 6회 신청한다.
- 첫째 주에는 봉사활동 A, B, C를 모두 신청한다.
- 같은 요일에는 두 종류 이상의 봉사활동을 신청한다.

다음은 봉사활동을 신청하는 경우의 수를 구하는 과정이다.

규칙에 따라 봉사활동을 신청하는 경우는 첫째 주에 봉사활동 A, B, C를 모든 신청한 후

‘(ⅰ) 첫째 주를 제외한 3주간의 봉사활동을 신청하는 경우’에서

‘(ⅱ) 첫째 주에 봉사활동 C를 신청한 요일과 같은 요일에 모두 봉사활동 C를 신청하는 경우’를 제외하면 된다.

첫째 주에 봉사활동 A, B, C를 모든 신청하는 경우의 수는 $3!$이다.

(ⅰ)의 경우 : 봉사활동 A, B, C를 각각 2회, 2회, 5회 신청하는 경우의 수는 $\boxed{(가)}$이다.

(ⅱ)의 경우 : 첫째 주에 봉사활동 C를 신청한 요일과 같은 요일에 모두 봉사활동 C를 신청하는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 경우의 수는

$3! \times (\boxed{(가)} - \boxed{(나)})$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은?

① 825 ② 832 ③ 839 ④ 846 ⑤ 853

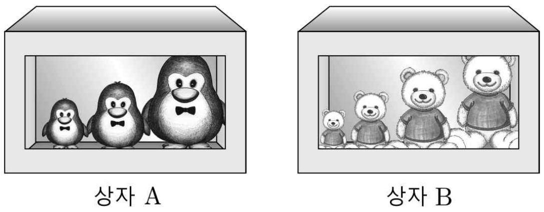
05 확통 01 여러가지순열

03 같은 것을 포함한 순열

02 같은 것을 포함한 순열2 (정해진 순서)

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 07월

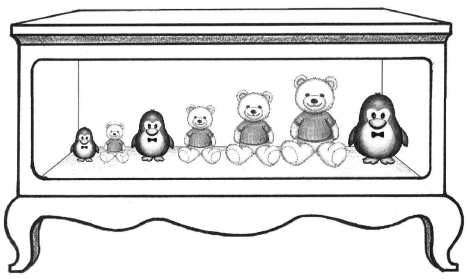
23. 그림과 같이 크기가 서로 다른 3개의 펭귄 인형과 4개의 곰 인형이 두 상자 A, B에 왼쪽부터 크기가 작은 것에서 큰 것 순으로 담겨져 있다.



다음 조건을 만족시키도록 상자 A, B의 모든 인형을 일렬로 진열하는 경우의 수를 구하시오.

(가) 같은 상자에 담겨있는 인형은 왼쪽부터 크기가 작은 것에서 큰 것 순으로 진열한다.

(나) 상자 A의 왼쪽에서 두 번째 펭귄 인형은 상자 B의 왼쪽에서 두 번째 곰 인형보다 왼쪽에 진열한다.



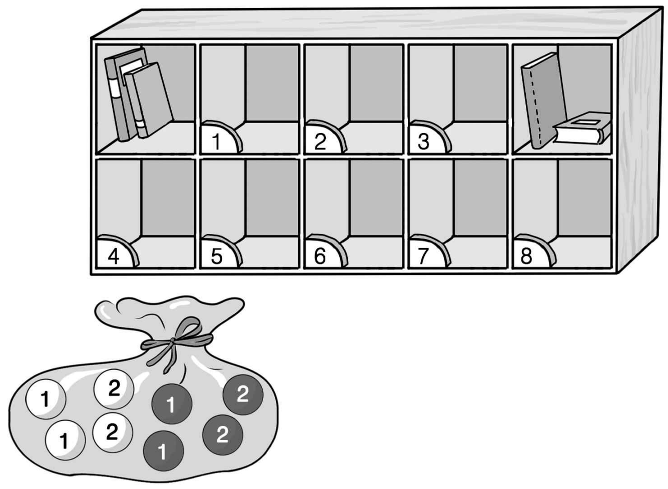
05 확통 01 여러가지순열

03 같은 것을 포함한 순열

03 같은 것을 포함한 순열3 (일부 선택 후 배열)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 04월 28

24. 그림과 같이 주머니에 숫자 1이 적힌 흰 공과 검은 공이 각각 2개, 숫자 2가 적힌 흰 공과 검은 공이 각각 2개가 들어 있고, 비어 있는 8개의 칸에 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 진열장이 있다.



숫자가 적힌 8개의 칸에 주머니 안의 공을 한 칸에 한 개씩 모두 넣을 때, 숫자 4, 5, 6이 적힌 칸에 넣는 세 개의 공이 적힌 수의 합이 5이고 모두 같은 색이 되도록 하는 경우의 수를 구하시오. (단, 모든 공은 크기와 모양이 같다.)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 04월 20

25. 다음은 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 8 이상의 짝수인 경우의 수를 구하는 과정이다.

> (ⅰ) 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 모든 경우의 수는 216이다.
>
> (ⅱ) 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 홀수인 경우는 1, 3, 5 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택한 후 일렬로 배열하는 중복순열과 같으므로 이 경우의 수는 $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.
>
> (ⅲ) 6 이하의 짝수는 2, 4, 6이므로 세 수의 곱이 2인 경우는 2, 1, 1을 일렬로 배열하는 순열, 세 수의 곱이 4인 경우는 4, 1, 1 또는 2, 2, 1을 일렬로 배열하는 순열, 세 수의 곱이 6인 경우는 6, 1, 1 또는 3, 2, 1을 일렬로 배열하는 순열이다. 그러므로 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 6 이하의 짝수인 경우의 수는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.
>
> 따라서 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 8 이상의 짝수인 경우의 수는 $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $3a+2b+c$의 값은?

① 282 ② 284 ③ 286
④ 288 ⑤ 290

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 28
[출처] 2021 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능특강 대표 기출 문제
[출처] 2022 일반_시중교재 좋은책신사고 홍범준,김의석,김형정,김형균,신사고수학콘텐츠연구회 쎈

26. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 다섯 개를 다음 조건을 만족시키도록 선택한 후, 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 다섯 자리의 자연수의 개수를 구하시오.

> (가) 각각의 홀수는 선택하지 않거나 한 번만 선택한다.
>
> (나) 각각의 짝수는 선택하지 않거나 두 번만 선택한다.

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 19

27. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 다섯 개를 다음 조건을 만족시키도록 선택한 후, 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 다섯 자리의 자연수의 개수는?

> (가) 각각의 홀수는 선택하지 않거나 한 번만 선택한다.
>
> (나) 각각의 짝수는 선택하지 않거나 두 번만 선택한다.

① 450 ② 445 ③ 440
④ 435 ⑤ 430

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 확률과 통계 28
[출처] 2022 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능특강 대표 기출 문제

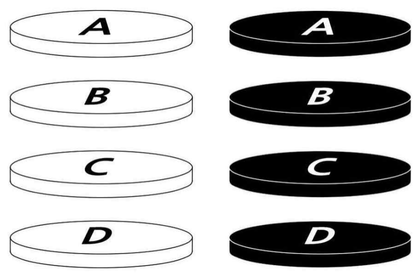
28. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3이하이면 나온 눈의 수를 점수로 얻고, 나온 눈의 수가 4이상이면 0점을 얻는다. 이 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 할 때, 얻은 네 점수의 합이 4가 되는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는?

① 187 ② 190 ③ 193
④ 196 ⑤ 199

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 확률과 통계 30

29. 흰색 원판 4개와 검은색 원판 4개에 각각 A, B, C, D의 문자가 하나씩 적혀 있다. 이 8개의 원판 중에서 4개를 택하여 다음 규칙에 따라 원기둥 모양으로 쌓는 경우의 수를 구하시오. (단, 원판의 크기는 모두 같고, 원판의 두 밑면은 서로 구별하지 않는다.)

> (가) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 있으면 같은 문자가 적힌 원판끼리는 검은색 원판이 흰색 원판보다 아래쪽에 놓이도록 쌓는다.
>
> (나) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 없으면 D가 적힌 원판이 맨 아래에 놓이도록 쌓는다.



05 확통 01 여러가지순열

03 같은 것을 포함한 순열

05 같은 것을 포함한 순열5 (함수의 개수)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 20

30. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 함수 $f:X\to X$의 치역을 A, 합성함수 $f\circ f$의 치역을 B라 할 때, 두 집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

∘ $n(A)\geq 3$

∘ 집합 A의 모든 원소의 합이 3의 배수이다.

∘ $n(A)>n(B)$

다음은 함수 f의 개수는 구하는 과정이다.

(i) $n(A)=3$이고 모든 원소의 합이 3의 배수인 집합 A는

$\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{1,\ 3,\ 5\}$, $\{2,\ 3,\ 4\}$, $\{3,\ 4,\ 5\}$

이다.

$A=\{1,\ 2,\ 3\}$인 경우 $n(B)<3$이므로 집합 B는

$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 3\}$

이다.

$A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1\}$인 경우 함수 f의 개수는 $\boxed{\text{(가)}}$이고,

$A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2\}$인 경우

함수 f의 개수는 $\boxed{\text{(나)}}$이므로

$n(A)=3$, $n(B)<3$이고 집합 A의 모든 원소의 합이 3의 배수가 되도록 하는 함수 f의 개수는

$4\times(3\times\boxed{\text{(가)}}+3\times\boxed{\text{(나)}})$이다.

(ii) $n(A)=4$이고 모든 원소의 합이 3의 배수인 집합 A는 $\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$뿐이므로 이 경우 $n(B)<4$를 만족시키는 함수 f의 개수는 $\boxed{\text{(다)}}$이다.

(iii) $n(A)=5$인 경우 함수 f는 일대일대응이고 $n(B)=5$이므로 $n(A)>n(B)$를 만족시키는 함수 f는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$4\times(3\times\boxed{\text{(가)}}+3\times\boxed{\text{(나)}})+\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은?

① 164 ② 168 ③ 172

④ 176 ⑤ 180

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 9

31. 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 A로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수는?

(가) $\log f(x)$는 일대일함수가 아니다. (나) $\log\{f(1)+f(2)+f(3)\}=2\log 2+\log 3$ (다) $\log f(4)+\log f(5)\leq 1$

① 134 ② 140 ③ 146
④ 152 ⑤ 158

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 확률과 통계 30

32. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to X$의 개수를 구하시오.

(가) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$는 짝수이다. (나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

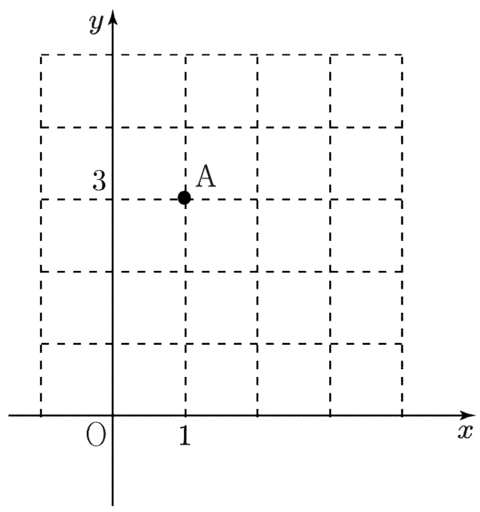
05 확통 01 여러가지순열

03 같은 것을 포함한 순열

07 같은 것을 포함한 순열7 (점의 이동)

[출처] 2004 모의_공공 교육청 고3 03월 29

33. 좌표평면 위에서 상하 또는 좌우방향으로 한 번에 1만큼씩 움직이는 점 P가 있다. 이 때, 원점을 출발한 점 P가 6번 움직여서 최종 위치가 점 A(1, 3)이 되는 경우의 수를 구하시오.



[출처] 2004 모의_공공 교육청 고2 11월 11

34. 좌표평면에서 원점을 출발하여 x축 또는 y축의 양의 방향으로 1씩 이동하여 점 $\mathrm{P}(a, b)$까지 가는 방법의 수를 $f(a, b)$로 나타내자. 예를 들면, $f(1, 2)=3$, $f(2, 2)=6$이다. <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면?
(단, a, b는 음이 아닌 정수이다.)

<보 기>

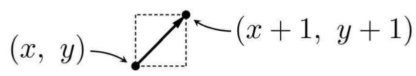
ㄱ. $f(2, 3)=10$
ㄴ. $f(a, b)=f(b, a)$
ㄷ. $f(f(1, 2), 3)=f(1, f(2, 3))$
ㄹ. 직선 $x+y=6$ 위의 점 중에서 $f(a, b)=15$를 만족하는 점은 2개이다.

① ㄱ, ㄷ ② ㄴ, ㄹ ③ ㄷ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄹ

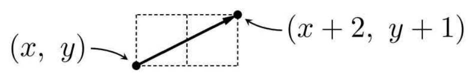
[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 27

35. 한 번 누를 때마다 좌표평면 위의 점 P를 다음과 같이 이동시키는 두 버튼 ㉠, ㉡이 있다.

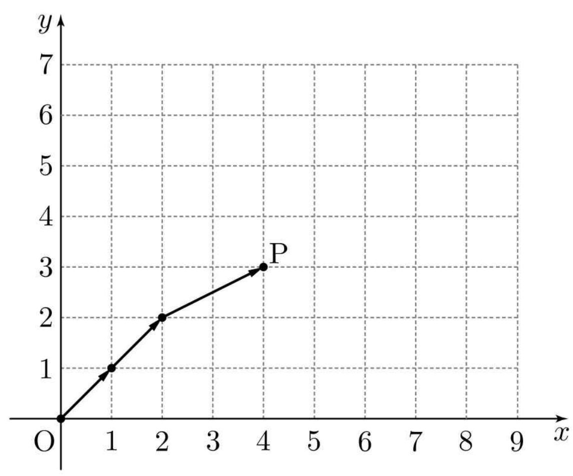
[버튼 ㉠] 그림과 같이 길이가 $\sqrt{2}$인 선분을 따라 점 (x, y)에 있는 점 P를 점 $(x+1, y+1)$로 이동시킨다.



[버튼 ㉡] 그림과 같이 길이가 $\sqrt{5}$인 선분을 따라 점 (x, y)에 있는 점 P를 점 $(x+2, y+1)$로 이동시킨다.



예를 들어, 버튼을 ㉠, ㉠, ㉡ 순으로 누르면 원점 $(0, 0)$에 있는 점 P는 아래 그림과 같이 세 선분을 따라 점 $(4, 3)$으로 이동한다. 또한 원점 $(0, 0)$에 있는 점 P를 점 $(4, 3)$으로 이동시키도록 버튼을 누르는 경우는 ㉠㉠㉡, ㉠㉡㉠, ㉡㉠㉠으로 3가지이다.



원점 $(0, 0)$에 있는 점 P를 두 점 $\mathrm{A}(5, 5)$, $\mathrm{B}(6, 4)$중 어느 점도 지나지 않고 점 $\mathrm{C}(9, 7)$로 이동시키도록 두 버튼 ㉠, ㉡을 누르는 경우의 수를 구하시오.

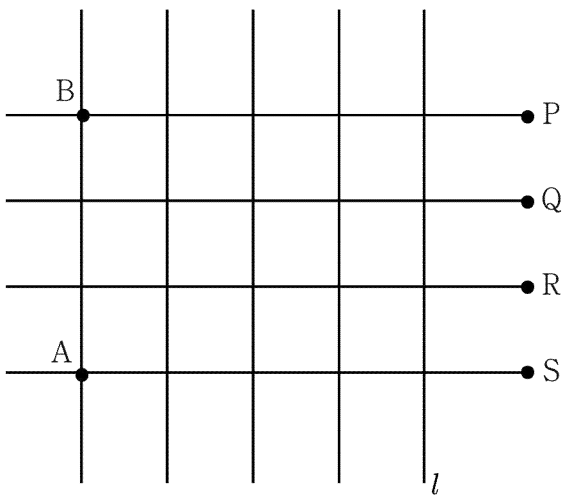
05 확통 01 여러가지순열

03 같은 것을 포함한 순열

08 최단경로의 수1 (평면)

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고2 11월 30

36. 그림과 같이 가로 방향 도로와 세로 방향 도로가 각각 서로 평행한 도로망이 있다. 도로망 위의 A, B지점에 숙소가 있고, P, Q, R, S지점에 관광지가 있다. 부모님을 모시고 효도관광을 온 어느 가족이 A지점에 있는 숙소를 출발하여 P, Q, R, S지점에 있는 관광지 중 두 곳을 관광한 후 B지점에 있는 숙소로 가기로 하였을 때, 이 가족이 도로망을 따라 이동할 수 있는 최단 경로의 수를 구하시오. (단, P, Q, R, S지점에서 직선도로 l까지의 거리는 모두 같다.)



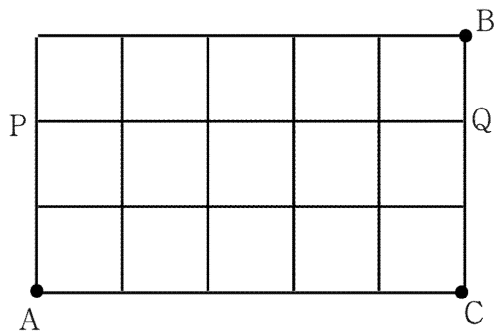
05 확통 01 여러가지순열

03 같은 것을 포함한 순열

09 최단경로의 수2 (추론)

[출처] 2008 모의_공공 사관학교 고3 07월 24

37. 철수가 자동차로 그림과 같은 바둑판 모양의 도로를 따라 A 지점에서 약속 장소인 B 지점까지 최단 거리로 가는 도중에, 도로 PQ 위에서 약속 장소가 C 지점으로 변경되었다는 연락을 받고 곧바로 C 지점을 향하여 도로를 따라 최단 거리로 이동하였다. 이 때, 철수가 A 지점에서 출발하여 C 지점까지 최단 거리로 이동하는 경로의 수는? (단, 연락 받은 위치가 달라도 이동 경로가 같으면 동일한 경우로 간주한다.)

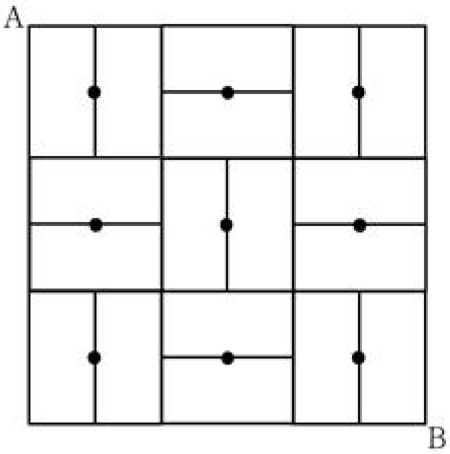


① 120　② 122　③ 124
④ 126　⑤ 128

[출처] 2010 모의_공공 사관학교 고3 07월 23

[출처] 2010 모의_공공 사관학교 고3 07월 23

38. 그림과 같이 직사각형 모양으로 이루어진 도로망이 있고, 이 도로망의 9개의 지점에 ●이 표시되어 있다.

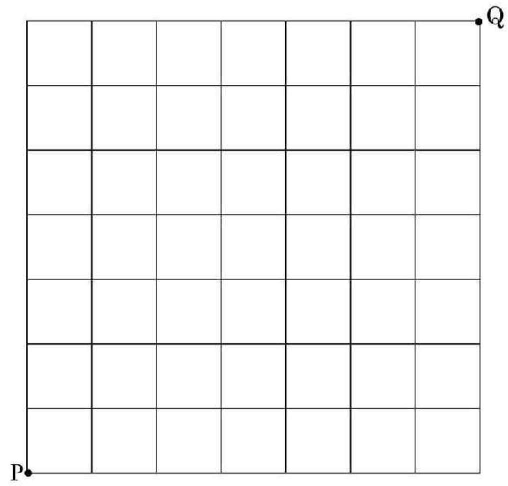


A 지점에서 B 지점까지 가는 최단경로 중에서 ●이 표시된 9개의 지점 중 오직 한 지점만을 지나는 경로의 수는?

① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 15

39. 그림과 같은 바둑판 모양의 도로망이 있다.



P지점에서 출발하여 Q지점까지 도로를 따라 최단 거리로 갈 때, 도중에 방향을 바꾸는 횟수가 x번인 경로의 수를 $f(x)$라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

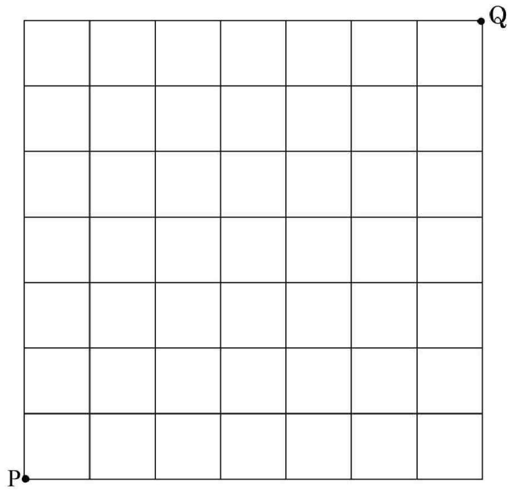
<보 기>

ㄱ. $f(1)=2$
ㄴ. $f(2)=f(12)$
ㄷ. $f(x)$의 최댓값은 $f(7)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 07월 15

40. 그림과 같은 바둑판 모양의 도로망이 있다.



P지점에서 출발하여 Q지점까지 도로를 따라 최단 거리로 갈 때, 도중에 방향을 바꾸는 횟수가 x번인 경로의 수를 $f(x)$라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

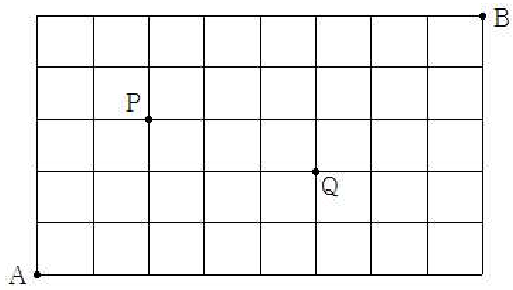
<보 기>

ㄱ. $f(1)=2$
ㄴ. $f(2)=f(12)$
ㄷ. $f(x)$의 최댓값은 $f(7)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2016 모의_공공 경찰대 고3 07월 9

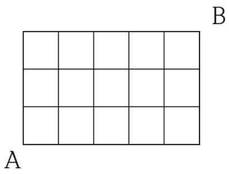
41. 아래 그림은 어느 도시의 도로를 선으로 나타낸 것이다. 교차로 P 에서는 좌회전을 할 수 없고, 교차로 Q 는 공사 중이어서 지나갈 수 없다고 한다. A 를 출발하여 B 에 도달하는 최단경로의 개수는?



① 818 ② 825 ③ 832
④ 839 ⑤ 846

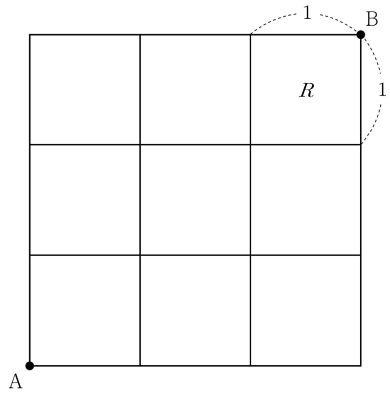
[출처] 2018 모의_공공 경찰대 고3 07월 25

42. 그림과 같이 인접한 교차로 사이의 거리가 모두 1인 바둑판 모양의 도로가 있다. A지점에서 B지점까지의 최단 경로 중에서 가로 또는 세로의 길이가 3 이상인 직선 구간을 포함하는 경로의 개수를 구하시오.



[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 29

43. 그림과 같이 바둑판 모양의 도로망이 있다. 이 도로망은 정사각형 R와 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 9개로 이루어진 모양이다.



이 도로망을 따라 최단거리로 A지점에서 출발하여 B지점을 지나 다시 A지점까지 돌아올 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오.

(가) 정사각형 R의 네 변을 모두 지나야 한다. (나) 한 변의 길이가 1인 정사각형 중 네 변을 모두 지나게 되는 정사각형은 오직 정사각형 R뿐이다.

05 확통

02 중복조합

01 중복조합

03 중복조합3 (개수조건)

[출처] 2016 모의_공공 사관학교 고3 07월 14

44. 같은 종류의 볼펜 6 개, 같은 종류의 연필 6 개, 같은 종류의 지우개 6 개가 필통에 들어 있다. 이 필통에서 8 개를 동시에 꺼내는 경우의 수는?
(단, 같은 종류끼리는 서로 구별하지 않는다.)

① 18 ② 24 ③ 30
④ 36 ⑤ 42

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 09월 20

45. 다음은 n 명의 사람이 각자 세 상자 A, B, C 중 2 개의 상자를 선택하여 각 상자에 공을 하나씩 넣을 때, 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수를 구하는 과정이다.
(단, n 은 6 의 배수인 자연수이고 공은 구별하지 않는다.)

> 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우는 '(i) 세 상자에 공이 들어가는 모든 경우'에서 '(ii) 세 상자에 모두 같은 개수의 공이 들어가는 경우'와 '(iii) 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우'를 제외하면 된다.
>
> (i) 의 경우:
> n 명의 사람이 각자 세 상자 중 공을 넣을 두 상자를 선택하는 경우의 수는 n 명의 사람이 각자 공을 넣지 않을 한 상자를 선택하는 경우의 수와 같다. 따라서 세 상자에서 중복을 허락하여 n 개의 상자를 선택하는 경우의 수인 $\boxed{(가)}$ 이다.
>
> (ii) 의 경우:
> 각 상자에 $\frac{2n}{3}$ 개의 공이 들어가는 경우뿐이므로 경우의 수는 1 이다.
>
> (iii) 의 경우:
> 두 상자 A, B 에 같은 개수의 공이 들어가면 상자 C 에는 최대 n 개의 공을 넣을 수 있으므로 두 상자 A, B 에 각각 $\frac{n}{2}$ 개의 작은 개수의 공이 들어갈 수 없다. 따라서 두 상자 A, B 에 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$ 이다.
> 그러므로 세 상자 중 두 상제에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는
> ${}_3C_2 \times (\boxed{(나)} - 1)$ 이다.
>
> 따라서 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 $\boxed{(다)}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ 이라 할 때, $\frac{f(30)}{g(30)} + h(30)$ 의 값은?

① 481 ② 491 ③ 501
④ 511 ⑤ 521

[준킬러][확통] 1경우의수

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 03월 29

46. 사과, 배, 귤 세 종류의 과일이 각각 2개씩 있다. 이 6개의 과일 중 4개를 선택하여 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 종류의 과일은 서로 구별하지 않고, 과일을 한 개도 받지 못하는 학생은 없다.)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 28

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 29

47. 연필 7자루와 볼펜 4자루를 다음 조건을 만족시키도록 여학생 3명과 남학생 2명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 연필끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜끼리도 서로 구별하지 않는다.)

(가) 여학생이 각각 받는 연필의 개수는 서로 같고, 남학생이 각각 받는 볼펜의 개수도 서로 같다.

(나) 여학생은 연필을 1자루 이상 받고, 볼펜을 받지 못하는 여학생이 있을 수 있다.

(다) 남학생은 볼펜을 1자루 이상 받고, 연필을 받지 못하는 남학생이 있을 수 있다.

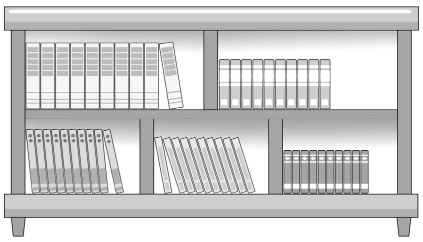
[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 29

48. 검은색 볼펜 1자루, 파란색 볼펜 4자루, 빨간색 볼펜 4자루가 있다. 이 9자루의 볼펜 중에서 5자루를 선택하여 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.
(단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜을 1자루도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 29

49. 어느 학교 도서관에서 독서프로그램 운영을 위해 철학, 사회과학, 자연과학, 문학, 역사 분야에 해당하는 책을 각 분야별로 10권씩 총 50권을 준비하였다. 한 학급에서 이 50권의 책 중 24권의 책을 선택하려고 할 때, 다음 조건을 만족시키도록 선택하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 같은 분야에 해당하는 책은 서로 구별하지 않는다.)

> (가) 철학, 사회과학, 자연과학 각각의 분야에 해당하는 책은 4권 이상씩 선택한다.
>
> (나) 문학 분야에 해당하는 책은 선택하지 않거나 4권 이상 선택한다.
>
> (다) 역사 분야에 해당하는 책은 선택하지 않거나 4권 이상 선택한다.



[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 28

50. 세 명의 학생 A, B, C에게 같은 종류의 빵 3개와 같은 종류의 우유 4개를 남김없이 나누어 주려고 한다. 빵만 받는 학생은 없고, 학생 A는 빵을 1개 이상 받도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.
(단, 우유를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 29

51. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은 색 모자 6개와 흰 색 모자 6개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.
(단, 같은 색 모자끼리는 서로 구별하지 않는다.)

> (가) 각 학생은 1개 이상의 모자를 받는다.
>
> (나) 학생 A가 받은 검은색 모자의 개수는 4이상이다.
>
> (다) 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생은 A를 포함하여 2명뿐이다.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 29

52. 흰 공 2개, 빨간 공 3개, 검은 공 3개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 흰 공을 받은 학생은 빨간 공과 검은 공도 반드시 각각 1개 이상 받도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않고, 공을 하나도 받지 못하는 학생은 없다.)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 29

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 29

53. 흰 공 4개와 검은 공 6개를 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 확률과 통계 30

[출처] 2022 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능특강 대표 기출 문제

54. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사인펜 14개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.

> (가) 각 학생은 1개 이상의 사인펜을 받는다.
> (나) 각 학생이 받는 사인펜의 개수는 9이하이다.
> (다) 적어도 한 학생은 짝수 개의 사인펜을 받는다.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 확률과 통계 30

55. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은 공 4개, 흰 공 5개, 빨간 공 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.
(단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.)

> (가) 각 학생이 받는 공의 색의 종류의 수는 2이다.
> (나) 학생 A는 흰 공과 검은 공을 받으며 흰 공보다 검은 공을 더 많이 받는다.
> (다) 학생 A가 받는 공의 개수는 홀수이며 학생 A가 받는 공의 개수 이상의 공을 받는 학생은 없다.

05 확통 02 중복조합

01 중복조합

05 중복조합5 (부정방정식)

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 09월 27

56. 다음 조건을 만족시키는 2 이상의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오.

> (가) $a+b+c+d=20$
>
> (나) a, b, c는 모두 d의 배수이다.

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 11월 27

57. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오.

> (가) $a+b+c=7$
>
> (나) $2^a \times 4^b$ 은 8 의 배수이다.

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 04월 28

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 04월 28

58. 다음 조건을 만족시키는 자연수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수를 구하시오.

> (가) $x+y+z+w=18$
>
> (나) x, y, z, w 중에서 2개는 3으로 나눈 나머지가 1이고, 2개는 3으로 나눈 나머지가 2이다.

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 04월 21

59. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?

> (가) $a+b+c+d=12$
>
> (나) 좌표평면에서 두 점 (a, b), (c, d)는 서로 다른 점이며 두 점 중 어떠한 점도 직선 $y=2x$ 위에 있지 않다.

① 125 ② 134 ③ 143

④ 152 ⑤ 161

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 20

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 20

60. 자연수 n에 대하여 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 a_n이라 하자. 다음은 $\sum_{n=1}^{8} a_n$의 값을 구하는 과정이다.

> 음이 아닌 정수 a, b, c, d가 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키려면 음이 아닌 정수 k에 대하여 $c+d=2k$이어야 한다.
>
> $c+d=2k$인 경우는 (1) 음이 아닌 정수 k_1, k_2에 대하여 $c=2k_1$, $d=2k_2$인 경우이거나 (2) 음이 아닌 정수 k_3, k_4에 대하여 $c=2k_3+1$, $d=2k_4+1$인 경우이다.
>
> (1) $c=2k_1$, $d=2k_2$인 경우 :
> $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 개수는 $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.
>
> (2) $c=2k_3+1$, $d=2k_4+1$인 경우 :
> $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 개수는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.
>
> (1), (2)에 의하여 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수 a_n은
>
> $$a_n=\boxed{\text{(가)}}+\boxed{\text{(나)}}$$
>
> 이다. 자연수 m에 대하여
>
> $$\sum_{n=1}^{m}\boxed{\text{(나)}}={}_{m+3}\mathrm{C}_4$$
>
> 이므로
>
> $$\sum_{n=1}^{8} a_n=\boxed{\text{(다)}}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 r이라 할 때, $f(6)+g(5)+r$의 값은?

① 893 ② 918 ③ 943

④ 968 ⑤ 993

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 24

61. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수를 구하시오.

(가) $ab(c+d+e)=12$
(나) a, b, c, d, e중에서 적어도 2개는 짝수이다.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 확률과 통계 29

62. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오.

(가) $a+b+c+d=12$
(나) $a\neq 2$ 이고 $a+b+c\neq 10$ 이다.

05 확통

02 중복조합

01 중복조합

06 중복조합6 (함수의 개수)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 28

63. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 함수 $f : X\rightarrow X$ 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오.

(가) $f(3)\times f(6)$은 3의 배수이다.
(나) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\leq f(x_2)$이다.

[준킬러][확통] 1경우의수

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 확률과 통계 28

64. 두 집합

$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3\}$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f:X\to Y$의 개수는?

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이다. (나) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $(f\circ f\circ f)(x)=1$이다.

① 24 ② 27 ③ 30
④ 33 ⑤ 36

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 확률과 통계 29

65. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to Y$의 개수를 구하시오.

(가) $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)$ (나) $f(a)+f(b)=0$을 만족시키는 집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b가 존재한다.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 확률과 통계 29

66. 두 집합

$X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to Y$의 개수를 구하시오.

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이다. (나) $f(1)\le 3$ (다) $f(3)\le f(1)+4$

05 확통

02 중복조합

02 중복조합의 활용 (식 활용)

02 중복조합식 활용2 (소인수분해)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 09월

67. 네 개의 자연수 1, 2, 4, 8 중에서 중복을 허락하여 세 수를 선택할 때, 세 수의 곱이 100 이하가 되도록 선택하는 경우의 수는?

① 12 ② 14 ③ 16

④ 18 ⑤ 20

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 10월 28

68. 다음 조건을 만족시키는 세 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오.

(가) $abc=180$

(나) $(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 04월 29

69. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오.

(가) a, b, c는 모두 짝수이다.

(나) $a\times b\times c=10^5$

05 확통

02 중복조합

02 중복조합의 활용 (식 활용)

03 중복조합식 활용3 (부등식)

[출처] 2014 모의_공공 경찰대 고3 07월 13

70. 15 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 뽑을 때, 어느 두 수도 3 이상 차이가 나도록 뽑는 방법의 수는?

① 108 ② 120 ③ 126

④ 132 ⑤ 144

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 29

71. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수를 구하시오.

(가) $n=1$, 2일 때, $x_{n+1}-x_n \ge 2$

(나) $x_3 \le 10$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 확률과 통계 29

72. 5 이하의 자연수 a, b, c, d에 대하여 부등식

$$a \le b+1 \le c \le d$$

를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오.

05 확통 02 중복조합

02 중복조합의 활용 (식 활용)

05 중복조합식 활용5 (부등식을 방정식으로 동치변형)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 07월 28

73. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수의 개수를 구하시오.

(가) 네 자리의 홀수이다.

(나) 각 자리의 수의 합이 8보다 작다.

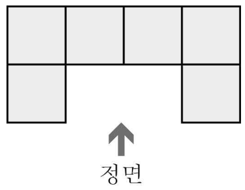
05 확통 02 중복조합

02 중복조합의 활용 (식 활용)

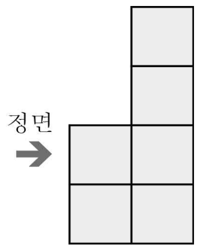
07 중복조합식 활용7 (추론과 해석)

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 10월 29

74. 크기가 같은 정육면체 모양의 블록 12개를 모두 사용하여 쌓은 입체도형을 만들려고 한다. 이 도형을 위에서 내려다 본 모양이 <그림 1>, 정면을 기준으로 오른쪽 옆에서 본 모양이 <그림2>와 같이 되도록 만들 수 있는 방법의 수를 구하시오. (단, 블록은 서로 구별하지 않는다.)



<그림1>



<그림2>

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 07월 21

75. 검은 바둑돌 ●과 흰 바둑돌 ╤을 일렬로 나열하였을 때 이웃한 두 개의 바둑돌의 색이 나타날 수 있는 유형은

●●	●○	○●	○○
<A형>	<B형>	<C형>	<D형>

으로 4가지이다.
예를 들어, 6개의 바둑돌을 <A형>2번, <B형>1번, <C형>1번, <D형>1번 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 아래와 같이 5이다.

●●○○●●
○●●●○○
○○●●●○
●●●○○●
●○○●●●

10개의 바둑돌을 <A형>4번, <B형>2번, <C형>2번, <D형>1번 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는? (단, 검은 바둑돌과 흰 바둑돌은 각각 10개 이상씩 있다.)

① 35 ② 40 ③ 45
④ 50 ⑤ 55

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 07월 30

76. 검은 바둑돌과 흰 바둑돌 ○을 일렬로 나열하였을 때 이웃한 두 개의 바둑돌의 색이 나타날 수 있는 유형은

●●	●○	○●	○○
<A형>	<B형>	<C형>	<D형>

으로 4가지이다.
예를 들어, 6개의 바둑돌을 <A형> 2번, <B형>1번, <C형> 1번, <D형> 1번 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 아래와 같이 5이다.

●●○○●●
○●●●○○
○○●●●○
●●●○○●
●○○●●●

10개의 바둑돌을 <A형> 4번, <B형> 2번, <C형> 2번, <D형> 1번 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 검은 바둑돌과 흰 바둑돌은 각각 10개 이상씩 있다.)

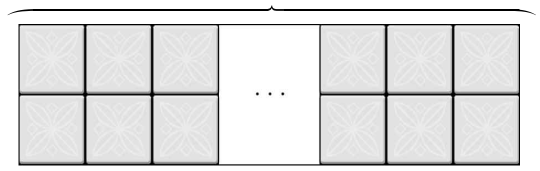
[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 03월 20

77. 그림과 같이 가로로 n개, 세로로 2개씩 총 $2n$개의 크기가 같은 정사각형 모양의 타일을 이어 붙인다.

n개

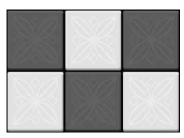
첫째 줄

둘째 줄

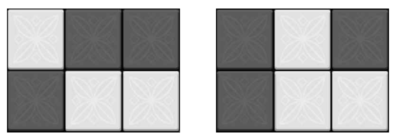


이 타일 중에서 3개를 골라 검은색으로 칠하되, 검은색으로 칠한 타일이 서로 이어 붙지 않게 하려고 한다. 다음은 검은색으로 칠한 타일이 이어 붙지 않은 경우와 이어 붙은 경우의 한 예이다.

이어 붙지 않은 경우 :



이어 붙은 경우 :



다음은 $n \geq 6$일 때, 검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수 $S(n)$을 구하는 과정이다.

> 첫째 줄에 있는 타일 중 검은색으로 칠할 타일의 개수를 $k(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$이라 하면
>
> (ⅰ) $k=0$일 때 둘째 줄에 있는 n개의 타일 중에서 검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수는 $\boxed{(가)}$이다.
>
> (ⅱ) $k=1$일 때 둘째 줄에 있는 n개의 타일 중에서 검은색으로 칠할 타일 2개를 고르는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{n-3}$이고, 첫째 줄에서 검은색으로 칠할 타일 1개를 고르는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$이므로, 검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{n-3}\times\boxed{(나)}$이다.
>
> (ⅲ) $k=2$일 때 (ⅱ)와 같은 방법으로 구할 수 있다.
>
> (ⅳ) $k=3$일 때 (ⅰ)과 같은 방법으로 구할 수 있다.
>
> 따라서 $S(n)=\dfrac{2(n-2)(2n^2-8n+9)}{3}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(10)+g(8)$의 값은?

① 60 ② 61 ③ 62 ④ 63 ⑤ 64

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 07월 15

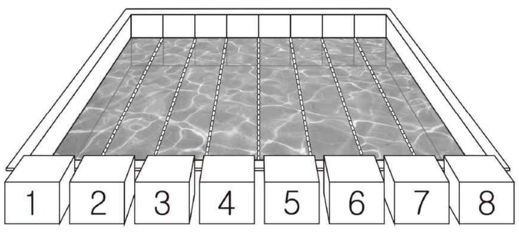
78. 한 개의 주사위를 세 번 던져 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 하자. $a+b+c=14$를 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는?

① 11 ② 12 ③ 13

④ 14 ⑤ 15

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 07월 27

79. 어느 수영장에 1번부터 8번까지 8개의 레인이 있다. 3명의 학생이 서로 다른 레인의 번호를 각각 1개씩 선택할 때, 3명의 학생이 선택한 레인의 세 번호 중 어느 두 번호도 연속되지 않도록 선택하는 경우의 수를 구하시오.

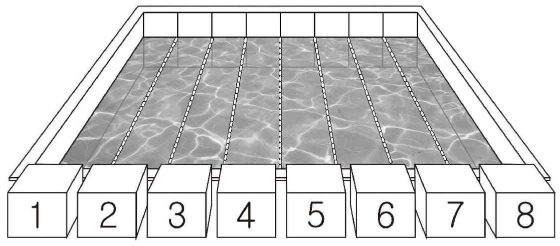


[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 07월 16

80. 어느 수영장에 1번부터 8번까지 8개의 레인이 있다. 3명의 학생이 서로 다른 레인의 번호를 각각 1개씩 선택할 때, 3명의 학생이 선택한 레인의 세 번호 중 어느 두 번호도 연속되지 않도록 선택하는 경우의 수는?

① 120 ② 132 ③ 144

④ 156 ⑤ 168



[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 03월 18

81. 네 개의 비어 있는 상자 A, B, C, D가 있다. 각각의 상자에 최대 5개의 공을 넣을 수 있을 때, 네 상자 A, B, C, D에 $n(1 \le n \le 20)$개의 공을 남김없이 나누어 넣는 경우의 수를 $f(n)$이라 하자. 다음은 $f(15)+f(14)+f(13)$의 값을 구하는 과정이다. (단, 공은 구별하지 않고, 공을 하나도 넣지 않은 상자가 있을 수 있다.)

> 네 상자 A, B, C, D에 n개의 공을 남김없이 나누어 넣는 경우의 수는 공이 5개씩 모두 20개가 들어 있는 네 상자 A, B, C, D에서 총 $20-n$개의 공을 꺼내는 경우의 수와 같다.
>
> (i) $n=15$인 경우
> 공이 5개씩 모두 20개가 들어 있는 네 상자 A, B, C, D에서 총 5개의 공을 꺼내는 경우의 수와 같으므로
> $f(15)=\boxed{(가)}$
>
> (ii) $n=14$인 경우
> 공이 5개씩 모두 20개가 들어 있는 네 상자 A, B, C, D에서 총 6개의 공을 꺼내는 경우의 수와 같으므로
> $f(14)={}_4H_6-\boxed{(나)}$
>
> (iii) $n=13$인 경우
> 공이 5개씩 모두 20개가 들어 있는 네 상자 A, B, C, D에서 총 7개의 공을 꺼내는 경우의 수와 같으므로
> $f(13)=\boxed{(다)}$
>
> (i), (ii), (iii)에 의해
>
> $f(15)+f(14)+f(13)$
>
> $=\boxed{(가)}+\left({}_4H_6-\boxed{(나)}\right)+\boxed{(다)}$
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은?

① 164 ② 168 ③ 172 ④ 176 ⑤ 180

05 확통 03 이항정리

01 특정항의 계수

01 특정항의 계수1 (기본형)

[출처] 2010 모의_공공 경찰대 고3 07월 10

82. 다항식 $(x^3+3x^2+3x+a)^4$의 전개식에서 x^7의 계수가 $2^3\times3^5$일 때, 상수 a의 값은?

① 9 ② 18 ③ 27 ④ 36 ⑤ 45

[준킬러][확통] 1경우의수

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 8

[출처] 2020 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성 07 경우의 수 유형7 필수유형

83. 다항식 $(x+2)^{19}$의 전개식에서 x^k의 계수가 x^{k+1}의 계수보다 크게 되는 자연수 k의 최솟값은?

① 4 ② 5 ③ 6

④ 7 ⑤ 8

05 확통

03 이항정리

01 특정항의 계수

03 특정항의 계수3 (곱의 꼴)

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 11월 30

84. 다항식 $2(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수와 다항식 $(x-1)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수가 같게 되는 모든 순서쌍 (a, n)에 대하여 an의 최댓값을 구하시오.
(단, a는 자연수이고, n은 $n \geq 2$인 자연수이다.)

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 06월 19
[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 06월 19

85. 다음은 x에 대한 다항식 $(x+a^2)^n$ 과 $(x^2-2a)(x+a)^n$ 의 전개식에서 x^{n-1} 의 계수가 같게 되는 두 자연수 a 와 n $(n \geq 4)$ 의 값을 구하는 과정의 일부이다.

> $(x+a^2)^n$ 의 전개식에서 x^{n-1} 의 계수는 a^2n 이다.
>
> $(x^2-2a)(x+a)^n = x^2(x+a)^n - 2a(x+a)^n$ 에서
>
> $x^2(x+a)^n$ 을 전개하면 x^{n-1} 의 계수는
> $\boxed{(가)} \times a^3$ 이고,
>
> $2a(x+a)^n$ 을 전개하면 x^{n-1} 의 계수는 $2a^2n$ 이다.
>
> 따라서 $(x^2-2a)(x+a)^n$ 의 전개식에서 x^{n-1} 의 계수는
>
> $$\boxed{(가)} \times a^3 - 2a^2n$$
>
> 이다. 그러므로
>
> $$a^2n = \boxed{(가)} \times a^3 - 2a^2n$$
>
> 이고, 이 식을 정리하여 a를 n에 관한 식으로 나타내면
>
> $$a = \frac{18}{\boxed{(나)}}$$
>
> 이다. 여기서 a는 자연수이고 n은 4 이상의 자연수이므로
>
> $$n = \boxed{(다)}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 하고, (다)에 알맞은 수를 k 라 할 때, $f(k)+g(k)$ 의 값은?

① 10 ② 16 ③ 22
④ 28 ⑤ 34

05 확통 03 이항정리

02 이항정리의 활용

01 활용1 (이항정리를 이용한 수의 계산)

[출처] 2005 모의_공공 사관학교 고3 07월 29
[출처] 2005 모의_공공 사관학교 고3 07월 27

86. 실수 x 에 대한 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = {}_6\mathrm{C}_0 + {}_6\mathrm{C}_1 \mathrm{x}^2 + {}_6\mathrm{C}_2 \mathrm{x}^4 + {}_6\mathrm{C}_3 \mathrm{x}^6 + {}_6\mathrm{C}_4 \mathrm{x}^8 + {}_6\mathrm{C}_5 \mathrm{x}^{10} + {}_6\mathrm{C}_6 \mathrm{x}^{12}$$

와 같이 정의될 때, $f(\tan\theta) = 2^{12}$ 을 만족하는 θ 에 대하여 $\dfrac{36\theta}{\pi}$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$)

[준킬러][확통] 1경우의수

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 10월 30

87. 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 공을 한 개씩 모두 꺼낼 때, i번째 $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$ 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a_i라 하자. $1<p<q<9$인 두 자연수 p, q에 대하여 a_i가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $1 \le i < p$이면 $a_i < a_{i+1}$이다.
>
> (나) $p \le i < q$이면 $a_i > a_{i+1}$이다.
>
> (다) $q \le i < 9$이면 $a_i < a_{i+1}$이다.

$a_1=2$, $a_p=8$인 모든 경우의 수를 구하시오.
(단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 04월 29

88. 전체집합 $U=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$의 세 부분집합 S_1, S_2, S_3이

$$n(S_1) \ge 3,\ S_1 \subset S_2 \subset S_3$$

을 만족시킨다. 다음은 집합 S_1, S_2, S_3의 모든 순서쌍 $(S_1,\ S_2,\ S_3)$의 개수를 구하는 과정이다.

> $n(S_1)=k$ $(3 \le k \le 10,\ k$는 자연수$)$인 집합 S_1의 개수는 전체집합 U의 원소 10개 중 서로 다른 k개를 선택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_{10}\mathrm{C}_k$이다.
>
> 또한 $S_1 \subset S_2 \subset S_3$이므로 집합 S_1에 속하지 않는 원소는 세 집합 S_2-S_1, S_3-S_2, $U-S_3$ 중 어느 한 집합에 속해야 한다.
>
> 그러므로 $n(S_1)=k$일 때 집합 S_1, S_2, S_3의 순서쌍 $(S_1,\ S_2,\ S_3)$의 개수는 ${}_{10}\mathrm{C}_k \times \boxed{\text{(가)}}$이다.
>
> 따라서 $n(S_1) \ge 3$, $S_1 \subset S_2 \subset S_3$을 만족시키는 순서쌍 $(S_1,\ S_2,\ S_3)$의 개수는 이항정리에 의하여
>
> $$\sum_{k=3}^{10}\left({}_{10}\mathrm{C}_k \times \boxed{\text{(가)}}\right)=4^{10}-\boxed{\text{(나)}}\times 3^8$$

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$, (나)에 알맞은 수를 a라 할 때, $a+f(8)$의 값을 구하시오.

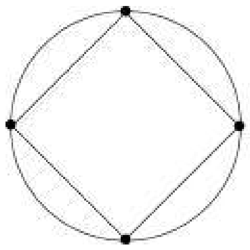
05 확통 03 이항정리

02 이항정리의 활용

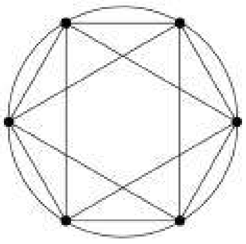
03 활용3 (파스칼의 삼각형)

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 10월 10

89. 원에 내접하는 정n각형의 꼭짓점 중에서 서로 다른 4개의 점을 연결하여 만든 직사각형의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_4=1$, $a_6=3$이다. $\sum_{k=2}^{20} a_{2k}$ 의 값은?



$a_4=1$



$a_6=3$

① 960 ② 1020 ③ 1140
④ 1235 ⑤ 1330

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 04월 30

90. 자연수 n에 대하여 0부터 n까지 정수가 하나씩 적힌 $(n+1)$개의 공이 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 한 개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시 넣는 과정을 5번 반복할 때, 확인한 5개의 수가 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 a_n이라 하자.

(가) 꺼낸 공에 적힌 수는 먼저 꺼낸 공에 적힌 수보다 작지 않다.
(나) 세 번째 꺼낸 공에 적힌 수는 첫 번째 꺼낸 공에 적힌 수보다 1이 더 크다.

$\sum_{n=1}^{18} \frac{a_n}{n+2}$ 의 값을 구하시오.

05 확통 03 이항정리

02 이항정리의 활용

04 활용4 (이항계수의 성질)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 04월 18

91. 다음은 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\times {}_{n}\mathrm{C}_{k}\right)<100$$

을 만족시키는 n의 최댓값을 구하는 과정이다.

> 이항정리를 이용하여 $(1+x)^n$을 전개하면
>
> $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\left(\boxed{\text{(가)}}\times x^k\right)$ …… ㉠
>
> 위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
>
> $2^n={}_{n}\mathrm{C}_0+{}_{n}\mathrm{C}_1+{}_{n}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_n$ …… ㉡
>
> ㉠의 양변을 0에서 1까지 적분하여
>
> $\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1}={}_{n}\mathrm{C}_0+\frac{1}{2}{}_{n}\mathrm{C}_1+\frac{1}{3}{}_{n}\mathrm{C}_2+\cdots+\frac{1}{n+1}{}_{n}\mathrm{C}_n$
>
> …… ㉢
>
> 을 얻는다. ㉡과 ㉢에서
>
> $\boxed{\text{(나)}}+\frac{1}{n+1}$
>
> $=\frac{1}{2}{}_{n}\mathrm{C}_1+\frac{2}{3}{}_{n}\mathrm{C}_2+\frac{3}{4}{}_{n}\mathrm{C}_3+\cdots+\frac{n}{n+1}{}_{n}\mathrm{C}_n$
>
> $=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\times{}_{n}\mathrm{C}_k\right)$
>
> 이므로 부등식 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\times{}_{n}\mathrm{C}_k\right)<100$을 만족시키는
>
> n의 최댓값은 $\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 과정에서 (가)에 알맞은 식에 대하여 $k=1$일 때의 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(6)\times g(5)+p$의 값은?

① 115 ② 120 ③ 125

④ 130 ⑤ 135

05 확통 03 이항정리

02 이항정리의 활용

05 활용5 (이항계수의 성질의 활용)

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 25

92. 집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 U의 부분집합 A의 개수를 구하시오.

> (가) $\{1, 2, 3\}\cap A=\{1, 2\}$
>
> (나) 집합 A의 원소의 개수는 6개 이상이다.

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 07월 29

93. 전체집합 $U=\{2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6\}$의 서로 다른 부분집합을 $A_i(i=1, 2, 3, \cdots, 64)$라 하자. $n(A_i)\geq 3$을 만족시키는 모든 집합 A_i에 대하여 각 집합의 가장 작은 원소를 모두 더한 값을 구하시오.
(단, $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수이다.)

05 확통

03 이항정리

02 이항정리의 활용

06 활용6 (이항계수의 곱)

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 06월 15

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 06월 15

94. 다음은 n이 2 이상의 자연수일 때 $\sum_{k=1}^{n} k({}_n\mathrm{C}_k)^2$의 값을 구하는 과정이다.

> 두 다항식의 곱
> $(a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)$에서
> x^{n-1}의 계수는
> $a_0b_{n-1}+a_1b_{n-2}+\cdots+a_{n-1}b_0\cdots\cdots(*)$이다.
> 등식 $(1+x)^{2n-1}=(1+x)^{n-1}(1+x)^n$의 좌변에서
> x^{n-1}의 계수는 $\boxed{(가)}$이고, $(*)$을 이용하여 우변에서
> x_{n-1}의 계수를 구하면 $\sum_{k=1}^{n}({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\times\boxed{(나)})$
> 이다. 따라서 $\boxed{(가)}=\sum_{k=1}^{n}({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\times\boxed{(나)})$ 이다.
> 한편 $1\leq k\leq n$일 때, $k\times{}_n\mathrm{C}_k=n\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$이므로
> $$\sum_{k=1}^{n}k({}_n\mathrm{C}_k)^2=\sum_{k=1}^{n}(n\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\times\boxed{(나)})$$
> $$=n\times\sum_{k=1}^{n}({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\times\boxed{(나)})$$
> $$=\boxed{(다)}$$
> 이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	${}_{2n}\mathrm{C}_n$	${}_n\mathrm{C}_{n-k+1}$	$\frac{n}{2}\times{}_{2n}\mathrm{C}_{n+1}$
②	${}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}$	${}_n\mathrm{C}_{n-k+1}$	$\frac{n}{2}\times{}_{2n}\mathrm{C}_n$
③	${}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}$	${}_n\mathrm{C}_{n-k}$	$\frac{n}{2}\times{}_{2n}\mathrm{C}_n$
④	${}_{2n}\mathrm{C}_n$	${}_n\mathrm{C}_{n-k+1}$	$n\times{}_{2n}\mathrm{C}_{n+1}$
⑤	${}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}$	${}_n\mathrm{C}_{n-k}$	$n\times{}_{2n}\mathrm{C}_n$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 03월 18

95. 다음은 부등식

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{2k\times\left({}_{n}\mathrm{C}_{k}\right)^2\right\}\geq 10\times{}_{2n}\mathrm{C}_{n+1}$$

을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하는 과정이다.

> $(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수는 $\boxed{\text{(가)}}$이다.
>
> $(1+x)^n(1+x)^n$의 전개식에서 x^n의 계수는
>
> $$\sum_{k=0}^{n}\left({}_{n}\mathrm{C}_{k}\times{}_{n}\mathrm{C}_{n-k}\right)=\sum_{k=0}^{n}\left({}_{n}\mathrm{C}_{k}\right)^2$$
>
> 이다. 그러므로
>
> $$\sum_{k=1}^{n}\left\{2k\times\left({}_{n}\mathrm{C}_{k}\right)^2\right\}$$
>
> $$=\sum_{k=1}^{n}\left\{k\times\left({}_{n}\mathrm{C}_{k}\right)^2\right\}+\sum_{k=1}^{n}\left\{k\times\left({}_{n}\mathrm{C}_{n-k}\right)^2\right\}$$
>
> $$=\left\{\left({}_{n}\mathrm{C}_{1}\right)^2+2\times\left({}_{n}\mathrm{C}_{2}\right)^2+\cdots+n\times\left({}_{n}\mathrm{C}_{n}\right)^2\right\}$$
>
> $$+\left\{\left({}_{n}\mathrm{C}_{n-1}\right)^2+2\times\left({}_{n}\mathrm{C}_{n-2}\right)^2+\cdots+n\times\left({}_{n}\mathrm{C}_{0}\right)^2\right\}$$
>
> $$=\boxed{\text{(나)}}\times\left\{\left({}_{n}\mathrm{C}_{0}\right)^2+\left({}_{n}\mathrm{C}_{1}\right)^2+\cdots+\left({}_{n}\mathrm{C}_{n}\right)^2\right\}$$
>
> $$=\boxed{\text{(나)}}\times\boxed{\text{(가)}}$$
>
> 이다.
>
> 따라서 부등식 $\sum_{k=1}^{n}\left\{2k\times\left({}_{n}\mathrm{C}_{k}\right)^2\right\}\geq 10\times{}_{2n}\mathrm{C}_{n+1}$ 을
>
> 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 $\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(3)+g(3)+p$의 값은?

① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

05 확통

03 이항정리

03 기타

01 교과외1 (다항정리)

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 14

96. $(x-y+1)^{n+2}$의 전개식에서 x^ny^2의 계수를 $f(n)$이라 할 때,

$$\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(2020)}=\frac{a}{b}$$

이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 서로소인 자연수이다.)

① 2019 ② 2020 ③ 2021
④ 2022 ⑤ 2023

[준킬러][확통] 1경우의수(빠른 정답)

준킬러확통 2023.01.07

1. [정답] ②
2. [정답] ⑤
3. [정답] ③
4. [정답] ⑤
5. [정답] 40

6. [정답] 150
7. [정답] 97
8. [정답] ④
9. [정답] ①
10. [정답] ③

11. [정답] ④
12. [정답] ①
13. [정답] 260
14. [정답] 168
15. [정답] ②

16. [정답] 288
17. [정답] 48
18. [정답] ①
19. [정답] ④
20. [정답] ①

21. [정답] 8
22. [정답] ④
23. [정답] 13
24. [정답] 180
25. [정답] ④

26. [정답] 450
27. [정답] ①
28. [정답] 199
29. [정답] 708
30. [정답] ④

31. [정답] ⑤
32. [정답] 720
33. [정답] 90
34. [정답] ⑤
35. [정답] 14
36. [정답] 66
37. [정답] ④
38. [정답] ①
39. [정답] ⑤
40. [정답] ⑤

41. [정답] ④
42. [정답] 40
43. [정답] 40
44. [정답] ④
45. [정답] ①

46. [정답] 51
47. [정답] 49
48. [정답] 114
49. [정답] 396
50. [정답] 37

51. [정답] 201
52. [정답] 72
53. [정답] 168
54. [정답] 218
55. [정답] 51

56. [정답] 32
57. [정답] 32
58. [정답] 210
59. [정답] ②
60. [정답] ③

61. [정답] 31
62. [정답] 332
63. [정답] 327
64. [정답] ②
65. [정답] 65

66. [정답] 105
67. [정답] ③
68. [정답] 96
69. [정답] 126
70. [정답] ③

71. [정답] 84
72. [정답] 55

73. [정답] 80
74. [정답] 60
75. [정답] ③

76. [정답] 45
77. [정답] ③
78. [정답] ⑤
79. [정답] 120
80. [정답] ①

81. [정답] ①
82. [정답] ①
83. [정답] ③
84. [정답] 12
85. [정답] ①

86. [정답] 12
87. [정답] 243
88. [정답] 93
89. [정답] ⑤
90. [정답] 760

91. [정답] ⑤
92. [정답] 64
93. [정답] 144
94. [정답] ③
95. [정답] ①

96. [정답] ③

[준킬러][확통] 1경우의수(해설)

준킬러확통 2023.01.07

1) [정답] ②

[해설]
서로 다른 공 4개를 서로 다른 상자 4개에 나누어 넣는 경우의 수는 공을 하나도 넣지 않는 상자가 있을 수 있으므로 ${}_4\Pi_4 = 4^4 = 256$
이 중에서 넣은 공의 개수가 1인 상자가 없는 경우는 다음과 같다.
(ⅰ) 상자 1개에 공 4개를 모두 넣는 경우
공 4개를 모두 넣을 상자 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$
(ⅱ) 상자 2개에 공을 2개씩 넣는 경우
공을 넣을 상자 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2$이고, 택한 상자에 공을 2개씩 넣는 경우의 수는 ${}_4C_2 \times {}_2C_2$이므로 이 경우의 수는
$${}_4C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = \frac{4\times3}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1 = 36$$
따라서 구하는 경우의 수는 $256-4-36=216$
[다른풀이]
(ⅰ) 서로 다른 4개의 상자에 넣는 공의 개수가 각각 3, 1, 0, 0인 경우
4개의 공을 3개, 1개로 나누는 경우의 수는 ${}_4C_3 \times {}_1C_1 = 4$이고, 상자 4개 중 2개를 택하여 공 3개, 1개를 넣는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 4\times3 = 12$이므로 이 경우의 수는 $4\times12=48$
(ⅱ) 서로 다른 4개의 상자에 넣는 공의 개수가 각각 2, 1, 1, 0인 경우
4개의 공을 2개, 1개, 1개로 나누는 경우의 수는 ${}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 6$이고, 상자 4개 중 3개를 택하여 공 2개, 1개, 1개를 넣는 경우의 수는 ${}_4P_3 = 4\times3\times2 = 24$이므로 이 경우의 수는 $6\times24=144$
(ⅲ) 서로 다른 4개의 상자에 넣는 공의 개수가 각각 1, 1, 1, 1인 경우
4개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 이 경우의 수는 $4!=24$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$48+144+24=216$

2) [정답] ⑤

[해설]
5개의 합은 15이므로 5개를 한 상자에 넣으면 안된다.
4개의 수 중 $1+2+3+5=11$, $1+2+3+4=10$이므로
합이 11 이하인 경우는 위 두 가지이므로
4개, 1개, 0개를 넣는 경우의 수는 $2\times3!=12$
3개의 합에서 $3+4+5=12$, 이것만 아니면 합이 11 이하이므로 5개 중 3개를 뽑는 방법 ${}_5C_3=10$가지 중 9가지가 가능하고, 3개, 2개, 0개 또는 3개, 1개, 1개를 넣으면 된다.
따라서 경우의 수는 $9\times(3!+3!)=108$
2개, 2개, 1개씩 넣는 방법의 수는 $3\times\frac{5!}{2!2!}=90$
$\therefore\ 12+108+90=210$

3) [정답] ③

[해설]
$k=a\cdot(5!)$, $n=b\cdot(5!)$ (단, a, b는 서로소)로 놓으면 최소공배수가 $13!$이므로
$a\cdot b = 13\times12\times11\times10\times9\times8\times7\times6 = 2^6\times3^4\times5\times7\times11\times13$
a, b가 서로소이므로 공약수는 1 뿐이다.
따라서 2^6, 3^4, 5, 7, 11, 13 등 6 개를 2 개로 나누는 방법의 수와 같다. 6 개의 수를 둘로 나눌 때 서로 같은 경우는 존재하지 않으므로 $k\le n$을 만족하는 경우는
$\frac{2^6}{2}=2^5=32$ 가지이다.

4) [정답] ⑤

[해설]
[출제의도] 순열과 조합을 활용하여 문제해결하기
1을 네 번 이상 사용하면 반드시 1끼리 서로 이웃하게 되므로 1은 세 번 이하로 사용된다.
(ⅰ) 1이 사용되지 않는 경우
$2^4=16$
(ⅱ) 1이 한 번 사용되는 경우
1로 시작되는 경우의 수는 $2^4=16$
2로 시작되는 경우의 수는 $4\times2^3=32$
(ⅲ) 1이 두 번 사용되는 경우
1로 시작되는 경우의 수는 $3\times2^3=24$
2로 시작되는 경우의 수는 $3\times2^2=12$

(ⅳ) 1이 세 번 사용되는 경우

첫 번째, 세 번째, 다섯 번째에는 반드시 1이 사용되므로 $2^2=4$

따라서 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 104

5) [정답] 40

[해설]

(ⅰ) $a=0$인 경우

$\frac{bc}{a}$가 정의되지 않으므로 정수가 되는 경우는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a=1$인 경우

$\frac{bc}{a}$는 항상 정수이므로 b, c를 정하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_2=4^2=16$$

(ⅲ) $a=2$인 경우

$bc=2k$ (k는 정수)일 때 $\frac{bc}{a}$가 정수이다.

$a=2$일 때 b와 c를 택하는 전체 경우의 수 16에서 b와 c가 모두 홀수인 경우의 수 4를 빼면 되므로 $16-4=12$

(ⅳ) $a=3$인 경우

$bc=3k$ (k는 정수)일 때 $\frac{bc}{a}$가 정수이다. $a=3$일 때 b와 c를 택하는 전체 경우의 수 16에서 $bc\neq 3k$인 경우의 수를 빼면 된다.

$bc\neq 3k$인 경우의 수는 1, 2에서 2개를 택하는 중복순열의 수 ${}_2\Pi_2=4$이므로

$$16-4=12$$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $\frac{bc}{a}$가 정수가 되도록 하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $16+12+12=40$

6) [정답] 150

[해설]

일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 1일 때, 나머지 네 자리에 2와 3이 적어도 하나씩 포함되는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 1, 1, 2, 3을 나열하는 경우

4개의 숫자를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

(ⅱ) 1, 2, 2, 3 또는 1, 2, 3, 3을 나열하는 경우

4개의 숫자를 나열하는 경우의 수가 $\frac{4!}{2!}=12$이므로

(ⅱ)의 경우의 수는 $2\times12=24$

(ⅲ) 2, 2, 2, 3 또는 2, 3, 3, 3을 나열하는 경우

4개의 숫자를 나열하는 경우의 수가 $\frac{4!}{3!}=4$이므로

(ⅲ)의 경우의 수는 $2\times4=8$

(ⅳ) 2, 2, 3, 3을 나열하는 경우

4개의 숫자를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!\,2!}=6$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의해 일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 1인 경우의 수는 $12+24+8+6=50$

일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 2인 경우의 수와 3인 경우의 수도 같은 방법으로 생각하면 각각 50이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 $3\times50=150$

7) [정답] 97

[해설]

(ⅰ) 1, 2, 3에서만 선택한 후 나열하는 경우

1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 4개를 선택하여 일렬로 나열하는 경우에서 2, 3 중에서만 선택하여 나열하는 경우를 제외하면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_3\Pi_4-{}_2\Pi_4=3^4-2^4=65$

(ⅱ) 1, 4, □, □에서 □에 2 또는 3이 있도록 선택한 후 나열하는 경우

1과 4의 위치를 정하는 경우의 수는

$2\times({}_4C_2-3)=6$이고, □에 들어갈 수를 정하는 경우의 수는 $2^2=4$이다.

그러므로 구하는 경우의 수는 $6\times4=24$

(ⅲ) 1, 1, 4, □ 또는 1, 4, 4, □에서 □에 2 또는 3이 있도록 선택한 후 나열하는 경우

1, 1, 4를 나열하는 경우는 11□4, 4□11이고, □에 2 또는 3을 나열할 수 있으므로 경우의 수는 $2\times2=4$이다.

1, 4, 4, □인 경우는 1, 1, 4, □인 경우와 같은 방법으로 생각하면 경우의 수는 4이다.

그러므로 구하는 경우의 수는 $4+4=8$

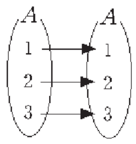
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는 $65+24+8=97$

8) [정답] ④

[해설]

일대일대응 함수 f는 다음의 세 가지 형태이다.

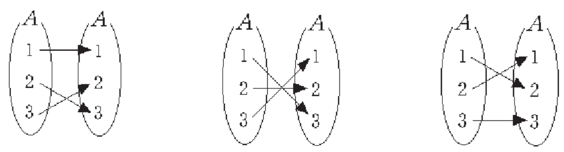
i) 모든 원소가 자기 자신에 대응될 때 :



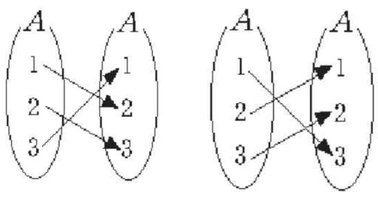
$f=I$(I는 항등함수)이므로

$f\circ f=I$, $f\circ f\circ f=f$가 성립한다.

ii) 한 원소는 자기자신에 나머지 두 원소는 엇갈려 대응될 때 : $f\circ f=I$이므로, $f\circ f\circ f=f$가 성립한다.



iii) 모든 원소가 서로 엇갈려 대응될 때 :



$f\circ f\neq I$이므로, $f\circ f\circ f\neq f$이다.

따라서, i), ii), iii)에서 주어진 조건을 만족하는 함수 f는 4개다.

9) [정답] ①

[해설]

합성함수 $f\circ f$의 치역의 원소의 개수가 1이므로 정의역에 속하는 임의의 원소 x에 대하여 $f(f(x))=a$라고 할 때 a가 될 수 있는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$(가지)

이때 $f(f(x))=a$인 경우 a를 포함하는

함수 f의 치역은 $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$로 3가지이다.

이제 정의역의 원소를 $\{a, b, c, d\}$라 하고

f의 치역을 $\{a, b\}$라고 하면

$f(f(a))=a$이기 위해서 $f(a)=a$이어야 한다.

또 $f(f(b))=a$이기 위해서 반드시 $f(b)=a$가 되어야 한다.

이때 정의역의 나머지 두 원소 c, d가 a 또는 b에 대응하는 방법의 수는 $2^2-1=3$이다

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$4\times3\times3=36$이다.

10) [정답] ③

[해설]

(i) $f(3)=4$ 또는 $f(3)=10$인 경우

$f(3)=4$이면 $f(2)=f(5)=2$이고,

$f(1)$과 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 6, 8, 10, 12 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.

$f(3)=10$이면 $f(1)=f(4)=12$이고,

$f(2)$와 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 4, 6, 8 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.

그러므로 구하는 함수의 개수는

$2\times{}_4\Pi_2=32$

(ii) $f(3)=6$ 또는 $f(3)=8$인 경우

$f(3)=6$이면 $f(2)$와 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 4 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같고, $f(1)$과 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 8, 10, 12 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.

$f(3)=8$이면 $f(1)$과 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 10, 12 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같고, $f(2)$와 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 4, 6 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.

그러므로 구하는 함수의 개수는

$2\times{}_2\Pi_2\times{}_3\Pi_2=72$

(i), (ii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$32+72=104$

11) [정답] ④

[해설]

조건 (나)와 조건 (다)에서 $f(3)\neq1$, $f(4)\neq6$

조건 (가)에서 $f(3)+f(4)$가 5의 배수인 $f(3)$, $f(4)$의

순서쌍 $(f(3),\ f(4))$는 (4, 1), (2, 3), (3, 2), (6, 4), (5, 5)

(i) $f(3)=4$, $f(4)=1$인 경우

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 $3^2=9$

$f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 $5^2=25$

즉 함수 f의 개수는 $9\times25=225$

(ii) $f(3)=2$, $f(4)=3$인 경우

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 $1^2=1$

$f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 $3^2=9$

즉 함수 f의 개수는 $1\times9=9$

(iii) $f(3)=3$, $f(4)=2$인 경우

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2^2=4$

$f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 $4^2=16$

즉 함수 f의 개수는 $4\times16=64$

(iv) $f(3)=6$, $f(4)=4$인 경우

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 $5^2=25$

$f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2^2=4$

즉 함수 f의 개수는 $25\times4=100$

(ⅴ) $f(3)=5$, $f(4)=5$인 경우

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 $4^2=16$

$f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 $1^2=1$

즉 함수 f의 개수는 $16\times1=16$

(ⅰ)~(ⅴ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$225+9+64+100+16=414$

12) [정답] ①

[해설]

조건 (가)에 의하여

$f(1)\geq 1$

$f(2)\geq \sqrt{2}>1$

$f(3)\geq \sqrt{3}>1$

$f(4)\geq \sqrt{4}=2$

$f(5)\geq \sqrt{5}>2$

이고 조건 (나)에 의하여 치역으로 가능한 경우는 $\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{1,\ 2,\ 4\}$, $\{1,\ 3,\ 4\}$, $\{2,\ 3,\ 4\}$

이다.

(ⅰ) 치역이 $\{1,\ 2,\ 3\}$인 경우

$f(1)=1$, $f(5)=3$이므로 $\{2,\ 3,\ 4\}$에서 $\{2,\ 3\}$으로의 함수 중에서 치역이 $\{3\}$인 함수를 제외하면 되므로 조건을 만족시키는 함수의 개수는

${}_2\Pi_3-1=2^3-1=7$

(ⅱ) 치역이 $\{1,\ 2,\ 4\}$인 경우

(ⅰ)의 경우와 마찬가지로 조건을 만족시키는 함수의 개수는 7이다.

(ⅲ) 치역이 $\{1,\ 3,\ 4\}$인 경우

$f(1)=1$이므로 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서 $\{3,\ 4\}$로의 함수 중에서 치역이 $\{3\}$, $\{4\}$인 함수를 제외하면 되므로 조건을 만족시키는 함수의 개수는

${}_2\Pi_4-2=2^4-2=14$

(ⅳ) 치역이 $\{2,\ 3,\ 4\}$인 경우

((ⅳ)-①) $f(5)=3$인 경우

$\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 $\{2,\ 3,\ 4\}$로의 함수 중에서 치역이 $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{3,\ 4\}$인 함수를 제외하면 되므로 조건을 만족시키는 함수의 개수는

${}_3\Pi_4-\{3+({}_2\Pi_4-2)\times2\}$

$=3^4-\{3+(2^4-2)\times2\}$

$=81-31$

$=50$

((ⅳ)-②) $f(5)=4$인 경우

((ⅳ)-①)의 경우와 마찬가지로 조건을 만족시키는 함수의 개수는 50이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$7+7+14+50\times2=128$

13) [정답] 260

[해설]

조건 (다)에서 함수 f는 상수함수일 수 없으므로

$n(A)=2$ 또는 $n(A)=3$

(i) $n(A)=2$인 경우

집합 A를 정하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

$A=\{1, 2\}$인 경우를 생각하면 조건 (다)에서

$f(1)=2$, $f(2)=1$

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값은 1, 2 중 하나이므로

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

즉, $n(A)=2$인 경우 함수 f의 개수는

$10\times8=80$

(ii) $n(A)=3$인 경우

집합 A를 정하는 경우의 수는 ${}_5C_3=10$

$A=\{1, 2, 3\}$인 경우를 생각하면 조건 (다)에서

순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$은 $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$뿐이므로

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는2

$f(4)$, $f(5)$의 값은 1, 2, 3중 하나이므로 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수

${}_3\Pi_2=3^2=9$

즉, $n(A)=3$인 경우 함수 f의 개수는 $10\times2\times9=180$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는 $80+180=260$

14) [정답] 168

[해설]

집합X 개수

= $X\subset(AUB)$인 경우 $-X\subset A$인 경우 $-X\subset B$인 경우

$+x\subset(A\cap B)$인 경우

$=2^8-2^5-2^6+2^3=168$

15) [정답] ②

[해설]

여학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(3-1)!=2!$

각 경우에 대하여 여학생과 여학생 사이 세 곳에 앉는 남학생의 수는 모두 달라야 하므로 각각 1명, 2명, 3명이고 이를 정하는 경우의 수는 $3!$

남학생을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $6!$

그러므로 구하는 경우의 수는

$2!\times3!\times6!=12\times6!$

따라서 $n=12$

[다른 풀이]

여학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(3-1)!=2!$

각 경우에 대하여 여학생과 여학생 사이 세 곳에 앉는 남학생의 수는 모두 다르므로 남학생 6명이 3명, 2명, 1명의 세 조로 나뉘어 여학생과 여학생 사이에 앉아야 한다.

이와 같이 남학생을 세 조로 나누는 경우의 수는

${}_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1=\dfrac{6!}{3!\,2!}$

각 경우에 대하여 세 조를 여학생과 여학생 사이의 세 곳에 배열하는 경우의 수는 $3!$

각 경우에 대하여 남학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는
$3!\times2!\times1!$

이므로 구하는 경우의 수는

$2!\times\dfrac{6!}{3!2!}\times3!\times3!\times2!\times1!=12\times6!$

따라서 $n=12$

16) [정답] 288

[해설]

[출제의도] 원순열을 이용하여 추론하기

남학생 4명 중 A, B가 아닌 남학생 2명을 D, E라 하면

(ⅰ) C가 D, E와 모두 이웃하는 경우
A, B를 한 학생으로 생각하고,
D, C, E를 한 학생으로 생각하여
5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$
이 각각에 대하여 A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$,
D, E가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이므로
구하는 경우의 수는
$24\times2!\times2!=96$

(ⅱ) C가 A또는 B중 한 명과 이웃하는 경우
D 또는 E중 한 명과 C, A, B의
총 4명을 한 학생으로 생각하여
5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$
이 각각에 대하여 D 또는 E 중 한 명을 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_1$, A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수 $2!$, A, B를 한 학생으로 생각하여 C와 이웃한 두 학생이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이므로
구하는 경우의 수는 $24\times{}_2C_1\times2!\times2!=192$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 경우의 수는

$96+192=288$

17) [정답] 48

[해설]
6개의 의자를 원형으로 배열하는 원순열의 수는
$(6-1)!=5!=120$
서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되는 두 수는 2, 6 또는 3, 4이다.
(i) 2, 6이 적혀 있는 두 의자를 이웃하게 배열하는 경우
2, 6이 적혀 있는 두 의자를 1개로 생각하여 의자 5개를 배열하는 원순열의 수는 $(5-1)!=4!=24$
이 각각에 대하여 2, 6이 적혀 있는 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
그러므로 이 경우의 수는 $24\times2=48$
(ii) 3, 4가 적혀 있는 두 의자를 이웃하게 배열하는 경우
마찬가지로 이 경우의 수도 48이다.
(iii) 2, 6이 적혀 있는 두 의자와 3, 4가 적혀 있는 두 의자를 각각 모두 이웃하게 배열하는 경우 2, 6이 적혀 있는 두 의자를 1개로 생각하고, 3, 4가 적혀 있는 두 의자를 1개로 생각하여 의자 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$
이 각각에 대하여 2, 6이 적혀 있는 두 의자의 자리를 서로 바꾸고, 3, 4가 적혀 있는 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는
$2!\times2!=4$

그러므로 이 경우의 수는

$6\times4=24$

(i), (ii), (iii)에 의하여 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되도록 배열하는 경우의 수는

$48+48-24=72$

따라서 구하는 경우의 수는 $120-72=48$

18) [정답] ①

[해설]

주어진 5개의 돌 중에서 3개의 돌을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_3=10$$

주어진 경우의 수는 가운데 원에 돌을 놓 경우와 그렇지 않은 경우로 분류할 수 있다.

(ⅰ) 가운데 원에 색칠하는 경우

뽑은 3개의 돌 중에 가운데 배열할 돌을 뽑는 경우의 수는 3가지

이 때, 정사각형의 네 꼭지점에 2개의 돌을 배열하는 경우의 수는 2개의 돌과 2개의 빈자리를 돌리는 원순열의 수와 같으므로 $\dfrac{(4-1)!}{2}=3$가지가 있다.

$\therefore 10\times{}_3C_1\times3=90$

(ⅱ) 가운데 원에 색칠하지 않는 경우

이 경우는 결국 게개의 돌과 한 개의 빈자리를 돌리는 경우의 수로 생각할 수 있으므로

$\therefore 10\times(4-1)!=60$

(ⅰ), (ⅱ)는 배반사건이므로 구하는 총 경우의 수

$$90+60=150$$

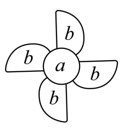
19) [정답] ④

[해설]

주어진 프로펠러를 칠하는데 사용된 색의 수로 구분한다.

(i) 2가지 색이 사용된 경우

a, b 에 사용될 색을 택하여 칠하는 방법의 수는

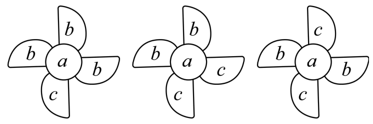


${}_4P_2=12$

(ii) 3가지 색이 사용된 경우

a, b, c 에 사용될 색을 택하여 칠하는 방법의 수는

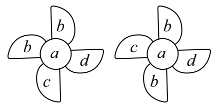
${}_4P_3+{}_4P_3\times\dfrac{1}{2}+{}_4P_3\times\dfrac{1}{2}=48$



(iii) 4가지 색이 모두 사용된 경우

a, b, c, d 에 사용될 색을 택하여 칠하는 방법의 수는

${}_4P_4+{}_4P_4\times\dfrac{1}{2}=36$



따라서 구하는 방법의 수는 $12+48+36=96$ (가지)

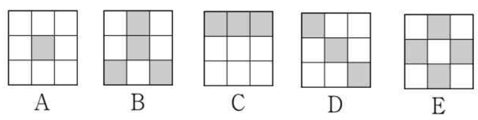
20) [정답] ①

[해설]

A와 E는 회전하면 모두 일치하고, -1가지

B와 C는 회전하면 모두 놓인 모양이 다르고, -4가지

D는 회전하여 다른 경우는 2가지이다. -2가지



(ⅰ) 중앙에 A 또는 E를 붙인 경우

나머지 4개는 원순열에 의하여 3! 인데, 각각의 경우 회전하여 다른 경우의 수를 따지면 $1\times2\times4\times4=32$

그러므로 $2\times3!\times32=384$

(ⅱ) 중앙에 B 또는 C를 붙인 경우

네 방향이 모두 상대적으로 다른 모양이므로

나머지 4개를 놓는 경우의 수는 4!

각각의 경우 회전하여 다른 경우의 수를 따지면

$1\times1\times2\times4=8$

그러므로 $2\times4!\times8=384$

(ⅲ) 중앙에 D를 붙인 경우

나머지 4개는 회전하여 일치하는 경우가 2방향이므로

$\dfrac{4!}{2}=12$

각각의 경우 회전하여 다른 경우의 수를 따지면

$1\times1\times4\times4=16$

그러므로 $12\times16=192$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 서로 다른 문양의 개수는

$384+384+192=960$

(가) $=a=24$, (나) $=b=12$, (다) $=c=16$

$\therefore\ a+b+c=24+12+16=52$

21) [정답] 8

[해설]

회전하여 일치하는 것을 같은 것으로 보므로 빨간색을 칠할 정사각형은 그림과 같이 A, B, C중에서 택할 수 있다.

A	B	
	C	

(i) A에 빨간색을 칠하는 경우
파란색을 칠할 수 있는 경우의 수는 5이다.
나머지 7개의 정사각형에 남은 7개의 색을 칠하는 경우의 수는 $7!$이다.

(ii) B에 빨간색을 칠하는 경우
파란색을 칠할 수 있는 경우의 수는 3이다.
나머지 7개의 정사각형에 남은 7개의 색을 칠하는 경우의 수는 $7!$이다.

(iii) C에 빨간색을 칠하는 경우
파란색을 어떤 정사각형에 칠해도 빨간색이 칠해진 정사각형과 꼭짓점을 공유하므로 조건을 만족시킬 수 없다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$(3+5)\times 7! = 8\times 7!$$

따라서 $k=8$

22) [정답] ④

[해설]

규칙에 따라 봉사활동을 신청하는 경우는 첫째 주에 봉사활동 A, B, C를 모든 신청한 후

'(i) 첫째 주를 제외한 3주간의 봉사활동을 신청하는 경우'에서

'(ii) 첫째 주에 봉사활동 C를 신청한 요일과 같은 요일에 모두 봉사활동 C를 신청하는 경우'를 제외하면 된다.

첫째 주에 봉사활동 A, B, C를 모든 신청하는 경우의 수는 $3!$이다.

(i)의 경우 : 봉사활동 A, B, C를 각각 2회, 2회, 5회 신청하는 경우의 수는 $\boxed{\dfrac{9!}{2!\times 2!\times 5!}}$이다.

(ii)의 경우 : 첫째 주에 봉사활동 C를 신청한 요일과 같은 요일에 모두 봉사활동 C를 신청하는 경우의 수는 봉사활동 A, B, C를 각각 2회, 2회, 2회 신청하는 경우의 수 $\boxed{\dfrac{6!}{2!\times 2!\times 2!}}$과 같다.

(i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는
$3!\times(\boxed{756}-\boxed{90})$이다.

$p=756,\ q=90$

$\therefore p+q=756+90=846$

23) [정답] 13

[해설]

펭귄 인형을 크기가 작은 것부터 a_1, a_2, a_3이라 하고 곰 인형을 크기가 작은 것부터 b_1, b_2, b_3, b_4라 하자.

(i) a_3이 b_2보다 왼쪽에 있는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{3!}=4$

(ii) a_3이 b_2보다 오른쪽에 있는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{3!}{2!}=9$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 13

24) [정답] 180

[해설]

4, 5, 6이 적힌 칸의 세 개의 공에 적힌 수의 합이 5이고 세 개의 공이 모두 같은 색인 경우는 다음과 같다.

i) 4, 5, 6이 적힌 칸에 흰 공 ①, ②, ②를 넣는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{2!}$

나머지 5개의 칸에 흰 공 ①, 검은 공 ❶, ❶, ❷, ❷를 넣는 경우의 수는 $\dfrac{5!}{2!2!}$

$\therefore \dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{5!}{2!2!}=90$

ii) 4, 5, 6이 적힌 칸에 검은 공 ❶, ❷, ❷를 넣는 경우도 마찬가지이므로 경우의 수는 90

i), ii)에 의하여 $2\times 90=180$

25) [정답] ④

[해설]

(ⅰ) 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 모든 경우의 수는 216이다.

(ⅱ) 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 홀수인 경우는 1, 3, 5 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택한 후 일렬로 배열하는 중복순열과 같으므로
이 경우의 수는 ${}_3\Pi_3 = 3^3 = \boxed{27}$이다.

(ⅲ) 6 이하의 짝수는 2, 4, 6이므로
세 수의 곱이 2인 경우의 수는 2, 1, 1을 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로 $\frac{3!}{2!} = 3$
4인 경우의 수는 4, 1, 1 또는 2, 2, 1을 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로
$\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} = 3 + 3 = 6$
6인 경우의 수는 6, 1, 1 또는 3, 2, 1을 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로
$\frac{3!}{2!} + 3! = 3 + 6 = 9$이다.

그러므로 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 6 이하의 짝수인

경우의 수는 $3 + 6 + 9 = \boxed{18}$이다.

따라서 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 8 이상의 짝수인 경우의 수는
$216 - 27 - 18 = \boxed{171}$이다.

$\therefore a = 27,\ b = 18,\ c = 171$

따라서 $3a + 2b + c = 288$

26) [정답] 450

[해설]

조건 (가)에서 각각의 홀수가 선택하지 않거나 한 번만 선택되어야 하고 조건 (나)에서 각각의 짝수가 선택되지 않거나 두 번만 선택되어야 하므로 홀수는 1개, 3개 선택되어야 한다.

(ⅰ) 홀수 3개 중 1개가 선택되는 경우
홀수 3개 중 1개를 선택하고 짝수 3개중 2개가 각각 2번씩 선택되어야 하므로 경우의 수는
${}_3C_1 \times {}_3C_2 = 3 \times 3 = 9$(가지)
이 각각에 대하여 이 수를 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!2!1!} = 30$
그러므로 경우의 수는
$9 \times 30 = 270$(가지)

(ⅱ) 홀수 3개 중 3개가 선택되는 경우
짝수 3개 중 1개가 2번 선택되어야 하므로 경우의 수는
${}_3C_3 \times {}_3C_1 = 3$(가지)
이 각각에 대하여 이 수를 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!1!1!1!} = 60$(가지)
그러므로 경우의 수는
$3 \times 60 = 180$(가지)

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$270 + 180 = 450$(가지)

27) [정답] ①

[해설]

조건 (가), (나)를 만족시키는 경우는 다음 두 가지 경우뿐이다.

(ⅰ) 홀수 1개, 짝수 4개를 택하는 경우
사용할 홀수 1개를 택하는 경우의 수는
${}_3C_1 = 3$
이 각각에 대하여 짝수는 3개 중에서 2개를 택하여 두 번씩 사용해야하므로 사용할 짝수를 택하는 경우의 수는
${}_3C_2 = 3$
이 각각에 대하여 택한 수 5개를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!2!} = 30$
따라서 이 경우의 수는
$3 \times 3 \times 30 = 270$

(ⅱ) 홀수 3개, 짝수 2개를 택하는 경우
짝수는 1개만 택하여 두 번 사용해야 하므로 사용할 짝수 1개를 택하는 경우의 수는
${}_3C_1 = 3$
이 각각에 대하여 택한 수 5개를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!} = 60$
따라서 이 경우의 수는
$3 \times 60 = 180$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$270 + 180 = 450$

28) [정답] 199

[해설]
이 주사위를 네 번 던질 때 나온 눈의 수가 4이상인 경우의 수를 n이라 하자.
(ⅰ) $n=0$, 즉 점수가 $1+1+1+1=4$인 경우
1의 눈만 네 번 나와야 하고, 이 경우의 수는 1
(ⅱ) $n=1$, 즉 점수가 $0+1+1+2=4$인 경우
1의 눈이 두 번, 2의 눈이 한 번 나와야 하고, 이 경우의 수는 점수 0, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{4!}{2!}=12$
이 각각에 대하여 4 이상의 눈이 한 번 나오는 경우의 수는 3이므로 이 경우의 수는 $12\times 3=36$
(ⅲ) $n=2$, 즉 점수가 $0+0+1+3=4$ 또는 $0+0+2+2=4$인 경우
㉠ 1의 눈이 한 번, 3의 눈이 한 번 나올 때, 점수 0, 0, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$
㉡ 2의 눈이 두 번 나올 때, 점수 0, 0, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$
㉠, ㉡의 각각에 대하여 4이상의 눈이 두 번 나오는 경우의 수는 ${}_3\Pi_2=3^2=9$ 이므로 이 경우의 수는
$(12+6)\times 9=162$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$1+36+162=199$

29) [정답] 708

[해설]
(ⅰ) 4개의 원판에 적힌 문자가 XXYY꼴인 경우
4개의 문자 중 X, Y에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$
4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!\times 2!}=6$
그러므로 구하는 경우의 수는 $6\times 6=36$
(ⅱ) 4개의 원판에 적힌 문자가 XXYZ꼴인 경우
4개의 문자 중 X에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$
Y, Z에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$
Y, Z에 해당하는 원판의 색을 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2=4$
4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$
그러므로 구하는 경우의 수는 $4\times 3\times 4\times 12=576$
(ⅲ) 4개의 원판에 적힌 문자가 모두 다른 경우
각각의 원판의 색을 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_4=16$
D가 적힌 원판이 맨 아래에 놓이도록 4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $3!=6$
그러므로 구하는 경우의 수는 $16\times 6=96$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$36+576+96=708$

30) [정답] ④

[해설]
(ⅰ) $n(A)=3$이고 모든 원소의 합이 3의 배수인 집합 A는
$\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{1,\ 3,\ 5\}$, $\{2,\ 3,\ 4\}$, $\{3,\ 4,\ 5\}$
이다.
$A=\{1,\ 2,\ 3\}$인 경우 $n(B)<3$이므로 집합 B는
$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 3\}$
이다.

(a) $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1\}$인 경우
집합 A의 원소인 1, 2, 3이 1에 대응하는 경우의 수는 1이고, 4, 5가 2, 3에 하나씩 대응하는 경우의 수는 2이므로
$A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1\}$인
함수 f의 개수는 $1\times 2=\boxed{2}$이다.

(b) $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2\}$인 경우
$\{f(1),\ f(2),\ f(3)\}=\{1,\ 2\}$이고
4, 5가 1, 2, 3에 대응하되 적어도 하나가 3에 대응하는 경우이므로
$A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2\}$인 함수 f의 개수는
$({}_2\Pi_3-2)\times({}_3\Pi_3-{}_2\Pi_2)=6\times 5=\boxed{30}$이다.

(a), (b)와 같은 경우가 각각 3가지이므로
$n(A)=3$, $n(B)<3$이고 집합 A의 모든 원소의 합이 3의 배수가 되도록 하는 함수 f의 개수는
$4\times(3\times\boxed{2}+3\times\boxed{30})$이다.

(ⅱ) $n(A)=4$이고 모든 원소의 합이 3의 배수인 집합 A는 $\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$뿐이므로 이 경우 $X-A=\{3\}$에 의해 $n(B)=3$이므로 집합 B는 $\{1,\ 2,\ 4\}$, $\{1,\ 2,\ 5\}$, $\{1,\ 4,\ 5\}$, $\{2,\ 4,\ 5\}$이다.
$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4\}$인 경우
$f(3)=5$이고 집합 A의 원소 중 어떠한 두 원소는 서로 같은 함숫값을 가져야 하므로
1, 2, 4를 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값으로 정하는 경우의 수는 $3\times\frac{4!}{2!}=3\times 12=36$이다.
그러므로 $n(A)=4$, $n(B)<4$이고 집합 A의 모든 원소의

합이 3의 배수가 되도록 하는 함수 f의 개수는
$4\times36=\boxed{144}$이다.

(iii) $n(A)=5$인 경우 함수 f는 일대일대응이고 $n(B)=5$이므로 조건 $n(A)>n(B)$를 만족시키는 함수 f는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$4\times(3\times\boxed{2}+3\times\boxed{30})+\boxed{144}$이다.

따라서 $p=2$, $q=30$, $r=144$이므로 $p+q+r=176$

31) [정답] ⑤

[해설]
조건 (가)에서 f가 일대일함수가 아니고,
조건 (나)에서
$\log\{f(1)+f(2)+f(3)\}=\log12$
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)=12$ …… ㉠
조건 (다)에서
$\log f(4)f(5)\le1$
$\therefore f(4)f(5)\le10$ …… ㉡
㉠, ㉡을 동시에 만족하는 경우는 다음과 같다.
(i) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$에 대응되는 값이 5, 5, 2인 경우의 수는 $\dfrac{3!}{2!}=3$
$f(4)$, $f(5)$의 값이 대응되는 전체 경우의 수가 $5^2=25$
$f(4)f(5)>10$을 만족하는 경우의 수는
(1) $f(4)$, $f(5)$의 값이 모두 4 이상인 경우의 수가 $2^2=4$
(2) $f(4)$, $f(5)$의 값이 3, 5 또는 4, 5에 대응되는 경우의 수가 $2!\times2=4$
따라서 $f(4)f(5)\le10$을 만족하는 경우의 수는
$25-(4+4)=17$
이상에서 조건을 만족하는 경우의 수는 $3\times17=51$
(ii) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$에 대응되는 값이 5, 4, 3인 경우의 수는 $3!=6$
$f(4)f(5)\le10$을 만족하는 경우의 수는 (i)에서 $f(4)$, $f(5)$가 1, 2에 대응되는 경우는 함수 f가 일대일함수이므로 조건 (가)에 어긋나므로 이 경우를 제외하면 $25-(4+4+2)=15$
이상에서 조건을 만족하는 경우의 수는 $6\times15=90$
(iii) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$에 대응되는 값이 4, 4, 4인 경우의 수는 1
$f(4)f(5)\le10$을 만족하는 경우의 수는 (i)에서 17
이상에서 조건을 만족하는 경우의 수는 $1\times17=17$
(i)~(iii)에서 조건을 만족하는 함수 f의 개수는
$51+90+17=158$이다.

32) [정답] 720

[해설]
함수 $f:X\to X$의 개수는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수와 같다.
조건 (가)에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 중 홀수의 개수를 n이라 하면 $n=0$ 또는 $n=2$ 또는 $n=4$이다.
(i) $n=0$일 때
치역의 세 원소는 모두 짝수이고 집합 X의 원소 중 짝수는 2개뿐이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(ii) $n=2$일 때
조건 (나)에서 홀수인 두 함숫값이 서로 같으면 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 1개, 짝수인 원소가 2개이고 홀수인 두 함숫값이 서로 다르면 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 2개, 짝수인 원소가 1개다.
(a) 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 1개, 짝수인 원소가 2개인 경우
집합 X의 원소인 1, 2, 3, 4, 5 중에서 홀수 1개와 짝수 2개를 선택하는 경우의 수는
${}_3C_1\times{}_2C_2=3$ ……㉠
치역의 세 원소 중 홀수를 a, 두 짝수를 b, c라 하면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 문자 a, a, b, c, c 또는 문자 a, a, b, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\dfrac{5!}{2!\times2!}+\dfrac{5!}{2!\times2!}=60$……㉡
㉠, ㉡에 의하여
$3\times60=180$
(b) 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 2개, 짝수인 원소가 1개인 경우
집합 X의 원소인 1, 2, 3, 4, 5 중에서 홀수 2개와 짝수 1개를 선택하는 경우의 수는
${}_3C_2\times{}_2C_1=6$ ……㉢
치역의 세 원소 중 두 홀수를 a, b, 짝수를 c라 하면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 문자 a, b, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\dfrac{5!}{3!}=20$ ……㉣
㉢, ㉣에 의하여
$6\times20=120$
(a), (b)에 의하여 $180+120=300$

(iii) $n=4$일 때

짝수인 함숫값이 1개이므로 조건 (나)에서

치역의 세 원소 중 홀수인 원소는 2개, 짝수인 원소는 1개다.

집합 X의 원소인 1, 2, 3, 4, 5 중에서

홀수 2개와 짝수 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_2 \times {}_2C_1 = 6$ ……ⓜ

치역의 세 원소 중 두 홀수를 a, b, 짝수를 c라 하면

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는

경우의 수는 문자 a, b, b, b, c 또는

문자 a, a, b, b, c 또는 문자 a, a, a, b, c를

일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{2!\times 2!}+\frac{5!}{3!}=70$……ⓑ

ⓜ, ⓑ에 의하여

$6\times 70=420$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여

구하는 함수 f의 개수는 $300+420=720$

33) [정답] 90

[해설]

원점에서 점 A$(1, 3)$까지 최단거리로 움직이는 경우는 위쪽방향으로 3칸, 오른쪽방향으로 1칸 움직여야 한다. 그런데 모두 6번 움직여야 하므로 아래쪽방향 또는 왼쪽방향으로 1칸 이동한 후 다시 위쪽 방향 또는 오른쪽방향으로 1칸 움직여야 한다.

오른쪽으로 1칸 움직이는 경우를 a

왼쪽으로 1칸 움직이는 경우를 a'

위쪽으로 1칸 움직이는 경우를 b

아래쪽으로 1칸 움직이는 경우를 b'라 하면

원점에서 점 A$(1, 3)$으로 움직이는 경우의 수는 a를 2개, a'을 1개, b를 3개 나열하는 경우의 수와 a를 1개, b'을 1개, b를 4개 나열하는 경우의 수의 합과 같다.

$\frac{6!}{2!\,1!\,3!}+\frac{6!}{1!\,1!\,4!}=90$ (가지)

34) [정답] ⑤

[해설]

$f(a, b)=\frac{(a+b)!}{a!b!}$이므로

ㄱ. $f(2, 3)=\frac{5!}{2!3!}=10$ ∴ 참

ㄴ. $f(a, b)=\frac{(a+b)!}{a!b!}=\frac{(b+a)!}{b!a!}=f(b, a)$ ∴ 참

ㄷ. $f(1, 2)=\frac{3!}{2!}=3$, $f(2, 3)=\frac{5!}{2!3!}=10$

$f(f(1, 2), 3)=f(3, 3)=\frac{6!}{3!3!}=20$

$f(1, f(2, 3))=f(1, 10)=\frac{11!}{10!}=11$

$f(f(1, 2), 3)\neq f(1, f(2, 3))$ ∴ 거짓

ㄹ. 직선 $x+y=6$ 위의 점 $(0, 6)$, $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$, $(6, 0)$에 대해

$f(0, 6)=f(6, 0)=1$, $f(1, 5)=f(5, 1)=6$,

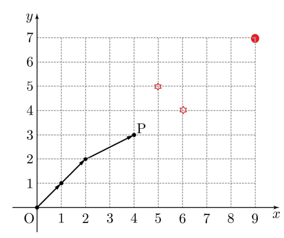
$f(2, 4)=f(4, 2)=15$, $f(3, 3)=20$이므로

$f(a, b)=15$를 만족하는 점은 2개다. ∴ 참

35) [정답] 14

[해설]

㉠, ㉡ 버튼의 사용횟수를 각각 a, b라 하면



O→C : $a+2b=9$, $a+b=7$이므로

$a=5$, $b=2$ --- $\frac{7!}{5!2!}=21$가지

O→A→C : $a+2b=5$, $a+b=5$

$a=5$, $b=0$ --- 1 가지

O→B→C : $a+2b=6$, $a+b=4$

$a=2$, $b=2$ --- $\frac{4!}{2!2!}=6$ 가지

$\therefore 21-(1+6)=14$

36) [정답] 66

[해설]

(i) A→P→Q→B 경로의 경우: $1\times 1\times \frac{6!}{4!2!}=15$

(ii) A→P→R→B 경로의 경우: $1\times1\times\frac{5!}{4!}=5$

(iii) A→P→S→B 경로의 경우: $1\times1\times1=1$

(iv) A→Q→R→B 경로의 경우: $\frac{5!}{4!}\times1\times\frac{5!}{4!}=25$

(v) A→Q→S→B 경로의 경우: $\frac{5!}{4!}\times1\times1=5$

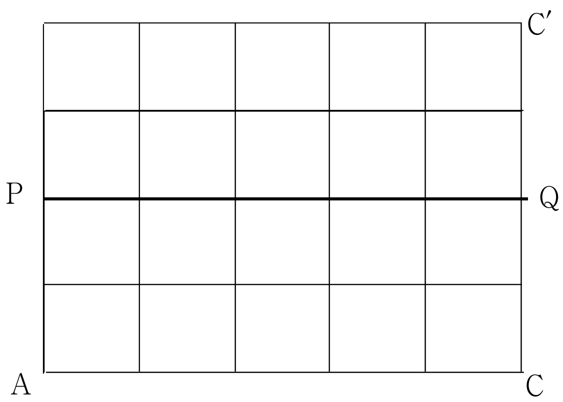
(vi) A→R→S→B 경로의 경우: $\frac{6!}{4!2!}\times1\times1=15$

따라서 총 66가지이다.

37) [정답] ④

[해설]

아래 그림처럼 점 C 를 선분 PQ 에 대하여 대칭시킨 점을 C′ 이라 하면 구하는 경우의 수는 점 A 에서 점 C′ 까지 가는 최단경로의 수와 같다.



따라서

$$\frac{9!}{5!\times4!}=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2}=126\ (\text{가지})$$

38) [정답] ①

[해설]

좌상/우하를 지나는 경우 $\frac{4!}{2!2!}$가지씩

중상/중하를 지나는 경우 $\frac{3!}{2!}$가지씩

좌중/우중를 지나는 경우 $\frac{3!}{2!}$가지씩

좌하/우상을 지나는 경우 1가지씩

중앙점을 지나는 경우 $2\times2=4$가지

따라서 $\frac{4!}{2!2!}\times2+\frac{3!}{2!}\times4+1\times2+4=30$가지

39) [정답] ⑤

[해설]

$$f(x)=\begin{cases}2\times{}_6\mathrm{C}_k\times{}_6\mathrm{C}_{k-1} & (x=2k)\\ 2\times{}_6\mathrm{C}_{k-1}\times{}_6\mathrm{C}_{k-1} & (x=2k-1)\end{cases}$$

ㄱ. $f(1)=2$ ∴ 참

ㄴ. $f(2)=12,\ f(12)=12$ ∴ 참

ㄷ. $f(x)$의 최댓값은 $f(7)$ ∴ 참

40) [정답] ⑤

[해설]

$$f(x)=\begin{cases}2\times{}_6\mathrm{C}_k\times{}_6\mathrm{C}_{k-1} & (x=2k)\\ 2\times{}_6\mathrm{C}_{k-1}\times{}_6\mathrm{C}_{k-1} & (x=2k-1)\end{cases}$$

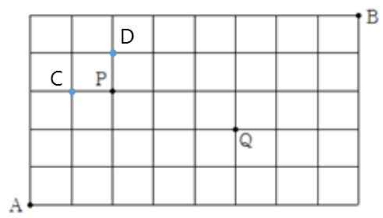
ㄱ. $f(1)=2$ ∴ 참

ㄴ. $f(2)=12,\ f(12)=12$ ∴ 참

ㄷ. $f(x)$의 최댓값은 $f(7)=800$ ∴ 참

41) [정답] ④

[해설]



전체 경로 중 불가능한 경로를 제거하자

전체 경로는 ${}_{13}C_5=1287$

불가능한 경로는

$A-Q-B$의 경우 ${}_7C_2\cdot{}_6C_3=420$

$A-C-P-D$의 경우 ${}_4C_1\cdot{}_7C_1=28$

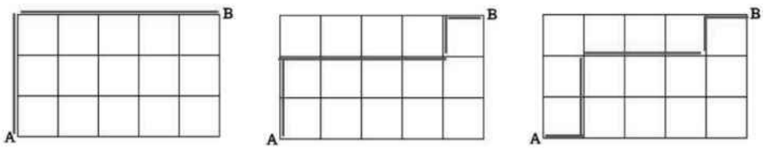
이므로 839이다.

42) [정답] 40

[해설]

가로, 세로를 각각 a, b라고 하면, 세로 길이가 3인 경로는 가로의 길이가 3 이상인 경로에 포함된다. 따라서 가로의

길이가 3 이상인 경로의 수만 구한다.



(ⅰ) 길이가 5인 경로는 $(aaaaa)$, b, b, b의 순열에서

$\dfrac{4!}{3!}=4$가지

(ⅱ) 길이가 4인 경로는 $(aaaa)$, a, b, b, b의 순열인데,

$(aaaa)b-(a,\ b,\ b)$ …… $\dfrac{3!}{2!}=3$

$b(aaaa)b,\ a,\ b$ …… $3!=6$

$(a,\ b,\ b)-b(aaaa)$ …… $\dfrac{3!}{2!}=3$

(ⅲ) 길이가 3인 경로는 (aaa), a, a, b, b, b의 순열인데,

$(aaa)b-(a,\ a,\ b,\ b)$ …… $\dfrac{4!}{2!2!}=6$

$b(aaa)b,\ a,\ a,\ b$ …… $\dfrac{4!}{2!}=12$

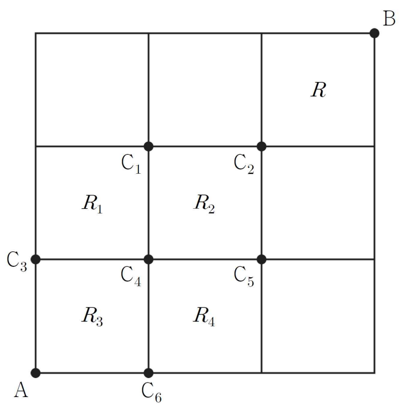
$(a,\ a,\ b,\ b)-(aaa)b$ …… $\dfrac{4!}{2!2!}=6$

그러므로 구하려는 경로의 수는

$4+(3+6+3)+(6+12+6)=40$

43) [정답] 40

[해설]



그림과 같이 6개의 점 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6과 4개의 정사각형 R_1, R_2, R_3, R_4가 있다.

최단거리로 A지점에서 출발하여 B지점을 지나 다시 A지점까지 돌아올 때, 조건 (가)를 만족시키려면 $A\to C_2\to B\to C_2\to A$의 순서로 이동해야 한다.

또한 조건 (나)를 만족시키려면 정사각형 R_1, R_2, R_3, R_4 중 네 변을 모두 지나는 정사각형은 없어야 한다.

(ⅰ) $C_2\to B\to C_2$의 순서로 이동하는 경우

(C_2에서 B로 가는 경우의 수)

×(B에서 C_2로 가는 경우의 수)

$=2\times1=2$

(ⅱ) $A\to C_2$, $C_2\to A$의 순서로 이동하는 경우

$\dfrac{4!}{2!\times2!}\times\dfrac{4!}{2!\times2!}=6\times6=36$

(a) 정사각형 R_1의 네 변을 모두 지나는 경우

$A\to C_3\to C_1\to C_2$, $C_2\to C_1\to C_3\to A$의 순서로 이동하는 경우의 수이므로

$(1\times2\times1)\times(1\times1\times1)=2$

(b) 정사각형 R_2의 네 변을 모두 지나는 경우

$A\to C_4\to C_2$, $C_2\to C_4\to A$의 순서로 이동하는 경우의 수이므로

$(2\times2)\times(1\times2)=8$

(c) 정사각형 R_3의 네 변을 모두 지나는 경우

$A\to C_4\to C_2$, $C_2\to C_4\to A$의 순서로 이동하는 경우의 수이므로

$(2\times2)\times(1\times2)=8$

(d) 정사각형 R_4의 네 변을 모두 지나는 경우

$A\to C_6\to C_5\to C_2$, $C_2\to C_5\to C_6\to A$의 순서로 이동하는 경우의 수이므로

$(1\times2\times1)\times(1\times1\times1)=2$

(e) 정사각형 R_2, R_3의 네 변을 모두 지나는 경우

$A\to C_4\to C_2$, $C_2\to C_4\to A$의 순서로 이동하는 경우의 수이므로

$(2\times2)\times(1\times1)=4$

(a)~(e)에 의하여

$A\to C_2$, $C_2\to A$의 순서로 이동할 때, 한 변의 길이가 1인 정사각형 중 네 변을 모두 지나는 정사각형이 없는 경우의 수는 $36-\{(2+8+8+2)-4\}=20$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$2\times20=40$

44) [정답] ④

[해설]

구하는 경우의 수는

$a+b+c=8\ (0\le a,b,c\le6)$

을 만족하는 정수 (a,b,c)순서쌍의 개수이다.

$a+b+c=8\ (0\le a,b,c\le8)$인 경우 : ${}_3H_8$

여기서 제외할 경우의 수는

$a=7$인 경우: 2가지, $a=8$인 경우: 1가지

b, c도 각각 3가지

$\therefore {}_3H_8-9=36$

45) [정답] ①

[해설]

(i) 의 경우:
n명의 사람이 각자 세 상자 중 공을 넣을 두 상자를 선택하는 경우의 수는 n명의 사람이 각자 공을 넣지 않을 한 상자를 선택하는 경우의 수와 같다. 따라서 세 상자에서 중복을 허락하여 n개의 상자를 선택하는 경우의 수인 $\boxed{{}_3\mathrm{H}_n}$ 이다.

(ii) 의 경우:

각 상자에 $\frac{2n}{3}$ 개의 공이 들어가는 경우뿐이므로 경우의 수는 1이다.

(iii) 의 경우:
두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가면 상자 C에는 최대 n개의 공을 넣을 수 있으므로 두 상자 A, B에 각각 $\frac{n}{2}$ 개보다 작은 개수의 공이 들어갈 수 없다. 따라서 두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가려면 두 상자에 들어있는 공의 개수는 각각 $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2}+1$, $\frac{n}{2}+2$, $\cdots$, $\frac{n}{2}+\frac{n}{2}$ 이므로 경우의 수는 $\boxed{\frac{n}{2}+1}$ 이다.
그런데 세 상자에 같은 개수의 공이 들어있는 경우를 제외해야 하므로 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2\times\left(\boxed{\frac{n}{2}+1}-1\right)$ 이다.
따라서 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 $\boxed{{}_3\mathrm{H}_n-1-\frac{3n}{2}}$ 이다.

$$f(n)={}_3\mathrm{H}_n=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

$$g(n)=\frac{n}{2}+1$$

$$h(n)=\frac{(n+2)(n+1)}{2}-1-\frac{3n}{2}$$

이므로 $\frac{f(30)}{g(30)}+h(30)=\frac{496}{16}+450$
$=31+450=481$

46) [정답] 51

[해설]

6개의 과일에서 선택한 4개의 과일 중 사과, 배, 귤의 개수를 각각 x, y, z라 하자.

(i) $(x,\ y,\ z)=(0,\ 2,\ 2)$인 경우
배 2개와 귤 2개를 2명의 학생에게 나누어주는 경우의 수는 각각 ${}_2\mathrm{H}_2$, ${}_2\mathrm{H}_2$이고, 4개의 과일을 한 명의 학생에게 모두 주는 경우는 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{H}_2\times{}_2\mathrm{H}_2-2={}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2-2$
$=3\times3-2$
$=7$

$(x,\ y,\ z)=(2,\ 0,\ 2)$, $(2,\ 2,\ 0)$인 경우의 수도 모두 7이다.

(ii) $(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 2)$인 경우
사과 1개, 배 1개, 귤 2개를 2명의 학생에게 나누어주는 경우의 수는 차례로 ${}_2\mathrm{H}_1$, ${}_2\mathrm{H}_1$, ${}_2\mathrm{H}_2$이고, 4개의 과일을 한 명의 학생에게 모두 주는 경우는 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{H}_1\times{}_2\mathrm{H}_1\times{}_2\mathrm{H}_2-2={}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2-2$
$=2\times2\times3-2$
$=10$

$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 1)$, $(2,\ 1,\ 1)$인 경우의 수도 모두 10이다.

위의 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3\times7+3\times10=51$

[다른 풀이]

6개의 과일에서 선택한 4개의 과일 중 사과, 배, 귤의 개수를 각각 x, y, z라 하고, 2명의 학생을 각각 A, B라 하자.

이때 과일을 하나도 받지 못하는 학생이 없어야 하고, 학생 A가 받는 과일이 정해지면 학생 B가 받는 과일도 정해진다.

(i) $(x,\ y,\ z)=(0,\ 2,\ 2)$인 경우
학생 A가 받는 배와 귤의 수를 순서쌍으로 나타내면
$(0,\ 1)$, $(0,\ 2)$, $(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 0)$, $(2,\ 1)$
이므로 구하는 경우의 수는 7이다.
이때 $(x,\ y,\ z)=(2,\ 0,\ 2)$, $(2,\ 2,\ 0)$인 경우의 수도 모두

7이다.

(ii) $(x, y, z)=(1, 1, 2)$인 경우

학생 A가 받는 사과, 배, 귤의 수를 순서쌍으로 나타내면

(0, 0, 1), (0, 0, 2), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2),
(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 0), (1, 1, 1)

이므로 구하는 경우의 수는 10이다.

이때 $(x, y, z)=(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$인 경우의 수도 모두 10이다.

위의 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3\times7+3\times10=51$

47) [정답] **49**

[해설]

주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

여학생	A	B	C	합
연필	s개	s개	s개	$3s$개
볼펜				$4-2t$

남학생	a	b	합
연필			$7-3s$
볼펜	t개	t개	$2t$개

(1) 여학생이 연필을 1개씩 받으면 남학생 2명이 연필 4개를 나누어 가지므로 ${}_2\mathrm{H}_4=5$가지

(2) 여학생이 연필을 2개씩 받으면 남학생이 남은 연필을 나누어 가지는 경우는 ${}_2\mathrm{H}_1=2$

따라서 남학생과 여학생이 연필을 나누어 갖는 경우는 7가지

(3) 남학생이 볼펜을 1개씩 받으면 여학생이 남은 볼펜을 나누어 가지는 경우는 ${}_3\mathrm{H}_2=6$

(4) 남학생이 볼펜을 2개씩 받으면 여학생이 남은 볼펜을 나누어 가지는 경우는 ${}_3\mathrm{H}_0=1$

따라서 남학생과 여학생이 볼펜을 나누어 갖는 경우는 7가지

그러므로 조건을 만족하는 경우의 수는 49가지다.

48) [정답] **114**

[해설]

(i) 검은색 볼펜을 안 뽑는 경우

파란색 볼펜을 뽑는 개수를 x개, 빨간색 볼펜을 뽑는 개수를 y개라 하면 $x+y=5$

그런데, $x\le4$, $y\le4$이므로 $x=5$, $y=0$과 $x=0$, $y=5$인 경우는 제외해야 한다.

따라서 경우의 수는

(파, 빨)$=(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4)$

2명의 학생에게 나누어주어야 하므로

㉠ (파, 빨)$=(4, 1), (1, 4)$인 경우

각각 $5\times2=10$가지이므로 20(가지)

㉡ (파, 빨)$=(3, 2), (2, 3)$인 경우

각각 $4\times3=12$가지이므로 24(가지)

㉠, ㉡에서 총 경우의 수는 44(가지)

(ii) 검은색 볼펜을 1자루 뽑는 경우

파란색 볼펜을 뽑는 개수를 x개, 빨간색볼펜을 뽑는 개수를 y개라 하면 $x+y=4$

따라서 경우의 수는

(파, 빨)$=(4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4)$

2명의 학생에게 나누어주어야 하므로

㉠ (파, 빨)$=(4, 0), (0, 4)$인 경우

각각 $5\times1=5$가지, 검은색을 주는 경우가 2가지이므로

$5\times2\times2=20$(가지)

㉡ (파, 빨)$=(3, 1), (1, 3)$인 경우

각각 $4\times2=8$가지, 검은색을 주는 경우가 2가지이므로

$8\times2\times2=32$(가지)

㉢ (파, 빨)$=(2, 2)$인 경우 $3\times3=9$가지, 검은색을 주는

경우가 2가지이므로 $9\times2=18$(가지)

㉠, ㉡, ㉢에서 총 경우의 수는 70(가지)

(i), (ii)에서 총 경우의 수는 $44+70=114$(가지)

49) [정답] **396**

[해설]

철학, 사회과학, 자연과학 분야에 해당하는 책은 반드시 선택해야 하므로 최소 3개 분야에서 최대 5개 분야에 해당하는 책을 선택할 수 있다. 철학, 사회과학, 자연과학 각각의 분야에서 선택한 책의 권수를 순서대로 a, b, c(a, b, c는 4 이상 10 이하의 자연수)라 하자.

(i) 3개 분야에 해당하는 책을 선택하는 경우

$a+b+c=24$에서
$a=4$일 때, $b+c=20$을 만족시키는
순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는 1
$a=5$일 때, $b+c=19$를 만족시키는
순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는 2
⋮
$a=10$일 때, $b+c=14$를 만족시키는 순서쌍 $(b,\ c)$의
개수는 7
따라서 구하는 경우의 수는 $1+2+\cdots+7=28$

(ii) 4개 분야에 해당하는 책을 선택하는 경우
문학 또는 역사 분야 중 한 분야를 선택하는 경우의 수는 2이고 선택된 분야에서 선택한 책의 권수를 d (d는 4 이상 10 이하의 자연수)라 하자.
$a=a'+4,\ b=b'+4,\ c=c'+4,\quad d=d'+4$
($a',\ b',\ c',\ d'$은 6 이하의 음이 아닌 정수)
라 하면 $a+b+c+d=24$에서
$(a'+4)+(b'+4)+(c'+4)+(d'+4)=24$
$a'+b'+c'+d'=8$
방정식 $a'+b'+c'+d'=8$을 만족시키는 6 이하의 음이 아닌 정수 $a',\ b',\ c',\ d'$의 모든 순서쌍 $(a',\ b',\ c',\ d')$의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수
${}_4H_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$에서 $a',\ b',\ c',\ d'$ 중 어느 하나의 값이 7인 경우의 수 ${}_4C_1\times{}_3H_1=12$와 $a',\ b',\ c',\ d'$ 중 어느 하나의 값이 8인 경우의 수 4를 뺀 것과 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
$2\times(165-12-4)=298$

(iii) 5개 분야에 해당하는 책을 선택하는 경우
문학 분야와 역사 분야에서 선택한 책의 권수를 각각 $d,\ e$($d,\ e$는 4 이상 10 이하의 자연수)라 하자.
$a=a'+4,\ b=b'+4,\ c=c'+4,\ d=d'+4,$
$e=e'+4$
($a',\ b',\ c',\ d',\ e'$은 6 이하의 음이 아닌 정수)
라 하면 $a+b+c+d+e=24$에서
$(a'+4)+(b'+4)+(c'+4)+(d'+4)+(e'+4)=24$
$a'+b'+c'+d'+e'=4$
방정식 $a'+b'+c'+d'+e'=4$을 만족시키는 6 이하의 음이 아닌 정수 $a',\ b',\ c',\ d',\ e'$의 모든 순서쌍 $(a',\ b',\ c',\ d',\ e')$의 개수는 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는 ${}_5H_4={}_8C_4=70$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$28+298+70=396$

50) [정답] **37**

[해설]

A가 반드시 빵을 1개 이상 받는 경우의 수는 A에게 빵 1개와 우유 1개를 먼저 주고, 남은 빵 2개와 우유 3개를 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수와 같다.

(i) A에게 남은 빵 2개를 주는 경우
남은 우유 3개를 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3H_3={}_5C_3=10$이다.

(ii) A에게 남은 빵 2개 중 1개를 주는 경우
남은 빵 1개를 B 또는 C에게 나누어 주는 경우의 수는 2이고, 빵을 준 학생에게 우유를 1개 주고 남은 우유 2개를 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수가 ${}_3H_2={}_4C_2=6$이므로 경우의 수는 $2\times6=12$이다.

(iii) A에게 남은 빵을 주지 않는 경우
남은 빵 2개를 B 또는 C 중 한 명에게 모두 주는 경우의 수는 2이고, 빵을 준 학생에게 우유를 1개 주고 남은 우유 2개를 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수가 ${}_3H_2={}_4C_2=6$이므로 경우의 수는 $2\times6=12$이다.
또 남은 빵 2개를 학생 B와 C에게 각각 1개씩 나누어 주는 경우의 수는 1이고, 빵을 준 학생에게 우유를 1개씩 주고 남은 우유 1개를 세 명의 학생에게 주는 경우의 수가 3이므로 경우의 수는 $1\times3=3$이다.
따라서 A에게 남은 빵을 주지 않는 경우의 수는 $12+3=15$이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$10+12+15=37$

51) [정답] **201**

[해설]

조건 (나)에 의하여 학생 A는 검은색 모자를 4개 또는 5개 받아야 하므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) 학생 A가 검은색 모자를 4개 받는 경우
조건 (다)에 의하여 검은색 모자를 더 많이 받는 학생이 1명 나와야 하므로

㉠ 나머지 세 학생 중 한 명의 학생이 검은색 모자를 2개 받고 흰 모자를 1개 받는 경우

㉡ 나머지 세 학생 중 한 명의 학생이 검은색 모자를 2개 받고 흰 모자를 안 받는 경우

㉢ 나머지 세 학생 중 두 명의 학생이 검은색 모자를 1개씩 받고 한 명만 흰 모자를 안 받는 경우

따라서 각각의 경우를 구하면 다음과 같다.

㉠ 나머지 세 학생 중 한 명의 학생이 검은색 모자를 2개 받고 흰 모자를 1개 받는 경우
검은색 모자를 2개 받은 학생이 흰색 모자를 1개 받는 경우 나머지 흰색 모자 3개를 세 학생에게 나누어주면 되므로
${}_3H_3=10$

㉡ 나머지 세 학생 중 한 명의 학생이 검은색 모자를 2개 받고 흰 모자를 안 받는 경우
검은색 모자를 2개 받는 학생을 택하는 경우의 수는 3
각각에 대하여 다른 두 학생에게 흰색 모자 1개씩을 나누어 주고 나머지 흰색 모자 4개를 나누어주는 경우의 수는 검은색 모자를 2개 받은 학생이 흰색 모자를 받지 않는 경우 나머지 흰색 모자 4개를 세 학생에게 나누어주는 경우의 수에서 학생 A가 4개를 모두 받는 경우의 수를 빼면 되므로 ${}_3H_4-1=14$

㉠, ㉡에서 경우의 수는 $3\times(14+10)=72$

㉢ 나머지 세 학생 중 두 명의 학생이 검은색 모자를 1개씩 받고 한 명만 흰 모자를 안 받는 경우
검은색 모자를 흰색 모자보다 더 많이 받는 학생을 정하는 경우의 수는 3
이 각각에 대하여 나머지 두 학생 중에 검은색 모자를 받는 학생을 정하는 경우의 수는 2
이 각각에 대하여 검은색 모자를 흰색 모자보다 더 많이 받는 학생에게는 흰색 모자를 나누어주면 안 되고, 다른 두 학생에게는 흰색 모자를 1개 이상씩 나누어주어야 한다. 즉, 두 학생에게 흰색 모자를 1개씩 나누어주고 나머지 흰색 모자 4개를 나누어주는 경우의 수는 학생 A가 4개를 모두 받는 한 가지 경우를 제외해야 하므로

$${}_3H_4-1=14$$

따라서 경우의 수는 $3\times2\times14=84$

(ii) 학생 A가 검은색 모자를 5개 받는 경우
조건 (다)에 의하여 검은색 모자를 더 많이 받는 학생이 1명 나와야 한다.
다른 세 학생 중 검은색 모자를 받는 학생을 정하는 경우의 수는 3
모든 학생이 한 개이상의 모자를 받아야 하므로 다른 두 학생에게 흰색 모자를 1개씩 나누어주고, 검은색 모자를 1개 받은 학생을 제외한 세 명의 학생에게 나머지 흰색 모자를 4개를 나누어주는 경우의 수를 구하면

$${}_3H_4=15$$

따라서 경우의 수는 $3\times15=45$

(i), (ii)에 의하여 구하는 총 경우의 수는

$$72+84+45=201$$

52) [정답] **72**

[해설]

3명의 학생을 A, B, C라 하자.

(i) 1명의 학생이 흰 공 2개를 모두 받는 경우
흰 공 2개를 모두 받는 1명의 학생을 정하는 경우의 수는

$${}_3C_1=3$$

흰 공 2개를 모두 받은 학생이 A일 때, 학생 A는 빨간 공과 검은 공을 각각 적어도 1개씩 받아야 한다. 학생 A에게 빨간 공 1개와 검은 공 1개를 주고, 남은 빨간 공 2개와 검은 공 2개를 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3H_2\times{}_3H_2=36$$

학생 B가 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수는 남은 빨간 공 2개와 검은 공 2개를 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수이므로 ${}_2H_2\times{}_2H_2=9$
같은 방법으로 학생 C가 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수도 ${}_2H_2\times{}_2H_2=9$
학생 B와 C가 모두 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수는

$${}_1H_2\times{}_1H_2=1$$

그러므로 1명의 학생이 흰 공 2개를 모두 받도록 나누어 주는 경우의 수는 $3\times(36-2\times9+1)=57$

(ii) 2명의 학생이 흰 공을 1개씩 받는 경우
흰 공을 1개씩 받는 2명의 학생을 정하는 경우의 수는

$${}_3C_2=3$$

흰 공을 1개씩 받은 학생이 A, B일 때, 학생 A, B는 빨간 공과 검은 공을 각각 적어도 1개씩 받아야 한다.
학생 A, B에게 각각 빨간 공 1개와 검은 공 1개를 주고, 남은 빨간 공 1개와 검은 공 1개를 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3H_1\times{}_3H_1=9$
학생 C가 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수는

$${}_2H_1\times{}_2H_1=4$$

그러므로 2명의 학생이 흰 공을 1개씩 받도록 나누어 주는 경우의 수는 $3\times(9-4)=15$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $57+15=72$

53) [정답] **168**

[해설]

세 상자에 서로 같은 흰 공 4개를 나누어 넣는 경우는

(4, 0, 0), (3, 1, 0), (2, 2, 0), (2, 1, 1)

(ⅰ) 흰 공을 (4, 0, 0)으로 나누어 넣는 경우
흰 공 4개 넣을 상자를 선택한 후 검은 공 6개를 나누어 넣는 경우는 $x+y+z=6$에서 흰 공이 들어가지 않은 상자에 2개 이상씩 넣어야 하므로

$y=y'+2,\ z=z'+2$ (단, $y',\ z'\geq 0$)

식에 대입하면 $x+y'+z'=2$
즉, ${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$이므로 구하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{H}_2=3\times 6=18$

(ⅱ) 흰 공을 (3, 1, 0)으로 나누어 넣는 경우
흰 공을 A, B, C에 나누어 넣고, 검은 공 6개를 나누어 넣는 경우는 $x+y+z=6$에서 흰 공 1개 넣은 상자에 1개 이상 흰 공 2개 넣은 상자에 2개 이상 넣는 경우이므로

$y=y'+1,\ z=z'+2$ (단, $y',\ z'\geq 0$)

식에 대입하면 $x+y'+z'=3$
즉, ${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$이므로 구하는 경우의 수는

$3!\times{}_3\mathrm{H}_3=6\times 10=60$

(ⅲ) 흰 공을 (2, 2, 0)으로 나누어 넣는 경우
흰 공 0개인 상자를 선택한 후 검은 공 6개를 나누어 넣는 경우는 $x+y+z=6$에서 흰 공이 안 들어간 상자에 2개 이상 넣는 경우이므로

$z=z'+2$ (단, $z'\geq 0$)

식에 대입하면 $x+y+z'=4$
즉, ${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$이므로 구하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{H}_4=3\times 15=45$

(ⅳ) 흰 공을 (2, 1, 1)으로 나누어 넣는 경우
흰 공 2개 들어가는 상자를 선택한 후 검은 공 6개를 나누어 넣는 경우는 $x+y+z=6$에서 흰 공 1개씩 들어간 상자에 1개 이상 넣는 경우이므로

$y=y'+1,\ z=z'+1$ (단, $y',\ z'\geq 0$)

식에 대입하면 $x+y'+z'=4$
즉, ${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$이므로 구하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{H}_4=3\times 15=45$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의해서 $18+60+45+45=168$

54) [정답] 218

[해설]

A, B, C, D가 받는 사인펜의 개수를 각각 $a,\ b,\ c,\ d$라 하면
$a+b+c+d=14$…… ㉠

조건 (가)에서
$a=a'+1,\ b=b'+1,\ c=c'+1,\ d=d'+1$
($a',\ b',\ c',\ d'$은 음이 아닌 정수)로 놓으면 ㉠에서
$a'+b'+c'+d'=10$ …… ㉡
방정식 ㉡을 만족시키는 순서쌍 (a',b',c',d')의 개수는

${}_4\mathrm{H}_{10}={}_{13}\mathrm{C}_{10}={}_{13}\mathrm{C}_3=\dfrac{13\times 12\times 11}{3\times 2\times 1}=286$

한편, 네 명의 학생이 모두 홀수 개의 사인펜을 받는 경우의 수는 다음과 같다.
$a=2a''+1,\ b=2b''+1,\ c=2c''+1,\ d=2d''+1$
($a'',\ b'',\ c'',\ d''$은 음이 아닌 정수)로 놓으면 ㉠에서
$a''+b''+c''+d''=5$ …… ㉢
㉢을 만족시키는 순서쌍 (a'',b'',c'',d'')의 개수는

${}_4\mathrm{H}_5={}_8\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3=\dfrac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1}=56$

따라서 두 조건 (가), (다)를 만족시키는 경우의 수는
$286-56=230$
한편, 두 조건 (가), (다)를 만족시키는 동시에 사인펜을 10개 이상 받은 학생이 있는 경우는 각 학생이 받은 사인펜의 개수가 10, 2, 1, 1일 때뿐이고, 이 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$

따라서 주어진 세 조건을 모두 만족시키는 경우의 수는
$230-12=218$

55) [정답] **51**

[해설]

학생 A가 받은 검은 공의 개수와 흰 공의 개수를 각각 $b,\ w$라 하자.
조건 (가), (나)를 만족시키는 순서쌍 $(b,\ w)$ 중 학생 A가 홀수 개의 공을 받은 경우는

(4, 3), (4, 1), (3, 2), (2, 1)

(ⅰ) 순서쌍 $(b,\ w)$가 (4, 3)일 때
흰 공 2개, 빨간 공 5개가 남으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) 순서쌍 $(b,\ w)$가 (4, 1)일 때
흰 공 4개와 빨간 공 5개가 남으므로 세 명의 학생 B, C, D에게 흰 공과 빨간 공을 각각 1개씩 나누어 주고
남은 흰 공 1개, 빨간 공 2개를 나누어 주는 경우의 수는 다음과 같다.
흰 공 1개를 받은 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$
세 명의 학생 B, C, D에게 빨간 공 2개를 나누어 줄 때, 흰 공을 받은 학생에게 빨간 공 2개를 모두 나누어 주는 경우를 제외해야 하므로 경우의 수는

$_{3}H_{2}-1={}_{4}C_{2}-1=5$

그러므로 구하는 경우의 수는 $3\times5=15$

(iii) 순서쌍 $(b,\ w)$가 $(3,\ 2)$일 때

검은 공 1개, 흰 공 3개, 빨간 공 5개가 남으므로 다음의 (1)과 (2)의 경우로 나누어 볼 수 있다.

(1) 세 명의 학생 B, C, D 중에서 한 명의 학생이 검은 공과 흰 공을 받는 경우

검은 공과 흰 공을 받는 학생을 정하는 경우의 수는

$_{3}C_{1}=3$

검은 공과 흰 공을 받는 학생이 B일 때

남은 흰 공 2개와 빨간 공 5개는 학생 B를 제외한 두 명의 학생 C, D에게 나누어 준다.

두 명의 학생 C, D에게 흰 공 1개, 빨간 공 1개씩을 각각 나누어 주고 남은 빨간 공 3개를 나누어 줄 때, 한 명의 학생에게 빨간 공 3개를 모두 나누어 주는 경우를 제외해야 하므로

경우의 수는 $_{2}H_{3}-2={}_{4}C_{3}-2=2$

그러므로 구하는 경우의 수는 $3\times2=6$

(2) 세 명의 학생 B, C, D 중에서 한 명의 학생이 검은 공과 빨간 공을 받는 경우

검은 공과 빨간 공을 받는 학생을 정하는 경우의 수는

$_{3}C_{1}=3$

검은 공과 빨간 공을 받는 학생이 B일 때

두 명의 학생 C, D에게 흰 공 1개, 빨간 공 1개씩을 각각 나누어 준다.

남은 흰 공 1개, 빨간 공 2개에 대하여 흰 공은 학생 B를 제외한 두 명의 학생 C, D중에서 한 명을 택하여 나누어 주고, 빨간 공은 세 명의 학생 B, C, D중에서 한 명을 택하여 나누어 준다.

이 때, 마지막에 흰 공을 받는 학생에게 빨간 공 2개를 모두 나누어 주는 경우를 제외해야 하므로

경우의 수는

$2\times({}_{3}H_{2}-1)=2\times({}_{4}C_{2}-1)=10$

그러므로 구하는 경우의 수는 $3\times10=30$

(iv) 순서쌍 $(b,\ w)$가 $(2,\ 1)$일 때

조건 (다)를 만족시키지 않는다.

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에 의하여

구하는 경우의 수는 $15+6+30=51$

56) [정답] 32

[해설]

① $d=2$일 때,

$a=2p,\ b=2q,\ c=2r$ (단, $p,\ q,\ r$은 자연수)로 놓으면

$2p+2q+2r=18$

$\Rightarrow p+q+r=9$ (단, $p,\ q,\ r$은 자연수)를 만족시키는

순서쌍 $(p,\ q,\ r)$의 개수가 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수와

같으므로 $_{3}H_{9-3}={}_{8}C_{6}={}_{8}C_{2}=28$ 가지이다.

② $d=3$ 일 때,

$a=3p,\ b=3q,\ c=3r$ (단, $p,\ q,\ r$은 자연수)로 놓으면

$3p+3q+3r=17$ 을 만족시키는 자연수 $p,\ q,\ r$은 존재하지 않는다.

③ $d=4$일 때,

$a=4p,\ b=4q,\ c=4r$ (단, $p,\ q,\ r$은 자연수)로 놓으면

$4p+4q+4r=16$

$\Rightarrow p+q+r=4$ (단, $p,\ q,\ r$은 자연수)를 만족시키는

순서쌍 $(p,\ q,\ r)$의 개수가 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수와

같으므로 $_{3}H_{4-3}={}_{3}C_{1}=3$ 가지이다.

④ $d=5$일 때,

$a=5p,\ b=5q,\ c=5r$ (단, $p,\ q,\ r$은 자연수)로 놓으면

$5p+5q+5r=15$

$\Rightarrow p+q+r=3$ (단, $p,\ q,\ r$은 자연수)를 만족시키는

순서쌍 $(p,\ q,\ r)$은 $(1,\ 1,\ 1)$ 밖에 없으므로

순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 1 가지이다.

⑤ $d\geq6$ 이면 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$은 존재하지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$28+3+1=32$ 가지이다.

57) [정답] 32

[해설]

방정식 $a+b+c=7$을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$_{3}H_{7}={}_{9}C_{7}={}_{9}C_{2}=36$

이때, 조건 (나)를 만족시키지 않는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (2,\ 0)$

뿐이다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$36-4=32$

58) [정답] 210

[해설]

(나)에서 자연수 $x,\ y,\ z,\ w$ 중 3으로 나눈 나머지가 1인 수 2개를 선택하고 3으로 나눈 나머지가 2인 수 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2\times{}_2C_2=6$

$x,\ y$가 3으로 나눈 나머지가 1인 수,

$z,\ w$는 3으로 나눈 나머지가 2인 수라 하면

$x=3x'+1,\ \ y=3y'+1,\ \ z=3z'+2,\ \ w=3w'+2$
$(x',\ y',\ z',\ w'$은 음이 아닌 정수)

(가)에서 $x+y+z+w=18$

$(3x'+1)+(3y'+1)+(3z'+2)+(3w'+2)=18$

$x'+y'+z'+w'=4$ …… ㉠

이때 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수는 4개의 문자 $x',\ y',\ z',\ w'$에서 4개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_4={}_{4+4-1}C_4={}_7C_4=35$

따라서 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는
$6\times35=210$

59) [정답] ②

[해설]

조건에 맞는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하려면 (가)를 만족시키는 경우에서 두 점 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$가 서로 같은 경우와 점 $(a,\ b)$ 또는 점 $(c,\ d)$가 직선 $y=2x$ 위에 있는 경우를 제외하면 된다.

$a=a'+1,\ \ b=b'+1,\ \ c=c'+1,\ \ d=d'+1$이라 하면

$a+b+c+d=12$를 만족시키는 자연수 해의 개수는

$a'+b'+c'+d'=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

${}_4H_8={}_{11}C_3=165$

(ⅰ) 두 점 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$가 같은 경우

$a=c,\ \ b=d$이므로 $a+b=6$이고 순서쌍의 개수는 ${}_2H_4=5$
즉, 순서쌍은 $(1,\ 5,\ 1,\ 5)$, $(2,\ 4,\ 2,\ 4)$, $(3,\ 3,\ 3,\ 3)$, $(4,\ 2,\ 4,\ 2)$, $(5,\ 1,\ 5,\ 1)$의 5가지이다.

(ⅱ) 점 $(a,\ b)$가 직선 $y=2x$ 위에 있는 경우
$b=2a$이므로 $3a+c+d=12$
$a=1$인 경우 $c+d=9$의 자연수 해의 개수는 ${}_2H_7=8$
$a=2$인 경우 $c+d=6$의 자연수 해의 개수는 ${}_2H_4=5$
$a=3$인 경우 $c+d=3$의 자연수 해의 개수는 ${}_2H_1=2$
따라서 점 $(a,\ b)$가 직선 $y=2x$ 위에 있을 때의 순서쌍의 개수 $8+5+2=15$에서 (ⅰ)과 중복되는 순서쌍 $(2,\ 4,\ 2,\ 4)$를 제외한 순서쌍의 개수는 14이다.

(ⅲ) 점 $(c,\ d)$가 직선 $y=2x$ 위에 있는 경우
(ⅱ)와 같이 순서쌍의 개수는 14이다.

(ⅳ) 두 점 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$가 모두 직선 $y=2x$ 위에 있는 경우
$3a+3c=12$이므로 $a+c=4$
따라서 두 점 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$가 모두 직선 $y=2x$ 위에 있을 때의 순서쌍의 개수 ${}_2H_2=3$에서 (ⅰ)과 중복되는 순서쌍 $(2,\ 4,\ 2,\ 4)$를 제외한 순서쌍의 개수는 2이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는

$165-5-(14+14-2)=134$

60) [정답] ③

[해설]

$c=2k_1$, $d=2k_2$을 $2a+2b+c+d=2n$에 대입하면,

$2a+2b+2k_1+2k_2=2n$에서 $a+b+k_1+k_2=n$를 만족하는

음이 아닌 정수의 순서쌍의 개수는 ${}_4H_n$이다.

(가) ${}_4H_n$ 에서 $f(6)={}_4H_9={}_9C_3=84$ … ①

$c=2k_3+1$, $d=2k_4+1$을 $2a+2b+c+d=2n$에 대입하면,

$2a+2b+2k_3+2k_4=2n-2$에서 $a+b+k_3+k_4=n-1$를 만족하는

음이 아닌 정수의 순서쌍의 개수는 ${}_4H_{n-1}$이다.

(나) ${}_4H_{n-1}$ 에서 $g(5)={}_4H_4={}_7C_3=35$ … ②

$\sum_{n=1}^{m}(\text{나})=\sum_{n=1}^{m}{}_4H_{n-1}={}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_{m+2}C_3={}_{m+3}C_4$
에서

$\sum_{n=1}^{m}(\text{가})=\sum_{n=1}^{m}{}_4H_n={}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_{m+3}C_3={}_{m+4}C_4-1$임을

알 수 있다.

따라서,

$\sum_{n=1}^{8} a_n = {}_{12}C_4 - 1 + {}_{11}C_4 = 824$이다. $r = 824$ ⋯ ③

①, ②, ③에 의해

$f(6)+g(5)+r=943$

61) [정답] **31**

[해설]

$12 = 2^2 \times 3$이고 $c+d+e \geq 3$이므로

(가)조건에서 $ab(c+d+e)=12$을 만족하는 경우는 다음 4가지 경우이다.

(ⅰ) $c+d+e=3$, $ab=4$이면 (나)조건에서 적어도 짝수가 2개이어야 하므로

$(a,\ b,\ c,\ d,\ e)=(2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1)$

즉, 1(가지)

(ⅱ) $c+d+e=4$, $ab=3$이면

이 경우는 짝수가 적어도 2개인 경우가 없다.

(ⅲ) $c+d+e=6$, $ab=2$이면

$(a,\ b)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ 즉 2(가지)이고

$(c,\ d,\ e)$에서 짝수가 적어도 1가지는 나오므로

${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$(가지)

따라서 만족하는 경우의 수는

$2 \times 10 = 20$(가지)

(ⅳ) $c+d+e=12$, $ab=1$이면

$(a,\ b)=(1,\ 1)$ 즉, 1(가지)

적어도 짝수가 2개이려면 $c,\ d,\ e$는 모두 짝수인 경우에만 만족하므로

$2c'+2d'+2e'=12$, 즉 $c'+d'+e'=6$

따라서 경우의 수는 ${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$(가지)

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는 $1+10+20=31$(가지)

62) [정답] 332

[해설]

(가)에서 ${}_4H_{12} = {}_{15}C_{12} = {}_{15}C_3 = 455$

(나)에서

$a=2$이면 $b+c+d=10$ -- ${}_3H_{10} = {}_{12}C_2 = 66$

$a+b+c=10$이면 --- ${}_3H_{10} = {}_{12}C_2 = 66$

$a=2,\ a+b+c=10$이면

$a=2,\ d=2,\ b+c=8$ -- 9가지

$\therefore 455-(66+66-9)=332$

63) [정답] **327**

[해설]

(ⅰ) $f(3)$이 3의 배수인 경우

① $f(3)=3$인 경우

$f(1),\ f(2)$를 선택하는 경우의 수는

${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$

$f(4),\ f(5),\ f(6)$을 선택하는 경우의 수는

${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$

그러므로 $6 \times 20 = 120$

② $f(3)=6$인 경우

$f(1),\ f(2)$를 선택하는 경우의 수는

${}_6H_2 = {}_7C_2 = 21$

$f(4),\ f(5),\ f(6)$을 선택하는 경우의 수는

${}_1H_3 = {}_3C_3 = 1$

그러므로 $21 \times 1 = 21$

①, ②에 의하여 $f(3)$이 3의 배수인 경우의 수는

$120+21=141$

(ⅱ) $f(6)$이 3의 배수인 경우

① $f(6)=3$인 경우

$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)$를 선택하는 경우의 수는

${}_3H_5 = {}_7C_5 = 21$

② $f(6)=6$인 경우

$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)$를 선택하는 경우의 수는

${}_6H_5 = {}_{10}C_5 = 252$

①, ②에 의하여 $f(6)$이 3의 배수인 경우의 수는

$21+252=273$

(ⅲ) $f(3),\ f(6)$이 모두 3의 배수인 경우

① $f(3)=f(6)=3$인 경우

$f(1),\ f(2)$를 선택하는 경우의 수는

${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$

$f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는

$${}_1H_2={}_2C_2=1$$

그러므로 $6\times1=6$

② $f(3)=3$, $f(6)=6$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

$${}_3H_2={}_4C_2=6$$

$f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는

$${}_4H_2={}_5C_2=10$$

그러므로 $6\times10=60$

③ $f(3)=f(6)=6$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

$${}_6H_2={}_7C_2=21$$

$f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는

$${}_1H_2={}_2C_2=1$$

그러므로 $21\times1=21$

①, ②, ③에 의하여 $f(3)$, $f(6)$이 모두 3의 배수인 경우의 수는 $6+60+21=87$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$141+273-87=327$$

64) [정답] ②

[해설]

구하고자 하는 함수의 개수를 치역에 따라 분류하면

(ⅰ) 치역이 $\{1\}$인 경우

조건을 성립하며 경우의 수는 1가지이다.

(ⅱ) 치역이 $\{1, 2\}$인 경우

(가)조건에 의해 $f(1)=1$이고

(1) $f(2)=1$일 때

$x=2$인 경우

$f(f(f(2)))=f(f(1))=f(1)=1$ 이고

$x\ge3$인 경우도

$f(f(f(x)))$는 $f(f(1))=1$ 또는 $f(f(2))=1$ 이므로 주어진 조건을 만족한다.

3이상의 정의역이 1, 2에 대응하는 개수를 각각 x_1, x_2라 하면

$$x_1+x_2=6\ (x_1\ge0,\ x_2\ge1\text{인 정수})$$

이므로 ${}_2H_{6-1}={}_6C_5=6$가지이다.

(2) $f(2)=2$일 때

$f(f(f(2)))=2$이므로 모순

(ⅲ) 치역이 $\{1, 3\}$인 경우

(1) $f(2)=1$, $f(3)=1$인 경우

$f(f(f(x)))$는 $f(f(1))=1$ 또는 $f(f(3))=1$이므로 성립

4이상의 정의역이 1, 3에 대응하는 개수를 각각 x_1, x_2라 하면

$$x_1+x_2=5\ (x_1\ge0,\ x_2\ge1\text{인 정수})$$

이므로 ${}_2H_{5-1}={}_5C_4=5$가지이다.

(2) $f(2)=1$, $f(3)=3$인 경우

$f(f(f(3)))=3$이므로 모순

(3) $f(2)=3$인 경우

(가)에 의해 $f(3)\ge f(2)=3$ 즉, $f(3)=3$이므로

$f(f(f(2)))=3$이므로 모순

(ⅳ) 치역이 $\{1, 2, 3\}$인 경우

3이상의 정의역이 1, 2, 3에 각각 대응하는 개수를 x_1, x_2, x_3라 하면

$$x_1+x_2+x_3=6\ (x_1\ge0,\ x_2\ge1,\ x_3\ge1\text{인 정수})$$

이므로 ${}_3H_{6-2}={}_6C_4=15$가지이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에서 조건을 만족시키는 모든 함수 $f: X\to Y$의 개수는 $1+6+5+15=27$가지

65) [정답] 65

[해설]

조건 (가)를 만족시키는 함수 f의 개수는 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.

이때 조건 (나)를 만족시키기 위해서는 -1과 1을 적어도 1개씩 선택하거나, 0을 적어도 2개 선택해야 한다.

(ⅰ) -1과 1을 적어도 1개씩 선택하는 경우

-1과 1을 1개씩 선택한 후 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35$$

(ⅱ) 0을 적어도 2개 선택하는 경우

0을 2개 선택한 후 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 경우의 수는

$${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35$$

(ⅲ) 위의 (ⅰ), (ⅱ)를 동시에 만족시키는 경우

-1을 1개, 0을 2개, 1을 1개 선택한 후 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 1개를 선택하는 경우의 수는

$${}_5H_1={}_{5+1-1}C_1={}_5C_1=5$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$35+35-5=65$

66) [정답] 105

[해설]

조건 (가)를 만족시키는 함수 f의 개수는

$_6H_4 = {_9C_4} = \frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1} = 126$

(i) 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우

$f(1) \geq 4$인 함수 f의 개수는 $_3H_4 = {_6C_4} = 15$

(ii) 조건 (다)를 만족시키지 않는 경우

$f(3)-f(1) > 4$에서

$f(1)=1$, $f(3)=6$이어야 하므로

$f(4)=6$, $1 \leq f(2) \leq 6$

이때 함수 f의 개수는 6

(i), (ii)를 동시에 만족하는 경우는 없다.

따라서 구하는 함수의 개수는 $126-(15+6)=105$

67) [정답] ③

[해설]

네 개의 자연수 중에서 중복을 허락하여 세 수를 선택하는 경우의 수는 $_{4+3-1}C_3 = {_6C_3} = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$ ⋯ ㉠

이때, 네 개의 자연수 1, 2, 4, 8은 각각 2^0, 2^1, 2^2, 2^3으로 나타낼 수 있고, $2^6=64$, $2^7=128$이므로 ㉠ 중에서

$(2^3,\ 2^3,\ 2^3)$, $(2^3,\ 2^3,\ 2^2)$, $(2^3,\ 2^3,\ 2)$, $(2^3,\ 2^2,\ 2^2)$인 경우는 제외해야 하므로 구하고자 하는 경우의 수는

$20-4=16$

68) [정답] 96

[해설]

$180=2^2\times3^2\times5$ 이므로

조건 (가)를 만족하는 (a, b, c)의 개수는

$a=2^{x_1}3^{y_1}5^{z_1}$, $b=2^{x_2}3^{y_2}5^{z_2}$, $c=2^{x_3}3^{y_3}5^{z_3}$에서

(단, $i=1, 2, 3$에 대하여 x_i, y_i, z_i는 음이 아닌 정수)

$x_1+x_2+x_3=2$, $y_1+y_2+y_3=2$, $z_1+z_2+z_3=1$

$_3H_2\times{_3H_2}\times{_3H_1} = {_4C_2}\times{_4C_2}\times{_3C_1} = 108$⋯⋯ ㉠

조건 (나)는 $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$이므로

이를 만족하지 않는 경우는

$a=b$ 또는 $a=c$ 또는 $b=c$이다.

이 중 $a=b=c$인 경우는 존재하지 않는다.

a, b, c 중 두 수가 같은 순서쌍은

$(1, 1, 180)$, $(2, 2, 45)$, $(3, 3, 20)$, $(6, 6, 5)$

$(1, 180, 1)$, $(2, 45, 2)$, $(3, 20, 3)$, $(6, 5, 6)$

$(180, 1, 1)$, $(45, 2, 2)$, $(20, 3, 3)$, $(5, 6, 6)$이므로

조건 (나)를 만족하지 않는 순서쌍의 개수는12⋯⋯ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $108-12=96$

69) [정답] **126**

[해설]

$a\times b\times c=10^5=2^5\times5^5$이므로 $a=2^{x_1}\times5^{y_1}$, $b=2^{x_2}\times5^{y_2}$, $c=2^{x_3}\times5^{y_3}$이라 하자.

a, b, c가 짝수이므로 x_1, x_2, x_3은 자연수이고 y_1, y_2, y_3은 음이 아닌 정수이다.

방정식 $x_1+x_2+x_3=5$의 양의 정수해의 개수는

$_3H_{5-3} = {_4C_2} = 6$

방정식 $y_1+y_2+y_3=5$의 음이 아닌 정수해의 개수는

$_3H_5 = {_7C_5} = 21$

따라서 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$6\times21=126$

70) [정답] ③

[해설]

뽑히는 네 수를 작은 수부터 차례로 a, b, c, d라 하면

조건을 만족시키는 a, b, c, d는

$b-a\geq3$, $c-b\geq3$, $d-c\geq3$이고

$a\geq1$, $d\leq15$이다.

따라서 $1\leq a\leq b-3\leq c-6\leq d-9\leq6$이 성립한다.

이때, 6 이하의 자연수 중에서 위 부등식을 만족시키는 네 자연수 a, $b-3$, $c-6$, $d-9$를 정하는 방법의 수는 $_6H_4$이다.

따라서 구하는 방법의 수는 $_6H_4 = {_9C_4} = 126$이다.

71) [정답] **84**

[해설]

$n=1$일 때, $x_2-x_1 \geq 2$ …… ㉠

$n=2$일 때, $x_3-x_2 \geq 2$이므로 ㉠과 연립하면

$x_1+4 \leq x_2+2 \leq x_3 \leq 10$ …… ㉡

그런데 $x_1 \geq 0$이므로 $x_1+4 \geq 4$ …… ㉢

㉡, ㉢을 만족하므로

$4 \leq x_1+4 \leq x_2+2 \leq x_3 \leq 10$

따라서 4, 5, 6, $\cdots$, 10의 7개 수중에서 3개를 중복을 허락하여 뽑는 가지수이다.

$${}_7H_3 = {}_9C_3 = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$$

[다른 풀이1]

(가)조건에서 $x_{n+1}-x_n \geq 2$이므로

$x_{n+1}-2 \geq x_n$

(나)조건에서 $x_3 \leq 10$

따라서 $0 \leq x_1 \leq x_2-2 \leq x_3-4 \leq 6$

$x_1=a$, $x_2-2=b$, $x_3-4=c$라 하면

$0 \leq a \leq b \leq c \leq 6$

$${}_7H_3 = {}_9C_3 = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$$

72) [정답] 55

[해설]

c가 5 이하의 자연수이므로 $1 \leq b \leq 4$이다.

(i) $b=1$인 경우
$a \leq 2 \leq c \leq d$에서 a를 택하는 경우의 수는
${}_2C_1$이고, c, d를 택하는 경우의 수는 ${}_4H_2$이다.
그러므로 구하는 경우의 수는
${}_2C_1 \times {}_4H_2 = {}_2C_1 \times {}_5C_2 = 2 \times 10 = 20$

(ii) $b=2$인 경우
$a \leq 3 \leq c \leq d$에서 a를 택하는 경우의 수는
${}_3C_1$이고, c, d를 택하는 경우의 수는 ${}_3H_2$이다.
그러므로 구하는 경우의 수는
${}_3C_1 \times {}_3H_2 = {}_3C_1 \times {}_4C_2 = 3 \times 6 = 18$

(iii) $b=3$인 경우
$a \leq 4 \leq c \leq d$에서 a를 택하는 경우의 수는
${}_4C_1$이고, c, d를 택하는 경우의 수는 ${}_2H_2$이다.
그러므로 구하는 경우의 수는
${}_4C_1 \times {}_2H_2 = {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 4 \times 3 = 12$

(iv) $b=4$인 경우
$a \leq 5 \leq c \leq d$에서 a를 택하는 경우의 수는
${}_5C_1$이고, c, d를 택하는 경우의 수는 1이다.
그러므로 구하는 경우의 수는 ${}_5C_1 \times 1 = 5$

(i) ~ (iv)에 의하여 구하는 경우의 수는

$20+18+12+5=55$

73) [정답] 80

[해설]

조건을 만족시키는 자연수는 각 자리의 수의 합이 8보다 작은 네 자리의 홀수이므로 일의 자리의 수는 1, 3, 5이다.

이 네 자리의 자연수를

$a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d\,(a \neq 0)$이라 하자.

(i) $d=1$인 경우
부등식 $a+b+c \leq 6\,(a \geq 1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수와 같으므로
$a+b+c=6\,(a \geq 1)$일 때, ${}_3H_5$
$a+b+c=5\,(a \geq 1)$일 때, ${}_3H_4$
$\vdots$
$a+b+c=1\,(a \geq 1)$일 때, ${}_3H_0$
${}_3H_5 + {}_3H_4 + \cdots + {}_3H_0 = {}_7C_5 + {}_6C_4 + \cdots + {}_2C_0 = 56$

(ii) $d=3$인 경우
부등식 $a+b+c \leq 4\,(a \geq 1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수와 같으므로 (i)과 같은 방법으로
${}_3H_3 + {}_3H_2 + {}_3H_1 + {}_3H_0 = {}_5C_3 + {}_4C_2 + {}_3C_1 + {}_2C_0 = 20$

(iii) $d=5$인 경우
부등식 $a+b+c \leq 2\,(a \geq 1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수와 같으므로 (i)과 같은 방법으로
${}_3H_1 + {}_3H_0 = {}_3C_1 + {}_2C_0 = 4$

따라서 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 80

[다른 풀이]

(i) $d=1$인 경우

$a+b+c \leq 6$ $(a \geq 1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 a, b, c의 개수는
$a+b+c+e=6$ $(a \geq 1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, e의 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ e)$의 개수와 같다.
그러므로 ${}_4H_5 = {}_8C_5 = 56$

(ii) $d=3$인 경우
$a+b+c \leq 4$ $(a \geq 1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는
$a+b+c+e=4$ $(a \geq 1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, e의 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ e)$의 개수와 같다.
그러므로 ${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$

(iii) $d=5$인 경우
$a+b+c \leq 2$ $(a \geq 1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는
$a+b+c+e=2$ $(a \geq 1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, e의 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ e)$의 개수와 같다.
그러므로 ${}_4H_1 = {}_4C_1 = 4$

따라서 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 80

74) [정답] 60

[해설]

1층에 6개를 모두 쌓은 후 남은 6개를 쌓는 방법은 다음과 같다.

i) 2층 앞줄에 모두 1개씩 쌓는 경우

${}_4C_1 \times {}_3C_1 = 12$

ii) 2층 앞줄 두 곳 중 한 곳에만 1개를 쌓는 경우

뒷줄 네 곳 중 한 곳에 3개를 쌓고 나머지 세 곳에 중복을 허락하여 2개를 쌓으면 되므로

${}_2C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3H_2 = 48$

따라서 $12+48=60$

75) [정답] ③

[해설]

<B형>과 <C형>이 각각 2번 나타나도록 5개의 바둑돌을 나열한 경우는

●○●○● 또는 ○●○●○

(i) ●○●○●인 경우

1번의 <D형>을 만들기 위해서는 새로운 1개의 ○을 나열되어 있는 ○에 이웃하도록 나열하고, 4번의 <A형>을 만들기 위해서는 새로운 4개의 ●을 나열되어 있는 ●에 이웃하도록 나열하면 되므로
${}_2C_1 \times {}_3H_4 = {}_2C_1 \times {}_6C_4 = 30$

(ii) ○●○●○인 경우
같은 방법으로
${}_3C_1 \times {}_2H_4 = {}_3C_1 \times {}_5C_4 = 15$

따라서 (i), (ii)에 의하여 경우의 수는 45

76) [정답] 45

[해설]
<B형>과 <C형>이 각각 2번 나타나도록 5개의 바둑돌을 나열한 경우는

●○●○● 또는 ○●○●○

(i) ●○●○●인 경우
1번의 <D형>을 만들기 위해서는 새로운 1개의 ○을 나열되어 있는 ○에 이웃하도록 나열하고, 4번의 <A형>을 만들기 위해서는 새로운 4개의 ●을 나열되어 있는 ●에 이웃하도록 나열하면 되므로
${}_2C_1 \times {}_3H_4 = {}_2C_1 \times {}_6C_4 = 30$

(ii) ○●○●○인 경우
같은 방법으로
${}_3C_1 \times {}_2H_4 = {}_3C_1 \times {}_5C_4 = 15$

따라서 (i), (ii)에 의하여 경우의 수는 45

77) [정답] ③

[해설]

(i) $k=0$일 때
둘째 줄에 있는 n개의 타일 중에서 검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수는 다음과 같다.
검은색으로 칠할 타일 사이에는 검은색으로 칠하지 않을 타일이 각각 1개 이상씩 있어야 한다.
즉, 검은색으로 칠하지 않을 타일이 있을 수 있는 곳은 많아야 4곳이므로 타일의 개수를 결정하는 경우의 수는 $\boxed{{}_4H_{n-5}}$이다.

(ii) $k=1$일 때
둘째 줄에 있는 n개의 타일 중에서 검은색으로 칠할 타일 2개를 고르는 경우의 수는 ${}_3H_{n-3}$이다.
첫째 줄에서 검은색으로 칠할 타일 1개를 고르는 경우의

수는 둘째 줄에서 검은색으로 칠할 타일의 바로 위쪽에 있는 타일을 제외한 나머지 $n-2$개의 타일 중 1개의 타일을 고르는 경우의 수와 같으므로 $\boxed{{}_{n-2}C_1}$이다. 그러므로

검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수는

${}_3H_{n-3}\times\boxed{{}_{n-2}C_1}$이다.

(가)에 알맞은 식은 ${}_4H_{n-5}$ 이므로 $f(n)={}_4H_{n-5}$

(나)에 알맞은 식은 ${}_{n-2}C_1$ 이므로 $g(n)={}_{n-2}C_1$

따라서 $f(10)+g(8)={}_4H_5\times{}_6C_1=56+6=62$

78) [정답] ⑤

[해설]

(i) 6, 6, 2인 경우 순서쌍의 개수 $\dfrac{3!}{2!}=3$

(ii) 6, 5, 3인 경우 순서쌍의 개수 $3!=6$

(iii) 6, 4, 4인 경우 순서쌍의 개수 $\dfrac{3!}{2!}=3$

(iv) 5, 5, 4인 경우 순서쌍의 개수 $\dfrac{3!}{2!}=3$

따라서 $3+6+3+3=15$

(다른 풀이)

$a=6-a'$, $b=6-b'$, $c=6-c'$ 이라 하자.

$(6-a')+(6-b')+(6-c')=14$

$a'+b'+c'=4$(단, a',b',c'은 음이 아닌 정수)

따라서 ${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

79) [정답] 120

[해설]

8개의 레인 번호 중 어느 두 번호도 연속되지 않도록 선택한 3개의 레인 번호를 각각 X, Y, $Z(X<Y<Z)$라 하자.

X, Y, Z를 선택하는 경우의 수는 다음과 같다.

X보다 작은 레인 번호의 개수를 a, X보다 크고 Y보다 작은 레인 번호의 개수를 b, Y보다 크고 Z보다 작은 레인 번호의 개수를 c, Z보다 큰 레인 번호의 개수를 d라 하면

$$a+b+c+d=5(a\ge0,\ b\ge1,\ c\ge1,\ d\ge0)$$

$$b=b'+1,\ c=c'+1$$

$$a+b'+c'+d=3(a\ge0,\ b'\ge0,\ c'\ge0,\ d\ge0)$$

$${}_4H_3={}_6C_3=20$$

3개의 레인 번호 X, Y, Z를 3명의 학생이 선택하는 경우의 수는

$$3!$$

따라서 $20\times3!=120$

80) [정답] ①

[해설]

8개의 레인 번호 중 어느 두 번호도 연속되지 않도록 선택한 3개의 레인 번호를 각각 X, Y, $Z(X<Y<Z)$라 하자.

X, Y, Z를 선택하는 경우의 수는 다음과 같다.

X보다 작은 레인 번호의 개수를 a,

X보다 크고 Y보다 작은 레인 번호의 개수를 b,

Y보다 크고 Z보다 작은 레인 번호의 개수를 c,

Z보다 큰 레인 번호의 개수를 d라 하면

$$a+b+c+d=5(a\ge0,\ b\ge1,\ c\ge1,\ d\ge0)$$

$$b=b'+1,\ c=c'+1$$

$$a+b'+c'+d=3(a\ge0,\ b'\ge0,\ c'\ge0,\ d\ge0)$$

$${}_4H_3={}_6C_3=20$$

3개의 레인 번호 X, Y, Z를 3명의 학생이 선택하는 경우의 수는 $3!$

따라서 $20\times3!=120$

81) [정답] ①

[해설]

네 상자 A, B, C, D에 n개의 공을 남김없이 나누어 넣는 경우의 수는 공이 5개씩 모두 20개가 들어 있는 네 상자 A, B, C, D에서 총 $20-n$개의 공을 꺼내는 경우의 수와 같다.

(i) $n=15$인 경우

공이 5개씩 모두 20개가 들어 있는 네 상자 A, B, C, D에서 총 5개의 공을 꺼내는 경우의 수는 서로 다른 네 상자에서 5개를 택하는 중복조합의 수 ${}_4H_5$와 같으므로

$$f(15)={}_4H_5={}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=\boxed{56}$$

(ii) $n=14$인 경우

공이 5개씩 모두 20개가 들어 있는 네 상자 A, B, C,

D에서 총 6개의 공을 꺼내는 경우의 수는 서로 다른 네 상자에서 6개를 택하는 중복조합의 수 ${}_4H_6$에서 서로 다른 네 상자 중 한 상자만 6번 택하는 경우의 수 4를 뺀 수와 같으므로

$$f(14)={}_4H_6-\boxed{4}$$
$$={}_9C_3-4$$
$$=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}-4=80$$

(iii) $n=13$인 경우
공이 5개씩 모두 20개가 들어 있는 네 상자 A, B, C, D에서 총 7개의 공을 꺼내는 경우의 수는 서로 다른 네 상자에서 7개를 택하는 중복조합의 수 ${}_4H_7$에서 서로 다른 네 상자 중 한 상자만 7번 택하는 경우의 수 4와 서로 다른 네 상자 중 서로 다른 두 상자를 각각 1번, 6번 택하는 경우의 수 ${}_4P_2$를 뺀 수와 같으므로

$$f(13)={}_4H_7-4-{}_4P_2$$
$$={}_{10}C_3-4-12$$
$$=120-16=\boxed{104}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$f(15)+f(14)+f(13)$$
$$=\boxed{56}+({}_4H_6-\boxed{4})+\boxed{104}=240$$

따라서 $p=56$, $q=4$, $r=104$이므로

$$p+q+r=164$$

82) [정답] ①

[해설]

$(x^3+3x^2+3x+a)^4=\{(x+1)^3+a-1\}^4$에서 일반항은

$${}_4C_r(a-1)^{4-r}(x+1)^{3r}\ (0\le r\le 4) \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 x^7 항은

$${}_4C_r(a-1)^{4-r}{}_{3r}C_7\,x^7$$

$3r\ge 7$이어야 하므로 $r=3$ 또는 $r=4$

$r=3$일 때, x^7의 계수는

$${}_4C_3(a-1){}_9C_7=2^4\cdot3^2(a-1)$$

$r=4$일 때, x^7의 계수는

$${}_4C_4\cdot{}_{12}C_7=2^3\cdot3^2\cdot11$$

따라서 $2^4\cdot3^2(a-1)+2^3\cdot3^2\cdot11=2^3\cdot3^5$에서

$$2(a-1)+11=27,\ a=9$$

[다른 풀이]

x^3이 두 번, x가 한 번 곱해지거나

x^3이 한 번, x^2이 두 번 곱해지거나

x^3, x^2이 각각 한 번, x가 두 번 곱해지거나

x^2이 세 번 x가 한 번 곱해질 때, x^7이 만들어지므로

x^7의 계수는

$$\frac{4!}{2!}\times3a+\frac{4!}{2!}\times3^2a+\frac{4!}{2!}\times3^3+\frac{4!}{3!}\times3^4$$

$$=2^23^2a+2^23^3a+2^23^4+2^23^4=2^23^2(4a+18)$$

$4a+18=2\times3^3=54$에서 $a=9$

83) [정답] ③

[해설]

$(x+2)^{19}$의 전개식의 일반항은

$${}_{19}C_r2^{19-r}x^r\,(r=0,1,2,\cdots,19)$$

로 나타낼 수 있다. 이때

x^k의 계수는 ${}_{19}C_k2^{19-k}$이고

x^{k+1}의 계수는 ${}_{19}C_{k+1}2^{18-k}$이므로

${}_{19}C_k2^{19-k}>{}_{19}C_{k+1}2^{18-k}$에서

$${}_{19}C_k\times2>{}_{19}C_{k+1}$$

$$\frac{19!}{k!(19-k)!}\times2>\frac{19!}{(k+1)!(18-k)!}$$

$$\frac{2}{19-k}>\frac{1}{k+1}$$

$3k>17$에서 $k>\frac{17}{3}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다.

84) [정답] 12

[해설]

$2(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}항의 계수는

$2{}_nC_1a=2na\cdots$ ㉠

$(x-1)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 항의 계수는

$(x-1)(x+a)^n=x(x+a)^n-(x+a)^n$으로 부터

${}_nC_2a^2+(-1)({}_nC_1a)=\dfrac{n(n-1)}{2}a^2-na\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $2na=\dfrac{n(n-1)}{2}a^2-na$

정리하면 $(n-1)a=6=1\cdot6=2\cdot3=3\cdot2=6\cdot1$이므로

$(n,\ a)=(2,\ 6),\ (3,\ 3),\ (4,2),\ (7,\ 1)$

$\therefore an$의 최대값은 12

85) [정답] ①

[해설]

$(x+a^2)^n$ 의 전개식에서 x^{n-1} 의 계수는 a^2n 이다.

$(x^2-2a)(x+a)=x^2(x+a)^n-2a(x+a)^n$ 에서 $x^2(x+a)^n$ 을 전개하면 x^{n-1} 의 계수는 $(x+a)^n$ 의 전개식에서 x^{n-3} 의 계수와 같으므로

${}_n\mathrm{C}_{n-3}\times a^3=\boxed{{}_n\mathrm{C}_3}\times a^3$ 이고, $2a(x+a)^n$ 을 전개하면 x^{n-1} 의 계수는 $2a^2n$ 이다.

그러므로 $a^2n=\boxed{{}_n\mathrm{C}_3}\times a^3-2a^2n$ 이고, 이 식을 정리하면 a 를 n 에 관한 식으로 나타내면

$n={}_n\mathrm{C}_3\times a-2n$

$a=\dfrac{3n}{{}_n\mathrm{C}_3}=\dfrac{3n}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}}=\boxed{\dfrac{18}{(n-1)(n-2)}}$

이다. 여기서 a 는 자연수이고 n 은 4 이상의 자연수이므로 $(n-1)(n-2)$ 는 18 의 양의 약수이어야 한다.

그러므로

$(n-1)(n-2)=3\times2$

$n-1=3$

$n=\boxed{4}$ 이다.

따라서, $f(n)={}_n\mathrm{C}_3,\ g(n)=(n-1)(n-2),\ k=4$이므로

$$\begin{aligned}f(k)+g(k)&={}_4\mathrm{C}_3+(4-1)\times(4-2)\\&=4+6\\&=10\end{aligned}$$

86) [정답] 12

[해설]

이항정리에 의하면

$f(x)=\sum_{r=0}^{6}{}_6C_r\cdot(x^2)^r=(1+x^2)^6$

로 나타낼 수 있다. 그러므로 주어진 조건으로부터

$f(\tan\theta)=(1+\tan^2\theta)^6=2^{12}$, $1+\tan^2\theta=4$

이다. θ 는 1 사분면의 각이므로

$\tan\theta=\sqrt{3}$, $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

따라서 구하는 값은

$\dfrac{36\theta}{\pi}=\dfrac{36}{\pi}\times\dfrac{\pi}{3}=12$

87) [정답] **243**

[해설]

a_{p+1} 부터 a_9 까지의 $(9-p)$ 개의 수 중에서 최솟값은 a_q, 즉 $a_q=1$, 9 는 $a_p=8$ 보다 큰 수이므로 최댓값은 $a_9=9$ 이다.

(i) 첫 번째와 p 번째 사이의 공을 꺼내는 경우의 수는 $a_1=2,\ a_p=8,\ a_q=1,\ a_9=9$ 가 적힌 공을 제외한 5 개의 공 중에서 $(p-2)$ 개의 공을 꺼내는 조합의 수이므로 ${}_5\mathrm{C}_{p-2}$ 이다.

(ii) (i)에서 남아 있는 공 중 p 번째와 q 번째 사이의 공을 꺼내는 경우의 수는 $a_q=1,\ a_9=9$ 가 적힌 공을 제외한 $(9-p-2)=(7-p)$ 개의 공 중에서 $(q-p-1)$ 개의 공을 꺼내는 조합의 수이므로 ${}_{7-p}\mathrm{C}_{q-p-1}$ 이다.

(iii) (i)과 (ii)의 과정을 거치면 q 번째와 9 번째 사이의 공은 정해진다.

이때, p 가 정해지면 q 가 취할 수 있는 값은 $p+1$ 부터 8 까지이므로 (ii)에 의해 $\sum_{q=p+1}^{8}{}_{7-p}\mathrm{C}_{q-p-1}$

$q-p-1=k$ 로 놓으면

$q=p+1$ 일 때 $k=0$ 이고,

$q=8$ 일 때 $k=7-p$ 이므로

$$\sum_{q=p+1}^{8}{}_{7-p}\mathrm{C}_{q-p-1}=\sum_{k=0}^{7-p}{}_{7-p}\mathrm{C}_k=(1+1)^{7-p}=2^{7-p}$$

p 의 값은 2 부터 7 까지 취할 수 있다.

그러므로 구하는 값은 (i)에 의해 $\sum_{p=2}^{7}{}_5\mathrm{C}_{p-2}2^{7-p}$

따라서 $p-2=r$ 로 놓으면

$p=2$일 때 $r=0$이고, $p=7$일 때 $r=5$이므로

$$\sum_{p=2}^{7} {}_5C_{p-2}2^{7-p}=\sum_{r=0}^{5} {}_5C_r 2^{5-r}=(2+1)^5=243$$

[다른 풀이]

구하는 경우의 수는 $a_1=2$, $a_p=8$, $a_q=1$, $a_9=9$가 적힌 4개의 공을 제외한 5개의 공을 첫 번째와 p번째 사이, p번째와 q번째 사이, q번째와 9번째 사이로 나누는 경우의 수와 같다. 그러므로

${}_5C_0\times({}_5C_0\cdot{}_5C_5+{}_5C_1\cdot{}_4C_4+{}_5C_2\cdot{}_3C_3$

$+{}_5C_3\cdot{}_2C_2+{}_5C_4\cdot{}_1C_1+{}_5C_5\cdot 1)$

$+{}_5C_1\times({}_4C_0\cdot{}_4C_4+{}_4C_1\cdot{}_3C_3+{}_4C_2\cdot{}_2C_2$

$+{}_4C_3\cdot{}_1C_1+{}_4C_4\cdot 1)$

$+{}_5C_2\times({}_3C_0\cdot{}_3C_3+{}_3C_1\cdot{}_2C_2+{}_3C_2\cdot{}_1C_1+{}_3C_3\cdot 1)$

$+{}_5C_3\times({}_2C_0\cdot{}_2C_2+{}_2C_1\cdot{}_1C_1+{}_2C_2\cdot 1)$

$+{}_5C_4\times({}_1C_0\cdot{}_1C_1+{}_1C_1\cdot 1)$

$+{}_5C_5\times(1\cdot 1)=243$

[다른 풀이]

a_{p+1}부터 a_9까지의 $(9-p)$개의 수 중에서 최솟값은 a_q, 즉 $a_q=1$, 9는 $a_p=8$보다 큰 수이므로 최댓값은 $a_9=9$이다.

3이 적힌 공을 꺼내는 경우는 첫 번째와 p번째 사이, p번째와 q번째 사이, q번째와 9번째 사이 중 하나이므로 그 경우의 수는 3이다. 4, 5, 6, 7이 적힌 공을 꺼내는 경우의 수도 같은 방법으로 생각하면 각각 3이다. 따라서 구하는 경우의 수는 $3^5=243$이다.

88) [정답] 93

[해설]

$n(S_1)=k(3\le k\le 10$, k는 자연수)인 집합 S_1의 개수는 전체집합 U의 원소 10개 중 서로 다른 k개를 선택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_{10}C_k$이다.

또한 $S_1\subset S_2\subset S_3$이므로 집합 S_1에 속하지 않는 원소는 세 집합 S_2-S_1, S_3-S_2, $U-S_3$ 중 어느 한 집합에 속해야 한다.

집합 S_1에 속하지 않는 $(10-k)$개의 원소가 세 집합 S_2-S_1, S_3-S_2, $U-S_3$ 중 어느 한 집합의 원소가 되도록 정하는 경우의 수는 서로 다른 세 개에서 중복을 허락하여 $(10-k)$개를 선택하는 중복순열의 수 ${}_3\Pi_{10-k}=3^{10-k}$과 같다.

그러므로 $n(S_1)=k$일 때 집합 S_1, S_2, S_3의 순서쌍 (S_1, S_2, S_3)의 개수는 ${}_{10}C_k\times\boxed{3^{10-k}}$이다.

따라서 $n(S_1)\ge 3$, $S_1\subset S_2\subset S_3$을 만족시키는 순서쌍 (S_1, S_2, S_3)의 개수는 이항정리에 의하여

$$\sum_{k=3}^{10}\left({}_{10}C_k\times\boxed{3^{10-k}}\right)$$

$$=\sum_{k=3}^{10}{}_{10}C_k\times 1^k\times 3^{10-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{10}{}_{10}C_k\times 1^k\times 3^{10-k}-\sum_{k=0}^{2}{}_{10}C_k\times 1^k\times 3^{10-k}$$

$$=(1+3)^{10}-(3^{10}+10\times 3^9+45\times 3^8)$$

$$=4^{10}-\boxed{84}\times 3^8$$

따라서 $f(k)=3^{10-k}$이고 $a=84$이므로

$a+f(8)=84+9=93$

<참고>

$$\sum_{k=0}^{10}{}_{10}C_k\times 1^k\times 3^{10-k}$$

$$={}_{10}C_0\times 1^0\times 3^{10}+{}_{10}C_1\times 1^1\times 3^9+\cdots+{}_{10}C_{10}\times 1^{10}\times 3^0$$

$$=(1+3)^{10}$$

89) [정답] ⑤

[해설]

$$\sum_{k=2}^{20}a_{2k}=a_4+a_6+a_8+\cdots+a_{40}$$

$$={}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{20}C_2={}_{21}C_3=1330$$

90) [정답] **760**

[해설]

자연수 n에 대하여 0부터 n까지 정수가 하나씩 적힌 $(n+1)$개의 공이 들어 있는 상자에서 한 개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시

넣는 5번의 과정 중 m번째 꺼낸 공에 적힌 수를 $f(m)$이라 할 때,

조건 (가)에 의하여

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)$

조건 (나)에 의하여 $f(3)=f(1)+1$

$f(1)=a(a=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$이라 하면
$f(3)=a+1$

$a\le f(2)\le a+1\le f(4)\le f(5)$

(i) $a=0$일 때,
$0\le f(2)\le 1\le f(4)\le f(5)$
$f(2)$를 선택하는 경우는 0 또는 1의 두 가지이고 $f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는 1, 2, 3, $\cdots$, n 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{n}H_2={}_{n+1}C_2$
$\therefore 2\times{}_{n+1}C_2$

(ii) $a=1$일 때,
$1\le f(2)\le 2\le f(4)\le f(5)$
$f(2)$를 선택하는 경우는 1 또는 2의 두 가지이고 $f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는 2, 3, 4, $\cdots$, n 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{n-1}H_2={}_{n}C_2$
$\therefore 2\times{}_{n}C_2$

(iii) $a=k$일 때,
$k\le f(2)\le k+1\le f(4)\le f(5)$
$f(2)$를 선택하는 경우는 k 또는 $k+1$의 두 가지이고 $f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는 $k+1$, $k+2$, $k+3$, $\cdots$, n 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{n-k}H_2={}_{n-k+1}C_2$
$\therefore 2\times{}_{n-k+1}C_2$

$0\le k\le n-1$이므로

$a_n=2({}_{n+1}C_2+{}_{n}C_2+{}_{n-1}C_2+\cdots+{}_{3}C_2+{}_{2}C_2)$
$=2({}_{2}C_2+{}_{3}C_2+{}_{4}C_2+\cdots+{}_{n}C_2+{}_{n+1}C_2)$
$=2({}_{3}C_3+{}_{3}C_2+{}_{4}C_2+\cdots+{}_{n}C_2+{}_{n+1}C_2)$

한편, ${}_{n}C_{r-1}+{}_{n}C_r={}_{n+1}C_r(1\le r\le n)$이므로

$a_n=2\times{}_{n+2}C_3=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{18}\frac{a_n}{n+2}=\sum_{n=1}^{18}\frac{n(n+1)}{3}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{18}(n^2+n)$
$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{18\times19\times37}{6}+\dfrac{18\times19}{2}\right)=760$

[다른 풀이]

자연수 n에 대하여 0부터 n까지 정수가 하나씩 적힌 $(n+1)$개의 공이 들어 있는 상자에서 한 개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시 넣는 5번의 과정 중 m번째 꺼낸 공에 적힌 수를 $f(m)$이라 할 때,

조건 (가)에 의하여

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)$

조건 (나)에 의하여 $f(3)=f(1)+1$

$f(1)=a(a=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$이라 하면
$f(3)=a+1$

$a\le f(2)\le a+1\le f(4)\le f(5)$

(i) $f(2)$를 선택하는 경우는
$f(2)=a$ 또는 $f(2)=a+1$이므로
이 경우의 수는 2……㉠

(ii) $f(3)$이 결정되면 $f(1)$은 유일하므로
$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우만 고려하면 된다.
$f(3)=a+1\ge 1$이므로
$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우는
1부터 n까지 수 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.
이 경우의 수는 ${}_{n}H_3$……㉡

㉠, ㉡에 의하여

$a_n=2\times{}_{n}H_3=2\times{}_{n+2}C_3=2\times\dfrac{\mathrm{n(n+1)(n+2)}}{6}$
$=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{18}\frac{a_n}{n+2}=760$

91) [정답] ⑤

[해설]

이항정리를 이용하여 $(1+x)^n$을 전개하면

$(1+x)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\boxed{{}_{n}C_k}\times x^k\right)$…… ㉠

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n \cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 0에서 1까지 적분하면

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$\int_0^1 \left({}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_n x^n\right) dx$$

$$= \left[{}_nC_0 x + \frac{1}{2}{}_nC_1 x^2 + \frac{1}{3}{}_nC_2 x^3 + \cdots + \frac{1}{n+1}{}_nC_n x^{n+1}\right]_0^1$$

$= {}_nC_0 + \frac{1}{2}{}_nC_1 + \frac{1}{3}{}_nC_2 + \cdots + \frac{1}{n+1}{}_nC_n$이므로

$\frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} = {}_nC_0 + \frac{1}{2}{}_nC_1 + \cdots + \frac{1}{n+1}{}_nC_n \cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 ㉢을 빼면

$$\boxed{\frac{n-1}{n+1}\times 2^n} + \frac{1}{n+1}$$

$= \frac{1}{2}{}_nC_1 + \frac{2}{3}{}_nC_2 + \frac{3}{4}{}_nC_3 + \cdots + \frac{n}{n+1}{}_nC_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\times {}_nC_k\right)$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\times {}_nC_k\right) = \frac{n-1}{n+1}\times 2^n + \frac{1}{n+1} < 100$$

$h(n) = \frac{n-1}{n+1}\times 2^n + \frac{1}{n+1}$이라 하면

$h(7) = \frac{769}{8} < 100$

$h(8) = \frac{1793}{9} > 100$이므로

n의 최댓값은 $\boxed{7}$ 이다.

따라서 $f(n) = {}_nC_1$, $g(n) = \frac{n-1}{n+1}\times 2^n$, $p=7$이고

$f(6)\times g(5) + p = 6\times\frac{64}{3} + 7 = 135$

92) [정답] 64

[해설]

$\{1, 2, 3\}\cap A = \{1, 2\}$이므로 A는 1,2는 포함하고 3은 포함하지 않아야 한다.

한편, $n(A)\geq 6$이어야 하므로 $\{4, 5, 6, \cdots, 9, 10\}$ 중 원소를 각각 4개, 5개, 6개, 7개를 선택하여 부분집합을 만든다. 위 조건을 만족하는 집합 A의 개수는

$\therefore {}_7C_4 + {}_7C_5 + {}_7C_6 + {}_7C_7 = 2^6 = 64$

(참고)

${}_7C_0 + {}_7C_1 + {}_7C_2 + \cdots + {}_7C_7 = 2^7$,

${}_7C_0 + {}_7C_1 + {}_7C_2 + {}_7C_3 = {}_7C_4 + {}_7C_5 + {}_7C_6 + {}_7C_7$

93) [정답] 144

[해설]

(i) 가장 작은 원소가 2인 경우

$2\times\left({}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5\right)$

$= 2\times\left(2^5 - {}_5C_0 - {}_5C_1\right) = 52$

(ii) 가장 작은 원소가 2^2인 경우

$2^2\times\left({}_4C_2 + {}_4C_3 + {}_4C_4\right)$

$= 2^2\times\left(2^4 - {}_4C_0 - {}_4C_1\right) = 44$

(iii) 가장 작은 원소가 2^3인 경우

$2^3\times\left({}_3C_2 + {}_3C_3\right) = 32$

(iv) 가장 작은 원소가 2^4인 경우

$2^4\times {}_2C_2 = 16$

따라서 $52+44+32+16 = 144$

(다른 풀이)

각 부분집합에서 가장 작은 원소의 합은

$2\times 2^5 + 2^2\times 2^4 + \cdots + 2^6\times 1$

$= 6\times 2^6 = 384$

원소의 개수가 1, 2인 부분집합의 가장 작은 원소의 합은

$(2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6)$

$+(2\times 5 + 2^2\times 4 + 2^3\times 3 + 2^4\times 2 + 2^5\times 1)$

$= \frac{2\times(2^6-1)}{2-1} + (10+16+24+32+32)$

$= 126 + 114 = 240$

따라서 $384 - 240 = 144$

94) [정답] ③

[해설]
두 다항식의 곱
$(a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)$에서
x^{n-1}의 계수는
$a_0b_{n-1}+a_1b_{n-2}++a_{n-1}b_0$ …… (*)
이다.
등식 $(1+x)^{2n-1}=(1+x)^{n-1}(1+x)^n$의 좌변에서
x^{n-1}의 계수는 $\boxed{{}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}}$이고, (*)을 이용하여 우변에서
x^{n-1}의 계수를 구하면 $\sum_{k=1}^{n}\left({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\times\boxed{{}_n\mathrm{C}_{n-k}}\right)$이다.
따라서
$\boxed{{}_{2n-1}C_{n-1}}=\sum_{k=1}^{n}\left({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\times\boxed{{}_n\mathrm{C}_{n-k}}\right)$ 이다.
한편, $1\le k\le n$일 때 $k\times{}_n\mathrm{C}_k=n\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}k({}_n\mathrm{C}_k)^2=\sum_{k=1}^{n}\left(n\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\times\boxed{{}_n\mathrm{C}_{n-k}}\right)$$
$$=n\times\sum_{k=1}^{n}\left({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\times\boxed{{}_nC_{n-k}}\right)$$
$$=n\times{}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}$$
$$=n\times\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}$$
$$=\frac{n}{2}\times\frac{(2n)!}{n!n!}$$
$$=\boxed{\frac{n}{2}\times{}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

95) [정답] ①

[해설]
$(1+x)^{2n}$ 의 전개식에서 x^n 의 계수는 $\boxed{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ 이다.
$(1+x)^n(1+x)^n$ 의 전개식에서 x^n 의 계수는
$\sum_{k=0}^{n}({}_n\mathrm{C}_k\times{}_n\mathrm{C}_{n-k})=\sum_{k=0}^{n}({}_n\mathrm{C}_k)^2$이므로
$\sum_{k=0}^{n}({}_n\mathrm{C}_k)^2={}_{2n}\mathrm{C}_n$이 성립한다.
그러므로

$$\sum_{k=1}^{n}\{2k\times({}_n\mathrm{C}_k)^2\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\{k\times({}_n\mathrm{C}_k)^2\}+\sum_{k=1}^{n}\{k\times({}_n\mathrm{C}_{n-k})^2\}$$
$$=\{({}_n\mathrm{C}_1)^2+2\times({}_n\mathrm{C}_2)^2+\cdots+n\times({}_n\mathrm{C}_n)^2\}$$
$$+\{({}_n\mathrm{C}_{n-1})^2+2\times({}_n\mathrm{C}_{n-2})^2+\cdots+n\times({}_n\mathrm{C}_0)^2\}$$
$$=\{({}_n\mathrm{C}_1)^2+2\times({}_n\mathrm{C}_2)^2+\cdots+n\times({}_n\mathrm{C}_n)^2\}$$
$$+\{n\times({}_n\mathrm{C}_0)^2+(n-1)\times({}_n\mathrm{C}_1)^2+\cdots+({}_n\mathrm{C}_{n-1})^2\}$$
$$=n\times({}_n\mathrm{C}_0)^2+n\times({}_n\mathrm{C}_1)^2+\cdots+n\times({}_n\mathrm{C}_n)^2$$
$$=\boxed{n}\times\{({}_n\mathrm{C}_0)^2+({}_n\mathrm{C}_1)^2+\cdots+({}_n\mathrm{C}_n)^2\}$$
$$=\boxed{n}\times\boxed{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

이다. 한편

$$\sum_{k=1}^{n}\{2k\times({}_n\mathrm{C}_k)^2\}\ge 10\times{}_{2n}\mathrm{C}_{n+1}$$
$$n\times{}_{2n}\mathrm{C}_n\ge 10\times{}_{2n}\mathrm{C}_{n+1}$$
$$n\times\frac{(2n)!}{n!\times n!}\ge 10\times\frac{(2n)!}{(n+1)!\times(n-1)!}$$
$$n\times\frac{1}{n}\ge 10\times\frac{1}{n+1}$$
$$n+1\ge 10$$
$$n\ge 9$$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 $\boxed{9}$ 이다.
$f(n)={}_{2n}\mathrm{C}_n$, $g(n)=n$, $p=9$이므로

$$f(3)+g(3)+p={}_6\mathrm{C}_3+3+9$$
$$=20+3+9$$
$$=32$$

96) [정답] ③

[해설]
$(x-y+1)^{n+2}$의 전개식의 일반항은

$$\frac{(n+2)!}{p!q!r!}\cdot x^p\cdot(-y)^q\cdot 1^r\ (\text{단, } p+q+r=n+2)$$

x^ny^2의 계수 $f(n)$은 $p=n$, $q=2$, $r=0$이므로

$$\frac{(n+2)!}{n!2!0!}\cdot x^n\cdot(-y)^2\cdot 1^0$$

즉, $f(n)=\frac{(n+2)!}{n!\cdot 2!}=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

$$\therefore\frac{1}{f(n)}=2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\cdots+\frac{1}{f(2020)}$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}\right)\right\}$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2022}\right)=\frac{1010}{1011}$$

따라서 $a=1010$, $b=1011$이므로 $a+b=2021$