확통킬러 6제

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 07월 확률과 통계 29

1. 서로 독립인 세 사건 A, B, C에 대하여 <보기> 중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C)$

ㄴ. $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

ㄷ. 사건 A와 $B \cup C$도 독립이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2011 모의_공공 경찰대 고3 07월 23

2. 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 5개의 공이 각각 들어 있는 두 상자 A, B가 있다. A, B에서 임의로 각각 4개의 공을 동시에 뽑아 네 자리 자연수 a, b를 만든다. 이때, a와 b를 서로 같은 자리의 수 끼리 비교하였을 때, 어느 자리의 수도 서로 같지 않을 확률은?

① $\frac{49}{120}$ ② $\frac{17}{40}$ ③ $\frac{53}{120}$
④ $\frac{11}{24}$ ⑤ $\frac{19}{40}$

[출처] 2013 모의_공공 경찰대 고3 07월 25

3. 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2)_n\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{n-k} = \boxed{(가)} \times p^3$$

이 성립한다. (가)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $f(10)$의 값을 구하시오. (단, $0<p<1$)

[출처] 2013 모의_공공 경찰대 고3 07월 19

4. 일어날 확률이 $p(p \neq 0)$인 사건이 일어날 때 놀람의 정도를 $S(p)$라 하면 관계식

$$S(p) = \log_2 \frac{1}{p^C} \quad (C\text{는 양의 상수})$$

이 성립한다고 한다. 일어날 확률이 $\frac{1}{2}$인 사건이 일어날 때 놀람의 정도는 1이고, 두 사건 A, B는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) A는 5개의 동전을 던질 때 앞면이 4개 나오는 사건이다. (나) B는 A와 서로 독립이다.

두 사건 A, B가 동시에 일어날 때 놀람의 정도가 7일 때, 사건 B가 일어날 때 놀람의 정도는? (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.)

① $\frac{11}{3}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{15}{3}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{19}{3}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 확률과 통계 30

5. 집합 $X=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오.

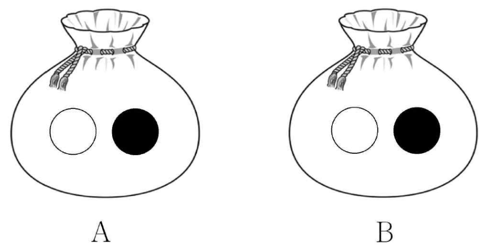
(가) 9 이하의 모든 자연수 x에 대하여
$f(x) \le f(x+1)$이다.
(나) $1 \le x \le 5$일 때 $f(x) \le x$이고,
$6 \le x \le 10$일 때 $f(x) \ge x$이다.
(다) $f(6)=f(5)+6$

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 확률과 통계 30

6. 그림과 같이 두 주머니 A와 B에 흰 공 1개, 검은 공 1개가 각각 들어 있다. 주머니 A에 들어 있는 공의 개수 또는 주머니 B에 들어 있는 공의 개수가 0이 될 때까지 다음의 시행을 반복한다.

두 주머니 A, B에서 각각 임의로 하나씩 꺼낸 두 개의 공이 서로 같은 색이면 꺼낸 공을 모두 주머니 A에 넣고, 서로 다른 색이면 꺼낸 공을 모두 주머니 B에 넣는다.

4번째 시행의 결과 주머니 A에 들어 있는 공의 개수가 0일 때, 2번째 시행의 결과 주머니 A에 들어 있는 흰 공의 개수가 1 이상일 확률은 p이다. $36p$의 값을 구하시오.



확통킬러 6제(빠른 정답)

프로젝트 2023.01.03

1. [정답] ④
2. [정답] ③
3. [정답] 720
4. [정답] ②
5. [정답] 100

6. [정답] 27

확통킬러 6제(해설)

프로젝트 2023.01.03

1) [정답] ④

[해설]

ㄱ. $\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$
$-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(B\cap C)$
$-\mathrm{P}(C\cap A)+\mathrm{P}(A\cap B\cap C)$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B\cup C)\neq \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$ (거짓)

ㄴ. $\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=\mathrm{P}(A\cap(B\cap C))$
$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$ (참)

ㄷ. $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이고
$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$이므로
$\mathrm{P}(A\cap(B\cup C))=\mathrm{P}((A\cap B)\cup(A\cap C))$
$=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap C)-\mathrm{P}(A\cap(B\cap C))$
$=\mathrm{P}(A)(\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B\cap C))$
$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B\cup C)$ (참)

2) [정답] ③

[해설]

a와 b를 정하는 모든 방법의 수는 각각 ${}_5\mathrm{P}_4=120$인데 이중 a와 b의 각 자리의 수를 비교하였을 때, 어느 자리의 수도 서로 같지 않은 경우는 a와 b의 숫자 조합이 같은 경우와 같지 않은 두 가지의 경우가 있다.

우선 $a=1234$일 때를 살펴보자.

(i) a와 b의 숫자 조합이 같은 경우

a의 1이 위치한 자리에 2가 위치한 b는 다음과 같이 3개이다.

a	1	2	3	4
b	2	1	4	3
		3	4	2
		4	2	3

a의 1이 위치한 자리에 3, 4가 위치한 b도 마찬가지이므로 이 경우를 만족하는 서로 다른 b의 개수는 $3\times3=9$개이다.

(ii) a와 b의 숫자 조합이 다른 경우

우선 b에 1이 없고 5가 포함된 경우를 살펴보자.

a의 1이 위치한 자리에 5가 위치한 b는 다음과 같이 2개이다.

a	1	2	3	4
b	5	3	4	2
		4	2	3

a의 2가 위치한 자리에 5가 위치한 b는 다음과 같이 3개이다.

a	1	2	3	4
b	2	5	4	3
	3		4	2
	4		2	3

a의 3이 위치한 자리, a의 4가 위치한 자리에 5가 위치한 b도 마찬가지로 3개이다.

따라서 b에 1이 없고 5가 포함된 경우 조건을 만족하는 b의 개수는 $2+3\times3=11$이다.

b에 2가 없고 5가 포함된 경우, 3이 없고 5가 포함된 경우, 4가 없고 5가 포함된 경우도 모두 같으므로 이 경우를 만족하는 서로 다른 b의 개수는 $4\times11=44$개이다.

(i), (ii)에서 $a(=1234)$가 결정되었을 때, 조건을 만족하는 b의 개수는 $9+44=53$개이므로 구하는 확률은 $\frac{53}{120}$이다.

3) [정답] 720

[해설]

$n\geq k\geq 3$일 때,

$$k(k-1)(k-2)\,{}_n\mathrm{C}_k=k(k-1)(k-2)\times\frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$=\frac{n!}{(k-3)!(n-k)!}$$
$$=n(n-1)(n-2)\times\frac{(n-3)!}{(k-3)!(n-k)!}$$
$$=n(n-1)(n-2)\,{}_{n-3}\mathrm{C}_{k-3}$$

$$\sum_{k=0}^{n}k(k-1)(k-2)\,{}_n\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{n-k}$$
$$=\sum_{k=3}^{n}k(k-1)(k-2)\,{}_n\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{n-k}$$
$$=\sum_{k=3}^{n}n(n-1)(n-2)\,{}_{n-3}\mathrm{C}_{k-3}p^k(1-p)^{n-k}$$
$$=n(n-1)(n-2)p^3\sum_{k=0}^{n-3}{}_{n-3}\mathrm{C}_k p^{k-3}(1-p)^{n-3-k}$$
$$=n(n-1)(n-2)p^3\{p+(1-p)\}^{n-3}$$
$$=n(n-1)(n-2)p^3$$

$\therefore\ f(n)=n(n-1)(n-2)$

$\therefore\ f(10)=10\cdot9\cdot8=720$

4) [정답] ②

[해설]

$S(p) = \log_2 \frac{1}{p^C} = -C\log_2 p$

이고 확률이 $\frac{1}{2}$인 사건이 일어날 때, 놀람의 정도가 1이므로

$S\left(\frac{1}{2}\right) = -C\log_2 \frac{1}{2} = 1$

$\therefore\ C = 1,\ S(p) = -\log_2 p$

조건 (가)에 의하여

$\mathrm{P}(A) = {}_5\mathrm{C}_4 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$

두 사건 A, B가 동시에 일어날 때, 놀람의 정도가 7이고

조건 (나)에 의하여 $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$-\log_2 \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = 7$

$\frac{5}{32} \cdot \mathrm{P}(B) = 2^{-7}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B) = \frac{1}{20}$

따라서 사건 B가 일어날 때 놀람의 정도는

$S\left(\frac{1}{20}\right) = -\log_2 \frac{1}{20} = \log_2 20 = \frac{\log 20}{\log 2} = \frac{1+\log 2}{\log 2} = \frac{1.3}{0.3} = \frac{13}{3}$

5) [정답] 100

[해설]

조건 (나)에서 $f(1) = 1,\ f(10) = 10$

(i) $f(5) = 1,\ f(6) = 7$인 경우

$f(2) = f(3) = f(4) = 1$ 이므로 1가지

$f(7),\ f(8),\ f(9)$를 정하는 경우의 수는 다음과 같다.

(1) $f(9) = 9$일 때

$f(7),\ f(8)$이 될 수 있는 값은 7, 8, 9이므로

${}_3\mathrm{H}_2 - 1 = 5$ ($f(8) = 7$인 경우 제외)

(2) $f(9) = 10$일 때

$f(7),\ f(8)$이 될 수 있는 값은 7, 8, 9, 10이므로

${}_4\mathrm{H}_2 - 1 = 9$ ($f(8) = 7$인 경우 제외)

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$1 \times (5+9) = 14$

(ii) $f(5) = 2,\ f(6) = 8$인 경우

$f(2),\ f(3),\ f(4)$가 될 수 있는 값은 1, 2이므로

${}_2\mathrm{H}_3 = 4$

$f(7),\ f(8),\ f(9)$가 될 수 있는 값은 8, 9, 10이므로

${}_3\mathrm{H}_3 - 1 = 9$ ($f(9) = 8$인 경우 제외)

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$4 \times 9 = 36$

(iii) $f(5) = 3,\ f(6) = 9$인 경우

$f(7),\ f(8),\ f(9)$가 될 수 있는 값은 9, 10이므로

${}_2\mathrm{H}_3 = 4$

$f(2),\ f(3),\ f(4)$가 될 수 있는 값은 1, 2, 3이므로

${}_3\mathrm{H}_3 - 1 = 9$ ($f(2) = 3$인 경우 제외)

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$4 \times 9 = 36$

(iv) $f(5) = 4,\ f(6) = 10$인 경우

$f(7) = f(8) = f(9) = 10$ 이므로 1가지

$f(2),\ f(3),\ f(4)$를 정하는 경우의 수는 다음과 같다.

(1) $f(2) = 1$일 때

$f(3),\ f(4)$가 될 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이므로

${}_4\mathrm{H}_2 - 1 = 9$ ($f(3) = 4$인 경우 제외)

(2) $f(2) = 2$일 때

$f(3),\ f(4)$가 될 수 있는 값은 2, 3, 4이므로

${}_3\mathrm{H}_2 - 1 = 5$ ($f(3) = 4$인 경우 제외)

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$1 \times (9+5) = 14$

이상에서 함수 f의 개수는

$14 + 36 + 36 + 14 = 100$

[다른 풀이]

조건 (나)에서 $f(1) = 1,\ f(10) = 10$

(i) $f(5) = 1,\ f(6) = 7$인 경우

$f(5) = 1$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는

순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$는

(1, 1, 1)

의 1개가 존재한다.

$f(6) = 7$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는

순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$는

(7, 8, 9), (7, 8, 10), (7, 9, 9), (7, 9, 10), (7, 10, 10), (8, 8, 9), (8, 8, 10), (8, 9, 9), (8, 9, 10), (8, 10, 10), (9, 9, 9), (9, 9, 10), (9, 10, 10), (10, 10, 10)

의 14개가 존재한다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$1 \times 14 = 14$

(ii) $f(5) = 2,\ f(6) = 8$인 경우

$f(5) = 2$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는

순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$는

(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 2), (2, 2, 2)

의 $4(= {}_2\mathrm{H}_3 = {}_4\mathrm{C}_3)$개가 존재한다.

$f(6) = 8$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는

순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$는

(8, 8, 9), (8, 8, 10), (8, 9, 9), (8, 9, 10), (8, 10, 10), (9, 9, 9), (9, 9, 10), (9, 10, 10), (10, 10, 10)

의 9개가 존재한다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$4 \times 9 = 36$

(iii) $f(5)=3$, $f(6)=9$인 경우

$f(5)=3$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$는

$(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 3)$, $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 3, 3)$

의 9개가 존재한다.

$f(6)=9$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$는

$(9, 9, 9)$, $(9, 9, 10)$, $(9, 10, 10)$, $(10, 10, 10)$

의 $4\ (={}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3)$개가 존재한다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$9\times4=36$

(iv) $f(5)=4$, $f(6)=10$인 경우

$f(5)=4$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$는

$(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 1, 4)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 3)$, $(1, 3, 4)$, $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 2, 4)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$

의 14개가 존재한다.

$f(6)=10$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$는

$(10, 10, 10)$

의 1개가 존재한다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$14\times1=14$

이상에서 구하는 함수 f의 개수는

$14+36+36+14=100$

6) [정답] 27

[해설]

각 주머니의 흰 공의 개수와 검은 공의 개수를

(흰 공 개수, 검은 공 개수)

로 나타내기로 하자. 주머니 A의 공의 개수가 정해지면 주머니 B의 공의 개수도 정해지므로 주머니 A의 공의 개수의 변화만 고려해도 된다.

(i) 1회의 시행에서 주머니 A의 공의 개수의 변화에 따른 확률은 다음과 같다.

(1) $(1, 1)\to(0, 1)$, $(1, 1)\to(1, 0)$, $(1, 1)\to(1, 2)$, $(1, 1)\to(2, 1)$일 확률은 모두 $\frac{1}{4}$

(2) $(0, 1)\to(0, 2)$일 확률은 $\frac{1}{3}$, $(0, 1)\to(0, 0)$일 확률은 $\frac{2}{3}$

(3) $(1, 0)\to(2, 0)$일 확률은 $\frac{1}{3}$, $(1, 0)\to(0, 0)$일 확률은 $\frac{2}{3}$

(4) $(1, 2)\to(1, 1)$, $(2, 1)\to(1, 1)$일 확률은 $\frac{2}{3}$

(5) $(0, 2)\to(0, 1)$, $(2, 0)\to(1, 0)$일 확률은 1

(ii) 4회의 시행 후 주머니 A에 들어있는 공의 개수가 0일 확률은 다음과 같다.

(1) $(1, 1)\to(0, 1)\to(0, 2)\to(0, 1)\to(0, 0)$일 확률은

$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{18}$

(2) $(1, 1)\to(1, 0)\to(2, 0)\to(1, 0)\to(0, 0)$일 확률은

$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{18}$

(3) $(1, 1)\to(1, 2)\to(1, 1)\to(1, 0)\to(0, 0)$ 또는 $(1, 1)\to(1, 2)\to(1, 1)\to(0, 1)\to(0, 0)$일 확률은

$\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{18}$

(4) $(1, 1)\to(2, 1)\to(1, 1)\to(1, 0)\to(0, 0)$ 또는 $(1, 1)\to(2, 1)\to(1, 1)\to(0, 1)\to(0, 0)$일 확률은

$\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{18}$

이상에서 4회 시행 후 주머니 A에 들어 있는 공의 개수가 0인 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(E)=\frac{1}{18}\times4=\frac{2}{9}$

2회 시행 후 주머니 A에 들어 있는 흰 공의 개수가 1 이상인 사건을 F라 하면 사건 $E\cap F$가 일어나는 경우는 (ii)의 (2), (3), (4)에 해당하므로

$\mathrm{P}(E\cap F)=\frac{1}{18}\times3=\frac{1}{6}$

$\therefore p=\mathrm{P}(F|E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{9}}=\frac{3}{4}$

$\therefore 36p=27$