삼도극 다 모아봄

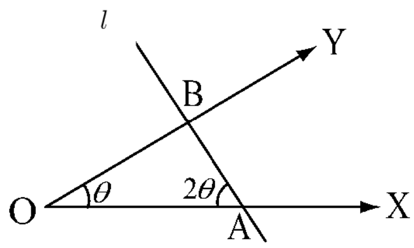
06 미적 05 삼각함수의 미분

02 극한의 해석 및 활용

04 활용2 (다각형의 성질)

[출처] 2002 모의_공공 교육청 고3 10월 21

1. 오른쪽 그림과 같이 두 반직선 OX, OY가 이루는 각의 크기를 θ 라 하고 반직선 OX 위에 한 점 A를 잡자. 점 A를 지나고 반직선 OX와 이루는 각의 크기가 2θ인 직선 l이 반직선 OY와 만나는 점을 B라 하자.



이때, $\lim_{\theta \to 0} \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 예비 미분과 적분 29

2. 그림의 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=1$, $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$, $\angle ACB=\frac{\pi}{6}$이다. 변 BC의 연장선 위에 점 C_1, C_2, C_3, …과 변의 길이 a_1, a_2, a_3, … 을 다음과 같이 정한다.

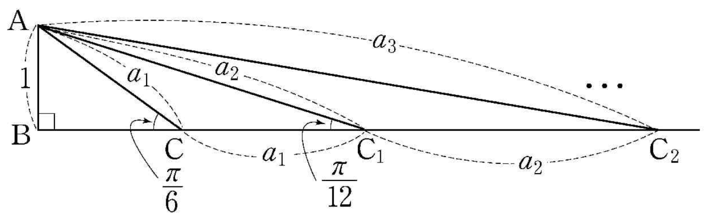
$\overline{CC_1}=\overline{AC}=a$

$\overline{C_1C_2}=\overline{AC_1}=a_2$

$\overline{C_2C_3}=\overline{AC_2}=a_3$

……

이때, 극한 $\lim_{n \to \infty} \frac{\pi a_n}{2^n}$의 값은?

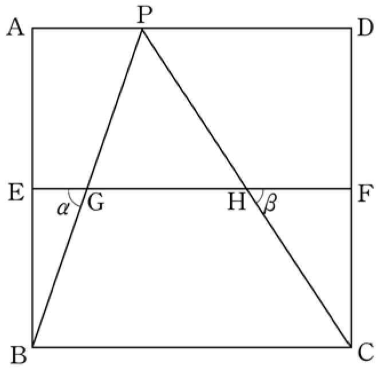


① 2 ② 3 ③ 4

④ 5 ⑤ 6

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 06월 미분과 적분 29

3. 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD에서 변 AB의 중점을 E, 변 CD의 중점을 F라 하자. 선분 AD 위의 양 끝점이 아닌 임의의 점 P에 대하여 선분 BP와 선분 EF의 교점을 G, 선분 CP와 선분 EF의 교점을 H라 하자. $\angle BGE = \alpha$, $\angle CHF = \beta$라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $\overline{GH}$는 점 P의 위치에 관계없이 일정하다.

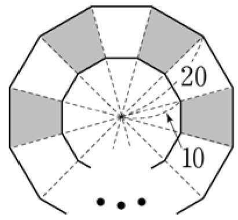
ㄴ. $\alpha+\beta$는 점 P의 위치에 관계없이 일정하다.

ㄷ. $\displaystyle\lim_{\alpha \to -\frac{\pi}{2}} \frac{\overline{AP}}{\frac{\pi}{2}-\alpha} = 2$

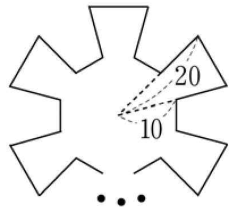
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 06월 미분과 적분 30

4. [그림 1]은 중심이 같은 두 개의 정$2n$각형에서 큰 정$2n$각형의 꼭짓점, 작은 정$2n$각형의 꼭짓점과 중심이 한 직선 위에 있도록 연결한 것이다. 중심에서 두 개의 정$2n$각형의 꼭짓점까지의 거리는 각각 10, 20이다. [그림 1]의 어두운 부분을 잘라내어 만든 [그림 2]와 같은 도형의 넓이를 S_n이라 하자. $\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구하시오.



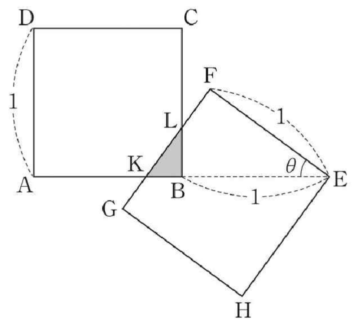
[그림 1]



[그림 2]

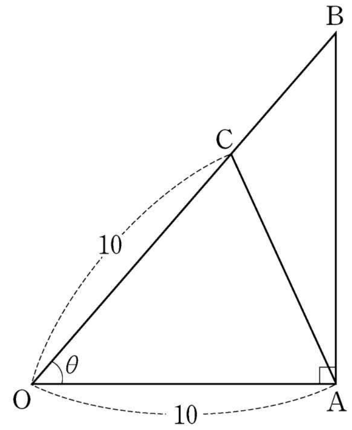
[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 06월 미분과 적분 30

5. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 변 AB를 연장한 직선 위에 $\overline{\mathrm{BE}}=1$인 점 E가 있다. 점 E를 꼭짓점으로 하고 한 변의 길이가 1인 정사각형 EFGH에 대하여 $\angle \mathrm{BEF}=\theta$일 때, 변 FG와 변 AB의 교점을 K, 변 FG와 변 BC의 교점을 L이라 하자. 삼각형 KBL의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이고, p, q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 06월 30

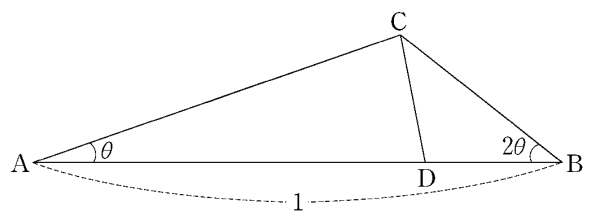
6. 그림과 같이 양수 θ에 대하여 $\angle \mathrm{AOB}=\theta$, $\angle \mathrm{OAB}=\frac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{OA}}=10$인 직각삼각형 OAB가 있다. 변 OB 위에 있는 $\overline{\mathrm{OC}}=10$인 점 C에 대하여 삼각형 ABC의 둘레의 길이를 $f(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오.



[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 11월 29

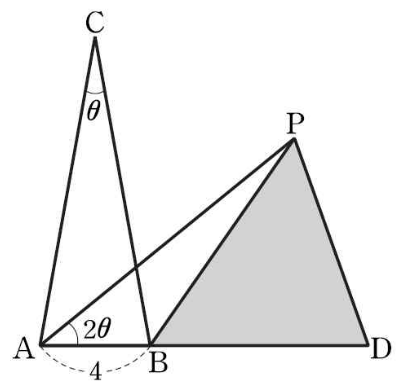
7. 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=1$이고 $\angle\mathrm{A}=\theta$, $\angle\mathrm{B}=2\theta$이다. 변 AB 위의 점 D를 $\angle\mathrm{ACD}=2\angle\mathrm{BCD}$가 되도록 잡는다. $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta}=a$일 때, $27a^2$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$이다.)



[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 11월 28

8. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 한 변으로 하고, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$, $\angle\mathrm{ACB}=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AD}}$인 점 D를 잡고, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AP}}$이고 $\angle\mathrm{PAB}=2\theta$인 점 P를 잡는다. 삼각형 BDP의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to0+}(\theta\times S(\theta))$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{6}\right)$

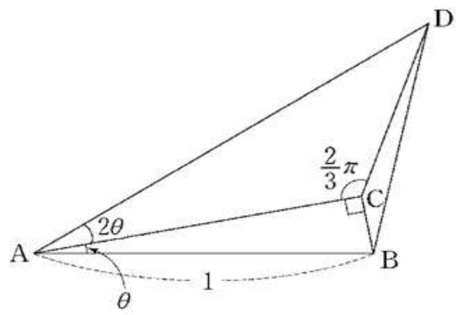


[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 09월 29

9. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 빗변으로 하고 $\angle \mathrm{BAC}=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$인 직각삼각형 ABC에 대하여 점 D를

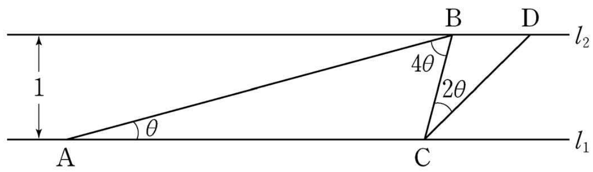
$$\angle \mathrm{ACD}=\frac{2}{3}\pi,\quad \angle \mathrm{CAD}=2\theta$$

가 되도록 잡는다. 삼각형 BCD의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=p$이다. $300p^2$의 값을 구하시오. (단, 네 점 A, B, C, D는 한 평면 위에 있다.)



[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 09월

10. 그림과 같이 서로 평행한 두 직선 l_1과 l_2사이의 거리가 1이다. 직선 l_1위의 점 A에 대하여 직선 l_2위에 점 B를 선분 AB와 직선 l_1이 이루는 각의 크기가 θ가 되도록 잡고, 직선 l_1위에 점 C를 $\angle \mathrm{ABC}=4\theta$가 되도록 잡는다. 직선 l_2위에 점 D를 $\angle \mathrm{BCD}=2\theta$이고 선분 CD가 선분 AB와 만나지 않도록 잡는다.
삼각형 ABC의 넓이를 T_1, 삼각형 BCD의 넓이를 T_2라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+}\frac{T_1}{T_2}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{10}$)

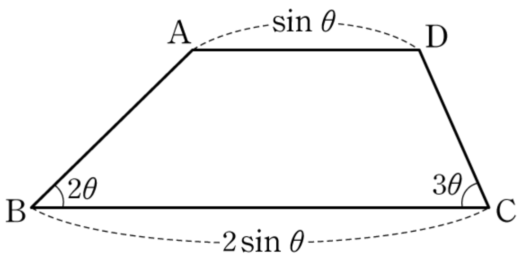


[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 06월

11. 그림과 같이 사다리꼴 ABCD 에서 변 AD와 변 BC가 평행하고 $\angle B = 2\theta$, $\angle C = 3\theta$, $\overline{BC} = 2\sin\theta$, $\overline{AD} = \sin\theta$이다. 사다리꼴 ABCD 의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때,

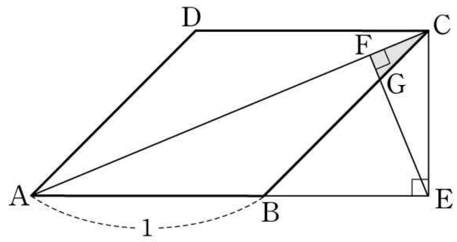
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

$\left(\text{단, } 0 < \theta < \frac{\pi}{6}\text{이고, } p\text{와 } q\text{는 서로소인 자연수이다.}\right)$



[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 11월 17

12. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 마름모 ABCD 가 있다. 점 C에서 선분 AB의 연장선에 내린 수선의 발을 E, 점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 F, 선분 EF와 선분 BC의 교점을 G라 하자. $\angle DAB = \theta$일 때, 삼각형 CFG의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값은? $\left(\text{단, } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

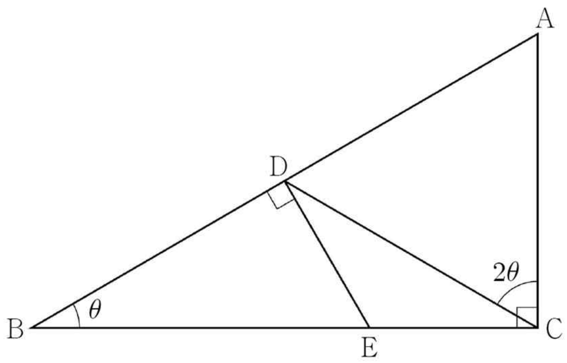


① $\frac{1}{24}$　② $\frac{1}{20}$　③ $\frac{1}{16}$

④ $\frac{1}{12}$　⑤ $\frac{1}{8}$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 11월 20

13. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$, $\angle CBA=\theta$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위에 $\angle ACD=2\theta$가 되도록 점 D를 잡고, 선분 BC 위에 $\angle BDE=\frac{\pi}{2}$가 되도록 점 E를 잡는다. 삼각형 CDE의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)

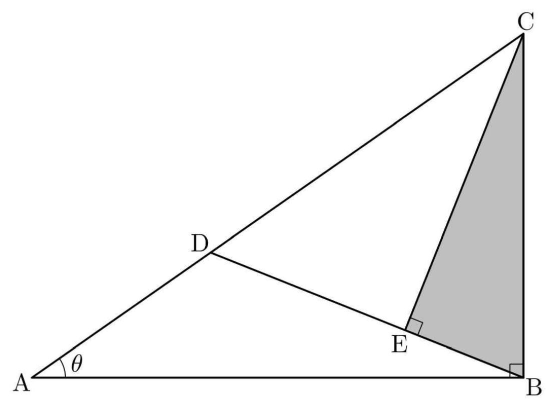


① 8 ② $\frac{17}{2}$ ③ 9 ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ 10

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

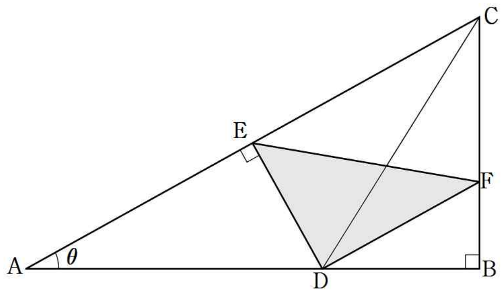
14. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$이고 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle CAB=\theta$라 하자. 선분 AC를 $4:7$로 내분하는 점을 D라 하고 점 C에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 할 때, 삼각형 CEB의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 04월 19

15. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 선분 AB위에 $\overline{AD}=\overline{CD}$가 되도록 점 D를 잡는다. 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E, 점 D를 지나고 직선 AC에 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 F라 하자. $\angle BAC=\theta$일 때, 삼각형 DEF의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$

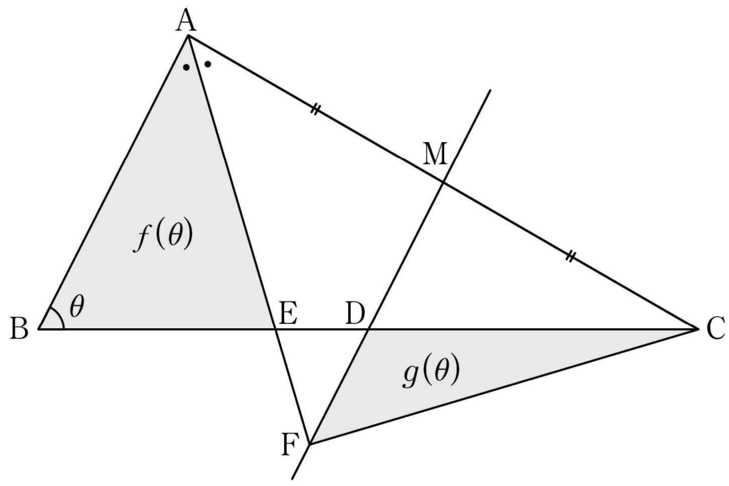


① $\frac{1}{32}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{3}{32}$

④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{5}{32}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 28

16. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AC의 중점을 M이라 하고, 점 M을 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. $\angle BAC$의 이등분선이 두 직선 BC, DM과 만나는 점을 각각 E, F라 하자. $\angle CBA=\theta$일 때, 삼각형 ABE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 DFC의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$)



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ 1 ⑤ 2

06 미적

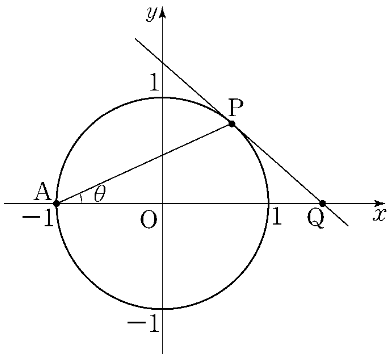
05 삼각함수의 미분

02 극한의 해석 및 활용

05 활용3 (원의 방정식)

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 11월 28

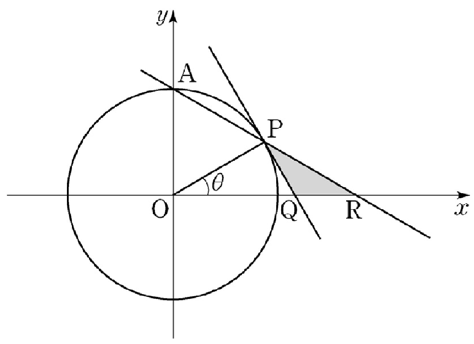
17. 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 점 $\mathrm{A}(-1, 0)$과 원점 O에 대하여 $\angle \mathrm{PAO}=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{OQ}}}{\theta-\frac{\pi}{4}}$ 의 값은? (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



① 2　② $\sqrt{3}$　③ $\frac{3}{2}$　④ 1　⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

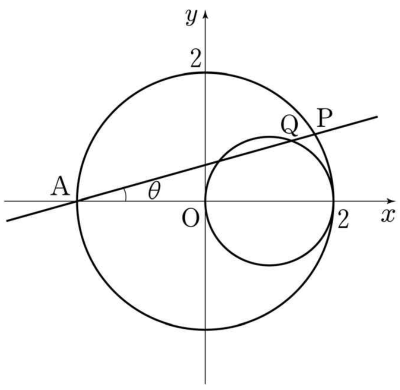
[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 06월 미분과 적분 30

18. 좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, 점 $\mathrm{A}(0, 1)$과 점 P를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 R라 하자. $\angle \mathrm{QOP}=\theta$라 하고 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라고 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{S(\theta)}{\theta^2}=\alpha$일 때, 100α의 값을 구하시오. (단, 점 P는 제 1사분면 위의 점이다.)



[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 09월 20

19. 그림과 같이 점 A$(-2,\ 0)$과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P에 대하여 직선 AP가 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 두 점에서 만날 때 두 점 중에서 점 P에 가까운 점을 Q라 하자. $\angle\mathrm{OAP}=\theta$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\theta^2}$의 값은?

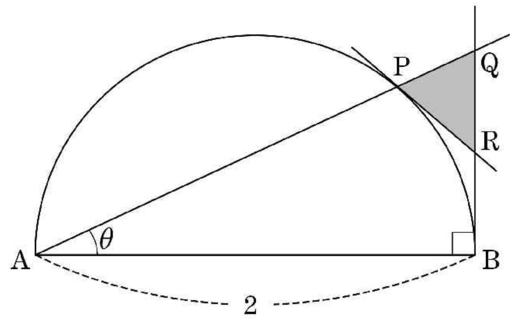


① $\dfrac{5}{2}$ ② 3 ③ $\dfrac{7}{2}$

④ 4 ⑤ $\dfrac{9}{2}$

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 03월 21

20. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 P가 있다. 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 AP와 만나는 점을 Q라 하고, 점 P에서 이 반원에 접하는 직선과 선분 BQ가 만나는 점을 R라 하자. $\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 하고 삼각형 PRQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$이다.)

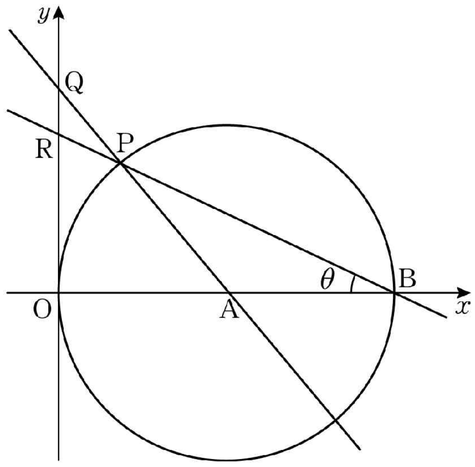


① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{3}{4}$ ③ 1

④ $\dfrac{5}{4}$ ⑤ 2

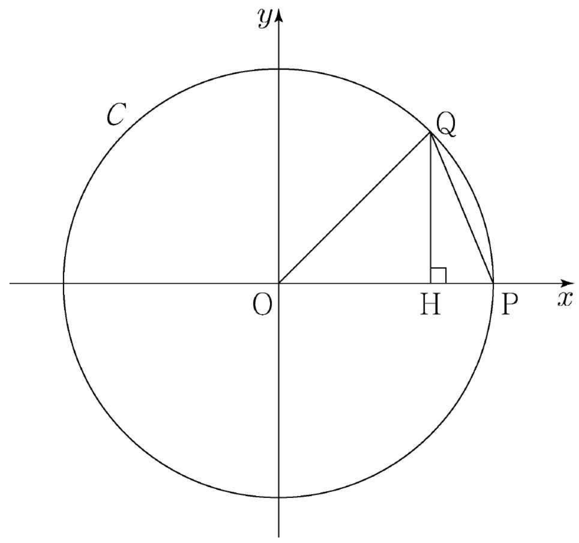
[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 03월 29

21. 그림과 같이 중심이 A(3, 0)이고 점 B(6, 0)을 지나는 원이 있다. 이 원 위의 점 P를 지나는 두 직선 AP, BP가 y축과 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. $\angle \mathrm{PBA} = \theta$라 하고, 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)



[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 19

22. 자연수 n에 대하여 중심이 원점 O이고 점 P$(2^n, 0)$을 지나는 원 C가 있다. 원 C 위에 점 Q를 호 PQ의 길이가 π가 되도록 잡는다. 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\lim_{n \to \infty}(\overline{\mathrm{OQ}} \times \overline{\mathrm{HP}})$의 값은?

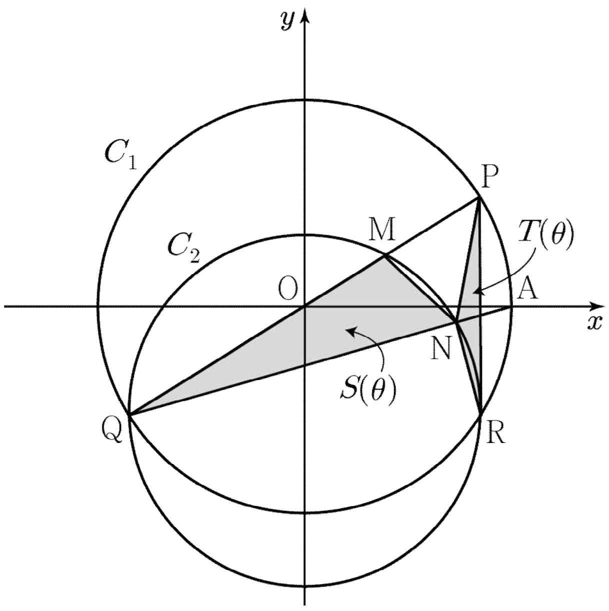


① $\frac{\pi^2}{2}$ ② $\frac{3}{4}\pi^2$ ③ π^2

④ $\frac{5}{4}\pi^2$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi^2$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 07월 21

23. 그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 O(0, 0)이고 점 A(1, 0)을 지나는 원 C_1 위의 제 1사분면 위의 점을 P라 하자. 점 P를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q, x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 R라 하자. 선분 QR를 지름으로 하는 원 C_2와 두 선분 PQ, AQ와의 교점을 각각 M, N이라 하자. $\angle\mathrm{POA}=\theta$라 할 때, 두 삼각형 MQN, PNR의 넓이를 각각 $S(\theta)$, $T(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\theta^2\times S(\theta)}{T(\theta)}$의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

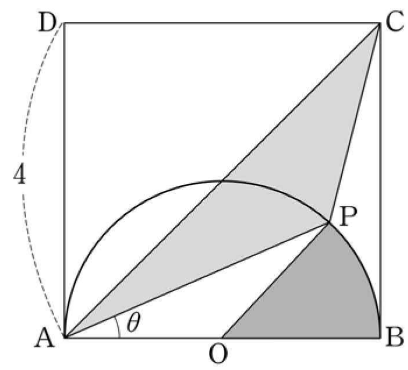
06 미적 05 삼각함수의 미분

02 극한의 해석 및 활용

06 활용4 (원과 도형)

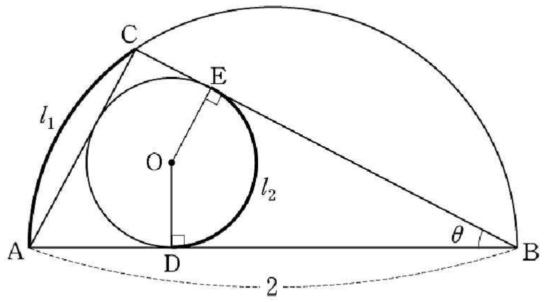
[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 09월 미분과 적분 30

24. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에서 변 AB의 중점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 반원 위에 점 P가 있다. $\angle\mathrm{BAP}=\theta$일 때 삼각형 APC의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 OBP의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{8-f(\theta)}{g(\theta)}=\alpha$라 할 때, 10α의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\text{이다}\right)$



[출처] 2007 모의_공공 평가원 고3 06월 미분과 적분 27

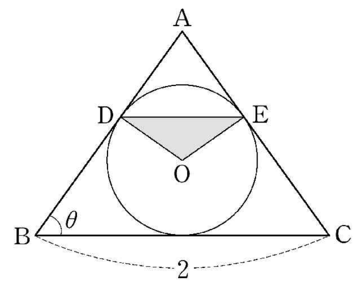
25. 그림과 같이 지름의 길이가 2이고, 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 반원 위에 점 C가 있다. 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O, 중심 O에서 선분 AB와 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자. $\angle ABC=\theta$이고, 호 AC의 길이를 l_1, 호 DE의 길이를 l_2라 할 때, $\lim_{\theta \to 0} \frac{l_1}{l_2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이다.)



① 1 ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{2}{\pi}$ ⑤ $\frac{3}{\pi}$

[출처] 2007 모의_공공 평가원 고3 11월 미분과 적분 28

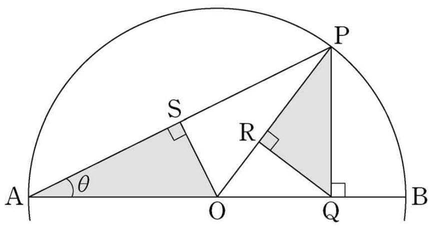
26. 그림과 같이 양수 θ에 대하여 $\angle ABC=\angle ACB=\theta$이고 $\overline{BC}=2$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O, 선분 AB와 내접원이 만나는 점을 D, 선분 AC와 내접원이 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 OED의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은?



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 11월 27

27. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q, 점 Q에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 R, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 S라 하자.
$\angle PAQ=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$일 때, 삼각형 AOS의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRQ의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to 0+}\frac{\theta^2 f(\theta)}{g(\theta)}=\frac{q}{p}$일 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

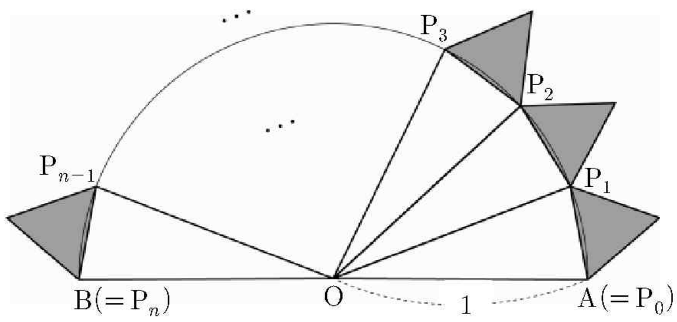


[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 04월 12

28. 그림과 같이 중심각의 크기가 π이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 OAB에서 호 AB를 n등분한 각 점(양 끝점도 포함)을 차례로

$$A=P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \cdots,\ P_{n-1},\ P_n=B$$

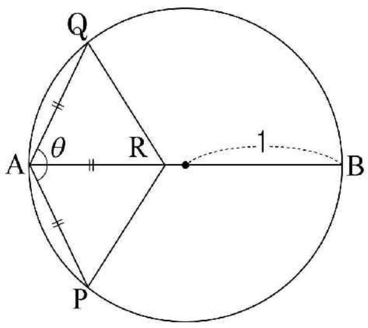
라 하자. $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\cdots$, $\overline{P_{n-1}P_n}$을 각각 밑변으로 하는 정삼각형 n개의 넓이의 합을 $S(n)$이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot S(n)$의 값은?



① $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2$ ② $\frac{\sqrt{6}}{8}\pi^2$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi^2$
④ $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi^2$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{4}\pi^2$

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 07월 18

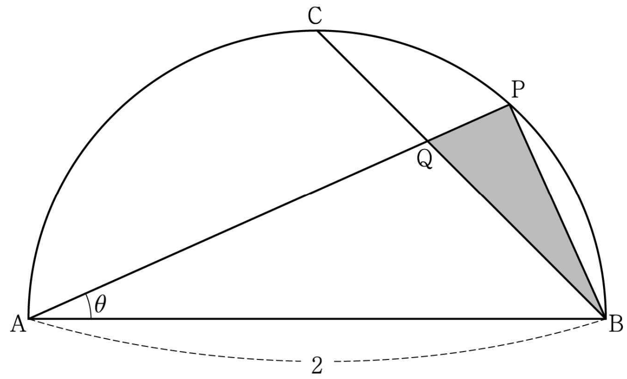
29. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 위에 한 점 A가 있다. $\overline{AP}=\overline{AQ}=\overline{AR}$이 되는 원 위의 두 점을 P, Q, 지름 AB 위의 점을 R라 하자. $\angle PAQ=\theta$에 대하여 사각형 APRQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0}\frac{S(\theta)}{\tan\theta}$의 값은?



① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 10월 20

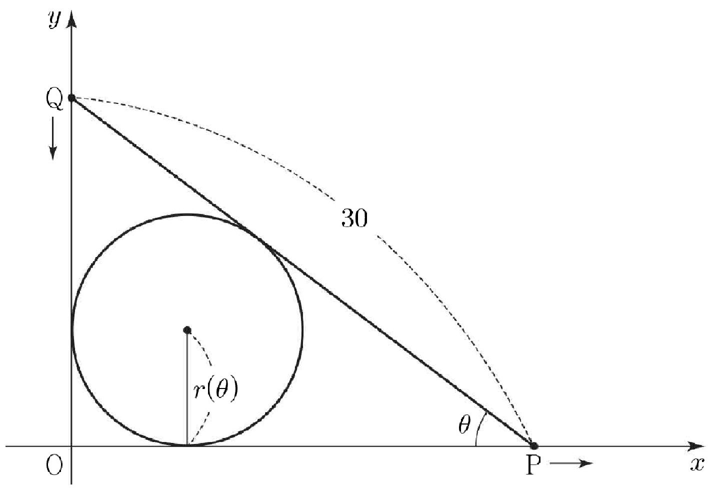
30. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 C를 $\widehat{AC}=\widehat{BC}$가 되도록 잡는다. 호 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 선분 AP와 선분 BC가 만나는 점을 Q라 하고, $\angle PAB=\theta$라 하자. 삼각형 BPQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$



① $\frac{\sqrt{2}}{2}$　② 1　③ $\sqrt{2}$
④ 2　⑤ $2\sqrt{2}$

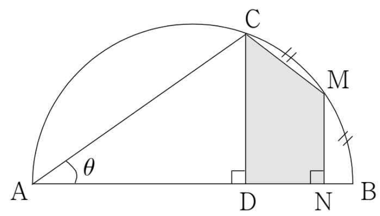
[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 04월 25

31. 그림과 같이 좌표평면에서 점 P가 원점 O를 출발하여 x축을 따라 양의 방향으로 이동할 때, 점 Q는 점 $(0, 30)$을 출발하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=30$을 만족시키며 y축을 따라 음의 방향으로 이동한다. $\angle\mathrm{OPQ}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$일 때, 삼각형 OPQ의 내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자.이때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{r(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오.



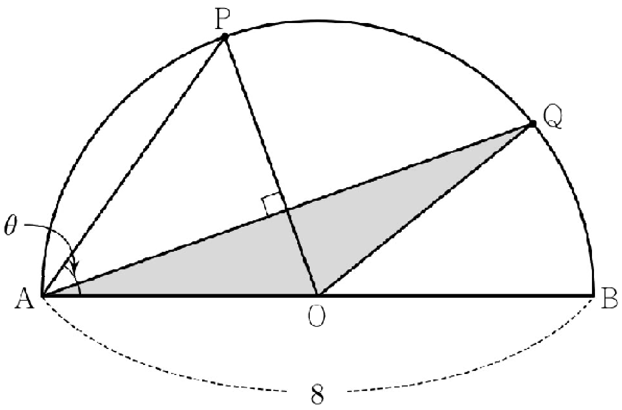
[출처] 2013 모의_공공 사관학교 고3 07월 27

32. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위를 움직이는 점 C가 있다. 호 BC의 길이를 이등분하는 점을 M이라 하고, 두 점 C, M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 D, N이라 하자. $\angle\mathrm{CAB}=\theta$라 할 때, 사각형 CDNM의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $16a$의 값을 구하시오. (단, 점 C는 선분 AB의 양 끝점이 아니다.)



[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 11월 28

33. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 8인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 P가 있다. 점 A를 지나고 직선 OP에 수직인 직선이 반원과 만나는 점을 Q라 하자. $\angle \mathrm{PAO} = \theta \left(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$일 때, 삼각형 AOQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}+} \frac{S(\theta)}{\theta - \frac{\pi}{4}}$의 값을 구하시오.

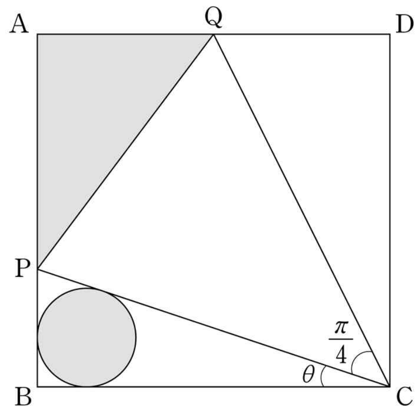


[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 예비 29

34. 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 변 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{BCP} = \theta$라 하고, 변 AD 위의 점 Q를 $\angle \mathrm{PCQ} = \frac{\pi}{4}$가 되도록 잡는다. 삼각형 APQ의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 BCP의 내접원의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,

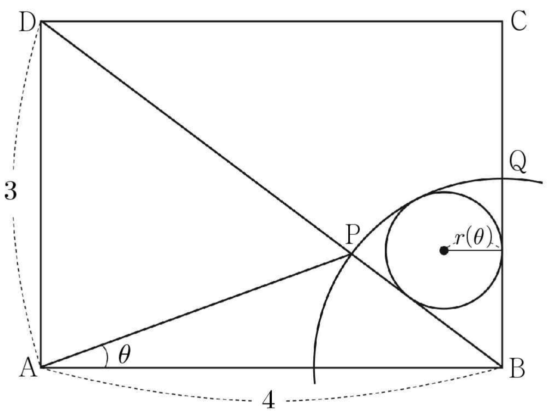
$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)} = \frac{q}{p}\pi$$

이다. $10p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



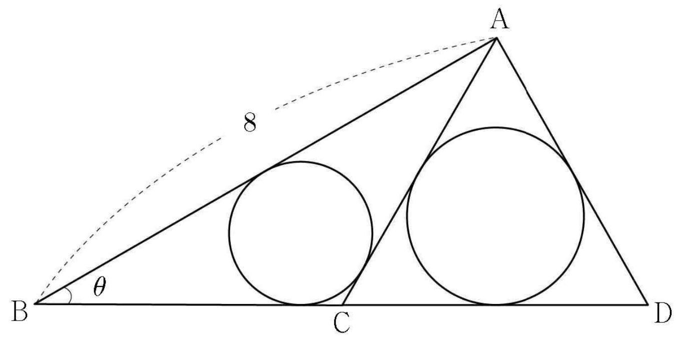
[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 11월 30

35. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AD}=3$인 직사각형 ABCD에서 선분 BD 위의 점 P에 대하여 $\angle PAB=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$라 하자. 점 B를 중심으로 하고 선분 BP를 반지름으로 하는 원과 변 BC가 만나는 점을 Q라 하자. 부채꼴 BPQ에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{r(\theta)}{\theta}=p+q\sqrt{5}$이다. $36(p^2+q^2)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.)



[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 07월

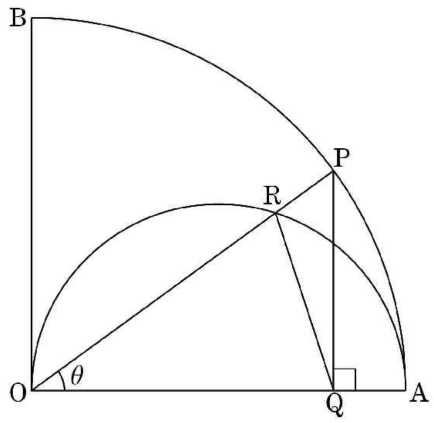
36. $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\angle ABC=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 선분 BC의 연장선 위에 $\overline{AC}=\overline{AD}$인 점 D를 잡는다. 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_1, 삼각형 ACD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_2라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{r_1r_2}{\theta^2}$의 값은?



① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 03월 19

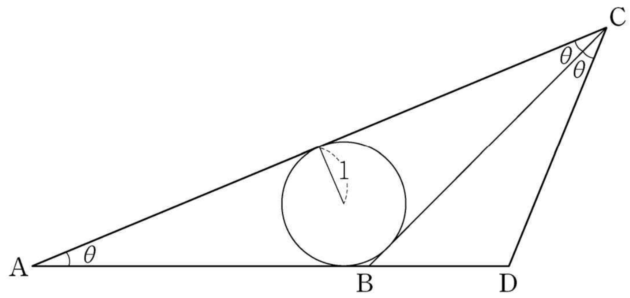
37. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB와 선분 OA를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 Q, 선분 OP와 반원의 교점 중 O가 아닌 점을 R라 하고, $\angle POA=\theta$라 하자. 삼각형 PRQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은?



① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{3}{8}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{5}{8}$

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 11월 20

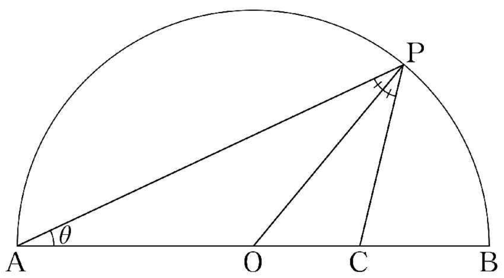
38. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 $\angle CAB=\angle BCA=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 점 A가 아닌 점 D를 $\angle DCB=\theta$가 되도록 잡는다. 삼각형 BDC의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \{\theta \times S(\theta)\}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$



① $\frac{2}{3}$　② $\frac{8}{9}$　③ $\frac{10}{9}$　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{14}{9}$

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 10월 12

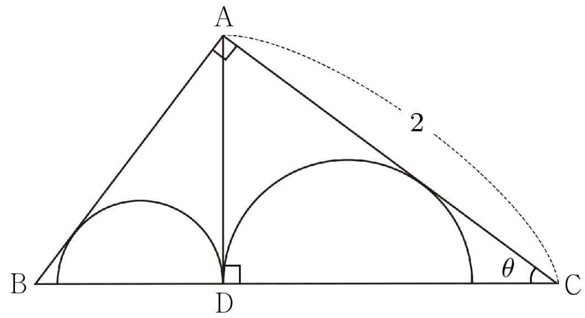
39. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P에 대하여 $\angle PAB=\theta$라 하자. 선분 OB 위의 점 C가 $\angle APO=\angle OPC$를 만족시킬 때, $\lim_{\theta \to 0+} \overline{OC}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이고, 점 O는 선분 AB의 중점이다.)



① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

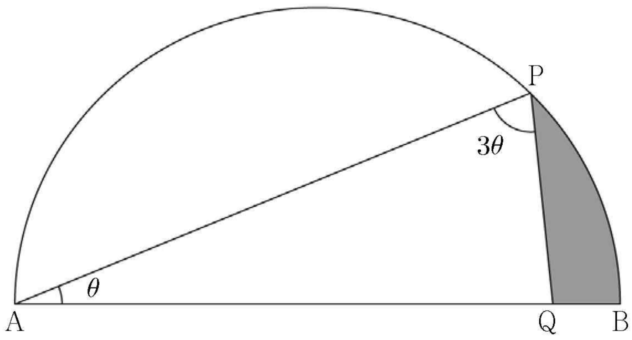
[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 11월 29

40. 그림과 같이 선분 AC의 길이가 2이고 $\angle A=90^{\circ}$인 직각삼각형 ABC에 대하여 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하고 $\angle ACD=\theta$라 하자.
삼각형 ABD에서 변 BD 위에 지름이 놓여 있고 변 AB에 접하면서 점 D를 지나는 반원의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 ADC에서 변 DC 위에 지름이 놓여 있고 변 AC에 접하면서 점 D를 지나는 반원의 넓이를 $T(\theta)$라 하자.
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2 \times T(\theta)}=\alpha$일 때, 60α의 값을 구하시오. (단, 두 반원의 호는 점 D에서 만난다.)



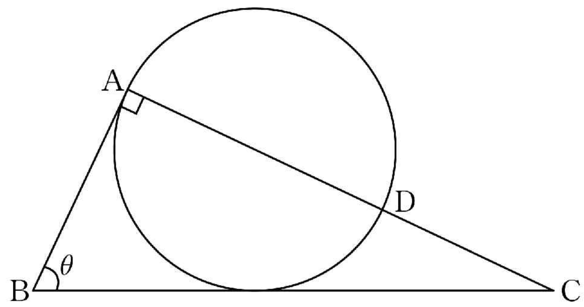
[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 07월 29

41. 그림과 같이 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 $\angle \mathrm{PAB}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$인 점 P가 있다. $\angle \mathrm{APQ}=3\theta$가 되도록 선분 AB 위의 점 Q를 잡을 때, 두 선분 PQ, QB와 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오.



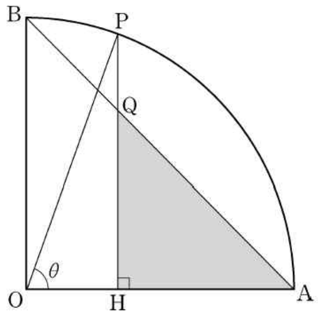
[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 10월 28

42. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}=1$, $\angle \mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$, $\angle \mathrm{B}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여 선분 AD를 지름으로 하는 원이 선분 BC와 접할 때, $\lim_{\theta \to 0+}\frac{\mathrm{CD}}{\theta^3}=k$라 하자. $100k$의 값을 구하시오.



[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 11월 14

43. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 선분 AB의 교점을 Q라 하자. $\angle \mathrm{POH} = \theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^4}$의 값은? $\left(단,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$



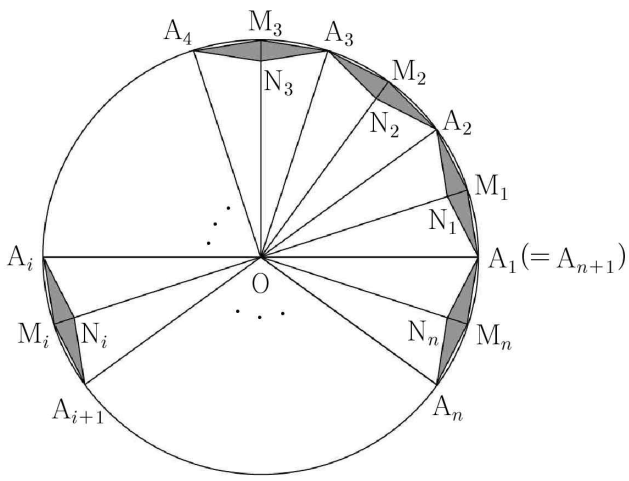
① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 07월 21

44. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원의 둘레를 $n(n \geq 4)$등분한 점을 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$이라 하자. 호 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}(i=1, 2, \cdots, n)$을 이등분한 점을 M_i라 하고 사각형 $\mathrm{A}_i\mathrm{M}_i\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{N}_i$가 마름모가 되도록 하는 선분 OM_i 위의 점을 N_i라 하자. n개의 사각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{M}_1\mathrm{A}_2\mathrm{N}_1, \mathrm{A}_2\mathrm{M}_2\mathrm{A}_3\mathrm{N}_2, \mathrm{A}_3\mathrm{M}_3\mathrm{A}_4\mathrm{N}_3, \cdots, \mathrm{A}_n\mathrm{M}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{N}_n$의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty}(n^2 \times S_n)$의 값은?

(단, $\mathrm{A}_{n+1} = \mathrm{A}_1$)

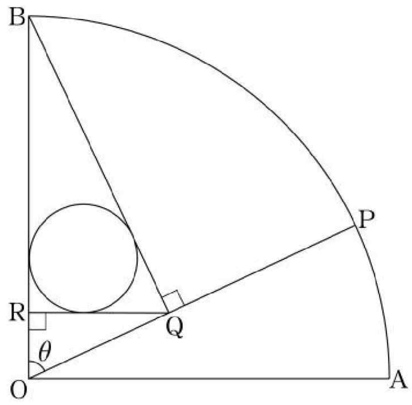


① π^3 ② $2\pi^3$ ③ $3\pi^3$

④ $4\pi^3$ ⑤ $5\pi^3$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 03월 17

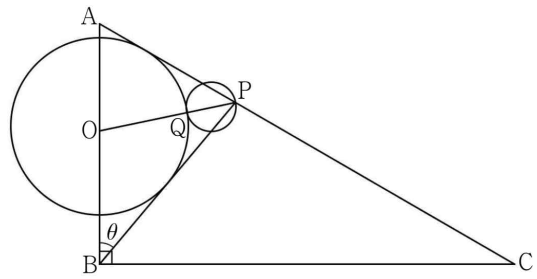
45. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 점 B에서선분 OP에 내린 수선의 발을 Q, 점 Q에서 선분 OB에 내린수선의 발을 R라 하자. $\angle \mathrm{BOP}=\theta$일 때, 삼각형 RQB에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{r(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

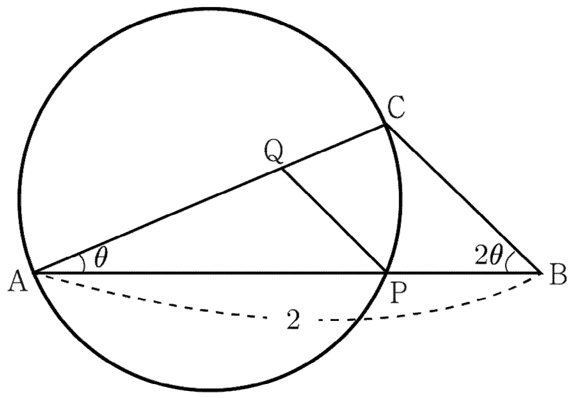
46. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{3}$, $\angle \mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 CA 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{ABP}=\theta$라 할 때, 선분 AB 위의 점 O를 중심으로 하고 두 선분 AP, BP에 동시에 접하는 원의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. 이 원과 선분 PO가 만나는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ를 지름으로 하는 원의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^2}$의 값은?



① $\frac{17-5\sqrt{3}}{3}\pi$ ② $\frac{18-5\sqrt{3}}{3}\pi$
③ $\frac{19-5\sqrt{3}}{3}\pi$ ④ $\frac{18-4\sqrt{3}}{3}\pi$
⑤ $\frac{19-4\sqrt{3}}{3}\pi$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 07월 21

47. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$이고 $\angle ABC=2\angle BAC$를 만족하는 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC를 지름으로 하는 원과 직선 AB가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P, 점 P를 지나고 선분 BC에 평행한 직선이 선분 AC와 만나는 점을 Q라 하자. $\angle BAC=\theta$라 할 때, 삼각형 APQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



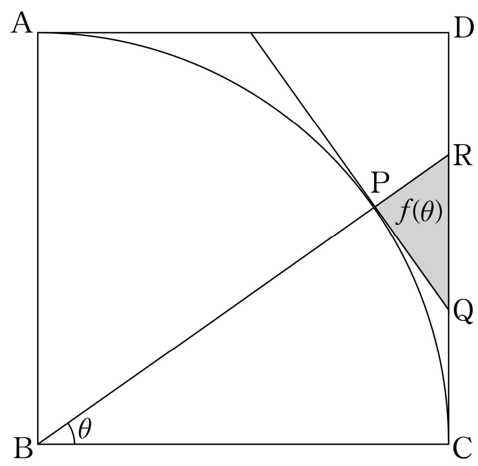
① $\frac{16}{27}$ ② $\frac{17}{27}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{19}{27}$ ⑤ $\frac{20}{27}$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 10월 27

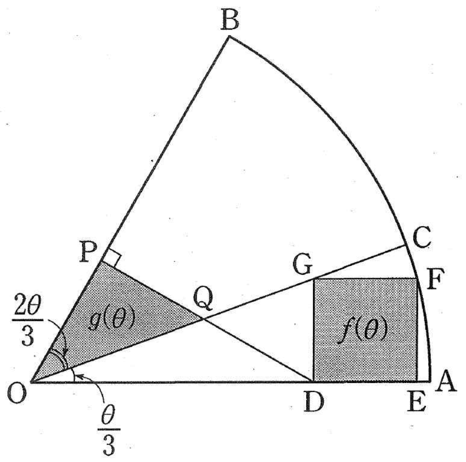
48. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD 안에 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$이고 반지름의 길이가 3인 부채꼴 BCA가 있다. 호 AC 위의 점 P에서의 접선이 선분 CD와 만나는 점을 Q, 선분 BP의 연장선이 선분 CD와 만나는 점을 R라 하자. $\angle PBC=\theta$일 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+}\frac{8f(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



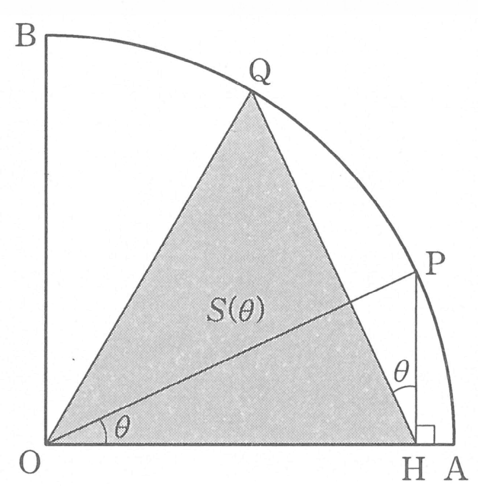
[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 06월 28

49. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점을 C라 하자. 변 DE가 선분 OA 위에 있고, 꼭짓점 G, F가 각각 선분 OC, 호 AC 위에 있는 정사각형 DEFG의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. 점 D에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 P, 선분 DP와 선분 OC가 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OQP의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta\times g(\theta)}=k$일 때, $60k$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\text{ 이고, } \overline{OD}<\overline{OE}\text{ 이다.}\right)$



[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 16

50. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, 호 BP 위에 점 Q를 $\angle POH=\angle PHQ$가 되도록 잡는다. $\angle POH=\theta$일 때, 삼각형 OHQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$)

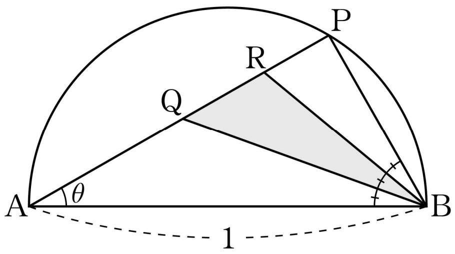


① $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$

④ $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{5+\sqrt{2}}{2}$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 03월 19

51. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P에 대하여 ∠ABP를 삼등분하는 두 직선이 선분 AP와 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. ∠PAB$=\theta$일 때, 삼각형 BRQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

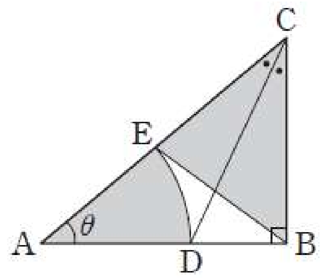


① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 1

④ $\sqrt{3}$ ⑤ 3

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 18

52. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, ∠B$=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 ∠C를 이등분하는 직선과 선분 AB의 교점을 D, 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AD}$인 원과 선분 AC의 교점을 E라 하자. ∠A$=\theta$일 때, 부채꼴 ADE의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 BCE의 넓이를 $T(\theta)$라 하자.



$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$의 값은?

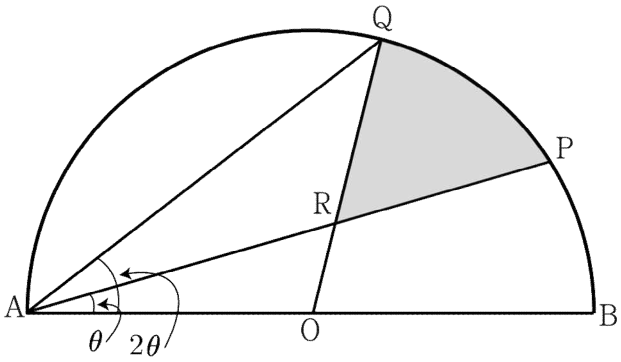
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 04월 20

53. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 두 점 P, Q를 $\angle PAB = \theta$, $\angle QAB = 2\theta$가 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 선분 OQ와 선분 AP가 만나는 점을 R라 하자. 호 PQ와 두 선분 QR, RP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)

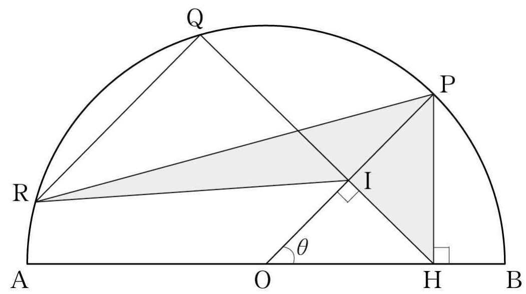


① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2

④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 03월 19

54. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 H를 지나고 선분 OP에 수직인 직선이 선분 OP, 호 AB와 만나는 점을 각각 I, Q라 하자.
점 Q를 지나고 직선 OP에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R라 하자. $\angle POB = \theta$일 때, 두 삼각형 RIP, IHP의 넓이를 각각 $S(\theta)$, $T(\theta)$라 하자.
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta) - T(\theta)}{\theta^3}$의 값은? $\left(단,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

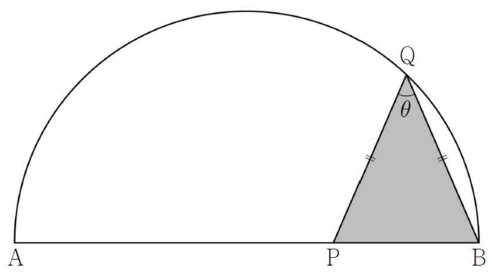


① $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ③ $\sqrt{2}-1$

④ $\frac{2\sqrt{2}-1}{4}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 07월 17

55. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{QP}}$를 만족시키는 반원 위의 점을 Q라 할 때, $\angle \mathrm{BQP}=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하자. 삼각형 QPB의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은?



① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1

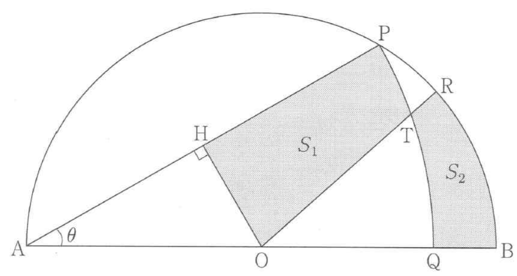
④ 2 ⑤ 4

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 28

56. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AP}}$인 원과 선분 AB의 교점을 Q라 하자.
호 PB 위에 점 R를 호 PR와 호 RB의 길이의 비가 3 : 7이 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 선분 OR와 호 PQ의 교점을 T, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하자.
세 선분 PH, HO, OT와 호 TP로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 선분 RT, QB와 두 호 TQ, BR로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $\angle \mathrm{PAB}=\theta$라 할 때,

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{S_1-S_2}{\overline{\mathrm{OH}}}=a$이다. $50a$의 값을 구하시오.

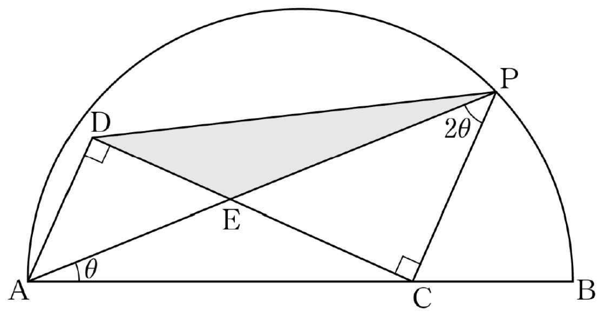
$\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$



[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 21

57. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB위의 점 P와 선분 AB위의 점 C에 대하여 $\angle PAC = \theta$일 때, $\angle APC = 2\theta$이다.

$\angle ADC = \angle PCD = \frac{\pi}{2}$인 점 D에 대하여 두 선분 AP와 CD가 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 DEP의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? $\left(단, 0 < \theta < \frac{\pi}{6}\right)$

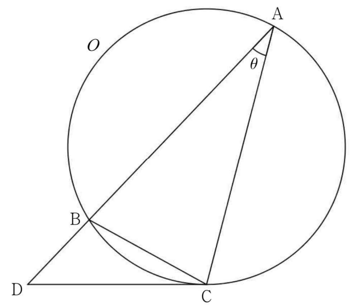


① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{7}{9}$

④ $\frac{8}{9}$ ⑤ 1

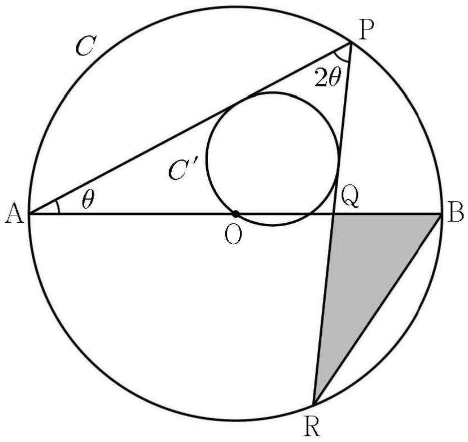
[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

58. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC} = 4$인 이등변삼각형 ABC에 외접하는 원 O가 있다. 점 C를 지나고 원 O에 접하는 직선과 직선 AB의 교점을 D라 하자. $\angle CAB = \theta$라 할 때, 삼각형 BDC의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$)



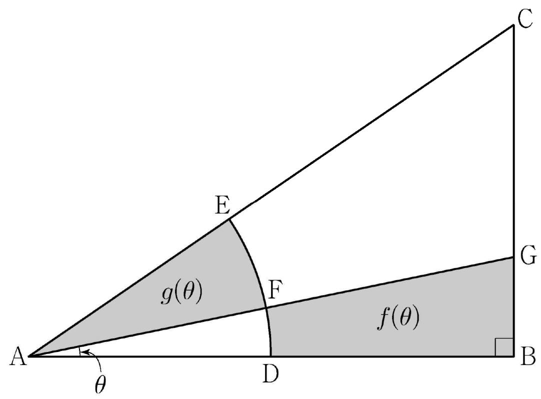
[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 29

59. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 원 C가 있다. 원 C 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$라 할 때, 선분 AB 위에 $\angle \mathrm{APQ}=2\theta$를 만족시키는 점을 Q라 하자. 직선 PQ가 원 C와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R라 할 때, 중심이 삼각형 AQP의 내부에 있고 두 선분 PA, PR에 동시에 접하는 원을 C'이라 하자. 원 C'이 점 O를 지날 때, 원 C'의 반지름의 길이를 $r(\theta)$, 삼각형 BQR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{S(\theta)}{r(\theta)}=a$일 때, $45a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$)



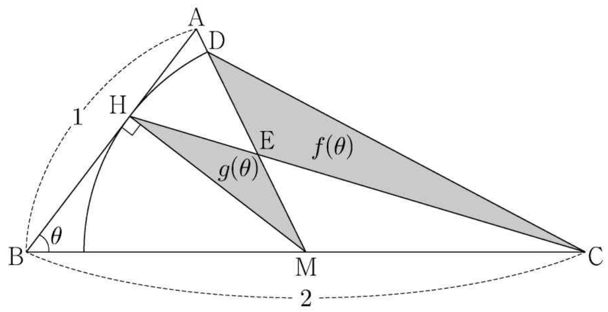
[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 24

60. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\angle \mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 중심이 A, 반지름의 길이가 1인 원이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자.
호 DE의 삼등분점 중 점 D에 가까운 점을 F라 하고, 직선 AF가 선분 BC와 만나는 점을 G라 하자. $\angle \mathrm{BAG}=\theta$라 할 때, 삼각형 ABG의 내부와 부채꼴 ADF의 외부의 공통부분의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 AFE의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.
$40\times\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{f(\theta)}{g(\theta)}$의 값을 구하시오. $\left(단,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{6}\right)$



[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 28

61. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 두 선분 AB, BC에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 점 M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\overline{MH}$인 원이 선분 AM과 만나는 점을 D, 선분 HC가 선분 DM과 만나는 점을 E라 하자. $\angle ABC=\theta$라 할 때, 삼각형 CDE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 MEH의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $80a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)



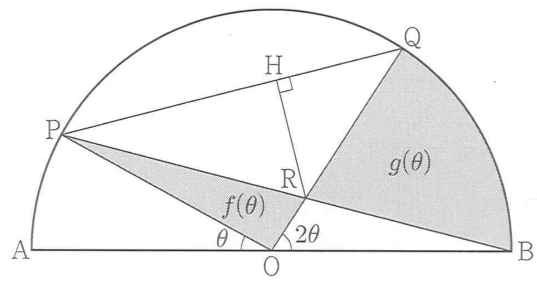
[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 28

62. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle POA=\theta$, $\angle QOB=2\theta$가 되도록 잡는다. 두 선분 PB, OQ의 교점을 R라 하고, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 POR의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 RQ, RB와 호 QB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,

$$\lim_{\theta \to 0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{RH}}=\frac{q}{p}$$

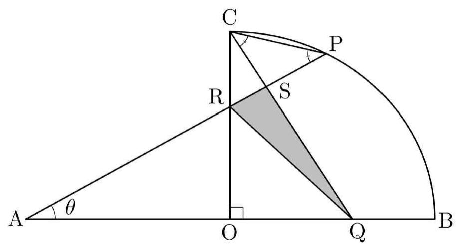
이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 28

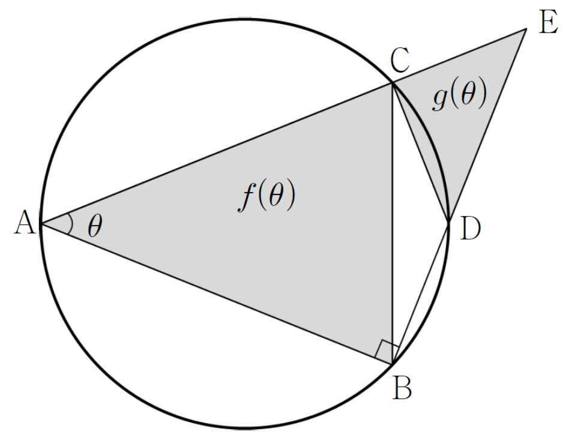
63. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB의 중점 O에 대하여 선분 OB를 반지름으로 하는 사분원 OBC가 있다. 호 BC위를 움직이는 점 P에 대하여 선분 OB위의 점 Q가 $\angle APC = \angle PCQ$를 만족시킨다. 선분 AP가 두 선분 CO, CQ와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. $\angle PAB = \theta$일 때, 삼각형 RQS의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? $\left(단,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 28

64. 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원에 내접하고, $\overline{AB} = \overline{AC}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle BAC = \theta$라 하고, 점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D, 직선 BD와 직선 AC가 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 CDE의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$의 값은? $\left(단,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$



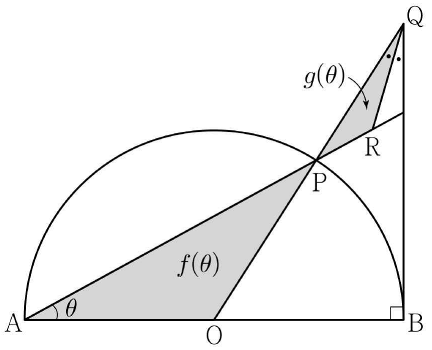
① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 28

65. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, $\angle$OQB의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자.

$\angle \mathrm{OAP}=\theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{g(\theta)}{\theta^4 \times f(\theta)}$의 값은? $\left(단, 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$



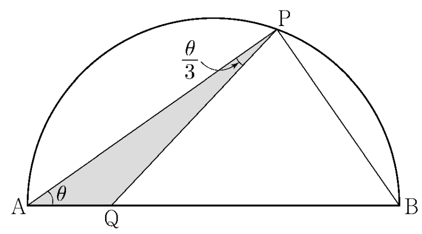
① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3

④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 미적분 28

66. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 점 P가 있고, 선분 AB 위에 점 Q가 있다. $\angle \mathrm{PAB}=\theta$이고 $\angle \mathrm{APQ}=\dfrac{\theta}{3}$일 때, 삼각형 PAQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 PB의 길이를 $l(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{S(\theta)}{l(\theta)}$의 값은?

(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$)



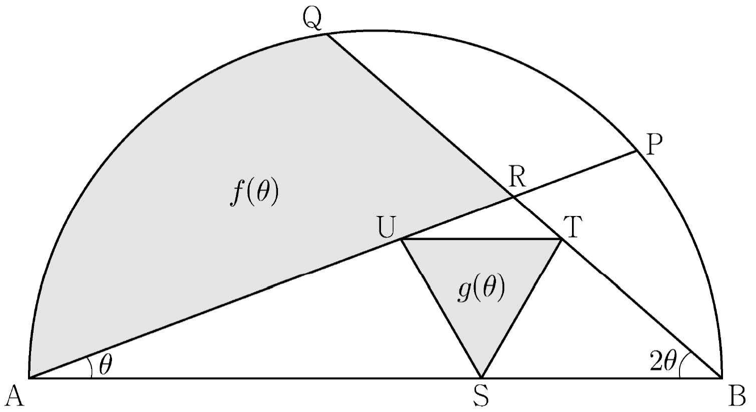
① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 29

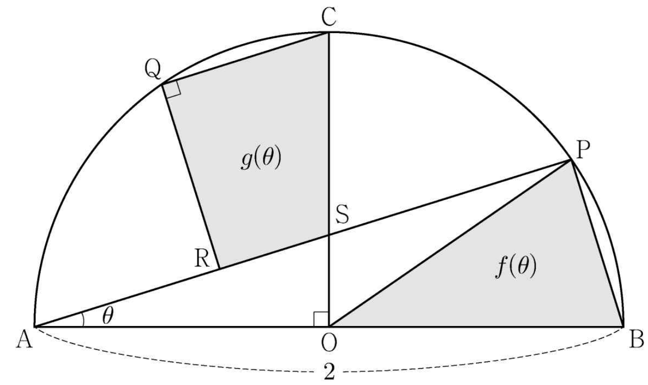
67. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$, $\angle \mathrm{QBA}=2\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R라 하자.
선분 AB 위의 점 S, 선분 BR 위의 점 T, 선분 AR 위의 점 U를 선분 UT가 선분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 미적분 28

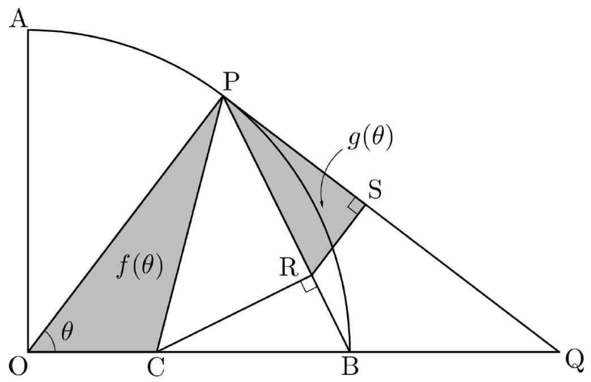
68. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 $\angle \mathrm{AOC}=\frac{\pi}{2}$인 점 C가 있다. 호 BC 위에 점 P와 호 CA 위에 점 Q를 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{QC}}$가 되도록 잡고, 선분 AP 위에 점 R를 $\angle \mathrm{CQR}=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡는다. 선분 AP와 선분 CO의 교점을 S라 하자. $\angle \mathrm{PAB}=\theta$일 때, 삼각형 POB의 넓이를 $f(\theta)$, 사각형 CQRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

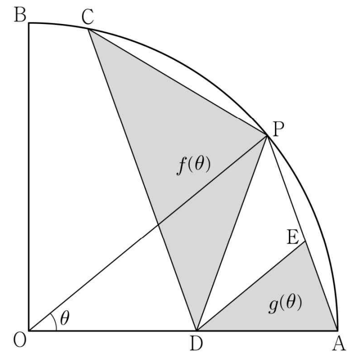
[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 29

69. 그림과 같이 반지름의 길이가 5이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB에서 선분 OB를 $2:3$으로 내분하는 점을 C라 하자. 점 P에서 호 AB에 접하는 직선과 직선 OB의 교점을 Q라 하고, 점 C에서 선분 PB에 내린 수선의 발을 R, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 S라 하자. $\angle \mathrm{POB}=\theta$일 때, 삼각형 OCP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $80\times\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 28

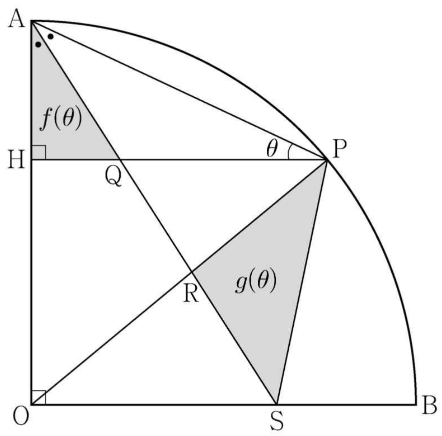
70. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{PD}}$가 되도록 호 PB 위에 점 C와 선분 OA 위에 점 D를 잡는다. 점 D를 지나고 선분 OP와 평행한 직선이 선분 PA와 만나는 점을 E라 하자. $\angle \mathrm{POA}=\theta$일 때, 삼각형 CDP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 EDA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 29

71. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle$OAP를 이등분하는 직선과 세 선분 HP, OP, OB의 교점을 각각 Q, R, S라 하자. $\angle \mathrm{APH}=\theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PSR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta^3 \times g(\theta)}{f(\theta)}=k$일 때, $100k$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)

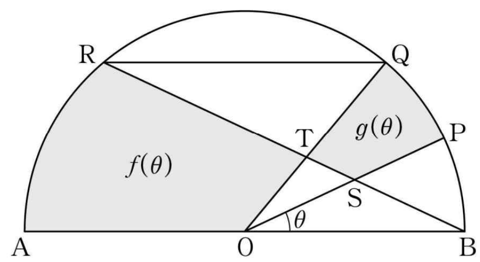


[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 29

72. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 하고 호 AB 위에 두 점 P, Q를

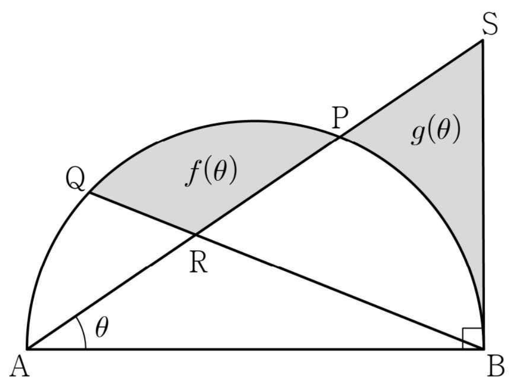
$\angle \mathrm{BOP}=\theta$, $\angle \mathrm{BOQ}=2\theta$

가 되도록 잡는다. 점 Q를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R라 하고, 선분 BR가 두 선분 OP, OQ와 만나는 점을 각각 S, T라 하자. 세 선분 AO, OT, TR와 호 RA로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$라 하고, 세 선분 QT, TS, SP와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{f(\theta)}=a$일 때, $80a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 29

73. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 호 AP 위에 점 Q를 호 PB와 호 PQ의 길이가 같도록 잡을 때, 두 선분 AP, BQ가 만나는 점을 R라 하고 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 AP와 만나는 점을 S라 하자. $\angle BAP=\theta$라 할 때, 두 선분 PR, QR와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 PS, BS와 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



06 미적

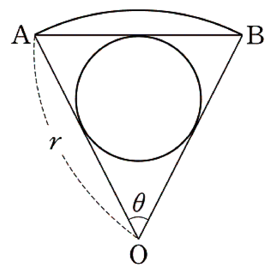
05 삼각함수의 미분

02 극한의 해석 및 활용

07 활용5 (두 개 이상의 원 또는 부채꼴의 관계)

[출처] 2006 모의_공공 평가원 고3 09월 미분과 적분 29

74. 그림과 같이 중심각의 크기가 θ이고 반지름의 길이가 r인 부채꼴 OAB가 있다. 부채꼴의 호 AB의 길이를 l_1, 삼각형 OAB에 내접하는 원의 둘레의 길이를 l_2라 할 때, $\lim_{\theta \to 0} \frac{l_2}{l_1}$의 값은?

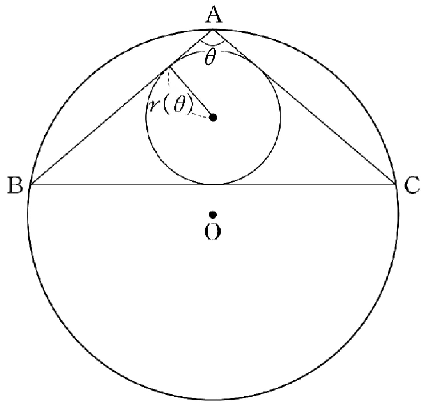


① $\frac{\pi}{4}$　② $\frac{\pi}{2}$　③ π

④ $\frac{3}{2}\pi$　⑤ 2π

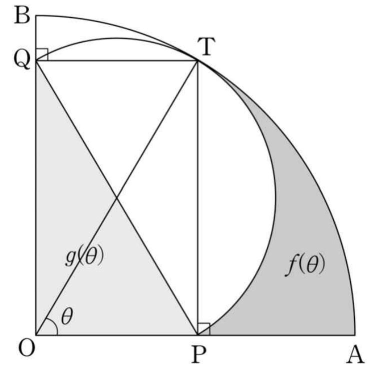
[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 11월 미분과 적분 30

75. 반지름의 길이가 1인 원 O 위에 점 A가 있다. 그림과 같이 양수 θ에 대하여 원 O 위의 두 점 B, C를 $\angle BAC=\theta$이고 $\overline{AB}=\overline{AC}$가 되도록 잡는다. 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to\pi-}\frac{r(\theta)}{(\pi-\theta)^2}=\frac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 09월 미분과 적분 30

76. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 T에서 선분 OA와 선분 OB에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고 $\angle TOP=\theta$라 하자. 점 P와 점 Q를 지름의 양끝으로 하고 점 T를 지나는 반원을 C라 할 때, 반원 C의 호 TP, 선분 PA, 부채꼴 OAT의 호 AT로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 OPQ의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta+f(\theta)}{g(\theta)}=a$일 때, $100a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

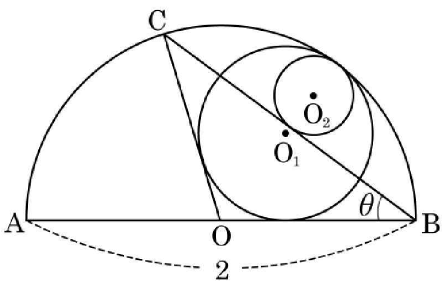


[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 03월 27

77. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점 O와 반원 위를 움직이는 점 C에 대하여 부채꼴 OBC에 내접하는 원을 O_1, 현 BC와 호 BC로 둘러싸인 부분에 내접하는 원 중 반지름의 길이가 가장 큰 원을 O_2라 하자. $\angle\mathrm{ABC}=\theta$라 하고 두 원 O_1, O_2의 반지름의 길이를 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$라 할 때,

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-} \frac{g(\theta)}{\{f(\theta)\}^2} = \frac{q}{p}$$

이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

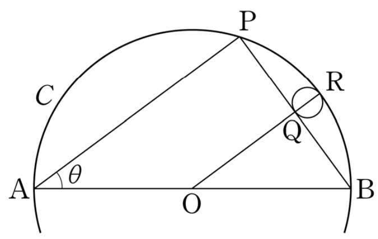


[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 06월 27

78. 중심이 O이고, 두 점 A, B를 지름의 양 끝으로 하며 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 그림과 같이 원 C 위의 점 P에 대하여 점 O를 지나고 직선 AP와 평행한 직선이 선분 PB와 만나는 점을 Q, 호 PB와 만나는 점을 R라 하자. $\angle\mathrm{PAB}=\theta \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하고, 점 Q와 점 R를 지름의 양 끝으로 하는 원의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때,

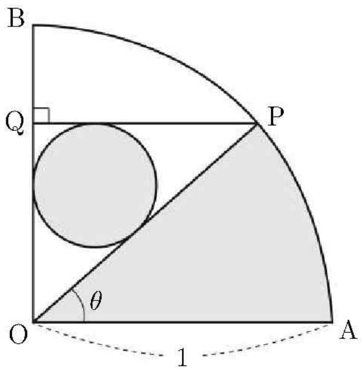
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^4} = \frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $\overline{\mathrm{QR}}<1$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2011 모의_공공 교육청 고2 11월 19

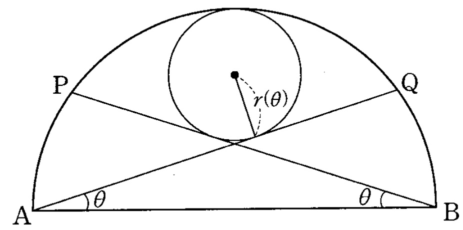
79. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 Q라 하고 $\angle POA=\theta$라 하자. 부채꼴 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 OPQ에 내접하는 원의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta \cdot f(\theta)}$의 값은? $\left(단, 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{3}{4}\pi$
④ π ⑤ $\frac{5}{4}\pi$

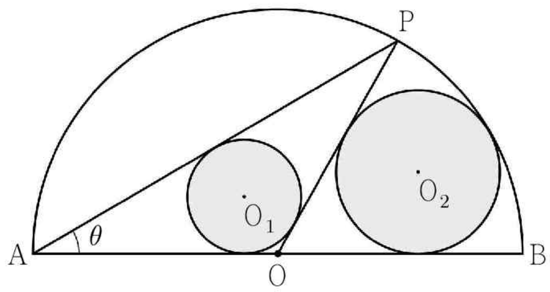
[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 06월 29

80. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 두 점 P, Q를 $\angle ABP=\angle BAQ=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$가 되도록 잡는다. 두 선분 AQ, BP와 호 PQ에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}=p\sqrt{2}+q$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.)



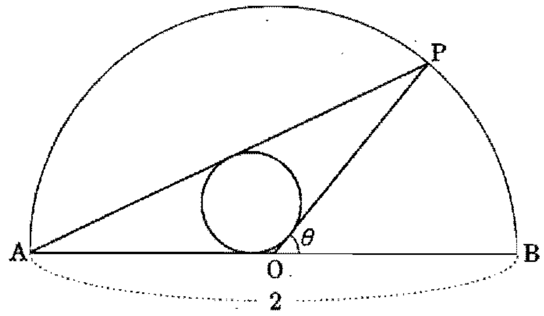
[출처] 2012 모의_공공 교육청 고2 11월 27

81. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P에 대하여 삼각형 AOP에 내접하는 원을 O_1, 부채꼴 OBP에 내접하는 원을 O_2라 하자. $\angle PAB=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$일 때, 원 O_1의 넓이를 $f(\theta)$, 원 O_2의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. 이때, $\lim_{\theta\to+0}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}$의 값을 구하시오.



[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 03월 20

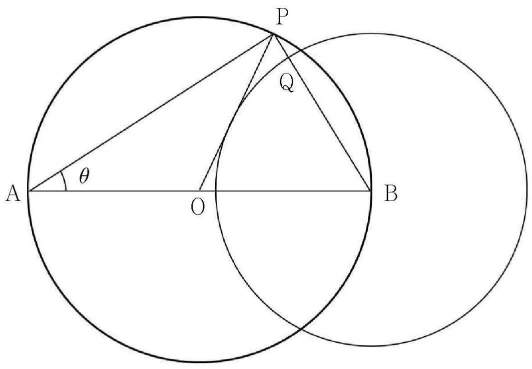
82. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 반원이 있다. 호 AB 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle POB=\theta$일 때, 삼각형 PAO에 내접하는 원의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$이다.)



① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{8}$
④ $\frac{\pi}{16}$ ⑤ $\frac{\pi}{32}$

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 07월 21

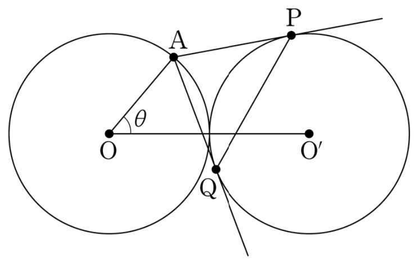
83. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 점 O인 원 C_1이 있다. 원 C_1 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$ 라 하고, 선분 OP에 접하고 중심이 점 B인 원 C_2를 그린다. 원 C_2와 선분 BP의 교점을 점 Q라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\theta^3}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{4}$　③ 1
④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{3}{2}$

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 21

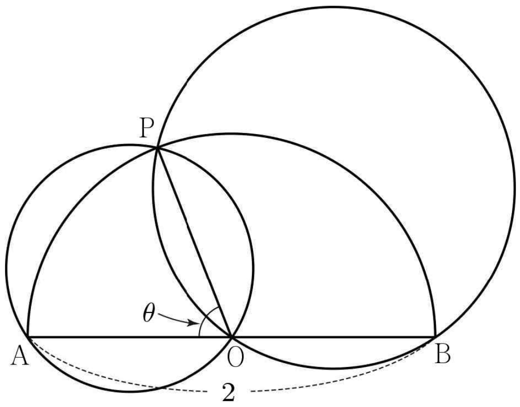
84. 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1인 두 원 O, O'이 외접하고 있다. 원 O 위의 점 A에서 원 O'에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하자. $\angle \mathrm{AOO'}=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)



① 2　② $\sqrt{6}$　③ $2\sqrt{2}$
④ $\sqrt{10}$　⑤ $2\sqrt{3}$

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 04월 19

85. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{AOP}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$일 때, 세 점 A, O, P를 지나는 원의 넓이를 $f(\theta)$, 세 점 B, O, P를 지나는 원의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}-} \frac{g(\theta)-f(\theta)}{\frac{\pi}{2}-\theta}$의 값은?



① π ② $\frac{2\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$

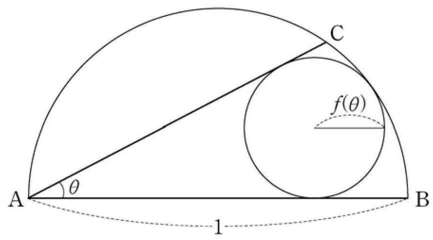
④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{4}$

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 06월 29

86. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 C를 잡고 $\angle \mathrm{BAC}=\theta$라 하자. 호 BC와 두 선분 AB, AC에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $f(\theta)$라 할 때,

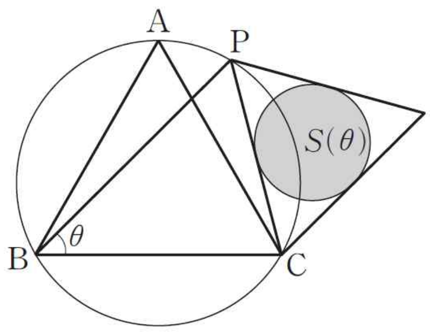
$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}=\alpha$$

이다. 100α의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 09월 28

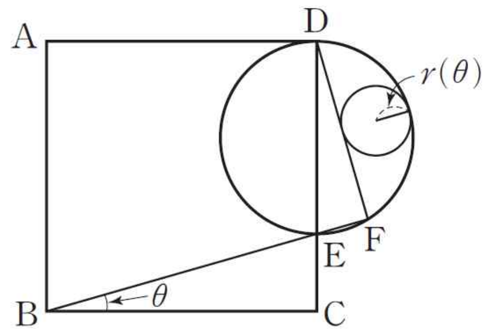
87. 그림과 같이 원에 내접하고 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 ABC가 있다. 점 B를 포함하지 않는 호 AC위의 점 P에 대하여 $\angle PBC=\theta$라 하고, 선분 PC를 한 변으로 하는 정삼각형에 내접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.



$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=a\pi$일 때, $60a$의 값을 구하시오.

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 09월 20

88. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 변 CD위의 점 E에 대하여 선분 DE를 지름으로 하는 원과 직선 BE가 만나는 점 중 E가 아닌 점을 F라 하자. $\angle EBC=\theta$라 할 때, 점 E를 포함하지 않는 호 DF를 이등분하는 점과 선분 DF의 중점을 지름의 양 끝으로 하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$

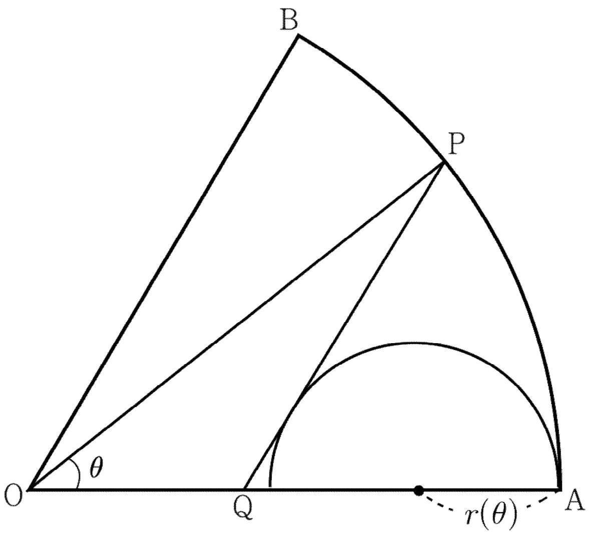


① $\frac{1}{7}(2-\sqrt{2})$ ② $\frac{1}{6}(2-\sqrt{2})$
③ $\frac{1}{5}(2-\sqrt{2})$ ④ $\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$
⑤ $\frac{1}{3}(2-\sqrt{2})$

[출처] 2016 모의_공공 사관학교 고3 07월 29

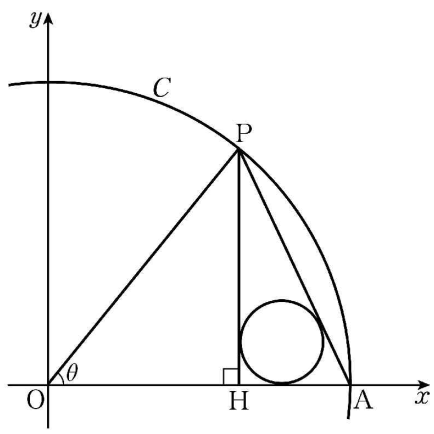
89. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P를 지나고 선분 OB와 평행한 직선이 선분 OA와 만나는 점을 Q라 하고 $\angle \mathrm{AOP}=\theta$라 하자. 점 A를 지름의 한 끝점으로 하고 지름이 선분 AQ 위에 있으며 선분 PQ에 접하는 반원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{r(\theta)}{\theta} = a + b\sqrt{3}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$이고, a, b는 유리수이다.)



[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 03월 21

90. 그림과 같이 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원 C가 x축의 양의 방향과 만나는 점을 A, 원 C 위에 있고 제 1사분면에 있는 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, $\angle \mathrm{POA}=\theta$라 하자. 삼각형 APH에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{r(\theta)}{\theta^2}$의 값은?

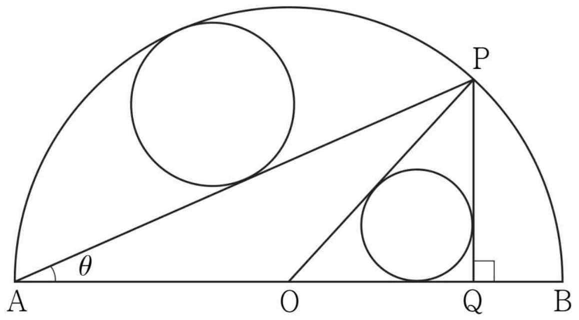


① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 11월 29

91. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 반원 위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하자. $\angle \mathrm{PAB}=\theta$라 할 때, 선분 AP와 호 AP에 동시에 접하는 가장 큰 원의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 POQ의 내접원의 넓이를 $T(\theta)$라 하자.

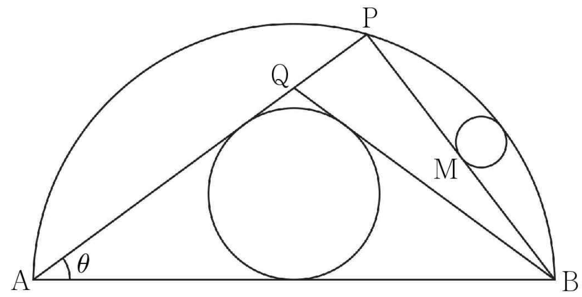
$\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{\theta^2 \times T(\theta)}{S\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$



[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 04월 29

92. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 한 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$라 하자. 선분 PB의 중점 M에서 선분 PB에 접하고 호 PB에 접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 AP 위에 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}$가 되도록 점 Q를 잡고 삼각형 ABQ에 내접하는 원의 넓이를 $T(\theta)$라 하자.

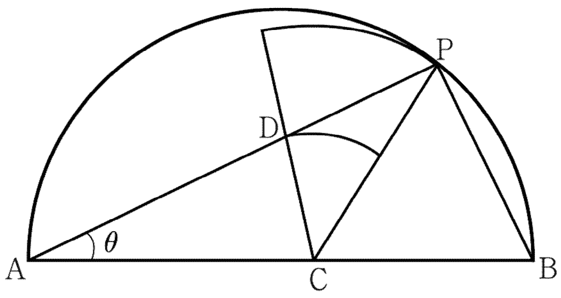
$\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{\theta^2 \times T(\theta)}{S(\theta)}$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$



[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 04월 21

93. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{BP}=\overline{BC}$가 되도록 선분 AB 위의 점 C를 잡고, $\overline{AC}=\overline{AD}$가 되도록 선분 AP 위의 점 D를 잡는다.
$\angle PAB=\theta$에 대하여 선분 CD를 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\angle PCD$인 부채꼴의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 CP를 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\angle PCD$인 부채꼴의 넓이를 $T(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{T(\theta)-S(\theta)}{\theta^2}$의 값은?

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고 $\angle PCD$는 예각이다.)

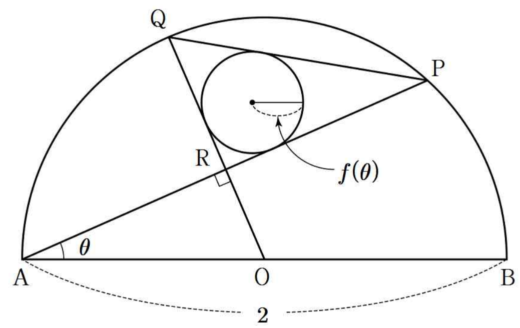


① $\frac{\pi}{16}$ ② $\frac{\pi}{8}$ ③ $\frac{3}{16}\pi$

④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}\pi$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 11월 21

94. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle PAB=\theta$라 하고, 점 O를 지나고 선분 AP에 수직인 직선이 호 AP와 만나는 점을 Q, 선분 AP와 만나는 점을 R라 하자. 삼각형 PQR에 내접하는 원의 반지름을 $f(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{f(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)



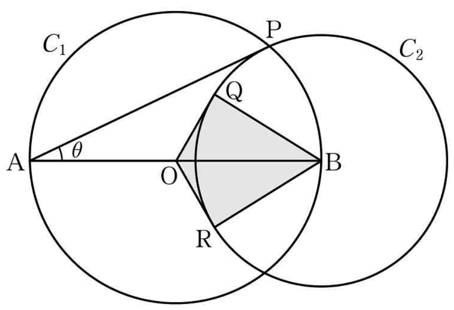
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 10월 16

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 10월 16

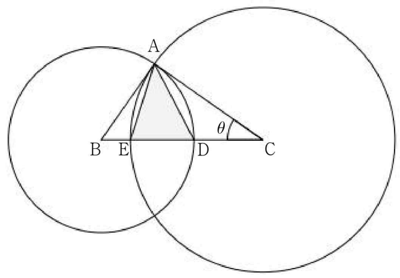
95. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 C_1과 점 B를 중심으로 하고 원 C_1 위의 점 P를 지나는 원 C_2가 있다. 원 C_1의 중심 O에서 원 C_2에 그은 두 접선의 접점을 각각 Q, R라 하자. $\angle \mathrm{PAB}=\theta$일 때, 사각형 ORBQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{6}\right)$



① 2 ② $\sqrt{3}$ ③ 1
④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 19

96. 그림과 같이 선분 BC를 빗변으로 하고, $\overline{\mathrm{BC}}=8$인 직각삼각형 ABC가 있다. 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AB}}$인 원이 선분 BC와 만나는 점을 D, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AC}}$인 원이 선분 BC와 만나는 점을 E라 하자. $\angle \mathrm{ACB}=\theta$라 할 때, 삼각형 AED의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은?

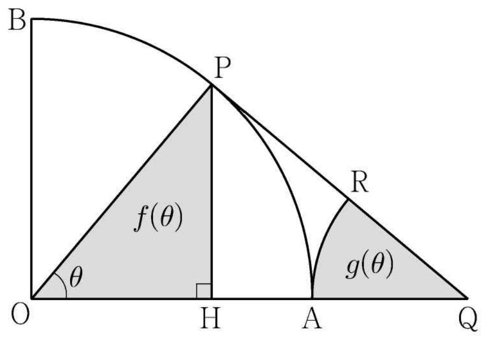


① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 20

97. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서 호 AB에 접하는 직선과 직선 OA의 교점을 Q라 하자. 점 Q를 중심으로 하고 반지름의 길이가 삼각형 OHP의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 QRA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta \times f(\theta)}$의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)



① $\frac{\sqrt{\pi}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$

④ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ⑤ $\sqrt{\pi}$

삼도극 다 모아봄(빠른 정답)

프로젝트 2022.12.30

1. [정답] ④
2. [정답] ②
3. [정답] ⑤
4. [정답] 250
5. [정답] 65

6. [정답] 20
7. [정답] 16
8. [정답] **16**
9. [정답] 100
10. [정답] 6

11. [정답] 14
12. [정답] ③
13. [정답] ①
14. [정답] **9**
15. [정답] ④

16. [정답] ③
17. [정답] ④
18. [정답] 50
19. [정답] ④
20. [정답] ③

21. [정답] 18
22. [정답] ①
23. [정답] ②
24. [정답] 20
25. [정답] ④

26. [정답] ②
27. [정답] 65
28. [정답] ③
29. [정답] ②
30. [정답] ④

31. [정답] 15
32. [정답] 36
33. [정답] 32
34. [정답] 41
35. [정답] 200

36. [정답] ③
37. [정답] ②
38. [정답] ④
39. [정답] ④
40. [정답] 15

41. [정답] 18
42. [정답] 25
43. [정답] ①
44. [정답] ①
45. [정답] ①

46. [정답] ⑤
47. [정답] ①
48. [정답] **9**
49. [정답] **20**
50. [정답] ①

51. [정답] ②
52. [정답] ②
53. [정답] ⑤
54. [정답] ②
55. [정답] ②

56. [정답] **40**
57. [정답] ④
58. [정답] 8
59. [정답] 120
60. [정답] 60

61. [정답] 15
62. [정답] 23
63. [정답] ④
64. [정답] ②
65. [정답] ①

66. [정답] ③
67. [정답] 11
68. [정답] ②
69. [정답] 49
70. [정답] ④

71. [정답] 50
72. [정답] 20

73. [정답] 4
74. [정답] ③
75. [정답] 17

76. [정답] 50
77. [정답] 17
78. [정답] 17
79. [정답] ②
80. [정답] 8

81. [정답] 4
82. [정답] ④
83. [정답] ③
84. [정답] ③
85. [정답] ①

86. [정답] 25
87. [정답] 80
88. [정답] ④
89. [정답] 5
90. [정답] ④

91. [정답] 16
92. [정답] 4
93. [정답] ②
94. [정답] ①
95. [정답] ①

96. [정답] ⑤
97. [정답] ④

삼도극 다 모아봄(해설)

프로젝트 2022.12.30

1) [정답] ④

[해설]
$\triangle$OAB에 사인법칙를 적용하면

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{OB}}{\sin 2\theta}$ $\therefore$ $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\dfrac{\sin\theta}{\sin 2\theta}$

$\therefore \displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\sin 2\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{2\cos\theta}=\frac{1}{2}$

2) [정답] ②

[해설]
$a_n=\overline{C_{n-1}C_n}=\overline{AC_{n-1}}$이고,
$\triangle ABC$, $\triangle ABC_1$, $\cdots$ 직각삼각형이므로

$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{a_1}$

$\therefore a_1=\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{6}}$

$\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1}{a_2}$

$\therefore a_2=\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{12}}=\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\cdot\dfrac{1}{2}\right)}$

$\sin\dfrac{\pi}{24}=\dfrac{1}{a_3}$

$\therefore a_3=\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{24}}=\dfrac{1}{\sin\left\{\dfrac{\pi}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}}$

$\vdots$

$\therefore a_n=\dfrac{1}{\sin\left\{\dfrac{\pi}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$

$=\dfrac{1}{\sin\left\{\dfrac{\pi}{6}\cdot 2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right\}}$

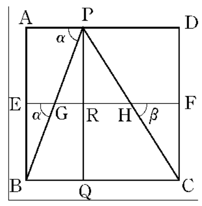
$=\dfrac{1}{\sin\left\{\dfrac{\pi}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right\}}$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi a_n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{\sin\left\{\dfrac{\pi}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right\}}$

$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\pi}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}}{\sin\left\{\dfrac{\pi}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right\}}\cdot 3=3$

3) [정답] ⑤

[해설]
아래 그림과 같이 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 Q라 하고, $\overline{PQ}$와 $\overline{EF}$가 만나는 점을 R라 하자.



ㄱ. (참) $\overline{EG}=\overline{GR}$, $\overline{RH}=\overline{HF}$이므로

$\overline{GH}=\overline{GR}+\overline{RH}=\dfrac{1}{2}\overline{EF}=1$(일정)

ㄴ. (거짓) $\triangle$PGH에서 $\angle GPH+\alpha+\beta=180^\circ$

$\therefore$ $a+\beta=180^\circ-\angle GPH$

이때, 점 P의 위치에 따라 $\angle$GPH의 크기가 달라지고, $\angle$GPH의 크기가 달라지면 $a+\beta$의 값이 달라진다.

ㄷ. (참) $\triangle$ABP에서 $\tan a=\dfrac{2}{\overline{AP}}$이므로

$\overline{AP}=\dfrac{2}{\tan\alpha}=2\cot ÿ a$

$\therefore \displaystyle\lim_{a\to\frac{\pi}{2}}\frac{\overline{AP}}{\dfrac{\pi}{2}-a}=\lim_{a\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cot a}{\dfrac{\pi}{2}-a}$

$=\displaystyle\lim_{a\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)}{\dfrac{\pi}{2}-a}=2$

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

4) [정답] 250

[해설]
[그림 2]의 도형의 넓이는 두 변의 길이가 20인 이등변삼각형 n개의 넓이와 두 변의 길이가 10인 이등변삼각형 n개의 넓이의 합이다. 이때, 같은 두 변 사이의 끼인 각의 크기는 $\dfrac{2\pi}{2n}=\dfrac{\pi}{n}$이므로

$S_n=n\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 20^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}+n\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 10^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}$

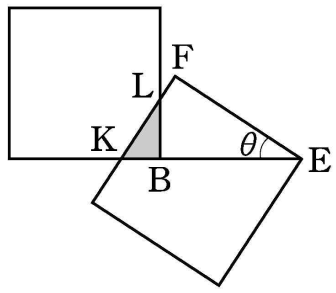
$=250n\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}$

$\therefore \dfrac{1}{\pi}\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{\pi}\lim\limits_{n\to\infty}\left(250n\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}\right)$

$= 250\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n}} = 250$

5) [정답] 65

[해설]



$\dfrac{\overline{EF}}{\overline{KE}} = \cos\theta$이므로

$\overline{KE} = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$\therefore \overline{KB} = \dfrac{1}{\cos\theta} - 1$

또, $\angle BKL = \dfrac{\pi}{2} - \theta$에서

$\dfrac{\overline{BL}}{\overline{KB}} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta$

$\therefore \overline{BL} = \overline{KB}\cdot\cot\theta$

$S(\theta) = \dfrac{1}{2}\cdot\overline{KB}\cdot\overline{BL} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\cos\theta}-1\right)\times\left(\dfrac{1}{\cos\theta}-1\right)\cdot\cot\theta$

$= \dfrac{1}{2}\dfrac{(1-\cos\theta)^2}{\cos^2\theta}\cdot\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{(1-\cos\theta)^2}{2\sin\theta\cos\theta}$

$\therefore \lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{S(\theta)}{\theta^3} = \lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{(1-\cos\theta)^2}{2\sin\theta\cos\theta\cdot\theta^3}$

$= \lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{2\sin\theta\cos\theta\cdot\theta^3(1+\cos\theta)^2}$

$= \lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin^4\theta}{2\sin\theta\cos\theta\cdot\theta^3(1+\cos\theta)^2}$

$= \dfrac{1}{2\cdot1\cdot2^2} = \dfrac{1}{8}$

$\therefore p^2+q^2 = 65$

6) [정답] 20

[해설]

$f(\theta) = \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$

$= 10\tan\theta + \left(\dfrac{10}{\cos\theta}-10\right) + \sqrt{10^2+10^2-2\times10\times10\cos\theta}$

$= 10\tan\theta + 10\left(\dfrac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)$

$\therefore \lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{f(\theta)}{\theta}$

$= \lim\limits_{\theta\to0+}\left(10\dfrac{\tan\theta}{\theta} + 10\dfrac{1-\cos\theta}{\theta}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta} + 10\sqrt{2\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}}\right)$

$= \lim\limits_{\theta\to0+}\left\{10\dfrac{\tan\theta}{\theta} + 10\dfrac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta} + 10\sqrt{2\dfrac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}}\right\}$

$= \lim\limits_{\theta\to0+}\left\{10\dfrac{\tan\theta}{\theta} + 10\dfrac{\sin\theta}{\theta}\cdot\sin\theta\cdot\dfrac{1}{(1+\cos\theta)\cos\theta} + 10\sqrt{2\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\dfrac{1}{1+\cos\theta}}\right\}$

$= 10\times1 + 10\times1\times0\times\dfrac{1}{2} + 10\sqrt{2\times1\times\dfrac{1}{2}}$

$= 10+10 = 20$

7) [정답] 16

[해설]

$\overline{AB}=1,\ \angle A=\theta,\ \angle B=2\theta$이고

$\angle BCD=\alpha$라 하면 $\angle ACD=2\alpha$이므로

$\angle CDB=\theta+2\alpha,\ \angle CDA=2\theta+\alpha$이다.

$(\theta+2\alpha)+(2\theta+\alpha)=\pi$이므로

$\therefore \alpha = \dfrac{\pi}{3}-\theta$

사인법칙에 의해

(i) 삼각형 ADC에서

$\dfrac{\overline{AD}}{\sin 2\alpha} = \dfrac{\overline{CD}}{\sin\theta}$

$\overline{AD} = \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\theta}\cdot\overline{CD}$ …… ㉠

(ii) 삼각형 BDC에서

$\dfrac{\overline{BD}}{\sin\alpha} = \dfrac{\overline{CD}}{\sin 2\theta}$

$\overline{BD} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\theta}\cdot\overline{CD}$ …… ㉡

㉠과 ㉡에서

$\overline{AD}+\overline{BD}=1$이므로

$\overline{CD}\cdot\left(\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\theta}+\dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\theta}\right)=1$

$\overline{CD} = \dfrac{1}{\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\theta}+\dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\theta}}$

$= \dfrac{1}{\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\theta}+\dfrac{\sin\alpha}{2\sin\theta\cos\theta}}$

$= \dfrac{\sin\theta}{\sin\alpha}\times\dfrac{1}{2\cos\alpha+\dfrac{1}{2\cos\theta}}$

그런데,

$\lim\limits_{\theta\to0+}\sin\alpha = \lim\limits_{\theta\to0+}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\lim_{\theta\to0+}\cos\alpha=\lim_{\theta\to0+}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\frac{1}{2}$$

이므로

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{CD}}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{\sin\alpha}\times\frac{1}{2\cos\alpha+\frac{1}{2\cos\theta}}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ 27a^2=27\left(\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)^2=16$$

8) [정답] 16

[해설]

$\overline{AC}=x$라 하면 $\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{AD}=\overline{AP}=x$이다.

이등변삼각형 ABC에서 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{2}{x}$이므로 $x=\dfrac{2}{\sin\frac{\theta}{2}}$

따라서 삼각형 BDP의 넓이를 $S(\theta)$는

$$S(\theta)=\triangle ADP-\triangle ABP$$

$$=\frac{1}{2}\times x\times x\times\sin2\theta-\frac{1}{2}\times4\times x\times\sin2\theta$$

$$=\frac{2\sin2\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}-\frac{4\sin2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\lim_{\theta\to0+}(\theta\times S(\theta))=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{2\theta\sin2\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}-\frac{4\theta\sin2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(2\times\frac{\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\times\frac{\sin2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}-4\theta\times\frac{\sin2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$=2\times2\times4-4\times0\times4=16$$

9) [정답] 100

[해설]

삼각형 ABC에서

$\overline{BC}=\sin\theta$ ……㉠

또,

$$\angle ADC=\pi-\left(2\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=\frac{\pi}{3}-2\theta$$

이므로 삼각형 ACD에서

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\angle CDA}=\frac{\overline{CD}}{\sin\angle DAC}$$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)}=\frac{\overline{CD}}{\sin2\theta}$$

$$\therefore\ \overline{CD}=\frac{\cos\theta\sin2\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)}\quad\cdots\cdots㉡$$

또,

$$\angle BCD=2\pi-\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{5}{6}\pi\quad\cdots\cdots㉢$$

그러므로 ㉠, ㉡, ㉢에서

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{CB}\times\sin(\angle BCD)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\cos\theta\sin2\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)}\times\sin\theta\times\sin\frac{5}{6}\pi$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{\cos\theta\sin2\theta\sin\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)}$$

따라서,

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\cos\theta\sin2\theta\sin\theta}{4\theta^2\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\cos\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

이므로

$$300p^2=300\times\frac{1}{3}=100$$

10) [정답] 6

[해설]

점 B에서 직선 l_1에 내린 수선의 발을 B′이라 하면 삼각형 ABB′에서

$$\overline{AB}=\frac{1}{\sin\theta}$$

삼각형 ABC에서 $\angle ACB=\pi-5\theta$이므로

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=\frac{\frac{1}{\sin\theta}}{\sin(\pi-5\theta)}$$

$$\therefore\ \overline{BC}=\frac{1}{\sin5\theta}\quad\cdots\cdots ㉠$$

그러므로

$$T_1=\frac{1}{2}\times\overline{BA}\times\overline{BC}\times\sin4\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sin\theta}\times\frac{1}{\sin5\theta}\times\sin4\theta$$

$$=\frac{\sin4\theta}{2\sin\theta\sin5\theta}$$

또, 삼각형 BCD에서

$\angle CBD=\pi-5\theta$, $\angle CDB=3\theta$이므로

$$\frac{\overline{BC}}{\sin3\theta}=\frac{\overline{BD}}{\sin2\theta}$$

㉠에서

$$\overline{BD}=\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta\sin5\theta}$$

그러므로

$$T_2=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{BD}\times\sin(\pi-5\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta\sin5\theta}\times\frac{1}{\sin5\theta}\times\sin5\theta$$

$$=\frac{\sin2\theta}{2\sin3\theta\sin5\theta}$$

따라서,

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{T_1}{T_2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\sin4\theta}{2\sin\theta\sin5\theta}}{\frac{\sin2\theta}{2\sin3\theta\sin5\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin4\theta\sin3\theta}{\sin\theta\sin2\theta}$$

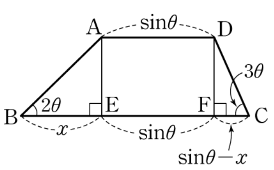
$$=6\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\sin4\theta}{4\theta}\times\frac{\sin3\theta}{3\theta}}{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin2\theta}{2\theta}}$$

$$=6$$

11) [정답] 14

[해설]

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자.



$\overline{BE}=x$라 하면

$\overline{AE}=x\tan2\theta$

$\overline{AE}=\overline{DF}$에서

$x\tan2\theta=(\sin\theta-x)\tan3\theta$

$$\therefore x=\frac{\sin\theta\tan3\theta}{\tan2\theta+\tan3\theta}$$

사다리꼴 ABCD의 넓이는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}(\sin\theta+2\sin\theta)\times x\tan2\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times3\sin\theta\times\frac{\sin\theta\tan3\theta}{\tan2\theta+\tan3\theta}\times\tan2\theta$$

$$=\frac{3}{2}\times\frac{\sin^2\theta\tan2\theta\tan3\theta}{\tan2\theta+\tan3\theta}$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{3}{2}\times\frac{\sin^2\theta\tan2\theta\tan3\theta}{\theta^3(\tan2\theta+\tan3\theta)}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{3}{2}\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\frac{\tan2\theta}{2\theta}\times2\times\frac{\tan3\theta}{3\theta}\times3\right.$$

$$\left.\times\frac{\theta}{\tan2\theta+\tan3\theta}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{9\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\frac{\tan2\theta}{2\theta}\times\frac{\tan3\theta}{3\theta}\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{2\times\frac{\tan2\theta}{2\theta}+3\times\frac{\tan3\theta}{3\theta}}\right\}$$

$$=9\times1\times1\times1\times\frac{1}{5}$$

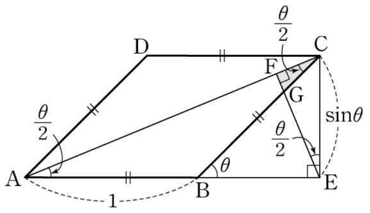
$$=\frac{9}{5}$$

따라서 $p=5$, $q=9$이므로

$p+q=14$

12) [정답] ③

[해설]



$\angle DAB = \angle CBE = \theta$이므로

$\angle BAC = \angle BCA = \angle CEF = \frac{\theta}{2}$

또 $\triangle BCE$에서 $\overline{CE} = \sin\theta$이므로 $\triangle CEF$에서

$\overline{CF} = \sin\theta \sin\frac{\theta}{2}$

$\triangle CFG$에서

$\overline{FG} = \overline{CF} \times \tan\frac{\theta}{2}$

$= \sin\theta \times \sin\frac{\theta}{2} \times \tan\frac{\theta}{2}$

$\therefore S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{CF} \times \overline{FG}$

$= \frac{1}{2} \times \sin^2\theta \times \sin^2\frac{\theta}{2} \times \tan\frac{\theta}{2}$

$\therefore \lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^5}$

$= \lim_{\theta \to 0+} \left\{ \frac{1}{2} \times \frac{\sin^2\theta}{\theta^2} \left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \right)^2 \times \frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \right.$

$\left. \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right\}$

$= \frac{1}{16}$

13) [정답] ①

[해설]

점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 BED와 삼각형 DEH는 닮음이므로

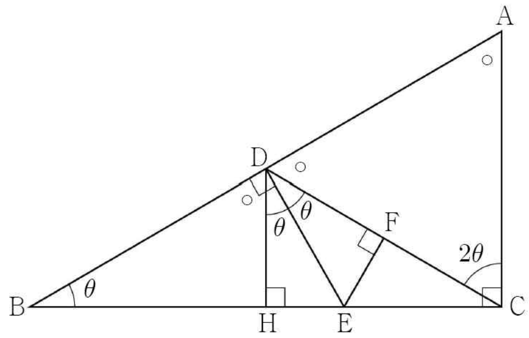
$\angle EBD = \angle EDH = \theta$

선분 AC와 선분 DH는 서로 평행하므로

$\angle ACD = \angle CDH = 2\theta$

$\angle DAC = \angle CDA = \frac{\pi}{2} - \theta$이므로 삼각형 CAD는 $\overline{CA} = \overline{CD}$인 이등변삼각형이다.

$\overline{AB} = 4$이므로 $\overline{CA} = \overline{CD} = 4\sin\theta$



삼각형 DHC에서

$\overline{DH} = \overline{CD}\cos 2\theta = 4\sin\theta\cos 2\theta$

삼각형 DHE에서

$\overline{DE} = \frac{\overline{DH}}{\cos\theta} = 4\tan\theta\cos 2\theta$

점 E에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 F라 할 때,

$\overline{EF} = \overline{DE}\sin\theta$

삼각형 CDE의 넓이

$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{EF}$

$= 8\sin^2\theta\tan\theta\cos 2\theta$

따라서

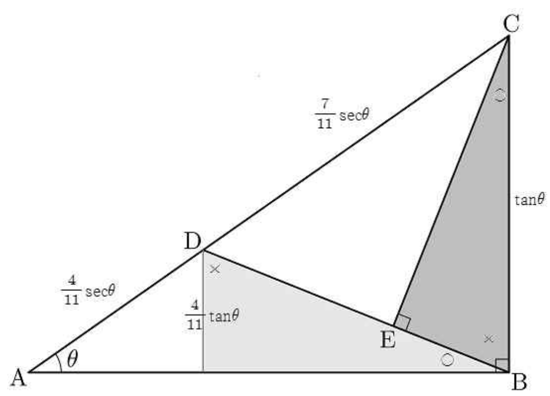
$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{8\sin^2\theta\tan\theta\cos 2\theta}{\theta^3}$$

$$= 8 \times \lim_{\theta \to 0+} \left\{ \left(\frac{\sin\theta}{\theta} \right)^2 \times \left(\frac{\tan\theta}{\theta} \right) \times \cos 2\theta \right\}$$

$$= 8$$

14) [정답] **9**

[해설]



그림에서 삼각형 BCE, BDM은 닮음이고,

$\overline{BC}=\tan\theta$, $\overline{BD}=\frac{1}{11}\sqrt{49+16\tan^2\theta}$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{7}{11}\times\frac{4}{11}\tan\theta\times\left(\frac{11^2\tan^2\theta}{49+16\tan^2\theta}\right)$$

$$=\frac{14\tan^3}{49+16\tan^2\theta}$$

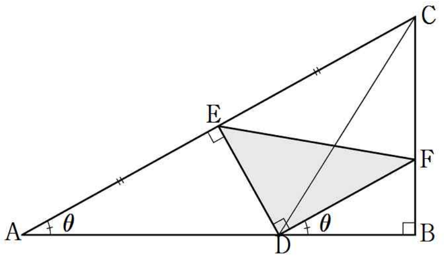
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{14}{49+0}=\frac{2}{7}$$

$\therefore 2+7=9$

15) [정답] ④

[해설]

$\overline{AD}=\overline{CD}$이므로 삼각형 ADC는 이등변삼각형이고, $\overline{AE}=\overline{CE}$이다. 또한, 선분 AC와 선분 DF가 평행하므로 $\angle BDF=\theta$이고, 삼각형 DEF는 직각삼각형이다.



삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=\sec\theta$이므로 $\overline{AE}=\frac{1}{2}\sec\theta$

삼각형 AED에서

$$\overline{DE}=\overline{AE}\times\tan\theta=\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta,$$

$$\overline{AD}=\overline{AE}\times\sec\theta=\frac{1}{2}\sec^2\theta$$

이므로 $\overline{DB}=1-\frac{1}{2}\sec^2\theta$

삼각형 DBF에서 $\overline{DF}=\overline{DB}\times\sec\theta=\sec\theta\left(1-\frac{1}{2}\sec^2\theta\right)$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{DF}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta\times\sec\theta\left(1-\frac{1}{2}\sec^2\theta\right)$$

$$=\frac{1}{4}\sec^2\theta\tan\theta\left(1-\frac{1}{2}\sec^2\theta\right)$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{4}\sec^2\theta\tan\theta\left(1-\frac{1}{2}\sec^2\theta\right)}{\theta}$$

$$=\frac{1}{8}$$

16) [정답] ③

[해설]

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos\theta=5-4\cos\theta$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{5-4\cos\theta}$

직선 AE가 $\angle BAC$의 이등분선이므로

$\overline{BE}:\overline{CE}=\overline{AB}:\overline{AC}=1:\sqrt{5-4\cos\theta}$에서

$$\overline{BE}=\frac{1}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}\times\overline{BC}=\frac{2}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}$$

그러므로

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BE}\times\sin(\angle CBA)$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{1+}\sqrt{5-4\cos\theta}\times\sin\theta$$

$$=\frac{\sin\theta}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}$$

두 직선 AB, DM이 서로 평행하므로

$\angle CDM=\theta$, $\angle BAE=\angle DFE$

이다. 이때 $\angle BAE=\angle FAC$이므로 삼각형 AMF는 이등변삼각형이다.

점 M은 선분 AC의 중점이므로

$\overline{FM}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}=\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}}{2}$이고

$\overline{BD}=\overline{CD}=1$, $\overline{DM}=\frac{1}{2}$

그러므로 $\overline{DF}=\overline{FM}-\overline{DM}=\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{2}$

$\angle FDC=\pi-\angle CDM=\pi-\theta$이므로

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{DF}\times\sin(\angle FDC)$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{2}\times\sin(\pi-\theta)$$

$$=\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{4}\times\sin\theta$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\sin\theta}{4}\left(\sqrt{5-4\cos\theta}-1\right)}{\theta^2\times\frac{\sin\theta}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\sqrt{5-4\cos\theta}-1\right)\left(\sqrt{5-4\cos\theta}+1\right)}{4\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(5-4\cos\theta)-1}{4\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$

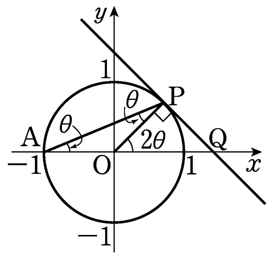
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

17) [정답] ④

[해설]



$\angle\mathrm{POQ}=2\theta$ 이고, $\overline{\mathrm{OP}}=1$ 이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\tan2\theta$

$\overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{\cos2\theta}$ 이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\tan2\theta-\frac{1}{\cos2\theta}}{\theta-\frac{\pi}{4}}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1}{\theta-\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\sin2\theta-1}{\cos2\theta}$$

$\theta-\dfrac{\pi}{4}=t$라 치환하면

$$\lim_{t\to0-}\frac{1}{t}\cdot\frac{\cos2t-1}{-\sin2t}=\lim_{t\to0-}\frac{1-\cos^2 2t}{1+\cos2t}\cdot\frac{1}{t\sin2t}$$

$$=\lim_{t\to0-}\frac{1}{1+\cos2t}\cdot\frac{\sin2t}{2t}\cdot2=1$$

18) [정답] 50

[해설]

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$이므로 직선 AP의 방정식은

$$y=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta}x+1$$

위 직선의 x절편은

$$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

이므로 점 R의 좌표는 $\left(\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta},\ 0\right)$이다.

$$\Delta\mathrm{ORP}=\frac{1}{2}\times\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\times\sin\theta$$

$$\Delta\mathrm{OQP}=\frac{1}{2}\times1\times\tan\theta$$

이므로

$$\Delta\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\sin\theta}-\tan\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\theta\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\theta\cos\theta(1+\sin\theta)-\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}\right\}$$

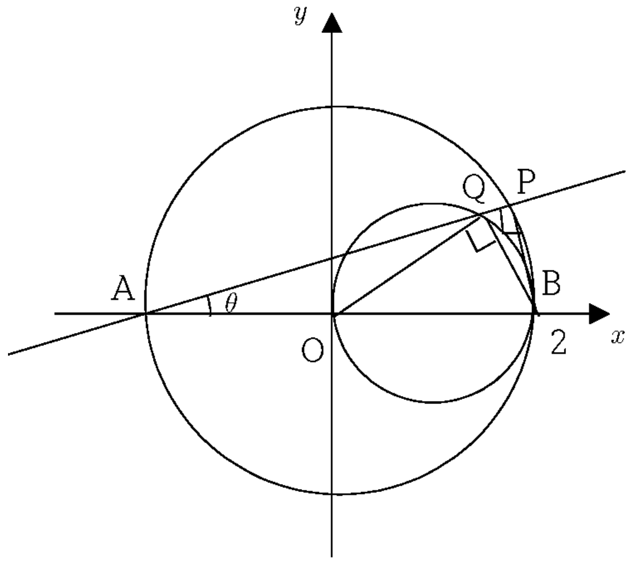
$$=\frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta}$$

$$\therefore\ a=\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{2\theta^2}\cdot\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ 100a=50$

19) [정답] ④

[해설]



그림에서 $\mathrm{B}(2,\ 0)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=4\cos\theta,\quad\overline{\mathrm{BP}}=4\sin\theta$

이고 $\overline{\mathrm{OQ}}=a,\ \overline{\mathrm{BQ}}=b,\ \overline{\mathrm{PQ}}=x$라 하면

$a^2+b^2=4\cdots\cdots$ ㉠

$b^2=x^2+(4\sin\theta)^2=x^2+16\sin^2\theta$

$a^2=2^2+(4\cos\theta-x)^2-2\times2\times(4\cos\theta-x)\cos\theta$

$=4+(16\cos^2\theta-8\cos\theta x+x^2)-16\cos^2\theta+4\cos\theta x$

$=x^2-4\cos\theta x+4$

따라서, ㉠에 대입하면

$(x^2-4\cos\theta x+4)+(x^2+16\sin^2\theta)=4$

$x^2-2\cos\theta x+8\sin^2\theta=0$

$\therefore\ x=\overline{\mathrm{PQ}}=\cos\theta-\sqrt{\cos^2\theta-8\sin^2\theta}$

$(\because 0<\cos\theta<1)$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\cos\theta-\sqrt{\cos^2\theta-8\sin^2\theta}}{\theta^2}$$

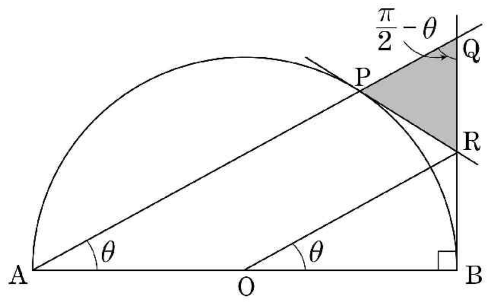
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{8\sin^2\theta}{\theta^2\left(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta-8\sin^2\theta}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}8\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{1}{\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta-8\sin^2\theta}}$$

$=8\times1^2\times\dfrac{1}{2}=4$

20) [정답] ③

[해설]
그림에서 삼각형 ABQ와 삼각형 OBR는 닮음비가 2 : 1인 닮은 삼각형이다.



$\overline{QB}=2\tan\theta$이므로

$\overline{QR}=\dfrac{1}{2}\overline{QB}=\tan\theta$

$\overline{AQ}=\dfrac{2}{\cos\theta}$, $\overline{AP}=2\cos\theta$이므로

$\overline{QP}=\overline{AQ}-\overline{AP}$

$=2\left(\dfrac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)$

이때 $\angle AQB=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{QR}\times\overline{QP}\times\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\tan\theta\times2\left(\dfrac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)\times\cos\theta$

$=\tan\theta(1-\cos^2\theta)$

$=\tan\theta\sin^2\theta$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$

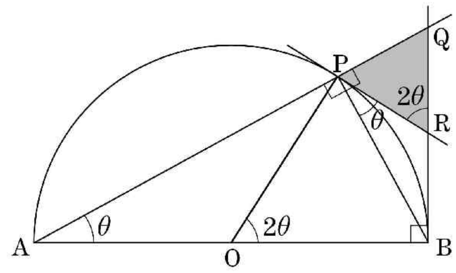
$=\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta\sin^2\theta}{\theta^3}$

$=\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2$

$=1\times1^2$

$=1$

[다른 풀이]
그림과 같이 반원의 중심을 O라 하자.



$\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\angle PBR=\theta$이다.

원 밖의 한 점 R에서 그은 두 접선의 길이는 서로 같으므로 $\overline{PR}=\overline{RB}$이고 $\angle RPB=\theta$이다.

$\angle PQR=\angle QPR=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로

$\overline{PR}=\overline{QR}$

$\overline{BQ}=2\tan\theta$에서 $\overline{PR}=\overline{RB}=\overline{QR}=\tan\theta$

이때 $\angle PRQ=2\theta$이므로

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\tan\theta\tan\theta\sin2\theta=\dfrac{1}{2}\tan^2\theta\sin2\theta$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$

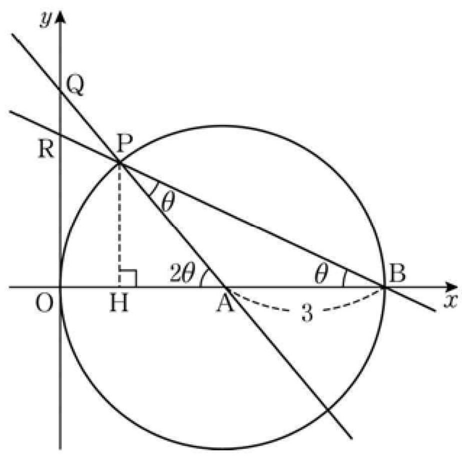
$=\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan^2\theta\sin2\theta}{2\theta^3}$

$=\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta\cdot\tan\theta\cdot\sin2\theta}{\theta\cdot\theta\cdot2\theta}$

$=1$

21) [정답] 18

[해설]
$\angle PBO=\theta$이므로 $\angle PAO=2\theta$이다.
점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AP}=3$, $\overline{AH}=3\cos2\theta$, $\overline{HO}=3-3\cos2\theta$이다.



$\overline{OA}=3$, $\angle PAO=2\theta$이므로

$\overline{OQ}=3\tan2\theta$

$\overline{OB}=6$, $\angle PBO=\theta$이므로

$\overline{OR}=6\tan\theta$

$\overline{RQ}=\overline{OQ}-\overline{OR}$

$=3\tan2\theta-6\tan\theta$

$\overline{HO}=3-3\cos2\theta$이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{RQ}\times\overline{HO}$

$=\frac{1}{2}(3\tan2\theta-6\tan\theta)(3-3\cos2\theta)$

$=\frac{9}{2}(\tan2\theta-2\tan\theta)(1-\cos2\theta)$

$=9\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}-2\tan\theta\right)\sin^2\theta$

$=\frac{18\tan^3\theta\sin^2\theta}{1-\tan^2\theta}$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5}=\lim_{\theta\to0+}\frac{18\tan^3\theta\sin^2\theta}{\theta^5(1-\tan^2\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{18}{1-\tan^2\theta}\times\frac{\tan^3\theta}{\theta^3}\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\right)$$

$=18\times1\times1=18$

[다른 풀이]

$\triangle PAH\backsim\triangle QAO$이므로

$\overline{AP}:\overline{PQ}=\overline{AH}:\overline{HO}$

$3:\overline{PQ}=3\cos2\theta:3-3\cos2\theta$이므로

$\overline{PQ}=\frac{3(3-3\cos2\theta)}{3\cos2\theta}$

또, $\triangle PBH\backsim\triangle RBO$이므로

$\overline{BP}:\overline{PR}=\overline{BH}:\overline{HO}$

$6\cos\theta:\overline{PR}=3+3\cos2\theta:3-3\cos2\theta$이므로

$\overline{PR}=\frac{6\cos\theta(3-3\cos2\theta)}{3+3\cos2\theta}$

$\angle QPR=\angle APB=\angle PBA=\theta$이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PR}\times\overline{PQ}\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times\frac{6\cos\theta(3-3\cos2\theta)}{(3+3\cos2\theta)}\times\frac{3(3-3\cos2\theta)}{3\cos2\theta}\times\sin\theta$

$=\frac{9\cos\theta(1-\cos2\theta)^2\sin\theta}{(1+\cos2\theta)\cos2\theta}$

$=\frac{9\cos\theta(2\sin^2\theta)^2\sin\theta}{(1+\cos2\theta)\cos2\theta}$

$=\frac{36\cos\theta\sin^5\theta}{(1+\cos2\theta)\cos2\theta}$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5}=\lim_{\theta\to0+}\frac{36\cos\theta\sin^5\theta}{\theta^5(1+\cos2\theta)\cos2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{36\cos\theta}{(1+\cos2\theta)\cos2\theta}\times\frac{\sin^5\theta}{\theta^5}\right\}$$

$=\frac{36}{2\times1}\times1$

$=18$

22) [정답] ①

[해설]

$\angle POQ=\theta$로 놓으면 $\pi=\overset{\frown}{PQ}=2^n\theta$에서 $\theta=\frac{\pi}{2^n}$

점 Q의 좌표는 $\left(2^n\cos\frac{\pi}{2^n},\ 2^n\sin\frac{\pi}{2^n}\right)$이므로

$\overline{HP}=2^n-2^n\cos\frac{\pi}{2^n}$이다.

$$\lim_{n\to\infty}(\overline{OQ}\times\overline{HP})=\lim_{n\to\infty}\left\{2^n\times2^n\left(1-\cos\frac{\pi}{2^n}\right)\right\}$$

이때 $\frac{1}{2^n}=t$로 놓으면 $n\to\infty$일 때, $t\to0+$이고

$$\lim_{n\to\infty}4^n\left(1-\cos\frac{\pi}{2^n}\right)=\lim_{t\to0+}\frac{1-\cos\pi t}{t^2}$$

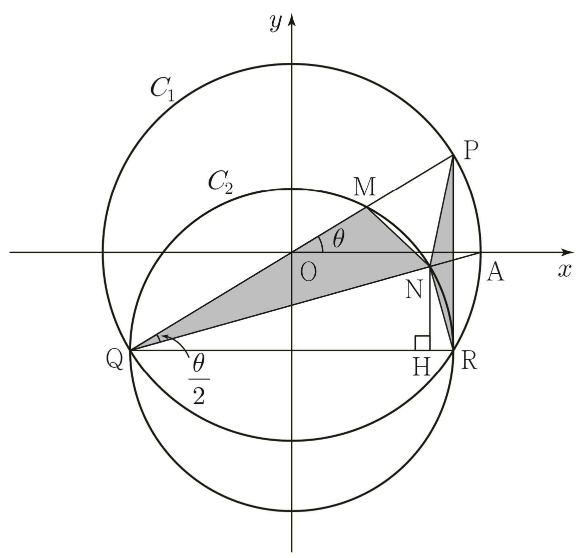
$$=\lim_{t\to0+}\frac{(1-\cos\pi t)(1+\cos\pi t)}{t^2(1+\cos\pi t)}$$

$$=\pi^2\lim_{t\to0+}\left(\frac{\sin^2\pi t}{\pi^2t^2}\times\frac{1}{1+\cos\pi t}\right)$$

$$=\pi^2\times1\times\frac{1}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

23) [정답] ②

[해설]



원 C_1 위의 점 P에 대하여 $\overset{\frown}{PA}=\overset{\frown}{AR}$ 이므로

$\angle PQA=\angle AQR=\frac{\theta}{2}$

$\angle PRQ=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$\overline{PR}=2\sin\theta$, $\overline{QR}=2\cos\theta$

$\angle QMR = \angle QNR = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$\overline{QM} = 2\cos\theta\cos\theta$, $\overline{QN} = 2\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}$

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\times\overline{QM}\times\overline{QN}\times\sin\frac{\theta}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\times2\cos^2\theta\times2\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\theta}{2}$$
$$= 2\cos^3\theta\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

점 N에서 선분 QR에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$T(\theta) = \frac{1}{2}\times\overline{PR}\times\overline{HR}$$

$$\overline{HR} = \overline{QR} - \overline{QH} = 2\cos\theta - \overline{QN}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$= 2\cos\theta - 2\cos\theta\cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$= 2\cos\theta\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 2\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$T(\theta) = \frac{1}{2}\times2\sin\theta\times2\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}$$
$$= 2\sin\theta\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}$$

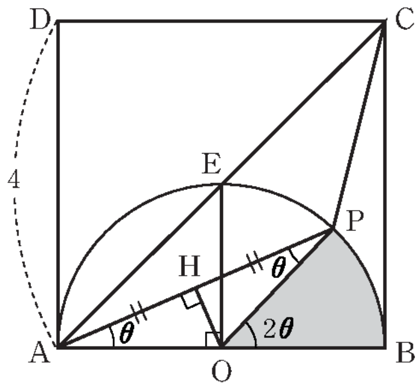
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\times S(\theta)}{T(\theta)} = \lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\times2\cos^3\theta\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\theta\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}}$$
$$= \lim_{\theta\to0+}\left(\cos^2\theta\cos\frac{\theta}{2}\right)\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2}{\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}$$
$$= 1\times\lim_{\theta\to0+}\left(2\times\frac{\theta}{\sin\theta}\times\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right) = 2$$

24) [정답] 20

[해설]

$\overline{OA} = \overline{OP} = 2$이므로 $\angle OPA = \theta$, $\angle POB = 2\theta$이다.

$\therefore\ g(\theta) = \frac{1}{2}\times2\times2\times2\theta = 4\theta$



그림에서 $\angle EOP = 90^\circ - 2\theta$, $\angle PAE = 45^\circ - \theta$

$\overline{AP} = 2\overline{AH} = 2\times2\cos\theta$

$= 4\cos\theta\ \left(\because \cos\theta = \frac{\overline{AH}}{\overline{OA}}\right)$

$\overline{AC} = 4\sqrt{2}$

$\therefore\ f(\theta) = \frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times4\cos\theta\times\sin(45^\circ-\theta)$

$= 8\sqrt{2}\cos\theta(\sin45^\circ\cos\theta - \sin\theta\cos45^\circ)$

$= 8(\cos^2\theta - \cos\theta\sin\theta)$

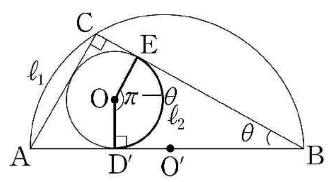
$= 8(1-\sin^2\theta-\cos\theta\sin\theta)$

$$\lim_{\theta\to0}\frac{8\sin^2\theta+8\cos\theta\sin\theta}{4\theta}$$
$$= \lim_{\theta\to0}\left(\frac{2\sin^2\theta}{\theta}+\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\theta}\right) = 2$$

$\therefore\ 10a = 20$

25) [정답] ④

[해설]



$\overline{AB}$의 중점을 O′이라 하면 $\angle AO'C = 2\theta$이므로

$l_1 = 1\times2\theta = 2\theta$

직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC} = 2\sin\theta$, $\overline{BC} = 2\cos\theta$

△ABC의 넓이를 S, 원 O의 반지름을 r라 하면

$$S = \frac{1}{2}(2+2\sin\theta+2\cos\theta)r$$
$$= \frac{1}{2}\times2\sin\theta\times2\cos\theta$$

$$\therefore\ r = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$$

$\angle DOE = \pi - \theta$이므로

$$l_2 = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}(\pi-\theta)$$

$\therefore \lim_{\theta \to 0} \frac{l_1}{l_2} = \lim_{\theta \to 0} \frac{2\theta(1+\sin\theta+\cos\theta)}{2\sin\theta\cos\theta(\pi-\theta)} = \frac{2}{\pi}$

26) [정답] ②

[해설]
사각형 AODE에서
$\angle \mathrm{DAE} = \pi - 2\theta$, $\angle \mathrm{ADO} = \angle \mathrm{AEO} = 90°$ 이므로
$\angle \mathrm{DOE} = 2\theta$
한편, O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고,
내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{CH}}} = \frac{r}{1} = r$$

$$\therefore S(\theta) = \triangle \mathrm{OED} = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta$$

$$= \frac{1}{2}\tan^2\frac{\theta}{2}\sin 2\theta = \sin\theta\cos\theta\tan^2\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin\theta\cos\theta\tan^2\frac{\theta}{2}}{\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \cos\theta \frac{\sin\theta}{\theta} \frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{4\left(\frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}$$

27) [정답] 65

[해설]
$\overline{\mathrm{AS}} = \cos\theta$이므로 삼각형 ASO의 넓이 $f(\theta)$는
$f(\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta \cdot \cos\theta$이다.
$\overline{\mathrm{AP}} = 2\cos\theta$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}} = 2\cos\theta \cdot \sin\theta$ 이고

$$\overline{\mathrm{PR}} = \overline{\mathrm{PQ}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$$

$$= 2\cos\theta \cdot \sin\theta \cdot \sin 2\theta$$

이다.
따라서 삼각형 PQR의 넓이 $g(\theta)$는

$$g(\theta) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)\overline{\mathrm{PQ}} \cdot \overline{\mathrm{PR}}$$

$$= 2\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta \cdot \sin 2\theta \cdot \cos 2\theta$$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta^2 f(\theta)}{g(\theta)} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2}\theta^2 \sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta \cdot \sin 2\theta \cdot \cos 2\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos\theta \cdot \cos 2\theta} \cdot \frac{\theta^2}{\sin\theta \cdot \sin 2\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{1}{4} \cdot \frac{\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{2\theta}{\sin 2\theta} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8}$$

따라서 $p^2 + q^2 = 64 + 1 = 65$

28) [정답] ③

[해설]
$\overline{\mathrm{P_0P_1}} = \overline{\mathrm{P_1P_2}} = \cdots = \overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n} = 2\sin\frac{\pi}{2n}$

이므로 각 정삼각형의 넓이는 $\sqrt{3}\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$이다.

따라서 $\lim_{n \to \infty} n \cdot S(n) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{3}n^2 \times \sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\pi^2$$

29) [정답] ②

[해설]
$\overline{\mathrm{AP}} = 2\cos\frac{\theta}{2}$ $\therefore S(\theta) = 4\cos^2\frac{\theta}{2} \times \sin\frac{\theta}{2}$

따라서 $\lim_{\theta \to 0} \frac{S(\theta)}{\tan\theta} = 2$

30) [정답] ④

[해설]
$\overline{\mathrm{AB}} = 2$이고 $\angle \mathrm{APB} = \frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{PB}} = 2\sin\theta$

$\angle \mathrm{QBP} = \frac{\pi}{2} - \angle \mathrm{PQB} = \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \theta$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{PB}} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 2\sin\theta \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$

$S(\theta) = \frac{1}{2} \cdot 2\sin\theta \cdot 2\sin\theta \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 2\sin^2\theta\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{2\sin^2\theta\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{\theta^2} = \lim_{\theta \to 0+} 2\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 2$$

31) [정답] 15

[해설]
$\frac{1}{2} \times 30\sin\theta \times 30\cos\theta$

$= \frac{1}{2} \times (30 + 30\sin\theta + 30\cos\theta) \times r(\theta)$

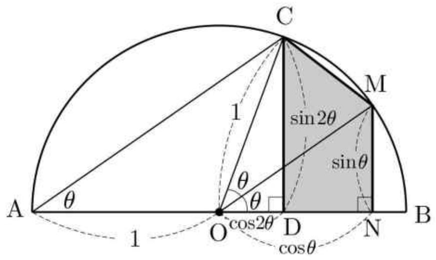
$r(\theta) = \frac{30\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta + 1}$

$\therefore \lim_{\theta \to 0+} \dfrac{r(\theta)}{\theta}$

$= \lim_{\theta \to 0+} \left(\dfrac{30\cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta + 1} \times \dfrac{\sin\theta}{\theta} \right) = 15$

32) [정답] 36

[해설]



반원의 중심을 O라 하면

$\angle \mathrm{COD} = 2\theta$, $\angle \mathrm{MON} = \theta$이고

반지름의 길이가 1이므로

$\overline{\mathrm{CD}} = \sin 2\theta$, $\overline{\mathrm{MN}} = \sin\theta$

$\overline{\mathrm{DN}} = \overline{\mathrm{ON}} - \overline{\mathrm{OD}} = \cos\theta - \cos 2\theta$

$$\therefore S(\theta) = \frac{1}{2}(\overline{\mathrm{CD}} + \overline{\mathrm{MN}})\overline{\mathrm{DN}}$$

$= \dfrac{1}{2}(\sin 2\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \cos 2\theta)$

$= \dfrac{(\sin 2\theta + \sin\theta)(\cos^2\theta - \cos^2 2\theta)}{2(\cos\theta + \cos 2\theta)}$

$= \dfrac{(\sin 2\theta + \sin\theta)(\sin^2 2\theta - \sin^2\theta)}{2(\cos\theta + \cos 2\theta)}$

$$\therefore \lim_{\theta \to +0} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$$

$= \lim_{\theta \to +0} \left(\dfrac{\sin 2\theta}{2\theta} \cdot 2 + \dfrac{\sin\theta}{\theta} \right) \left\{ \left(\dfrac{\sin 2\theta}{2\theta} \right)^2 \cdot 4 - \left(\dfrac{\sin\theta}{\theta} \right)^2 \right\}$

$\cdot \dfrac{1}{2(\cos\theta + \cos 2\theta)}$

$= (1 \cdot 2 + 1)(1^2 \cdot 4 - 1^2) \cdot \dfrac{1}{2(1+1)} = \dfrac{9}{4}$

$$\therefore a = \frac{9}{4}$$

$$\therefore 16a = 36$$

33) [정답] 32

[해설]

삼각형 OPA가 $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OP}}$인 이등변삼각형이므로

$$\angle \mathrm{PAO} = \angle \mathrm{APO} = \theta, \ \angle \mathrm{AOP} = \pi - 2\theta$$

삼각형 AOQ에서 $\angle \mathrm{AOQ} = 2\angle \mathrm{AOP}$이므로

$\angle \mathrm{AOQ} = 2\pi - 4\theta$이고 $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OQ}} = 4$

$$\therefore S(\theta) = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \sin(2\pi - 4\theta)$$

$$= 8\sin(2\pi - 4\theta)$$

$\theta - \dfrac{\pi}{4} = t$라 하면, $\theta \to \dfrac{\pi}{4}+$일 때, $t \to +$이므로

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}+} \frac{S(\theta)}{\theta - \frac{\pi}{4}} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}+} \frac{8\sin(2\pi - 4\theta)}{\theta - \frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{t \to 0+} \frac{8\sin(\pi - 4t)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0+} \frac{8\sin 4t}{t} = 32$$

따라서 $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}+} \dfrac{S(\theta)}{\theta - \frac{\pi}{4}} = 32$

34) [정답] 41

[해설]

$\triangle$BCP에서 $\overline{\mathrm{PB}} = \tan\theta$, $\overline{\mathrm{PC}} = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$\triangle$BCP의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하고, 삼각형의 넓이를 이용하면

$\dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan\theta = \dfrac{1}{2} r \left(1 + \tan\theta + \dfrac{1}{\cos\theta} \right)$

$r = \dfrac{\tan\theta}{1 + \tan\theta + \dfrac{1}{\cos\theta}} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta + 1}$

$\therefore g(\theta) = \dfrac{\pi \sin^2\theta}{(\cos\theta + \sin\theta + 1)^2}$

$\triangle$CDQ에서 $\overline{\mathrm{QD}} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta \right) = \dfrac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}$

$\therefore \overline{\mathrm{AQ}} = 1 - \dfrac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}$

또한, $\overline{\mathrm{PB}} = \tan\theta$이므로 $\overline{\mathrm{AP}} = 1 - \tan\theta$

$\therefore f(\theta) = \dfrac{1}{2}(1 - \tan\theta)\left(1 - \dfrac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta} \right)$

$= \dfrac{1}{2}(1 - \tan\theta) \cdot \dfrac{2\tan\theta}{1 + \tan\theta}$

$= \dfrac{\tan\theta(1 - \tan\theta)}{1 + \tan\theta}$

$\therefore \lim_{\theta \to +} \dfrac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)}$

$= \lim_{\theta \to +} \dfrac{\pi \sin^2\theta}{(\cos\theta + \sin\theta + 1)^2} \cdot \dfrac{1 + \tan\theta}{\theta \tan\theta (1 - \tan\theta)}$

$= \lim_{\theta \to +} \dfrac{\sin^2\theta}{\theta^2} \cdot \dfrac{\theta}{\tan\theta} \cdot \dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} \times \dfrac{\pi}{(\cos\theta + \sin\theta + 1)^2}$

$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{4}\pi$

$\therefore p = 4, \ q = 1$

$\therefore 10p + q = 41$

35) [정답] 200

[해설]

$\angle CBD=\alpha$라 하면

$\cos\alpha=\frac{3}{5}=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$이므로

$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\overline{BP}=a$라 하면 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r(\theta)}{a-r(\theta)}=\frac{\sqrt{5}}{5}$이므로

$r(\theta)=\frac{a}{1+\sqrt{5}}$

삼각형 PAB에서 사인법칙에 의해

$\frac{a}{\sin\theta}=\frac{4}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta+\alpha\right)}$이므로

$a=\frac{4\sin\theta}{\cos(\theta-\alpha)}$

$\therefore\ r(\theta)=\frac{4\sin\theta}{(1+\sqrt{5})\cos(\theta-\alpha)}$

$\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4}{1+\sqrt{5}}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{\cos(\theta-\alpha)}$

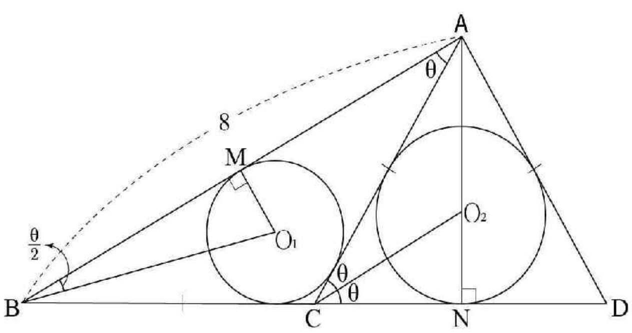
$=\frac{5}{3}(\sqrt{5}-1)\left(\because \cos\alpha=\frac{3}{5}\right)$

$\therefore\ p=-\frac{5}{3},\ q=\frac{5}{3}$

따라서 $36(p^2+q^2)=200$

36) [정답] ③

[해설]



삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_1, 삼각형 ACD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_2라 하자.

삼각형 BO_1M에서 $r_1=4\tan\frac{\theta}{2}$

삼각형 BCM에서 $\overline{BC}=\frac{4}{\cos\theta}=\overline{AC}$

삼각형 ACN에서 $\overline{CN}=\frac{4}{\cos\theta}\times\cos2\theta$

삼각형 CNO_2에서

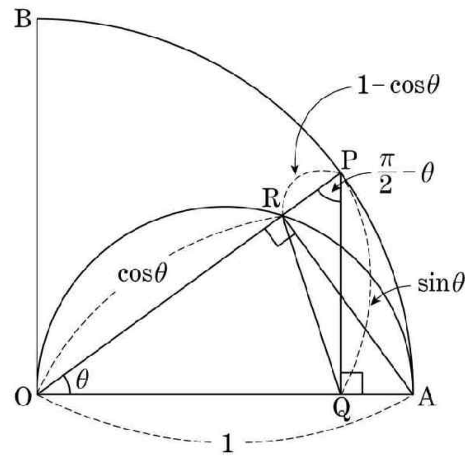
$r_2=\overline{CN}\tan\theta=\frac{4\tan\theta\cos2\theta}{\cos\theta}$

따라서

$\lim_{\theta\to0+}\frac{r_1r_2}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{16\tan\frac{\theta}{2}\tan\theta\cos2\theta}{\theta^2\cos\theta}=8$

37) [정답] ②

[해설]



$\overline{PR}=\overline{OP}-\overline{OR}=1-\cos\theta$

$\overline{PQ}=\sin\theta$

$\angle QPR=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times(1-\cos\theta)\times\sin\theta\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\frac{(1-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}{2}$

$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}{2\theta^3}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^3\theta\cos\theta}{2\theta^3(1+\cos\theta)}=\frac{1}{4}$

[다른 풀이]

(삼각형 PRQ의 넓이)

=(삼각형 POQ의 넓이)-(삼각형 ROQ의 넓이)

이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{2}\cos2\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(1-\cos\theta)$

$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}{2\theta^3}$

$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin3\theta^3(1+\cos\theta)}{2}=\frac{1}{4}$

38) [정답] ④

[해설]
내접원과 선분 AC의 접점을 M이라 하면

$$\overline{AM}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

이므로

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\frac{\overline{AM}}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}$$

또한, 선분 AD의 연장선에 점 C에서 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH}=\overline{BC}\times\sin 2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore\ \overline{CD}=\frac{\overline{CH}}{\sin 3\theta}=\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore\ S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}\times\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}\times\sin\theta$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\tan^2\frac{\theta}{2}\sin 3\theta\cos\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to+0}\{\theta\times S(\theta)\}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{1}{\cos\theta}\times\frac{4}{3}\right\}$$

$$=1^2\times1^2\times1\times1\times\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$

[다른 풀이]
내접원과 선분 AB의 접점을 E라 하면

$$\overline{AE}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\overline{BE}=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\tan\theta$$

$$\therefore\ \overline{AB}=\overline{BC}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}+\tan\theta$$

또한,

$$\overline{AC}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{BD}$$
$$=\overline{BC}:\overline{BD}$$

이므로

$$\overline{BC}\times\overline{CD}=\overline{AC}\times\overline{BD}$$

이때,

$$\overline{AC}=2\overline{AE}=\frac{2}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

이고 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin\theta}=\frac{\overline{BC}}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}+\tan\theta}{\sin 3\theta}$$

$$\therefore\ \overline{BD}=\sin\theta\left(\frac{\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}+\tan\theta}{\sin 3\theta}\right)$$

$$\therefore\ S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{CD}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{BD}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\tan\frac{\theta}{2}}\times\frac{\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}+\tan\theta}{\sin 3\theta}\times\sin^2\theta$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\times\frac{\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}+\tan\theta}{\sin 3\theta}\times\sin^2\theta$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\frac{\sin^2\theta}{\sin 3\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\{\theta\times S(\theta)\}$$

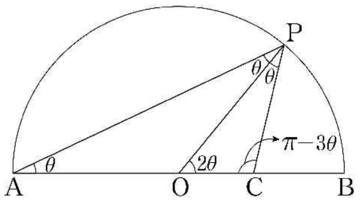
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{2\times\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\times\cos\frac{\theta}{2}\times\left(2\times\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\cos\frac{\theta}{2}+\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{1}{3}\right\}$$

$$=2\times1\times1\times(2\times1\times1\times1+0)\times1\times1\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{4}{3}$$

39) [정답] ④

[해설]



삼각형 POC에서 사인법칙을 적용하면

$\overline{\mathrm{OC}}=\dfrac{\sin\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\overline{\mathrm{OC}}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

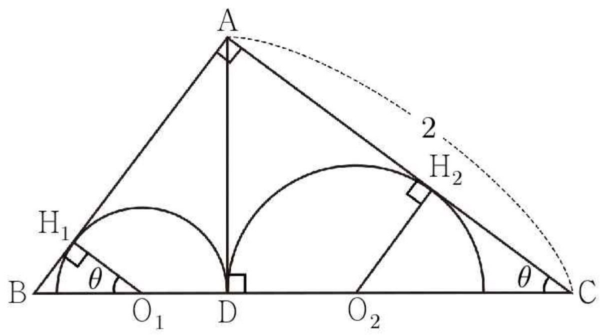
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

40) [정답] 15

[해설]

그림과 같이 삼각형 ABD의 내부의 반원의 중심을 O_1, 반지름의 길이를 r라 하고, 삼각형 ADC의 내부의 반원의 중심을 O_2, 반지름의 길이를 R라 하자.

두 반원이 두 선분 AB, AC와 접하는 점을 각각 H_1, H_2라 하자.



삼각형 ADC에서

$\overline{\mathrm{AH}_2}=\overline{\mathrm{AD}}=2\sin\theta$, $\overline{\mathrm{CH}_2}=2(1-\sin\theta)$이므로

$R=2\tan\theta(1-\sin\theta)$

$\therefore\ T(\theta)=2\pi(1-\sin\theta)^2\tan^2\theta$

삼각형 ABD에서

$\overline{\mathrm{AH}_1}=\overline{\mathrm{AD}}=2\sin\theta$, $\overline{\mathrm{AB}}=2\tan\theta$,

$\overline{\mathrm{BH}_1}=2(\tan\theta-\sin\theta)$

$\angle\mathrm{BO}_1\mathrm{H}_1=\theta$이므로

$r=\dfrac{2(\tan\theta-\sin\theta)}{\tan\theta}=2(1-\cos\theta)$

$\therefore\ S(\theta)=2\pi(1-\cos\theta)^2$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2\times T(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\pi(1-\cos\theta)^2}{\theta^2\times2\pi(1-\sin^2)^2\tan\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{\theta^2(1-\sin\theta)^2\tan^2\theta(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin 4}{\theta^4}\times\frac{\theta^2}{\tan^2\theta}\times\frac{1}{(1-\sin\theta)^2(1+\cos\theta)^2}\right\}$$

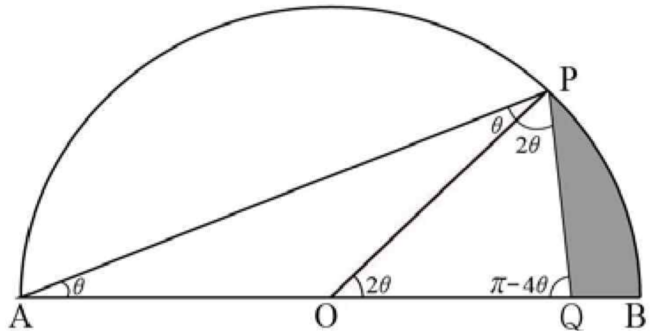
$$=1\times1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

따라서 $60\alpha=15$

41) [정답] 18

[해설]

반원의 중심을 O라 하자.



$\overline{\mathrm{OP}}=6$, $\angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{OPA}=\theta$

$\angle\mathrm{POQ}=\angle\mathrm{OPQ}=2\theta$, $\angle\mathrm{OQP}=\pi-4\theta$

삼각형 OQP에서 $\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin 2\theta}=\dfrac{6}{\sin(\pi-4\theta)}$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{6\sin 2\theta}{\sin 4\theta}=\dfrac{6\sin 2\theta}{2\sin 2\theta\cos 2\theta}=\dfrac{3}{\cos 2\theta}$

삼각형 OQP의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times6\times\dfrac{3}{\cos 2\theta}\times\sin 2\theta=\dfrac{9\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

$S(\theta)=$(부채꼴 OBP의 넓이)

$-$(삼각형 OQP의 넓이)

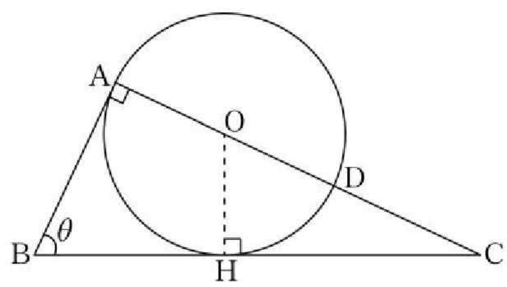
$$=\frac{1}{2}\times6^2\times2\theta-\frac{9\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$$

$$=36\theta-\frac{9\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{36\theta-\dfrac{9\sin 2\theta}{\cos 2\theta}}{\theta}=18$

42) [정답] 25

[해설]



선분 AD의 중점 O는 원의 중심이고, 점 O에서 선분 BC에

내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AB}=\overline{BH}=\cos\theta$이므로 $\overline{CH}=1-\cos\theta$

$\overline{CA}=\sin\theta$이고 $\overline{CH}^2=\overline{CA}\times\overline{CD}$이므로

$(1-\cos\theta)^2=\sin\theta\times\overline{CD}$, $\overline{CD}=\dfrac{(1-\cos\theta)^2}{\sin\theta}$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{CD}}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin\theta}}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{\theta^3\sin\theta(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos^2\theta)^2}{\theta^3\sin\theta(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\times\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}\right)=\frac{1}{4}$$

따라서 $k=\dfrac{1}{4}$이므로 $100k=25$

43) [정답] ①

[해설]

$\overline{OP}=\overline{OA}=1$이므로

$\overline{OH}=\cos\theta$, $\overline{AH}=1-\overline{OH}=1-\cos\theta$

$\angle HAQ=\dfrac{\pi}{4}$이므로 삼각형 AQH는 직각이등변삼각형이다.

즉, $\overline{QH}=\overline{AH}=1-\cos\theta$이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{QH}=\frac{(1-\cos\theta)^2}{2}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)^2}{2\theta^4}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos^2\theta)^2}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^4x}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$$

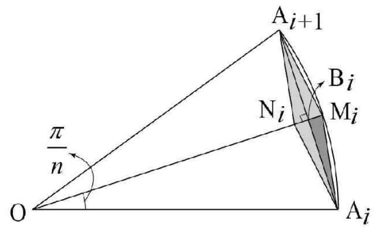
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^4\times\frac{1}{2(1+\cos\theta)^2}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^4\times\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2(1+\cos\theta)^2}$$

$$=1^4\times\frac{1}{2(1+1)^2}=\frac{1}{8}$$

44) [정답] ①

[해설]



선분 M_iN_i의 중점을 B_i라 하면

$\angle A_iOM_i=\dfrac{\pi}{n}$이므로

$\overline{A_iB_i}=\sin\dfrac{\pi}{n}$, $\overline{B_iM_i}=1-\overline{OB_i}=1-\cos\dfrac{\pi}{n}$

$A_iM_iA_{i+1}N_i=4\times\triangle A_iM_iB_i$

$$=4\times\frac{1}{2}\times\sin\frac{\pi}{n}\times\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$S_n=n\times\square A_iM_iA_{i+1}N_i=2n\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$n^2\times S_n=2n^3\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

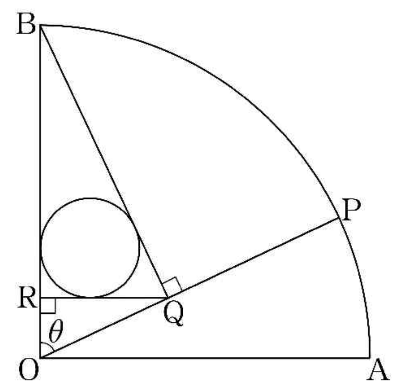
$$=2\pi^3\times\frac{\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\cos^2\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi^3}{n^3}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$=2\pi^3\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\times\frac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}\times\frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{n}}\right\}$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2\times S_n)=\pi^3$

45) [정답] ①

[해설]



$\angle BOQ=\theta$, $\overline{OB}=1$이고 $\angle OQB=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\overline{BQ}=\sin\theta$

또, $\angle RQB=\dfrac{\pi}{2}-\angle QBR=\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\theta$,

$\overline{BQ}=\sin\theta$이고 $\angle BRQ=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\overline{BR}=\sin^2\theta$, $\overline{RQ}=\sin\theta\cos\theta$

삼각형 BRQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BR}\times\overline{RQ}=\frac{1}{2}\times\sin^2\theta\times\sin\theta\cos\theta$ ……㉠

삼각형 BRQ에 내접하는 원의 성질을 이용하여

삼각형의 넓이를 구하면

$\frac{1}{2}\times r(\theta)\times(\sin\theta+\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta)$ ……㉡

㉠, ㉡에 의해서

$$r(\theta)=\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\theta^2(1+\sin\theta+\cos\theta)}$$

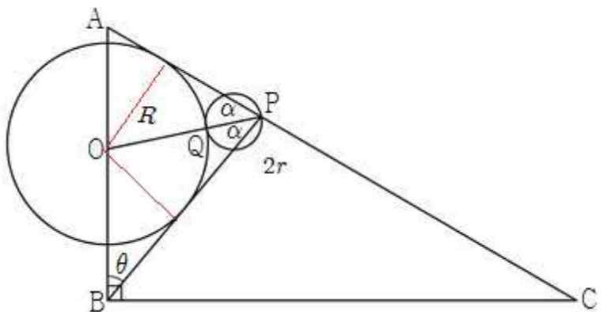
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$$

$$=1\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

46) [정답] ⑤

[해설]



두 원의 반지름의 길이를 각각 $R(\theta)$, $r(\theta)(R(\theta)>r(\theta))$이라 하자.

$$\overline{AB}=\overline{AO}+\overline{OB}=\frac{2}{\sqrt{3}}R(\theta)+\frac{R(\theta)}{\sin\theta}=2$$

$$R(\theta)=\frac{2\sqrt{3}\sin\theta}{2\sin\theta+\sqrt{3}}$$

$\therefore\ f(\theta)=\pi R(\theta)^2$

$\angle APO=\angle BPO=\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}$이므로

$$\overline{OP}=\frac{R(\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$\overline{PQ}=\overline{OP}-\overline{OQ}$

$$=\frac{R(\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}-R(\theta)=\left(\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}\right)R(\theta)$$

$$r(\theta)=\frac{\overline{PQ}}{2}=\left(\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}\right)R(\theta)$$

$$\therefore\ g(\theta)=\pi\left(\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2R(\theta)^2$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\pi\frac{R(\theta)^2+r(\theta)^2}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\pi\frac{R(\theta)^2}{\theta^2}\left\{1+\left(\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2\right\}$$

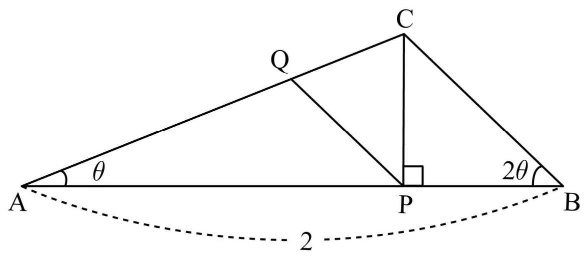
$$=\lim_{\theta\to0+}\pi\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2\sin\theta+\sqrt{3}}\right)^2\left\{1+\left(\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2\right\}$$

$$=\pi\times1^2\times2^2\times\left\{1+\left(\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{19-4\sqrt{3}}{3}\pi$$

47) [정답] ①

[해설]



선분 AC가 원의 지름이므로 $\angle APC=\frac{\pi}{2}$ 이다.

$\overline{AP}=a$, $\overline{AQ}=b$라 하자.

두 삼각형 APC와 CPB는 직각삼각형이므로

$a\tan\theta=\overline{CP}=(2-a)\tan2\theta$

$$a=\frac{2\tan2\theta}{\tan\theta+\tan2\theta}$$

삼각형 ABC와 삼각형 APQ는 닮음이므로

$\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{AQ}:\overline{AC}$

$a:2=b:a\sec\theta$

$$b=\frac{1}{2}a^2\sec\theta$$

삼각형 APQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때,

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times a\times\frac{1}{2}a^2\sec\theta\times\sin\theta$$
$$=\frac{1}{4}\times a^3\times\tan\theta$$
$$=\frac{1}{4}\times\left(\frac{2\tan2\theta}{\tan\theta+\tan2\theta}\right)^3\times\tan\theta$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{4}\times\left(\frac{\frac{2\tan2\theta}{2\theta}\times2}{\frac{\tan\theta}{\theta}+\frac{\tan2\theta}{2\theta}\times2}\right)^3\times\frac{\tan\theta}{\theta}\right\}=\frac{16}{27}$$

48) [정답] 9

[해설]

삼각형 BPQ와 삼각형 BCQ는 서로 합동이므로

$\angle\mathrm{QBC}=\frac{\theta}{2}$ 이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QC}}=3\tan\frac{\theta}{2}$

직각삼각형 RPQ에서 $\angle\mathrm{RQP}=\theta$ 이므로

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PQ}}\tan\theta=3\tan\frac{\theta}{2}\tan\theta$

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PR}}$$
$$=\frac{1}{2}\times3\tan\frac{\theta}{2}\times3\tan\frac{\theta}{2}\tan\theta$$
$$=\frac{9}{2}\tan^2\frac{\theta}{2}\tan\theta$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{8f(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{36\tan^2\frac{\theta}{2}\tan\theta}{\theta^3}=9$$

49) [정답] 20

[해설]

$\overline{\mathrm{OD}}=k\,(k>0)$으로 놓으면

(i) $\overline{\mathrm{GD}}=k\tan\frac{\theta}{3}$이므로

$$f(\theta)=\left(k\tan\frac{\theta}{3}\right)^2=k^2\tan^2\frac{\theta}{3}$$

(ii) $\overline{\mathrm{OP}}=k\cos\theta$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OP}}\tan\frac{2\theta}{3}=k\cos\theta\tan\frac{2\theta}{3}$ 이므로

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times k\cos\theta\times k\cos\theta\tan\frac{2\theta}{3}$$
$$=\frac{k^2}{2}\times\cos^2\theta\tan\frac{2\theta}{3}$$

(i), (ii)에서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta\times g(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{k^2\tan^2\frac{\theta}{3}}{\theta\times\frac{k^2}{2}\times\cos^2\theta\tan\frac{2\theta}{3}}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\tan^2\frac{\theta}{3}}{\theta\times\cos^2\theta\tan\frac{2\theta}{3}}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\tan^2\frac{\theta}{3}}{9\times\frac{\theta^2}{9}}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\cos^2\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{3}{2}\times\frac{2\theta}{3}}{\tan\frac{2\theta}{3}}$$
$$=\frac{2}{9}\times1\times\frac{3}{2}=\frac{1}{3}$$

따라서 $k=\frac{1}{3}$이므로 $60k=60\times\frac{1}{3}=20$

50) [정답] ①

[해설]

$\overline{\mathrm{OP}}$와 $\overline{\mathrm{QH}}$의 교점을 R이라 하면 $\angle\mathrm{PHQ}=\theta$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}\perp\overline{\mathrm{QH}}$이다. 삼각비에 의해 $\overline{\mathrm{HR}}=\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\sin2\theta$,

$\overline{\mathrm{OR}}=\cos^2\theta$이다.

따라서 삼각형 OHR의 넓이는

$$\overline{\mathrm{OR}}\cdot\overline{\mathrm{RH}}\cdot\frac{1}{2}=\cos^2\theta\cdot\frac{1}{2}\sin2\theta\cdot\frac{1}{2}=S_1$$

피타고라스 정리에 의해 $\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{1-(\cos^2\theta)^2}$ 이므로

삼각형 ORQ의 넓이는

$$\overline{\mathrm{OR}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}\cdot\frac{1}{2}=\cos^2\theta\cdot\sqrt{1-\cos^4\theta}\cdot\frac{1}{2}=S_2$$

구하는 극한값은

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\cos^2\theta\cdot\frac{1}{2}\sin2\theta\cdot\frac{1}{2}+\cos^2\theta\cdot\sqrt{1-\cos^4\theta}\cdot\frac{1}{2}}{\theta}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

51) [정답] ②

[해설]

$\angle BPA = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle QBR = \alpha$라 하면

$3\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta,\quad \alpha = \frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{3}$

$\overline{BP} = \sin\theta$이므로

$\overline{PQ} = \sin\theta\tan 2\alpha$

$\overline{PR} = \sin\theta\tan\alpha$

이다. 따라서

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\times\overline{BP}\times\overline{PQ} - \frac{1}{2}\times\overline{BP}\times\overline{PR}$$
$$= \frac{1}{2}\sin^2\theta(\tan 2\alpha - \tan\alpha)$$
$$= \frac{1}{2}\sin^2\theta\left\{\tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\theta\right) - \tan\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{3}\right)\right\}$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 = 1$$

이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2} = \frac{1}{2}\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\theta\right) - \tan\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{3}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

52) [정답] ②

[해설]

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 1,\ \angle A = \theta$ 이므로

$\overline{AC} = \sec\theta,\ \overline{BC} = \tan\theta$

이때 $\overline{AD} = k$라 하면 선분 CD가 $\angle C$를 이등분하므로

$\overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AC} : \overline{BC}$

$k : (1-k) = \sec\theta : \tan\theta,$

$$k = \frac{\sec\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{1}{1+\sin\theta}$$

즉, $\overline{AD} = \frac{1}{1+\sin\theta}$ 이므로

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1+\sin\theta}\right)^2\times\theta = \frac{\theta}{2(1+\sin\theta)^2}$$

한편 $\overline{CE} = \overline{AC} - \overline{AE} = \overline{AC} - \overline{AD}$에서

$$\overline{CE} = \sec\theta - \frac{1}{1+\sin\theta} = \frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$$

이므로

$$T(\theta) = \frac{1}{2}\times\overline{CE}\times\overline{BC}\times\sin(\angle C)$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}\times\tan\theta\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$= \frac{(1+\sin\theta-\cos\theta)\sin\theta}{2(1+\sin\theta)\cos\theta}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+}\frac{\left\{\dfrac{\theta}{2(1+\sin\theta)^2}\right\}^2}{\dfrac{(1+\sin\theta-\cos\theta)\sin\theta}{2(1+\sin\theta)\cos\theta}}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)^3}\times\frac{\theta}{\sin\theta}\times\frac{\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}\right\}$$

이때

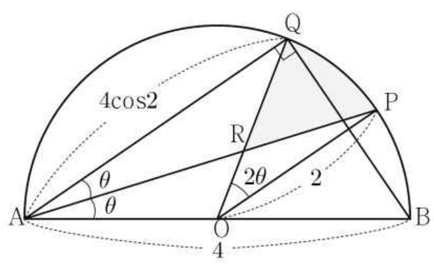
$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\theta}+\dfrac{1-\cos\theta}{\theta}}$$
$$= \lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\theta}+\dfrac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}}$$
$$= \frac{1}{1+0} = 1$$

이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{(1+0)^3}\times 1\times 1 = \frac{1}{2}$$

53) [정답] ⑤

[해설]



부채꼴 OPQ는 반지름의 길이가 2이고
중심각의 크기가 2θ이므로 부채꼴 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2^2\times 2\theta = 4\theta$

직각삼각형 ABQ에서 $\overline{AQ} = 4\cos 2\theta$

삼각형 AOQ에서 $\overline{AO} = \overline{OQ} = 2$, $\overline{RQ} = 2 - \overline{OR}$
선분 AR는 각 QAO의 이등분선이므로
$\overline{AO} : \overline{AQ} = \overline{OR} : \overline{RQ}$

$2 : 4\cos 2\theta = \overline{OR} : (2 - \overline{OR})$

$\overline{OR} = \dfrac{2}{2\cos 2\theta + 1}$

삼각형 OPR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{OR}\times\sin 2\theta = \dfrac{2\sin 2\theta}{2\cos 2\theta + 1}$

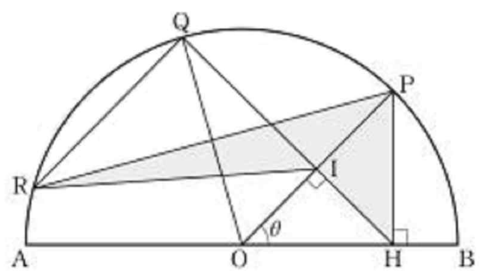
호 PQ와 두 선분 QR, RP로 둘러싸인 부분은
부채꼴 OPQ에서 삼각형 OPR를 제외한 부분이므로

$S(\theta) = 4\theta - \dfrac{2\sin 2\theta}{2\cos 2\theta + 1}$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0+}\left\{4 - \frac{2\sin 2\theta}{\theta(2\cos 2\theta + 1)}\right\}$$
$$= 4 - 4\times\frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

54) [정답] ②

[해설]



$\angle OHP = \frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{OH} = \overline{OP}\cos\theta = \cos\theta$

$\angle HIO = \frac{\pi}{2}$이므로

$$\overline{OI} = \overline{OH}\cos\theta = \cos^2\theta$$
$$\overline{IH} = \overline{OH}\sin\theta = \cos\theta\sin\theta$$
$$\overline{IP} = \overline{OP} - \overline{OI}$$
$$= 1 - \cos^2\theta$$
$$= \sin^2\theta$$

삼각형 IHP의 넓이 $T(\theta)$는

$$T(\theta) = \frac{1}{2}\times\overline{IH}\times\overline{IP}$$
$$= \frac{1}{2}\times(\cos\theta\sin\theta)\times\sin^2\theta$$
$$= \frac{1}{2}\sin^3\theta\cos\theta$$

직선 OP와 직선 RQ가 평행이므로 삼각형 RIP의 높이는 $\overline{QI}$이다.

$\overline{OQ} = 1$, $\angle OIQ = \frac{\pi}{2}$이므로 직각삼각형 OIQ에서

$$\overline{QI}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{OI}^2$$
$$\overline{QI} = \sqrt{1 - (\cos^2\theta)^2}$$
$$= \sqrt{(1 - \cos^2\theta)(1 + \cos^2\theta)}$$
$$= \sin\theta\sqrt{1 + \cos^2\theta}\ \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

삼각형 RIP의 넓이 $S(\theta)$는

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\times\overline{IP}\times\overline{QI}$$
$$= \frac{1}{2}\times\sin^2\theta\times\left(\sin\theta\sqrt{1 + \cos^2\theta}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sin^3\theta\sqrt{1 + \cos^2\theta}$$

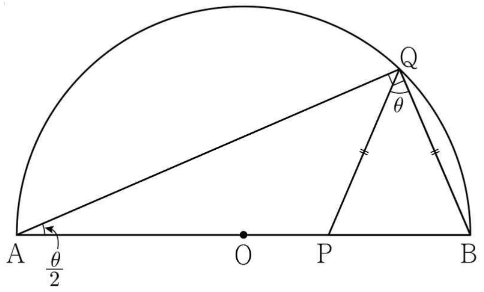
$$S(\theta) - T(\theta) = \frac{1}{2}\sin^3\theta\left(\sqrt{1 + \cos^2\theta} - \cos\theta\right)$$

따라서

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta) - T(\theta)}{\theta^3}$$
$$= \lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{1}{2}\sin^3\theta\left(\sqrt{1 + \cos^2\theta} - \cos\theta\right)}{\theta^3}$$
$$= \lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\times\left(\sqrt{1 + \cos^2\theta} - \cos\theta\right)\right\}$$
$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

55) [정답] ②

[해설]



삼각형 QPB는 이등변삼각형이므로

$$\angle QBP=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$$

삼각형 ABQ는 $\angle Q=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$$\angle QAB=\frac{\theta}{2}$$

$$\overline{QB}=\overline{QP}=2\sin\frac{\theta}{2}$$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{QB}\times\overline{QP}\times\sin\theta$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta}{\theta^3}$$

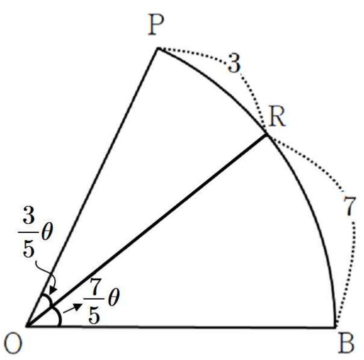
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{2\times\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{1}{4}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\right\}$$

$$=2\times1\times\frac{1}{4}\times1$$

$$=\frac{1}{2}$$

56) [정답] 40

[해설]



위 그림과 같이 부채꼴의 호의 길이와 중심각은 비례하므로

$\angle BOR=\frac{7}{10}\cdot2\theta=\frac{7}{5}\theta$에서 부채꼴 OBR의 넓이는

$$\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{7}{5}\theta=\frac{7}{10}\theta \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{AH}=\cos\theta$에서 $\overline{AP}=2\cos\theta$이므로 부채꼴 APQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\cdot4\cos^2\theta\cdot\theta=2\theta\cos^2\theta \qquad \cdots\cdots ㉡$$

삼각형 AOH의 넓이는 $\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta$ …… ㉢

점 O, T, Q로 둘러싸인 넓이를 W라 하면

점 H, O, Q, P로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$S_1+W=(㉡-㉢)$$

부채꼴 OBR의 넓이는 $S_2+W=$㉠이므로

$$S_1-S_2=\left(2\theta\cos^2\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)-\frac{7}{10}\theta$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S_1-S_2}{\overline{OH}}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\theta\cos^2\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta-\frac{7}{10}\theta}{\sin\theta}$$

$(\because\overline{OH}=\sin\theta)$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(2\cos^2\theta-\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{7}{10}\right)$$

$$\left(\because\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta}{\sin\theta}=1\right)$$

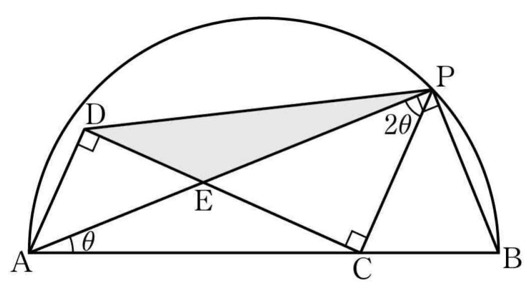
$$=\frac{4}{5}$$

$$\therefore a=\frac{4}{5}$$

$$\therefore\ 50a=40$$

57) [정답] ④

[해설]



두 직각삼각형 PCE와 ADE는 닮음이므로

$\overline{EP}:\overline{EA}=\overline{EC}:\overline{ED}$에서 $\overline{EP}\times\overline{ED}=\overline{EA}\times\overline{EC}$

$\angle DEP=\frac{\pi}{2}+2\theta$이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{EP}\times\overline{ED}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)$$

$=\frac{1}{2}\times\overline{EA}\times\overline{EC}\times\cos2\theta$

직각삼각형 APB에서 $\overline{AP}=2\cos\theta$

삼각형 ACP에서 $\angle ACP=\pi-3\theta$이므로

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AC}}{\sin2\theta}=\frac{\overline{AP}}{\sin(\pi-3\theta)}$에서

$$\overline{AC}=\frac{2\sin2\theta\cos\theta}{\sin3\theta}$$

삼각형 ACE에서 $\angle ACE=\frac{\pi}{2}-3\theta$, $\angle CEA=\frac{\pi}{2}+2\theta$이고

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{EC}}{\sin\theta}=\frac{\overline{EA}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)}=\frac{\overline{AC}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)}$$이므로

$$\overline{EC}=\frac{\overline{AC}\sin\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)}=\frac{2\sin2\theta\sin\theta\cos\theta}{\sin3\theta\cos2\theta}$$

$$\overline{EA}=\frac{\overline{AC}\sin\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)}=\frac{2\sin2\theta\cos\theta\cos3\theta}{\sin3\theta\cos2\theta}$$

$$S(\theta)=\frac{2\sin^2 2\theta\sin\theta\cos^2\theta\cos3\theta}{\sin^2 3\theta\cos2\theta}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$$

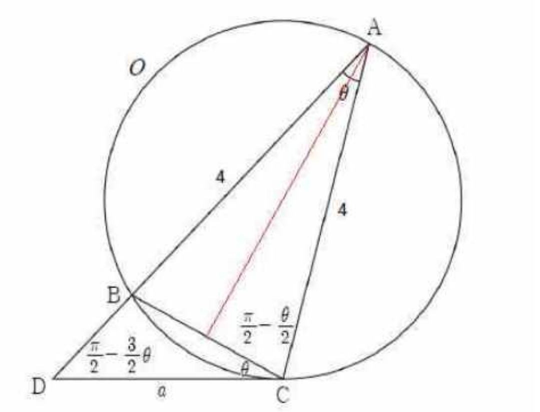
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^2 2\theta\sin\theta\cos^2\theta\cos3\theta}{\theta\sin^2 3\theta\cos2\theta}$$

$$=\frac{8}{9}\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)^2\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\left(\frac{3\theta}{\sin3\theta}\right)^2\left(\frac{\cos^2\theta\cos3\theta}{\cos2\theta}\right)$$

$$=\frac{8}{9}$$

58) [정답] 8

[해설]



이등변삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=8\sin\frac{\theta}{2}$

삼각형 ACD에 사인법칙에 의하면

$$\frac{\overline{CD}}{\sin\theta}=\frac{4}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\theta\right)},\ \overline{CD}=\frac{4\sin\theta}{\cos\frac{3}{2}\theta}$$

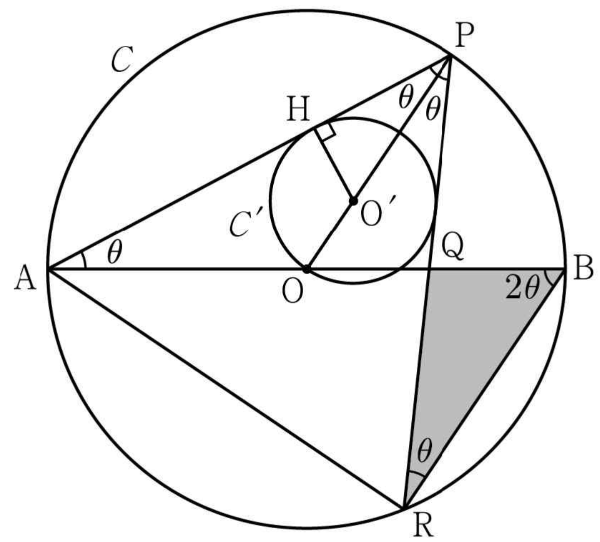
$$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin\theta=\frac{16\sin\frac{\theta}{2}\sin^2\theta}{\cos\frac{3}{2}\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=8$$

59) [정답] 120

[해설]

원 C'의 중심을 O′, 원 C'과 선분 PA가 만나는 점을 H라 하자.



삼각형 OPA는 이등변삼각형이므로 $\angle OPA=\theta$

$r(\theta)=\overline{O'O}=\overline{O'H}$이므로 $\overline{PO'}=2-r(\theta)$

삼각형 O′PH에서 $\angle PHO'=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\sin\theta=\frac{\overline{O'H}}{\overline{PO'}}=\frac{r(\theta)}{2-r(\theta)}$$

$$r(\theta)=\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

$\angle PRB$는 호 BP의 원주각이므로 $\angle PRB=\theta$

$\angle RBA$는 호 AR의 원주각이므로 $\angle RBA=2\theta$

선분 AB가 원 C의 지름이므로 삼각형

ARB는 직각삼각형이고 $\overline{RB}=4\cos2\theta$이다.

삼각형 QRB 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{RB}}{\sin(\angle BQR)}=\frac{\overline{RQ}}{\sin(\angle RBQ)}$$

$$\frac{4\cos2\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{RQ}}{\sin2\theta},\ \overline{RQ}=\frac{4\sin2\theta\cos2\theta}{\sin3\theta}$$

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{RQ}\times\overline{RB}\times\sin\theta$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{r(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{8\sin\theta\sin2\theta(\cos2\theta)^2}{\sin3\theta}}{\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\sin2\theta(\cos2\theta)^2(1+\sin\theta)}{\sin3\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{4\sin2\theta}{\sin3\theta}\times(\cos2\theta)^2(1+\sin\theta)\right\}$$

$$=4\times\frac{2}{3}\times1^2\times(1+0)=\frac{8}{3}$$

따라서 $a=\frac{8}{3}$이므로 $45a=120$

60) [정답] 60

[해설]

부채꼴 AFE에서 $\angle EAF=2\theta$이므로

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta=\theta$

직각삼각형 ABG에서 $\overline{BG}=2\tan\theta$이므로

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BG}-\frac{1}{2}\times1^2\times\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times2\times2\tan\theta-\frac{\theta}{2}$$

$$=2\tan\theta-\frac{\theta}{2}$$

따라서

$$40\times\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=40\times\lim_{\theta\to0+}\frac{2\tan\theta-\frac{\theta}{2}}{\theta}$$

$$=40\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{2\tan\theta}{\theta}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=40\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{2}{\cos\theta}\times\frac{\sin\theta}{\theta}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=40\times\left(\frac{2}{1}\times1-\frac{1}{2}\right)=60$$

61) [정답] 15

[해설]

직각삼각형 BMH에서 $\overline{MB}=1$

$\sin\theta=\frac{\overline{MH}}{\overline{MB}}$에서

$\overline{MH}=\overline{MB}\times\sin\theta=\sin\theta$

삼각형 DMC에서

$\overline{MD}=\overline{MH}=\sin\theta$

$\overline{MC}=1$,

$$\angle DMC=\pi-\angle DMB$$

$$=\pi-\angle AMB$$

$$=\pi-\frac{\pi-\theta}{2}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\text{ 이므로}$$

$$\triangle DMC=\frac{1}{2}\times\overline{MD}\times\overline{MC}\times\sin(\angle DMC)$$

$$=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times1\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}$$

삼각형 HMC에서

MH$=\sin\theta$

MC$=1$

HMC$=\pi-\angle HMB$

$$=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}+\theta\text{ 이므로}$$

$$\triangle HMC=\frac{1}{2}\times\overline{MH}\times\overline{MC}\times\sin(\angle HMC)$$

$$=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times1\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

$$\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

이때 $f(\theta)-g(\theta)$

$$=\triangle DMC-\triangle HMC$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

$$=\frac{\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)}{2}\text{ 이므로}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)}{2\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}{2\theta^3\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\theta\right)}{2\theta^3\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\left(\sin^2\theta-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{2\theta^3\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\left\{\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2-\frac{1}{4}\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\right\}\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\times 1\times\left(1^2-\frac{1}{4}\times 1^2\right)\times\frac{1}{1+1}$$

$$=\frac{3}{16}$$

따라서 $a=\frac{3}{16}$이므로

$80a=80\times\frac{3}{16}=15$

62) [정답] 23

[해설]

중심각과 원주각의 성질에 의하여 $\angle \mathrm{AOP}=\theta$이므로

$\angle \mathrm{ABP}=\frac{\theta}{2}$

삼각형 OBR에서

$\angle \mathrm{BRO}=\pi-\left(2\theta+\frac{\theta}{2}\right)=\pi-\frac{5\theta}{2}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\sin\left(\pi-\frac{5\theta}{2}\right)}=\frac{\overline{\mathrm{OR}}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$\frac{1}{\sin\frac{5\theta}{2}}=\frac{\overline{\mathrm{OR}}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ 에서 $\overline{\mathrm{OR}}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}$

(ⅰ) 삼각형 POR에서 $\angle \mathrm{POR}=\pi-3\theta$ 이므로

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin(\pi-3\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\times\sin 3\theta$$

$$=\frac{\sin\frac{\theta}{2}\sin 3\theta}{2\sin\frac{5\theta}{2}}$$

(ⅱ) $g(\theta)$는 부채꼴 QOB의 넓이에서 삼각형 OBR의 넓이를 뺀 것이므로

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times 1^2\times 2\theta-\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin 2\theta$$

$$g(\theta)=\theta-\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\times\sin 2\theta$$

$$g(\theta)=\theta-\frac{\sin\frac{\theta}{2}\sin 2\theta}{2\sin\frac{5\theta}{2}}$$

(ⅲ) 이등변삼각형 POQ에서 점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$$\overline{\mathrm{OH'}}=\overline{\mathrm{OP}}\times\cos\left(\frac{\pi-3\theta}{2}\right)$$

$$=1\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$=\sin\frac{3\theta}{2}$$

두 삼각형 OQH′, RQH가 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{OH'}}:\overline{\mathrm{RH}}=\overline{\mathrm{OQ}}:\overline{\mathrm{RQ}}=1:(1-\overline{\mathrm{OR}})$

$$\overline{\mathrm{RH}}=\overline{\mathrm{OH'}}\times(1-\overline{\mathrm{OR}})=\sin\frac{3\theta}{2}\times\left(1-\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\right)$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$f(\theta)+g(\theta)=\theta+\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{5\theta}{2}}\times(\sin 3\theta-\sin 2\theta)$ 이고,

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}}{\frac{\sin\frac{5\theta}{2}}{\theta}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{1}{5}$이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{\mathrm{RH}}}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta+\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{5\theta}{2}}\times(\sin 3\theta-\sin 2\theta)}{\sin\frac{3\theta}{2}\times\left(1-\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{1+\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{5\theta}{2}}\times\left(\frac{\sin 3\theta}{\theta}-\frac{\sin 2\theta}{\theta}\right)}{\frac{\sin\frac{3\theta}{2}}{\theta}\times\left(1-\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\right)}$$

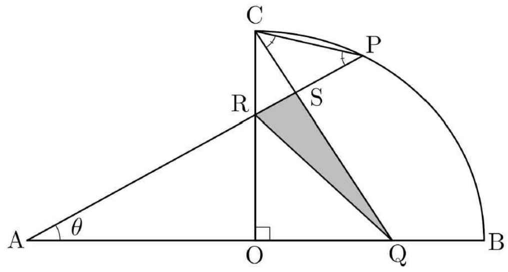
$$=\frac{1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times(3-2)}{\frac{3}{2}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)}$$

$$=\frac{\frac{11}{10}}{\frac{6}{5}}=\frac{11}{12}$$

따라서 $p+q=12+11=23$

63) [정답] ④

[해설]



$\triangle$OAP는 이등변삼각형이므로 $\angle OPA=\theta$이고

$\angle POQ=2\theta$이다.

$\triangle$OAP에 한 점O에서 마주보는 변CP에 수선의 발을 점 M이라 두자.

$\angle COQ=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle COP=\frac{\pi}{2}-2\theta$이다.

이등변삼각형의 꼭짓각은 밑변을 수직이등분하므로

$\angle MOP=\frac{\pi}{4}-\theta$ ($\angle MOP=\angle COM=\angle ROS$····· ㉠)이고

$\triangle$OPS의 한 외각인 $\angle PSM=\frac{\pi}{4}$이다.

이때 $\angle CSP$는 $\angle PSM$의 2배이므로 $\frac{\pi}{2}$이다.

$\overline{AO}=2$이므로 $\overline{RO}=2\tan\theta$

$\overline{CO}$의 길이는 $\overline{CO}-\overline{RO}=2-2\tan\theta$

$\triangle$AOR과 $\triangle$CSR은

$\angle ORA=\angle SRC$($\because$ 맞꼭짓각)

$\angle AOR=\angle CSR=90^\circ$

이므로 AA닮음이다.

따라서 $\angle RAO=\angle RCS=\theta$이므로 $\overline{RS}=(2-2\tan\theta)\sin\theta$

□SOQR의 마주보고 있는 두 각인 $\angle ROQ$와 $\angle RSQ$의 합이 π이므로 □SOQR은 원에 내접하는 사각형이다. 따라서

$\angle ROS$와 $\angle RQS$는 원주각으로 같고 $\frac{\pi}{4}-\theta$ ($\because$ ㉠)이다.

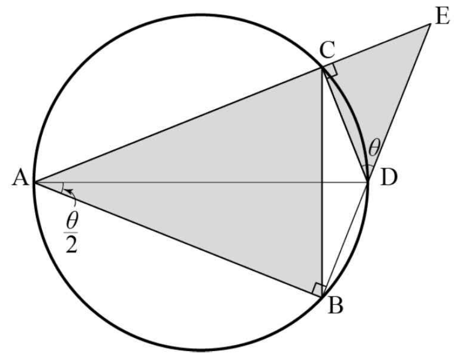
$$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot(1-\tan\theta)^2\cdot\sin^2\theta\cdot\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{2^2\cdot(1-\tan\theta)^2\cdot\sin^2\theta}{2\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\cdot\theta^2}$$

$=2$

64) [정답] ②

[해설]



$\angle ABD=\frac{\pi}{2}$이므로 선분 AD는 원의 지름이다.

$\angle ECD=\frac{\pi}{2}$, $\angle DAB=\angle CAD=\frac{\theta}{2}$

$\overline{AB}=10\cos\frac{\theta}{2}$, $\overline{CD}=\overline{BD}=10\sin\frac{\theta}{2}$

$\angle AEB=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 $\angle CDE=\theta$

$\overline{CE}=10\sin\frac{\theta}{2}\tan\theta$

따라서 $f(\theta)=\frac{1}{2}\times\left(10\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin\theta$,

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times 10\sin\frac{\theta}{2}\times 10\sin\frac{\theta}{2}\tan\theta$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{50\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\theta}{\theta^2\times 50\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\times\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\theta}{\theta^2\times\sin\theta}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{1\times\frac{1}{4}\times\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\times\frac{\theta}{\sin\theta}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}$$

65) [정답] ①

[해설]

그림에서 $\overline{OA}=\overline{OP}=$(반지름)$=1$이므로 $\triangle$AOP는 이등변삼각형이다.

즉, $\angle APO=\theta$

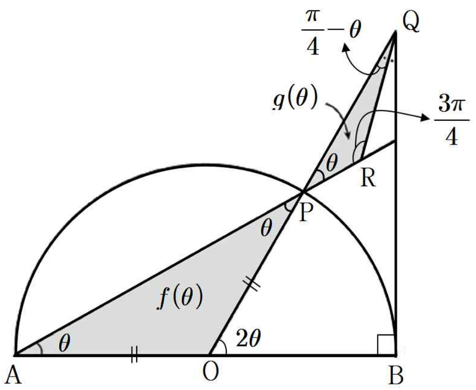
또, $\angle AOP=\pi-2\theta$이므로 $\angle QOB=2\theta$

$\triangle QOB$가 $\angle B$가 직각인 직각삼각형이므로 $\angle OQB=\dfrac{\pi}{2}-2\theta$

따라서 $\angle PQQ=\dfrac{1}{2}\angle OQB=\dfrac{\pi}{4}-\theta$

$\triangle QPR$에서 $\angle APO=\angle QPR=\theta$ (맞꼭지각)이고,

$\angle PQQ=\dfrac{\pi}{4}-\theta$이므로 $\angle QRP=\dfrac{3}{4}\pi$



$\triangle AOP$의 넓이 $f(\theta)$는

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AO}\cdot\overline{OP}\cdot\sin(\angle AOP)$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin(\pi-2\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\sin2\theta \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$\triangle QOB$에서 $\overline{OB}=1$이므로 $\overline{OQ}=\dfrac{1}{\cos2\theta}$이므로

$$\overline{QP}=\overline{OQ}-\overline{OP}=\frac{1}{\cos2\theta}-1=\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}$$

따라서 $\triangle PQR$에서 사인법칙을 적용하면

$$\frac{\dfrac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}}{\sin\dfrac{3\pi}{4}}=\frac{\overline{QR}}{\sin\theta},$$

$$\therefore \overline{QR}=\sqrt{2}\sin\theta\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)$$

즉, $\triangle PQR$의 넓이 $g(\theta)$는

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{QR}\cdot\sin(\angle PQR)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)$$

$$\cdot\sqrt{2}\sin\theta\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)^2\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)^2\sin\theta\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta-\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)^2(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta) \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\dfrac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)^2(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)}{\theta^4\sin2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\dfrac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)^2(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)}{2\theta^4\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\dfrac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)^2}{2\theta^4}\cdot\frac{(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\dfrac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)^2}{2\theta^4}\cdot(1-\tan\theta)$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\dfrac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)^2}{2\theta^4}\cdot\lim_{\theta\to0+}(1-\tan\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{1}{\cos2\theta}\right)^2\left(\frac{1-\cos2\theta}{\theta^2}\right)^2\cdot1$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{1}{\cos2\theta}\right)^2\left(\frac{\sin^2 2\theta}{\theta^2}\times\frac{1}{1+\cos2\theta}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times\left(2^2\times\frac{1}{1+1}\right)^2$$

$$=2$$

66) [정답] ③

[해설]

$$\overline{AP}=2\cos\theta,\ \overline{AQ}=\overline{AP}\times\frac{\sin\dfrac{\theta}{3}}{\sin\dfrac{4}{3}\theta}=\frac{2\cos\theta\sin\dfrac{\theta}{3}}{\sin\dfrac{4}{3}\theta}$$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{AP}\,\overline{AQ}\sin\theta=\frac{2\cos\theta\sin\dfrac{\theta}{3}\sin\theta}{\sin\dfrac{4}{3}\theta}$$

$$l(\theta)=2\sin\theta$$

$$\therefore\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{l(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\dfrac{\theta}{3}}{\sin\dfrac{4}{3}\theta}=\frac{1}{4}$$

67) [정답] 11

[해설]

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\angle AMQ = 2 \times \angle ABQ = 2 \times 2\theta = 4\theta$

이므로

(부채꼴 AMQ의 넓이)$= \frac{1}{2} \times 1^2 \times 4\theta = 2\theta$,

(삼각형 MBQ의 넓이)$= \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin(\pi - 4\theta) = \frac{1}{2}\sin 4\theta$

삼각형 RAB에서 $\angle ARB = \pi - 3\theta$이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{2}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{\overline{BR}}{\sin\theta},$$

즉

$$\overline{BR} = \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

이므로

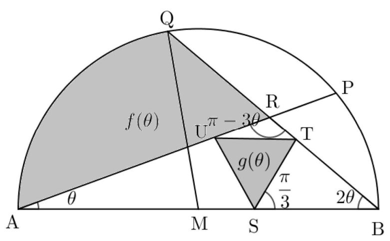
$$\begin{aligned}(\text{삼각형 RAB의 넓이}) &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BR} \times \sin 2\theta \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} \times \sin 2\theta \\ &= \frac{2\sin\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}\end{aligned}$$

그러므로

$$f(\theta) = 2\theta + \frac{1}{2}\sin 4\theta - \frac{2\sin\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta} &= \lim_{\theta \to 0+} \left(2 + 2 \times \frac{\sin 4\theta}{4\theta} - \frac{4 \times \frac{\sin\theta}{\theta} \times \frac{\sin 2\theta}{2\theta}}{3 \times \frac{\sin 3\theta}{3\theta}} \right) \\ &= 2 + 2 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$



정삼각형 STU의 한 변의 길이를 a라 하면 삼각형 TSB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin 2\theta} = \frac{\overline{BT}}{\sin\frac{\pi}{3}},$$

즉

$$\overline{BT} = \frac{\sqrt{3}a}{2\sin 2\theta}$$

두 삼각형 RUT, RAB가 서로 닮음이므로

$\overline{RT} : \overline{RB} = \overline{UT} : \overline{AB}$

$$\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} - \frac{\sqrt{3}a}{2\sin 2\theta} : \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} = a : 2$$

$$\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}a = \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 2\theta}a$$

$$\left(\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} + \frac{\sqrt{3}}{\sin 2\theta}\right)a = \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

$$\frac{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta}{\sin 2\theta\sin 3\theta}a = \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

$$a = \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta} \times \frac{\sin 2\theta\sin 3\theta}{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta}$$

이때

$$g(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

이고

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \to 0+} \frac{a}{\theta} &= \lim_{\theta \to 0+} \left(\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta} \times \frac{\sin 2\theta\sin 3\theta}{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta} \times \frac{1}{\theta} \right) \\ &= \lim_{\theta \to 0+} \left(\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta} \times \frac{\frac{\sin 2\theta\sin 3\theta}{\theta^2}}{\frac{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta}{\theta}} \right) \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{2 \times 3}{0 + 3\sqrt{3}} \\ &= \frac{8}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \lim_{\theta \to 0+} \left(\frac{a}{\theta}\right)^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)^2 \\ &= \frac{16\sqrt{3}}{27} \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

따라서 ㉠, ㉡에서

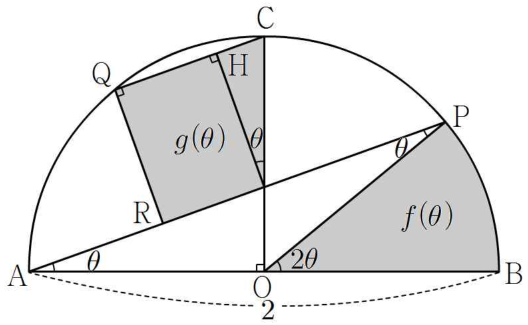
$$\begin{aligned}\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)} &= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{g(\theta)}{\theta^2}}{\frac{f(\theta)}{\theta}} \\ &= \frac{\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2}}{\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta}} \\ &= \frac{\frac{16\sqrt{3}}{27}}{\frac{8}{3}} \\ &= \frac{2}{9}\sqrt{3}\end{aligned}$$

이므로

$p + q = 9 + 2 = 11$

68) [정답] ②

[해설]



$\angle\text{OAP}=\angle\text{OPA}=\theta$이므로 $\angle\text{BOP}=2\theta$

$$\therefore\ f(\theta)=\frac{1}{2}\sin2\theta$$

또한, $\overline{\text{OA}}=1$에서 $\overline{\text{OS}}=\tan\theta$이므로

$$\overline{\text{CS}}=1-\tan\theta$$

이때, $\angle\text{BOP}=\angle\text{COQ}=2\theta$이고 삼각형 OCQ는 이등변삼각형이므로

$$\angle\text{SCQ}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

또한, $\angle\text{CSR}=\theta+\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle\text{QRS}=\frac{\pi}{2}$

따라서 점 S에서 변 CQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle\text{CSH}=\theta$$

이므로

$$\overline{\text{SH}}=\overline{\text{RQ}}=(1-\tan\theta)\cos\theta$$

$$\overline{\text{CH}}=(1-\tan\theta)\sin\theta$$

이고

$$\overline{\text{CQ}}=\overline{\text{BP}}=2\sin\theta$$

$$\begin{aligned}\overline{\text{RS}}=\overline{\text{QH}}&=\overline{\text{CQ}}-\overline{\text{CH}}\\&=2\sin\theta-(\sin\theta-\sin\theta\tan\theta)\\&=\sin\theta+\sin\theta\tan\theta\\&=\sin\theta(1+\tan\theta)\end{aligned}$$

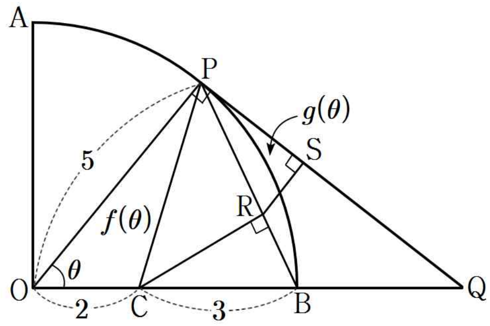
$$\begin{aligned}\therefore\ g(\theta)&=\frac{1}{2}\times(\overline{\text{CQ}}+\overline{\text{RS}})\times\overline{\text{QR}}\\&=\frac{1}{2}\sin\theta(3+\tan\theta)\times(1-\tan\theta)\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3f(\theta)-2g(\theta)&=\frac{3}{2}\sin2\theta-\sin\theta\cos\theta(3+\tan\theta)(1-\tan\theta)\\&=3\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta(3+\tan\theta)(1-\tan\theta)\\&=\sin\theta\cos\theta\tan\theta(\tan\theta+2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\cos\theta\tan\theta(\tan\theta+2)}{\theta^2}\\&=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\times\cos\theta\times(\tan\theta+2)\right\}\\&=1\times1\times1\times2=2\end{aligned}$$

69) [정답] 49

[해설]



$\overline{\text{OC}}=2,\ \overline{\text{OP}}=5$이므로

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times2\times5\sin\theta=5\sin\theta$ …… ㉠

삼각형 OBP는 이등변삼각형이므로

$\overline{\text{BP}}=2\times5\sin\frac{\theta}{2}=10\sin\frac{\theta}{2}$

$\angle\text{OBP}=\frac{\pi-\theta}{2}$이므로 $\angle\text{BCR}=\frac{\theta}{2}$이고 $\overline{\text{BR}}=3\sin\frac{\theta}{2}$

$\therefore\ \overline{\text{PR}}=\overline{\text{BP}}-\overline{\text{BR}}=7\sin\frac{\theta}{2}$ …… ㉡

$\angle\text{OPQ}=\frac{\pi}{2}$이고 $\angle\text{OPB}=\frac{\pi-\theta}{2}$이므로

$\angle\text{RPS}=\frac{\theta}{2}$ …… ㉢

$\therefore\ \overline{\text{PS}}=\overline{\text{PR}}\cos\frac{\theta}{2}=7\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣에서

$$\begin{aligned}g(\theta)&=\frac{1}{2}\times7\sin\frac{\theta}{2}\times7\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\theta}{2}\\&=\frac{49}{2}\sin^3\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$ …… ㉤

㉠, ㉤에서

$$\begin{aligned}&80\times\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}\\&=80\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{49}{2}\sin^3\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\theta^2\times5\sin\theta}\\&=8\times49\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^3\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\theta^2\times\sin\theta}\\&=8\times49\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^3\times\cos\frac{\theta}{2}\times\frac{1}{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)}\times\frac{1}{8}\\&=8\times49\times\frac{1}{8}=49\end{aligned}$$

70) [정답] ④

[해설]

$\overline{AP}=\overline{PC}$이므로 삼각형 OPC에서

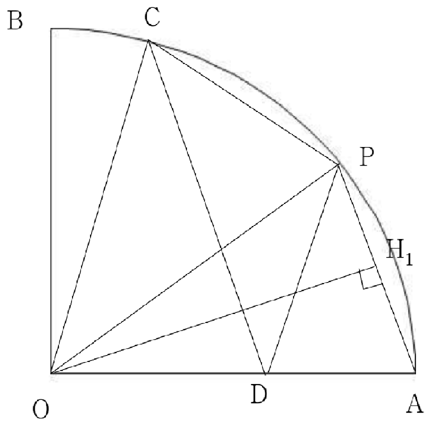
$\angle COP=\angle POA=\theta$

또, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면

$\angle H_1OA=\dfrac{\theta}{2}$

이므로

$\overline{AP}=2\overline{AH_1}=2\times\overline{OA}\sin\dfrac{\theta}{2}=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ …… ㉠



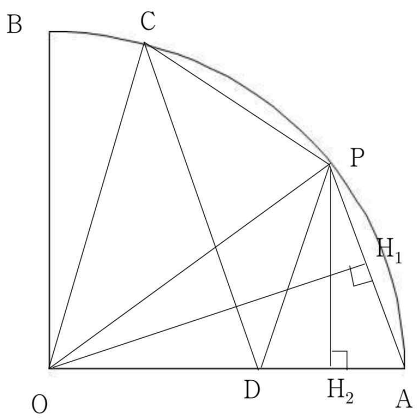
한편, 점 P에서 선분 DA에 내린 수선의 발을 H_2라 하면

$\angle APD=2\angle APH_2$

$=2\times\{\pi-(\angle PH_2A+\angle H_2AP)\}$

$=2\times\left[\pi-\left\{\dfrac{\pi}{2}+\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}\right)\right\}\right]$

$=\theta$



또한

$\angle APO=\angle OPC=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$

이므로

$\angle DPC=\angle APO+\angle OPC-\angle APD$

$=\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}\right)+\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}\right)-\theta$

$=\pi-2\theta$ ……㉡

㉠과 ㉡으로부터

$f(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{PD}\times\overline{PC}\times\sin(\pi-2\theta)$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(2\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2\times\sin2\theta$

$=2\times\left(\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2\times\sin2\theta$

또, ㉠으로부터 삼각형 APD에서

$\overline{DA}=2\overline{AP}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}\right)$

$=2\times2\sin\dfrac{\theta}{2}\times\sin\dfrac{\theta}{2}$

$=4\left(\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2$

이때, 두 삼각형 OAP, DAE는 닮음이고 $\overline{OA}=1$,

$\overline{DA}=4\left(\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2$이므로

$g(\theta)=\triangle DAE$

$=4^2\times\left(\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^4\times\triangle OAP$

$=16\times\left(\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^4\times\dfrac{1}{2}\sin\theta$

$=8\times\left(\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^4\times\sin\theta$

따라서,

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{8\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\sin\theta}{\theta^2\times2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin\theta}{\theta^2\times\sin2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\times\left(\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\dfrac{\sin\theta}{\theta}\times\dfrac{1}{4}}{\dfrac{\sin2\theta}{2\theta}\times2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

71) [정답] 50

[해설]

직각삼각형 AHP에서 $\angle APH=\theta$이므로

$\angle HAP=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

한편, 삼각형 OPA는

$OP=OA=1$

인 이등변삼각형이므로

$\angle AOP=\pi-2\times\angle HAP$

$=\pi-2\times\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=2\theta$

그러므로

$\overline{AH}=1-\overline{OH}$

$=1-\overline{OP}\cos 2\theta$

$=1-\cos 2\theta \cdots\cdots$㉠

또,

$\angle HAQ=\frac{1}{2}\angle HAP$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$

이므로

$\overline{HQ}=\overline{AH}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$=(1-\cos 2\theta)\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cdots\cdots$㉡

㉠과 ㉡에서

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{HQ}$

$=\frac{1}{2}\times(1-\cos 2\theta)^2\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin^4 2\theta}{(1+\cos 2\theta)^2}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

그러므로

$\lim_{\theta\to 0-}\frac{f(\theta)}{\theta^4}$

$=\frac{1}{2}\times 16\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^4\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{(1+\cos 2\theta)^2}$

$\times\lim_{\theta\to 0+}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\times 16\times 1^2\times\frac{1}{4}\times 1$

$=2\cdots\cdots$㉢

한편, 이등변삼각형 OPA에서 점 O에서 선분 PA에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 ㉠에서 $\angle H'OP=\theta$이므로

$\overline{AP}=2\overline{PH'}$

$=2\times\overline{OP}\times\sin\theta$

$=2\sin\theta$

삼각형 AOP에서 각의 이등분선이 선분 OP와 만나는 점이 R이므로

$\overline{AO}:\overline{AP}=\overline{OR}:\overline{RP}$

$1:2\sin\theta=\mathrm{OR}:1-\mathrm{OR}$

$2\sin\theta\times\overline{OR}=1-\overline{OR}$

$\overline{OR}=\frac{1}{1+2\sin\theta}\cdots\cdots$㉣

또,

$\overline{OS}=\overline{OA}\tan(\angle SAO)$

$=1\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\ \cdots-(a)$

㉣과 ㉤에서

$g(\theta)=\triangle OSP-\triangle OSR$

$=\frac{1}{2}\times\overline{OS}\times\overline{OP}\times\sin(\angle POS)$

$-\frac{1}{2}\times\overline{OS}\times\overline{OR}\times\sin(\angle POS)$

$=\frac{1}{2}\times\overline{OS}\times\sin(\angle POS)\times(\overline{OP}-\overline{OR})$

$=\frac{1}{2}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$

$\times\left(1-\frac{1}{2\sin\theta+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$

$\times\frac{2\sin\theta}{2\sin\theta+1}$

그러므로

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta}$

$=\frac{1}{2}\times\lim_{\theta\to 0+}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\lim_{\theta\to 0+}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$

$\times 2\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{2\sin\theta+1}$

$=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times 2\times 1\times 1=1\cdots\cdots$㉥

따라서, ㉢과 ㉥을 이용하면

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta^3\times g(\theta)}{f(\theta)}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{g(\theta)}{\theta}}{\frac{f(\theta)}{\theta^4}}$

$=\frac{1}{2}$

이므로

$100k=100\times\frac{1}{2}=50$

72) [정답] 20

[해설]

$\angle RBO=\angle BRQ=\frac{1}{2}\angle BOQ=\theta$이므로

$\angle OST=2\theta,\ \angle OTS=\pi-3\theta$

삼각형 OBS에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{OS}}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin(\pi-2\theta)}$, $\overline{OS}=\dfrac{\sin\theta}{\sin2\theta}$

삼각형 OBT에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{OT}}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin(\pi-3\theta)}$, $\overline{OT}=\dfrac{\sin\theta}{\sin3\theta}$

$\angle ROA=2\times\angle RBA=2\theta$, $\angle TOR=\pi-4\theta$

$f(\theta)=$(부채꼴 ORA의 넓이)+(삼각형 OTR의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times1^2\times2\theta+\dfrac{1}{2}\times1\times\overline{OT}\times\sin(\pi-4\theta)$

$=\theta+\dfrac{\sin\theta\sin4\theta}{2\sin3\theta}$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left(1+\frac{4\times\dfrac{\sin\theta}{\theta}\times\dfrac{\sin4\theta}{4\theta}}{6\times\dfrac{\sin3\theta}{3\theta}}\right)$$

$$=1+\frac{4\times1\times1}{6\times1}=\frac{5}{3}$$

$g(\theta)=$(부채꼴 OPQ의 넓이)$-$ (삼각형 OST의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times1^2\times\theta-\dfrac{1}{2}\times\overline{OS}\times\overline{OT}\times\sin\theta$

$=\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\sin^3\theta}{2\sin2\theta\sin3\theta}$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{2}-\frac{\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)^3}{12\times\dfrac{\sin2\theta}{2\theta}\times\dfrac{\sin3\theta}{3\theta}}\right\}$$

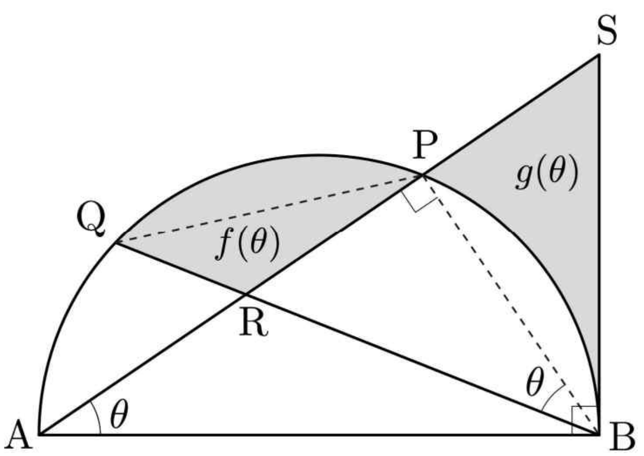
$$=\frac{1}{2}-\frac{1^3}{12\times1\times1}=\frac{5}{12}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\dfrac{g(\theta)}{\theta}}{\dfrac{f(\theta)}{\theta}}=\frac{1}{4}$$

따라서 $a=\dfrac{1}{4}$이므로 $80a=80\times\dfrac{1}{4}=20$

73) [정답] 4

[해설]



호 PB와 호 PQ의 길이가 서로 같으므로 원주각의 성질에 의하여 $\angle PAB=\angle QBP=\theta$

$\angle ABS=\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$이고 $\angle PBA=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로 $\angle SBP=\theta$

두 삼각형 SPB, RPB는 서로 합동이므로 두 삼각형 SPB, RPB의 넓이가 서로 같다.

선분 PQ와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이와 선분 PB와 호 PB로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같다.

그러므로 $f(\theta)+g(\theta)$는 삼각형 QBP의 넓이와 같다.

$\overline{PB}=\overline{PQ}=2\sin\theta$

$f(\theta)+g(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{PB}\times\overline{PQ}\times\sin(\pi-2\theta)$

$=\dfrac{1}{2}\times(2\sin\theta)^2\times\sin2\theta$

$=2\sin^2\theta\sin2\theta$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^2\theta\sin2\theta}{\theta^3}$$

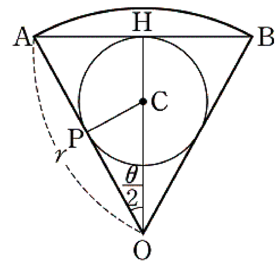
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(2\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\frac{\sin2\theta}{\theta}\right)$$

$$=2\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times2\right)$$

$=2\times1^2\times2=4$

74) [정답] ③

[해설]



오른쪽 그림에서

$\angle AOH=\dfrac{\theta}{2}$이므로

$\overline{AH}=r\sin\dfrac{\theta}{2}$

$\therefore\ \overline{AP}=r\sin\dfrac{\theta}{2}$

$\overline{OP}=r-r\sin\dfrac{\theta}{2}$

따라서, 원 C의 반지름의 길이는

$\overline{CP}=\overline{OP}\cdot\tan\dfrac{\theta}{2}$

$=\left(r-r\sin\dfrac{\theta}{2}\right)\tan\dfrac{\theta}{2}$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0}\frac{l_2}{l_1}=\lim_{\theta\to0}\frac{2\pi\left(r-r\sin\dfrac{\theta}{2}\right)\tan\dfrac{\theta}{2}}{r\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{2\pi\left(1-\sin\dfrac{\theta}{2}\right)\tan\dfrac{\theta}{2}}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0}2\pi\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$

$=\pi$

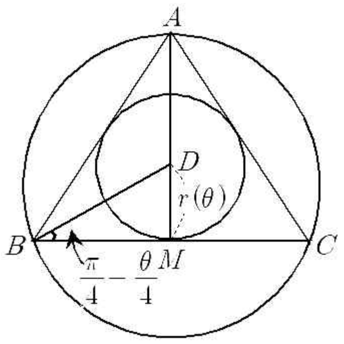
75) [정답] 17

[해설]
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2\cdot1$$

$\therefore\ \overline{BC}=2\sin\theta$

따라서 선분 BC의 중점을 M이라 하면 $\overline{BM}=\sin\theta$이다.



또, 내접원의 중심을 D라고 하면 위 그림의 직각삼각형 BMD에서

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)=\frac{r(\theta)}{\sin\theta}$$

$$\therefore r(\theta)=\sin\theta\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)$$

이때, $\pi-\theta=t$로 놓으면 $\theta\to\pi-$ 일 때 $t\to0+$ 이고

$\sin\theta=\sin(\pi-t)=\sin t,\ \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)=\tan\frac{t}{4}$ 이다.

$$\therefore\ (\text{주어진 식})=\lim_{t\to0+}\frac{\sin t\times\tan\frac{t}{4}}{t^2}$$

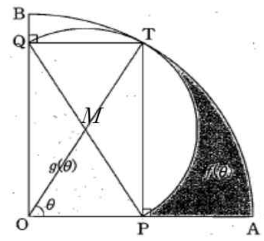
$$=\frac{1}{4}\lim_{t\to0+}\frac{\sin t}{t}\times\lim_{t\to0+}\frac{\tan\frac{t}{4}}{\frac{t}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}\times1\times1=\frac{1}{4}$$

$p^2+q^2=16+1=17$

76) [정답] 50

[해설]
점 T의 좌표를 $\mathrm{T}(2\cos\theta,\,2\sin\theta)$라 하고, 직사각형 OPTQ에서 두 대각선 OT, PQ의 교점을 M이라 하자.
$f(\theta)=$(부채꼴 OAT의 넓이) – (삼각형 OPM의 넓이)–(부채꼴 MPT의 넓이)



$$=\frac{1}{2}\times2^2\times\theta-\frac{1}{2}\times2\cos\theta\times1\times\sin\theta-\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta$$

$=\theta-\cos\theta\sin\theta$

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times2\cos\theta\times2\sin\theta=2\cos\theta\sin\theta$

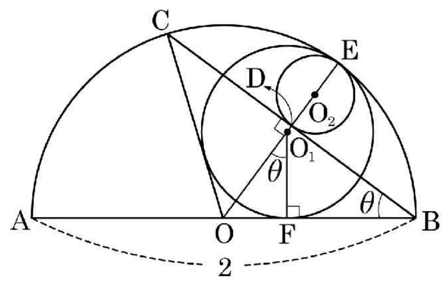
$$\therefore\ a=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta+f(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\theta-\cos\theta\sin\theta}{2\cos\theta\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\theta}{\cos\theta\sin\theta}-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ 100a=50$

77) [정답] 17

[해설]
점 $\mathrm{O_1}$에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 F, 직선 $\mathrm{O_1O_2}$와 현 BC, 호 BC의 교점을 각각 D, E라 하자.



$\overline{\mathrm{O_1F}}=\overline{\mathrm{O_1E}}=f(\theta),\ \angle\mathrm{OO_1F}=\theta$

$$\overline{\mathrm{OE}}=\overline{\mathrm{OO_1}}+\overline{\mathrm{O_1E}}=\frac{f(\theta)}{\cos\theta}+f(\theta)=1$$

$$f(\theta)=\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$\overline{\mathrm{OD}}=\sin\theta,\ \overline{\mathrm{ED}}=1-\sin\theta$ 이므로

$$g(\theta)=\frac{1-\sin\theta}{2}$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{g(\theta)}{\{f(\theta)\}^2}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\frac{1-\sin\theta}{2}}{\left(\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{(1-\sin\theta)(1+\cos\theta)^2}{2\cos^2\theta}$$

$\frac{\pi}{2}-\theta=t$라 하면, $\theta=\frac{\pi}{2}-t$이고

$\sin\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t,\ \cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$

$\theta\to\frac{\pi}{2}-$일때 $t\to0+$이다.

$$(\text{주어진 식})=\lim_{t\to0+}\frac{(1-\cos t)(1+\sin t)^2}{2\sin^2 t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{(1-\cos t)(1+\sin t)^2}{2(1-\cos^2 t)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{(1+\sin t)^2}{2(1+\cos t)}$$
$$=\frac{1}{4}=\frac{q}{p}$$

따라서 $p=4,\ q=1$이므로 $p^2+q^2=17$이다.

78) [정답] 17

[해설]

$\angle QOB=\theta$이므로 (동위각) $\overline{OR}=\overline{OB}\cos\theta=\cos\theta$

$\overline{QR}=1-\overline{OQ}=1-\cos\theta$에서

$$\frac{S(\theta)}{\theta^4}=\frac{\pi\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2}{\theta^4}$$

$\frac{1-\cos\theta}{2}=\sin^2\frac{\theta}{2}$ 이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi\sin^4\frac{\theta}{2}}{\theta^4}=\lim_{\theta\to0+}\pi\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}\right)^4=\frac{1}{16}\pi$$

$p+q=17$

79) [정답] ②

[해설]

부채꼴 OAP의 넓이 $f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\theta=\frac{1}{2}\theta$

삼각형 OPQ에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\frac{1}{2}\times(\sin\theta+\cos\theta+1)\times r=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times\cos\theta$$

$r=\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta+1}$이므로

삼각형 OPQ에 내접하는 원의 넓이

$g(\theta)=\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin\theta+\cos\theta+1)^2}\pi$이다.

따라서

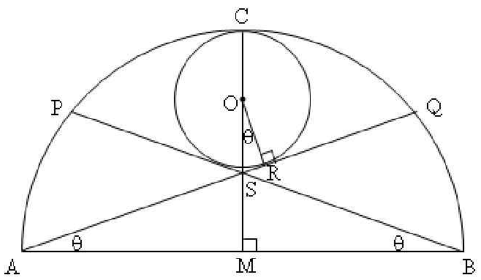
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta\cdot f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\pi\sin^2\theta\cos^2\theta}{\theta^2(\sin\theta+\cos\theta+1)^2}$$
$$=\frac{\pi}{2}$$

80) [정답] 8

[해설]

다음과 같이 선분 AB의 중점을 M, 두 선분 AQ, BP의 교점을 S라 하자.

또, 내접하는 원의 중심을 O, 이 원과 반원의 교점을 C라 하고, 이 원과 선분 AQ의 접점을 R라 하자.



위의 그림에서 맞꼭지각의 성질에 의해

$\angle ASM=\angle OSR$

이고, $\angle AMS=\angle ORS=90^\circ$이므로 $\angle SOR=\angle SAM=\theta$이다.

이 때, $\overline{CO}+\overline{OS}+\overline{SM}=\overline{CM}=\overline{AM}=1$이므로

$$r(\theta)+r(\theta)\times\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta=1$$
$$\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)r(\theta)=1-\tan\theta$$
$$\therefore\ r(\theta)=\frac{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{1}{\cos\theta}}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{1+\cos\theta}$$
$$=\frac{-\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{1+\cos\theta}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{1+\cos\theta}$$

한편, $\frac{\pi}{4}-\theta=t$라 하면 $\theta\to\frac{\pi}{4}-$일 때 $t\to0+$이므로

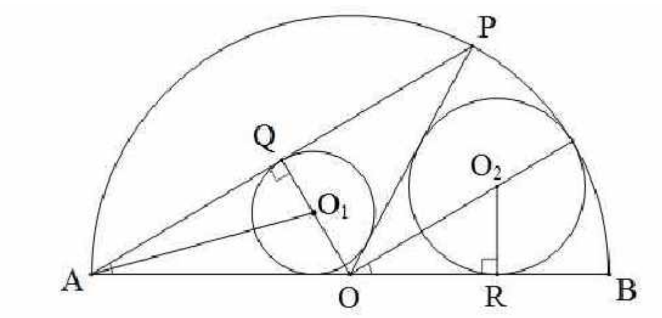
$$\therefore\ \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{(1+\cos\theta)\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$$
$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\sqrt{2}}{(1+\cos\theta)}\times\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\sqrt{2}}{(1+\cos\theta)}\times\lim_{t\to0+}\frac{\sin t}{t}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\times1=\frac{2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{2}(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2$$

$\therefore\ p=2,\ q=-2$

$\therefore\ p^2+q^2=8$

81) [정답] 4

[해설]



그림과 같이 원 O_1과 직선 AP와의 접점을 점 Q, 원 O_2와 직선 AB와의 접점을 점 R라 하고, 원 O_1의 반지름을 r_1, 원 O_2의 반지름을 r_2라 하자.

삼각형 QAO에서 $\overline{AQ}=\cos\theta$, $\angle QAO_1=\frac{\theta}{2}$이므로

$r_1=\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}$이다.

$\therefore\ f(\theta)=\pi\cos^2\theta\tan^2\frac{\theta}{2}$

부채꼴 OBP에서 $\angle O_2OR=\theta$이므로

$\overline{OO_2}=\frac{r_2}{\sin\theta}$이다.

$\frac{r_2}{\sin\theta}+r_2=1$이므로 $r_2=\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$이다.

$\therefore\ g(\theta)=\frac{\pi\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}$

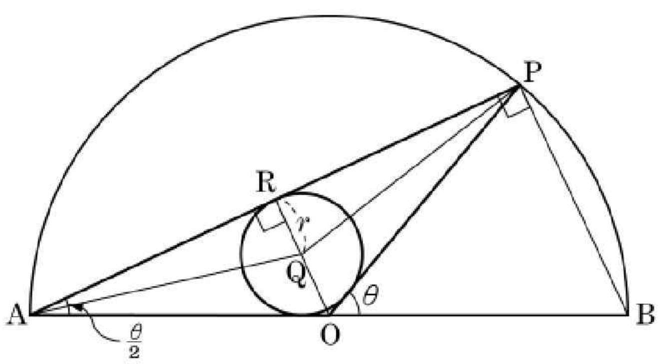
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\pi\sin^2\theta}{\pi\cos^2\theta\tan^2\frac{\theta}{2}(1+\sin^2\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\frac{\frac{\theta^2}{4}}{\tan^2\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{4}{\cos^2\theta\,(1+\sin\theta)^2}=4$$

82) [정답] ④

[해설]

삼각형 PAO에 내접하는 원의 중심을 Q, 반지름의 길이를 r라 하자.



$\triangle AOP=\triangle AOQ+\triangle OPQ+\triangle PAQ$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AO}\cdot\overline{OP}\cdot\sin(\pi-\theta)=\frac{r}{2}\cdot\overline{AO}+\frac{r}{2}\cdot\overline{OP}+\frac{r}{2}\cdot\overline{PA}$$

$\therefore\ \sin\theta=r(2+\overline{PA})$ …… ㉠

직각삼각형 ABP에서

$\overline{PA}=\overline{AB}\cos\frac{\theta}{2}=2\cos\frac{\theta}{2}$ …… ㉡이므로

㉠, ㉡에 의하여 $r=\frac{\sin\theta}{2+2\cos\frac{\theta}{2}}$이다.

따라서 $f(\theta)=\pi r^2=\frac{\pi\sin^2\theta}{\left(2+2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\frac{\pi}{\left(2+2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi}{\left(2+2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$=1^2\cdot\frac{\pi}{16}=\frac{\pi}{16}$$

[다른 풀이]

삼각형 PAO에 내접하는 원의 중심을 Q라 하고 원 Q와 변 AP의 접점을 R라 하면 $\overline{OR}\perp\overline{AP}$, $\overline{QR}\perp\overline{AP}$이다.

삼각형 AOR에서 $\angle RAO=\frac{\theta}{2}$이므로

$\overline{AR}=\overline{OA}\cos\frac{\theta}{2}=\cos\frac{\theta}{2}$

삼각형 AQR에서 $\angle RAQ=\frac{\theta}{4}$이므로

$\overline{QR}=\overline{AR}\tan\frac{\theta}{4}=\cos\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{4}$

따라서 $f(\theta)=\pi\overline{QR}^2=\pi\cos^2\frac{\pi}{2}\tan^2\frac{\theta}{4}$이다.

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi\cos^2\frac{\theta}{2}\tan^2\frac{\theta}{4}}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi\cos^2\frac{\theta}{2}\tan^2\frac{\theta}{4}}{\left(\frac{\theta}{4}\right)^2\cdot16}$$

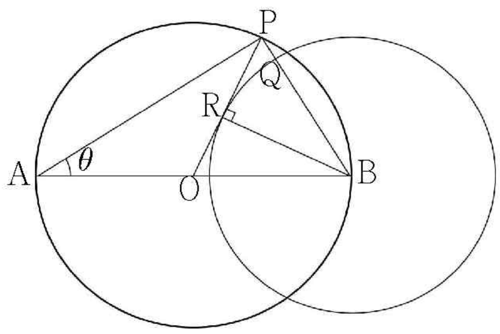
$$=\frac{\pi}{16}\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan^2\frac{\theta}{4}}{\left(\frac{\theta}{4}\right)^2}\lim_{\theta\to0+}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{\pi}{16}\cdot1^2\cdot1^2=\frac{\pi}{16}$$

83) [정답] ③

[해설]

원 C_2와 선분 OP의 접점을 점 R라 하자.



$\overline{BP}=2\sin\theta$

$\angle ROB=2\theta$ 이므로, $\overline{BR}=\sin 2\theta=\overline{BQ}$

$\overline{PQ}=\overline{PB}-\overline{BQ}=2\sin\theta-\sin 2\theta$

$=2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta=2\sin\theta(1-\cos\theta)$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{PQ}}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}2\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$

$$=2\cdot1\cdot\frac{1}{2}=1$$

84) [정답] ③

[해설]

삼각형 AOO′에서

$\overline{AO}=1,\ \overline{OO'}=2$

$$\overline{AO'}=\sqrt{1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot\cos\theta}$$

$$=\sqrt{5-4\cos\theta}$$

직각삼각형 PAO′에서

$$\overline{AP}=\sqrt{5-4\cos\theta-1}$$

$$=\sqrt{4(1-\cos\theta)}$$

$$=\sqrt{4\cdot2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=2\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$\overline{AO'}$은 $\overline{PQ}$를 수직이등분하므로

$\overline{AO'}$, $\overline{PQ}$의 교점을 M이라 하면

$\overline{PM}\times\overline{AO'}=\overline{AP}\times\overline{PO'}$

$$\overline{PM}=\frac{2\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$$

$$\therefore\ \overline{PQ}=2\overline{PM}=\frac{4\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{PQ}}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5-4\cos\theta}}\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}\right)$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{1}\times\frac{1}{2}$$

$$=2\sqrt{2}$$

85) [정답] ①

[해설]

$\triangle ABP$에서 $\angle ABP=\frac{\theta}{2}$이고 $\overline{AB}=2$이므로

$\overline{AP}=2\sin\frac{\theta}{2}$, $\overline{BP}=2\cos\frac{\theta}{2}$

$\triangle AOP$의 외접원의 반지름의 길이를 R_1,

$\triangle BOP$의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하면

사인법칙에 의하여

$R_1=\dfrac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$이고 $f(\theta)=\pi\dfrac{1}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$R_2=\dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$이고 $g(\theta)=\pi\dfrac{1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{g(\theta)-f(\theta)}{\frac{\pi}{2}-\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\frac{\pi}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}-\frac{\pi}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\frac{\pi}{2}-\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\pi\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

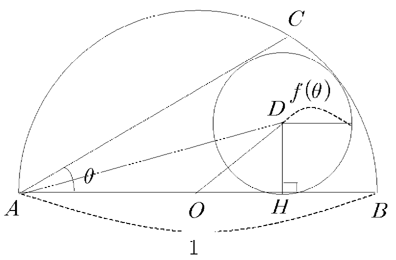
$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\pi\cos\theta}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin^2\theta}$$

$\frac{\pi}{2}-\theta=t$라 하면 $\theta\to\frac{\pi}{2}-$일 때 $t\to0+$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\pi\cos\theta}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin^2\theta}=\lim_{t\to0+}\frac{\pi\sin t}{t\cos^2 t}=\pi$

86) [정답] 25

[해설]



호 BC와 두 선분 AB, AC에 동시에 접하 는 원의 중심을 D, 점 D에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H, 선분 AB의 중점을 O라 하자.

$\angle \mathrm{BAC}=\theta$이므로 $\angle \mathrm{HAD}=\dfrac{\theta}{2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{f(\theta)}{\tan\dfrac{\theta}{2}}$

한편, 직각삼각형 DOH에서

$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{\left\{\dfrac{1}{2}-\mathrm{f}(\theta)\right\}^2-\{f(\theta)\}^2}$

이므로

$$\frac{1}{2}+\sqrt{\left\{\frac{1}{2}-f(\theta)\right\}^2-\{f(\theta)\}^2}=\frac{f(\theta)}{\tan\dfrac{\theta}{2}}$$

$$\sqrt{\left\{\frac{1}{2}-f(\theta)\right\}^2-\{f(\theta)\}^2}=\frac{f(\theta)}{\tan\dfrac{\theta}{2}}-\frac{1}{2}$$

양변을 제곱하면

$$\frac{1}{4}-f(\theta)+\{f(\theta)\}^2-\{f(\theta)\}^2$$
$$=\left\{\frac{f(\theta)}{\tan\dfrac{\theta}{2}}\right\}^2-\left\{\frac{f(\theta)}{\tan\dfrac{\theta}{2}}\right\}+\frac{1}{4}$$

$$-f(\theta)=\left\{\frac{f(\theta)}{\tan\dfrac{\theta}{2}}\right\}^2-\left\{\frac{f(\theta)}{\tan\dfrac{\theta}{2}}\right\}$$

의 양변에 $\tan^2\dfrac{\theta}{2}$을 곱하여 정리하면

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$에서 $f(\theta)>0$이므로

$$-\tan^2\frac{\theta}{2}=f(\theta)-\tan\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ f(\theta)=\tan\frac{\theta}{2}-\tan^2\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ \alpha=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\dfrac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{\theta^2}$$

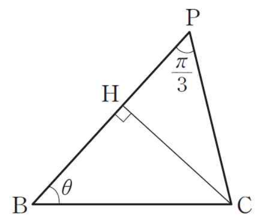
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{\theta^2}\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{4}{4}$$

$\therefore\ 100\alpha=25$

87) [정답] **80**

[해설]



$\angle \mathrm{BPC}=\angle \mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$이고, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{3}$이므로

그림과 같이 삼각형 PBC의 꼭짓점 C에서 선분 BP에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 HBC에서

$$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{BC}}\sin\theta=2\sqrt{3}\sin\theta$$

직각삼각형 HCP에서

$$\overline{\mathrm{PC}}=\frac{\overline{\mathrm{CH}}}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{3}\sin\theta}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=4\sin\theta$$

정삼각형의 내심과 무게중심은 서로 같으므로 선분 PC를 한 변으로 하는 정삼각형의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$r=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{\mathrm{PC}}$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times4\sin\theta$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta$$

이다.

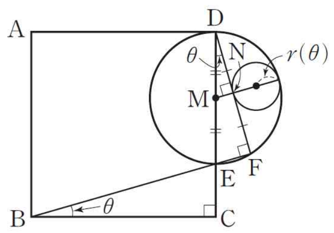
$$S(\theta)=\pi r^2=\pi\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)^2=\frac{4\pi}{3}\sin^2\theta$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\dfrac{4\pi}{3}\sin^2\theta}{\theta^2}$$
$$=\frac{4\pi}{3}\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}$$
$$=\frac{4\pi}{3}\left(\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2$$
$$=\frac{4\pi}{3}\times1^2=\frac{4\pi}{3}$$

따라서 $a=\dfrac{4}{3}$이므로 $60a=30\times\dfrac{4}{3}=80$

88) [정답] ④

[해설]



$\angle \mathrm{BEC} = \angle \mathrm{DEF} = \frac{\pi}{2} - \theta$이므로 직각삼각형 DEF에서

$\angle \mathrm{EDF} = \theta$이다.

$\overline{\mathrm{EC}} = \tan\theta$이므로

$\overline{\mathrm{DE}} = 1 - \tan\theta$

이고, 선분 DE의 중점을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{DM}} = \frac{1-\tan\theta}{2}$

직선 DF가 작은 원과 접하는 점을 N이라 하면 직각삼각형 DMN에서 $\overline{\mathrm{MN}} = \overline{\mathrm{DM}} \times \sin\theta = \frac{1-\tan\theta}{2} \times \sin\theta$

이므로 $\overline{\mathrm{DM}} = \overline{\mathrm{MN}} + 2r(\theta)$에서

$$r(\theta) = \frac{1}{2}(\overline{\mathrm{DM}} - \overline{\mathrm{MN}})$$
$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1-\tan\theta}{2} - \frac{1-\tan\theta}{2} \times \sin\theta \right)$$
$$= \frac{(1-\tan\theta)(1-\sin\theta)}{4}$$

한편, $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}$에서 $\frac{\pi}{4} - \theta = t$로 놓으면 $\theta \to \frac{\pi}{4}-$일 때, $t \to 0+$이므로

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta} = \lim_{t \to 0+} \frac{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{t}$$
$$= \lim_{t \to 0+} \frac{1 - \frac{1-\tan t}{1+\tan t}}{t}$$
$$= \lim_{t \to 0+} \frac{2\tan t}{t(1+\tan t)}$$
$$= \lim_{t \to 0+} \frac{\tan t}{t} \times \lim_{t \to 0+} \frac{2}{1+\tan t}$$
$$= 1 \times 2 = 2$$

따라서

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta} \times \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{1-\sin\theta}{4}$$
$$= 2 \times \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{4}$$
$$= \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$$

89) [정답] 5

[해설]

작은 원의 중심을 O′, P에서 OA에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\mathrm{O'A} = r(\theta)$, $\mathrm{O'Q} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{r}(\theta)$

$\mathrm{PH} = \sin\theta$, $\mathrm{QH} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta$, $\mathrm{OQ} = \cos\theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta$

$\mathrm{OA} = \cos\theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{r}(\theta) + \mathrm{r}(\theta) = 1$

$$r(\theta) = \frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)+\sin\theta}{2+\sqrt{3}}$$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{r(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{1}{2+\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{3}\frac{1-\cos\theta}{\theta} + \frac{\sin\theta}{\theta} \right\}$$
$$= \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

$\therefore a = 2,\ b = -1 \ \therefore a^2 + b^2 = 5$

90) [정답] ④

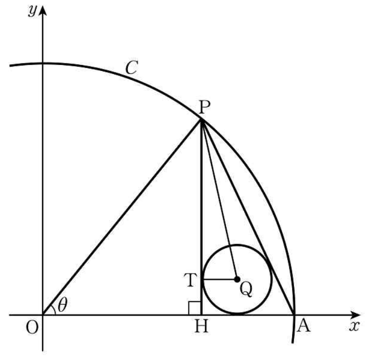
[해설]

삼각형 OAP가 이등변삼각형이므로

$\angle \mathrm{OAP} = \angle \mathrm{OPA} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$이고 삼각형 APH에서

$\angle \mathrm{APH} + \angle \mathrm{PAH} = \frac{\pi}{2}$이므로 $\angle \mathrm{APH} = \frac{\theta}{2}$이다.

내접원의 중심을 Q라 하고, 내접원과 선분 PH의 교점을 T라 하면 $\angle \mathrm{QPT} = \frac{\theta}{4}$이다.



$\overline{\text{PH}}=\sin\theta$이므로 삼각형 QPT에서

$$\tan\frac{\theta}{4}=\frac{\overline{\text{QT}}}{\overline{\text{PT}}}=\frac{r(\theta)}{\sin\theta-r(\theta)}$$

$$\left(1+\tan\frac{\theta}{4}\right)r(\theta)=\sin\theta\tan\frac{\theta}{4}$$

이므로

$$r(\theta)=\frac{\sin\theta\tan\frac{\theta}{4}}{1+\tan\frac{\theta}{4}}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\tan\frac{\theta}{4}}{\theta^2\left(1+\tan\frac{\theta}{4}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\tan\frac{\theta}{4}}{\frac{\theta}{4}}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{\left(1+\tan\frac{\theta}{4}\right)}\right\}$$

$$=1\times1\times\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{4}$$

[다른 풀이]

내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하면

$$\triangle\text{APH}=\frac{1}{2}\times(\triangle\text{APH의 둘레의 길이})\times r(\theta)$$

$$\triangle\text{APH}=\frac{1}{2}r(\theta)(\overline{\text{PH}}+\overline{\text{AH}}+\overline{\text{AP}})$$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{\text{AH}}\times\overline{\text{PH}}$$

따라서

$$\frac{\sin\theta+(1-\cos\theta)+2\sin\frac{\theta}{2}}{2}\times r(\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta\times(1-\cos\theta)$$

$$\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\right)r(\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\times2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(1-\cos\theta)$$

따라서 $\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}+1\right)r(\theta)=(1-\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}$

$$r(\theta)=\frac{(1-\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}}{1+\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}\text{이므로}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}$$

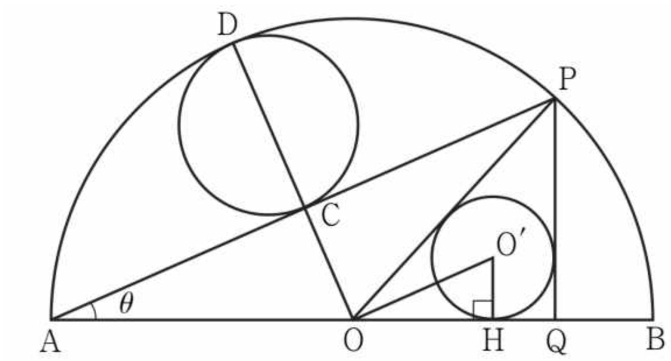
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}}{\theta^2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{1+\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\frac{1}{1+\cos\theta}\right\}$$

$$=\frac{1}{1+1+0}\times1^2\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{4}$$

91) [정답] 16

[해설]



선분 AP와 호 AP에 동시에 접하는 가장 큰 원이 선분 AP와 접하는 점을 C, 호 AP와 접하는 점을 D라 하자.

$\overline{\text{CO}}=\sin\theta$, $\overline{\text{CD}}=1-\overline{\text{CO}}=1-\sin\theta$이므로 선분 AP와 호 AP에 동시에 접하는 가장 큰 원의 반지름의 길이는 $\frac{1-\sin\theta}{2}$

$\therefore\ S(\theta)=\frac{\pi}{4}(1-\sin\theta)^2$

삼각형 POQ의 내접원의 중심을 O′, 점 O′에서 선분 OQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle\text{POQ}=2\theta$, $\angle\text{O}'\text{OH}=\theta$

삼각형 POQ의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{\text{OH}}=\frac{r}{\tan\theta}$, $\overline{\text{HQ}}=r$

$\overline{\text{OQ}}=\overline{\text{OH}}+\overline{\text{HQ}}=\frac{r}{\tan\theta}+r=\cos2\theta$

$r=\frac{\cos2\theta\tan\theta}{1+\tan\theta}$

$\therefore\ T(\theta)=\pi\left(\frac{\cos2\theta\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)^2$

$S\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{4}\left\{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}^2=\frac{\pi}{4}(1-\cos\theta)^2$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\times T(\theta)}{S\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\times\dfrac{\pi\cos^2 2\theta\tan^2\theta}{(1+\tan\theta)^2}}{\dfrac{\pi}{4}(1-\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\theta^2\cos^2 2\theta\tan^2\theta}{(1+\tan\theta)^2(1-\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\theta^2\cos^2 2\theta\tan^2\theta(1+\cos\theta)^2}{(1+\tan\theta)^2\sin^4\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{4\cos^2 2\theta(1+\cos\theta)^2}{(1+\tan\theta)^2}\times\frac{\theta^4}{\sin^4\theta}\times\frac{\tan^2\theta}{\theta^2}\right\}$$

$$=16$$

92) [정답] 4

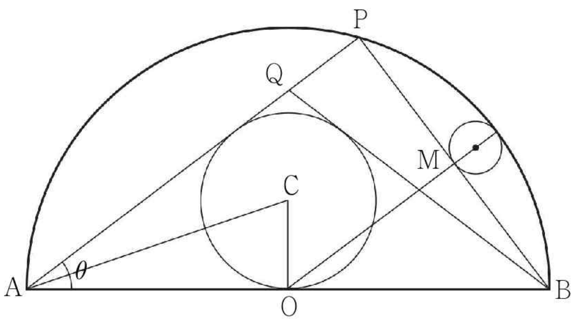
[해설]

그림과 같이 선분 AB의 중점을 O,

선분 PB와 호 PB에 접하는 원의 반지름의 길이를 r_1,

삼각형 ABQ에 내접하는 원의 중심을 C,

반지름의 길이를 r_2라 하자.



$\angle\text{MOB}=\theta$이고 $\overline{\text{OB}}=1$이므로 $\overline{\text{OM}}=\cos\theta$

$\therefore\ r_1=\dfrac{1-\cos\theta}{2},\ S(\theta)=\pi\left(\dfrac{1-\cos\theta}{2}\right)^2$

삼각형 CAO는 $\angle\text{AOC}=90^\circ$인 직각삼각형이고

$\angle\text{CAO}=\dfrac{\theta}{2},\ \overline{\text{OA}}=1$

$\therefore\ r_2=\tan\dfrac{\theta}{2},\ T(\theta)=\pi\tan^2\dfrac{\theta}{2}$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\times T(\theta)}{S(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\times\pi\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{\pi\left(\dfrac{1-\cos\theta}{2}\right)^2}$$

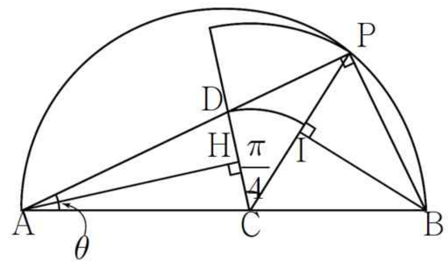
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\theta^2\times\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{(1-\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{4\times\frac{\theta^4}{\sin^4\theta}\times\frac{1}{4}\times\frac{\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{\left(\dfrac{\theta}{2}\right)^2}\times(1+\cos\theta)^2\right\}$$

$$=4\times\frac{1}{4}\times4=4$$

93) [정답] ②

[해설]



$\overline{\text{AB}}=1$이고 $\angle\text{APB}=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\text{BP}}=\sin\theta=\overline{\text{BC}},\ \overline{\text{AC}}=1-\sin\theta$

삼각형 ACD에서 $\angle\text{ACD}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$이고

삼각형 BPC에서 $\angle\text{BCP}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}$이므로

$\angle\text{PCD}=\dfrac{\pi}{4}$

점 A에서 $\overline{\text{CD}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\text{CD}}=2\overline{\text{CH}}=2\overline{\text{AC}}\sin\dfrac{\theta}{2}=2(1-\sin\theta)\sin\dfrac{\theta}{2}$

$$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}\times4(1-\sin\theta)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\times\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\pi}{2}\times(1-\sin\theta)^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

점 B에서 $\overline{\text{CP}}$에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{\text{CP}}=2\overline{\text{CI}}=2\overline{\text{BC}}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)=2\sin\theta\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)$

$$\therefore T(\theta)=\frac{1}{2}\times4\sin^2\theta\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\times\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\pi}{2}\sin^2\theta\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{T(\theta)-S(\theta)}{\theta^2}$$

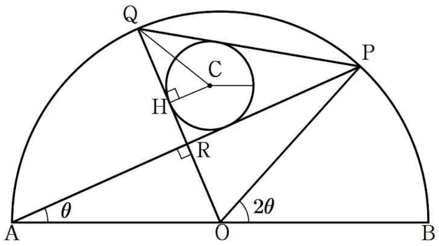
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi}{2}\left\{\frac{\sin^2\theta\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)-(1-\sin\theta)^2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\theta^2}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi}{2}\left\{\frac{\sin^2\theta\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)}{\theta^2}-\frac{(1-\sin\theta)^2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{4\times\dfrac{\theta^2}{4}}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times1\right)=\frac{\pi}{8}$$

94) [정답] ①

[해설]



삼각형 ORA에서 $\angle \mathrm{OAR}=\theta$이므로

$\overline{\mathrm{OR}}=\sin\theta$, $\overline{\mathrm{QR}}=1-\sin\theta$이고

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{AR}}=\cos\theta$

삼각형 OPQ에서 $\angle \mathrm{POQ}=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=1$이므로 $\angle \mathrm{OQP}=\angle \mathrm{OPQ}$이고

$$\angle \mathrm{OQP}=\frac{1}{2}\left\{\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$$

삼각형 QRP의 내접원의 중심을 C라 하고
점 C에서 선분 QR에 내린 수선의 발을 H라 하면
삼각형 QHC에서 $\tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{4}\right)=\frac{f(\theta)}{\overline{\mathrm{QH}}}$이므로

$$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{QH}}+\overline{\mathrm{HR}}=\frac{f(\theta)}{\tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{4}\right)}+f(\theta)=1-\sin\theta$$

$$\therefore\ f(\theta)=\frac{(1-\sin\theta)\times\tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{4}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{4}\right)}$$

$\frac{\pi}{2}-\theta=t$라 하면 $\theta\to\frac{\pi}{2}-$일 때, $t\to0+$이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{f(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}\times\frac{(1-\sin\theta)\times\tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{4}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{4}\right)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{1}{t^2}\times\frac{(1-\cos t)\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{4}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{4}\right)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sin^2 t}{t^2}\times\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{4}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{4}\right)}\times\frac{1}{1+\cos t}=\frac{1}{4}$$

95) [정답] ①

[해설]

$\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로 직각삼각형 ABP에서 $\overline{\mathrm{BP}}=2\sin\theta$

두 선분 BP, BQ는 모두 원 C_2의 반지름이므로

$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{BQ}}=2\sin\theta$

$\overline{\mathrm{OB}}=1$이므로 피타고라스 정리에 의해

직각삼각형 OBQ에서 $\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{1-4\sin^2\theta}$

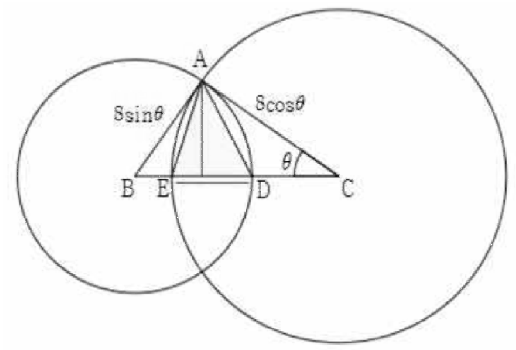
즉, $S(\theta)=2\sin\theta\sqrt{1-4\sin^2\theta}$

따라서 구하는 극한값은

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin\theta\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta}=2$$

96) [정답] ⑤

[해설]
직각삼각형의 삼각비에서



$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BD}}=8\sin\theta$, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{CE}}=8\cos\theta$

$\overline{\mathrm{ED}}=\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{CE}}-8=8(\sin\theta+\cos\theta-1)$

그리고 삼각형의 높이는 $h=8\sin\theta\cos\theta$이다.

따라서 $S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{ED}}\times h=32\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta-1)$

$$\frac{S(\theta)}{\theta^2}=32\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\cos\theta\times\left(\frac{\sin\theta}{\theta}+\frac{\cos\theta-1}{\theta}\right)$$

여기서 $\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$, $\lim_{\theta\to0}\frac{\cos\theta-1}{\theta}=0$, $\lim_{\theta\to0}\cos\theta=1$이므로

$$\lim_{\theta\to0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=32$$

97) [정답] ④

[해설]

$\overline{\mathrm{OH}}=\cos\theta$, $\overline{\mathrm{PH}}=\sin\theta$이므로 $f(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}\sin2\theta$

$\angle\mathrm{OPQ}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{\cos\theta}$이고,

$\overline{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{\cos\theta}-1=\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}$이다.

이때 $\angle\mathrm{AQR}=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$g(\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$이다.

$$\frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta\times f(\theta)}=\frac{4}{\cos\theta}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\frac{1-\cos\theta}{\theta\sin2\theta}}$$

$$=\frac{4}{\cos\theta}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\frac{\theta}{\sin2\theta}}$$

그러므로 $\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta\times f(\theta)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$