# [미적] [03적분전체] 교사평경 최근 3개년

## 06 미적 11 부정적분

01 여러 가지 함수의 부정적분

01 여러 가지 함수1 (x의 n제곱)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 15

**1.** $x>0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=2-\frac{3}{x^2},\ f(1)=5$$

이다. $x<0$에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(-3)$의 값은?

| |
|---|
| (가) $x<0$인 모든 실수 $x$에 대하여 $g'(x)=f'(-x)$이다. |
| (나) $f(2)+g(-2)=9$ |

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

## 06 미적 11 부정적분

02 치환적분과 부분적분

01 치환적분1 (다항식 치환)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 12

**2.** $x>1$인 모든 실수 $x$의 집합에서 정의되고 미분가능한 함수 $f(x)$가 $\sqrt{x-1}\,f'(x)=3x-4$를 만족시킬 때, $f(5)-f(2)$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

## 06 미적

11 부정적분

02 치환적분과 부분적분

08 부분적분3 (로그함수)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 26

**3.** 구간 $(0, \infty)$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 모든 양수 $t$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $\frac{\ln t}{t^2}$이다. $f(1)=0$일 때, $f(e)$의 값은?

① $\frac{e-2}{3e}$ ② $\frac{e-2}{2e}$ ③ $\frac{e-1}{3e}$

④ $\frac{e-2}{e}$ ⑤ $\frac{e-1}{e}$

## 06 미적

12 정적분

01 여러 가지 함수의 정적분

01 여러 가지 함수1 (x의 n제곱)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 23

**4.** $\int_2^4 \frac{6}{x^2}dx$의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $2$

④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

## 06 미적

12 정적분

01 여러 가지 함수의 정적분

03 여러 가지 함수3 (삼각함수)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 미적분 23

**5.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$ 의 값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$

④ $1$ ⑤ $2$

## 06 미적

12 정적분

02 치환적분과 부분적분

02 치환적분2 (지수로그식의 치환적분)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 24

**6.** $\int_{1}^{e}\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\ln x dx-\int_{1}^{e}\frac{2}{x^2}\ln x dx$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $1$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $2$ ⑤ $\frac{5}{2}$

06 미적 12 정적분

02 치환적분과 부분적분

03 치환적분3 (삼각함수식의 치환적분)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 24

**7.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2x \sin^2 2x dx$의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{2}{9}$

④ $\frac{5}{18}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

06 미적 12 정적분

02 치환적분과 부분적분

06 부분적분1 (기본)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 6

**8.** $\int_{1}^{2} (x-1)e^{-x} dx$의 값은?

① $\frac{1}{e}-\frac{2}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}$ ③ $\frac{1}{e}$

④ $\frac{2}{e}-\frac{2}{e^2}$ ⑤ $\frac{2}{e}-\frac{1}{e^2}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 24

**9.** $\int_{0}^{\pi} x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$의 값은?

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\pi$ ③ $\frac{3\pi}{2}$

④ $2\pi$ ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

06 미적 12 정적분

03 치환적분과 부분적분의 활용

02 활용2 (적분식의 모양 변경)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 30

**10.** 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=1$, $\int_{1}^{2} f(x)\,dx=\frac{5}{4}$
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x\geq 1$인 모든 실수 $x$에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\int_{1}^{8} xf'(x)\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 28

**11.** 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x)=f(x)$
(나) $f(x+2)=f(x)$

$\int_{-1}^{5} f(x)(x+\cos 2\pi x)dx=\frac{47}{2}$, $\int_{0}^{1} f(x)dx=2$일 때, $\int_{0}^{1} f'(x)\sin 2\pi x dx$의 값은?

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{5}{12}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 미적분 29

**12.** 세 상수 $a$, $b$, $c$에 대하여 함수 $f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+6}{e^{x}}=1$
(나) $f(\ln 2)=0$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_{0}^{14} g(x)dx=p+q\ln 2$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $p$, $q$는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.)

06 미적 12 정적분

03 치환적분과 부분적분의 활용

03 활용3 (함수 구하기)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 30

**13.** 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$와 0이 아닌 두 실수 $a$, $b$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=e^{af(x)}+bf(x)\,(0<x<12)$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소인 모든 $\alpha$를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\cdots$, $\alpha_m$ ($m$은 자연수)라 할 때, $m$ 이하의 자연수 $n$에 대하여 $\alpha_n$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n$이 홀수일 때, $\alpha_n=n$이다.

(나) $n$이 짝수일 때, $g(\alpha_n)=0$이다.

함수 $g(x)$가 서로 다른 두 개의 극댓값을 갖고 그 합이 $e^3+e^{-3}$일 때, $m\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}g(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=pe^3+qe$이다. $p-q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 정수이다.)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 30

**14.** 최고차항의 계수가 $k$ $(k>0)$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=f(-2)$, $f(0)\neq 0$이다. 함수 $g(x)=(ax+b)e^{f(x)}\,(a<0)$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 $x$에 대하여 $(x+1)\{g(x)-mx-m\}\leq 0$을 만족시키는 실수 $m$의 최솟값은 $-2$이다.

(나) $\int_0^1 g(x)dx=\int_{-2f(0)}^1 g(x)dx=\frac{e-e^4}{k}$

$f(ab)$의 값을 구하시오. (단, $a$, $b$는 상수이다.)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 29

**15.** 함수 $f(x)=\sin(ax)\,(a\neq 0)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 $a$의 값의 합을 구하시오.

(가) $\int_0^{\frac{\pi}{a}}f(x)dx\geq\frac{1}{2}$

(나) $0<t<1$인 모든 실수 $t$에 대하여

$$\int_0^{3\pi}|f(x)+t|\,dx=\int_0^{3\pi}|f(x)-t|\,dx$$

이다.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 30

**16.** 최고차항의 계수가 9인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\times f(x))}{x}=0$ |
| (나) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은 5이다. |

함수 $g(x)$는 $0\le x<1$일 때 $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 $x$에 대하여 $g(x+1)=g(x)$이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $\int_0^5 xg(x)dx=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 30

**17.** 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 구간 $(0,\infty)$에서 $g(x)\ge 0$인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $x\le -3$인 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)\ge f(-3)$이다. |
| (나) $x>-3$인 모든 실수 $x$에 대하여 $g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^2=f'(x)$이다. |

$\int_4^5 g(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)

06 미적 12 정적분

03 치환적분과 부분적분의 활용

04 활용4 (정의된 함수)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 30

**18.** 두 자연수 $a$, $b$에 대하여 이차함수 $f(x)=ax^2+b$가 있다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\ln f(x)-\frac{1}{10}\{f(x)-1\}$$

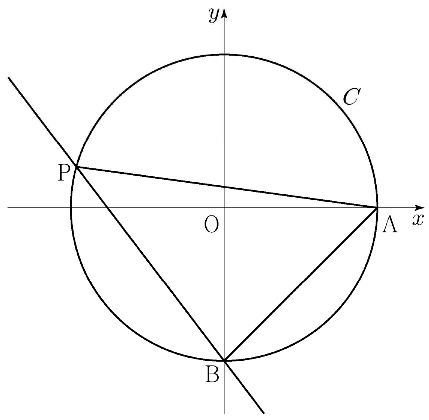
이라 하자. 실수 $t$에 대하여 직선 $y=|g(t)|$와 함수 $y=|g(x)|$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자. 두 함수 $g(x)$, $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.
(나) 함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속인 $k$의 값의 개수는 7이다.

$\int_0^a e^x f(x)dx=me^a-19$일 때, 자연수 $m$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 28

**19.** 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 $C$와 두 점 A(2, 0), B(0, $-2$)가 있다. 원 $C$ 위에 있고 $x$좌표가 음수인 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$라 하자. 점 Q(0, $2\cos\theta$)에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 R라 하고, 두 점 P와 R사이의 거리를 $f(\theta)$라 할 때, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta$의 값은?




① $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$
④ $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}-3}{2}$

06 미적 12 정적분

03 치환적분과 부분적분의 활용

05 활용5 (그래프 추론)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 20

**20.** 함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고, 치역이 집합 $\{0,\ 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 $n$이 다음 조건을 만족시킬 때, $n$의 값은?

> 함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
>
> $$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx=2,\ \int_{-1}^{1} xh(x)\,dx=-\frac{1}{32}$$
>
> 이다.

① 8 ② 10 ③ 12

④ 14 ⑤ 16

06 미적 12 정적분

04 정적분으로 정의된 함수

02 정적분으로 정의된 함수2 (적분함수)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 12

**21.** 연속함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 $t$에 대하여

$$\int_{0}^{\ln t} f(x)dx=(t\ln t+a)^2-a$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? (단, $a$는 0이 아닌 상수이다.)

① $2e^2+2e$ ② $2e^2+4e$ ③ $4e^2+4e$

④ $4e^2+8e$ ⑤ $8e^2+8e$

06 미적 12 정적분

04 정적분으로 정의된 함수

06 활용3 (도함수의 활용)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 20

**22.** 함수 $f(x)=\sin(\pi\sqrt{x})$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x tf(x-t)dt\,(x\ge 0)$$

이 $x=a$에서 극대인 모든 $a$를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, $n$번째 수를 $a_n$이라 하자. $k^2<a_6<(k+1)^2$인 자연수 $k$의 값은?

① 11 ② 14 ③ 17
④ 20 ⑤ 23

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 19

**23.** 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int_0^x \ln f(t)dt$$

일 때, 함수 $g(x)$와 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극값 2를 갖는다.
(나) 모든 실수 $x$에 대하여 $g'(-x)=g'(x)$이다.

$\int_{-1}^1 \frac{xf'(x)}{f(x)}dx$의 값은?

① $-4$ ② $-2$ ③ 0
④ 2 ⑤ 4

06 미적 12 정적분

04 정적분으로 정의된 함수

07 활용4 (함수 구하기)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 30

**24.** 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\ln\{f(x)+f'(x)+1\}$$

이 있다. 상수 $a$와 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 $x$에 대하여 $g(x)>0$이고

$$\int_{2a}^{3a+x} g(t)dt=\int_{3a-x}^{2a+2} g(t)dt$$

이다.

(나) $g(4)=\ln 5$

$\int_{3}^{5}\{f'(x)+2a\}g(x)dx=m+n\ln 2$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, $m$, $n$은 정수이고, $\ln 2$는 무리수이다.)

06 미적 12 정적분

04 정적분으로 정의된 함수

08 활용5 (정의된 함수)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 미적분 29

**25.** 함수 $f(x)=e^x+x-1$과 양수 $t$에 대하여 함수

$$F(x)=\int_{0}^{x}\{t-f(s)\}ds$$

가 $x=\alpha$에서 최댓값을 가질 때, 실수 $\alpha$의 값을 $g(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $\int_{f(1)}^{f(5)}\frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}dt$의 값을 구하시오.

06 미적 12 정적분

04 정적분으로 정의된 함수

09 활용5 (추론과 해석)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 18

**26.** 함수

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ \{\ln(1+x^4)\}^{10} & (x>0)\end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)dt$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $x \le 0$인 모든 실수 $x$에 대하여 $g(x)=0$이다.

ㄴ. $g(1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. $g(a) \ge 1$인 실수 $a$가 존재한다.

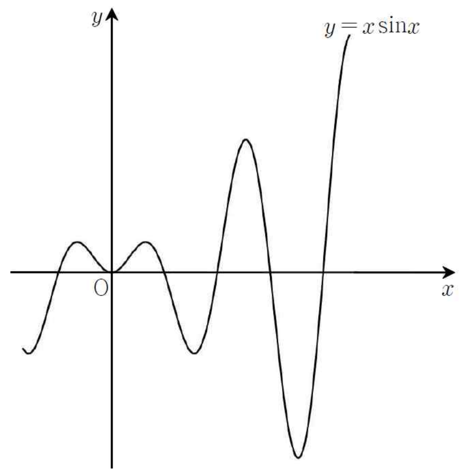
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

**27.** 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_0^x |t\sin t|dt-\left|\int_0^x t\sin t dt\right|$$

라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?




<보 기>

ㄱ. $f(2\pi)=2\pi$

ㄴ. $\pi<\alpha<2\pi$인 $\alpha$에 대하여 $\int_0^\alpha t\sin t dt=0$이면 $f(\alpha)=\pi$이다.

ㄷ. $2\pi<\beta<3\pi$인 $\beta$에 대하여 $\int_0^\beta t\sin t dt=0$이면 $\int_\beta^{3\pi} f(x)dx=6\pi(3\pi-\beta)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 29

**28.** 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $-1 \le x \le 1$에서 $f(x) < 0$이다.
> (나) $\int_{-1}^{0} |f(x)\sin x|dx = 2$, $\int_{0}^{1} |f(x)\sin x|dx = 3$

함수 $g(x) = \int_{-1}^{x} |f(t)\sin t|dt$에 대하여

$$\int_{-1}^{1} f(-x)g(-x)\sin x dx = \frac{q}{p}$$

이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 28

**29.** 닫힌구간 $[0, 4\pi]$에서 연속이고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{0}^{4\pi} |f(x)|dx$의 최솟값은?

> (가) $0 \le x \le \pi$일 때, $f(x) = 1 - \cos x$이다.
> (나) $1 \le n \le 3$인 각각의 자연수 $n$에 대하여
> $f(n\pi + t) = f(n\pi) + f(t)$ $(0 < t \le \pi)$
> 또는
> $f(n\pi + t) = f(n\pi) - f(t)$ $(0 < t \le \pi)$
> 이다.
> (다) $0 < x < 4\pi$에서 곡선 $y = f(x)$의 변곡점의 개수는 6이다.

① $4\pi$ ② $6\pi$ ③ $8\pi$
④ $10\pi$ ⑤ $12\pi$

06 미적 13 정적분의활용

01 정적분과 급수

02 정적분과 급수1 (다항함수)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 25

30. $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4 = a$ 일 때, $5a$의 값을 구하시오.

06 미적 13 정적분의활용

01 정적분과 급수

03 정적분과 급수2 (초월함수)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 11

31. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{3n}{3n+k}}$ 의 값은?

① $4\sqrt{3}-6$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $5\sqrt{3}-8$

④ $2\sqrt{3}-3$ ⑤ $3\sqrt{3}-5$

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 14

**32.** 함수 $f(x)=\ln x$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$의 값은?

① $\ln 2$ ② $(\ln 2)^2$ ③ $\frac{\ln 2}{2}$

④ $\frac{(\ln 2)^2}{2}$ ⑤ $\frac{(\ln 2)^2}{4}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 14

**33.** 함수 $f(x)=\cos x$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k\pi}{n^2}f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)$의 값은?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-2$ ③ $-\frac{3}{2}$

④ $-1$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 26

**34.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$의 값은?

① $\ln 5$ ② $\frac{\ln 5}{2}$ ③ $\frac{\ln 5}{3}$

④ $\frac{\ln 5}{4}$ ⑤ $\frac{\ln 5}{5}$

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 24

**35.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+3k}$의 값은?

① $\frac{1}{3}\ln 2$ ② $\frac{2}{3}\ln 2$ ③ $\ln 2$

④ $\frac{4}{3}\ln 2$ ⑤ $\frac{5}{3}\ln 2$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 미적분 24

36. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}$ 의 값은?

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{13}{9}$ ③ $\frac{14}{9}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 26

37. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2n-k)^2}$ 의 값은?

① $\frac{3}{2}-2\ln2$ ② $1-\ln2$ ③ $\frac{3}{2}-\ln3$
④ $\ln2$ ⑤ $2-\ln3$

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 25

38. 함수 $f(x)=x^2e^{x^2-1}$ 에 대하여

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n+k}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$ 의 값은?

① $e^3-1$ ② $e^3-\frac{1}{e}$ ③ $e^4-1$
④ $e^4-\frac{1}{e}$ ⑤ $e^5-1$

## 06 미적

13 정적분의활용

02 정적분과 넓이

02 넓이2 (그래프 그리기)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 8

**39.** 곡선 $y=e^{2x}$과 $x$축 및 두 직선 $x=\ln\frac{1}{2}$, $x=\ln 2$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{15}{8}$ ③ $\frac{15}{7}$

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $3$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 미적분 27

**40.** 곡선 $y=x\ln(x^2+1)$과 $x$축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\ln 2-\frac{1}{2}$ ② $\ln 2-\frac{1}{4}$ ③ $\ln 2-\frac{1}{6}$

④ $\ln 2-\frac{1}{8}$ ⑤ $\ln 2-\frac{1}{10}$

06 미적 13 정적분의활용

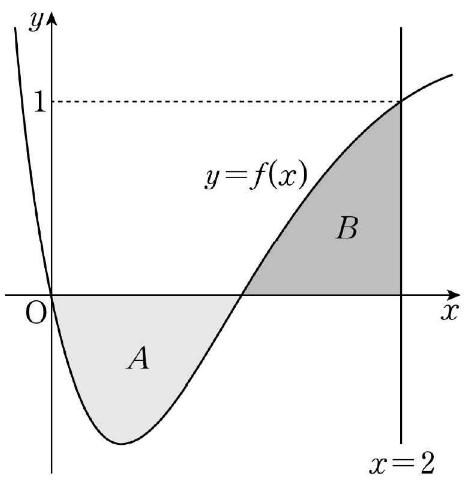
03 정적분과 넓이의 해석

02 넓이와 해석2 (넓이가 같을 조건)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 27

**41.** 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=0$, $f(2)=1$이다. 그림과 같이 $0 \le x \le 2$에서 곡선 $y=f(x)$와 $x$축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 두 부분의 넓이를 각각 $A$, $B$라 하자.

$A=B$일 때, $\int_0^2 (2x+3)f'(x)dx$의 값을 구하시오.




06 미적 13 정적분의활용

03 정적분과 넓이의 해석

03 넓이와 해석3 (넓이로 정의된 함수)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 28

**42.** $0<a<1$인 실수 $a$에 대하여 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 두 함수

$y=\sin x$, $y=a\tan x$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(a)$라 할 때, $f'\left(\frac{1}{e^2}\right)$의 값은?

① $-\frac{5}{2}$　② $-2$　③ $-\frac{3}{2}$

④ $-1$　⑤ $-\frac{1}{2}$

## 06 미적

13 정적분의활용

03 정적분과 넓이의 해석

06 역함수와 정적분1 (대칭성)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 27

**43.** 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 $x_1$, $x_2$에 대하여 $f(x_1) > f(x_2)$이다.
(나) 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이고 최솟값은 $-2$이다.

$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = 3$일 때, $\int_{-2}^{1} f^{-1}(x)\,dx$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

## 06 미적

13 정적분의활용

03 정적분과 넓이의 해석

08 역함수와 정적분3 (함수 구하기)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 21

**44.** 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2+3}$에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x) = f(x) - g(x)\ (0 < x < 4)$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $h(1) = 0$

ㄴ. 두 양수 $a$, $b\ (a < b < 4)$에 대하여 $\int_a^b h(x)dx$의 값이 최대일 때, $b - a = 2$이다.

ㄷ. $h(x)$의 도함수 $h'(x)$의 최댓값은 $\dfrac{7}{6}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

## 06 미적

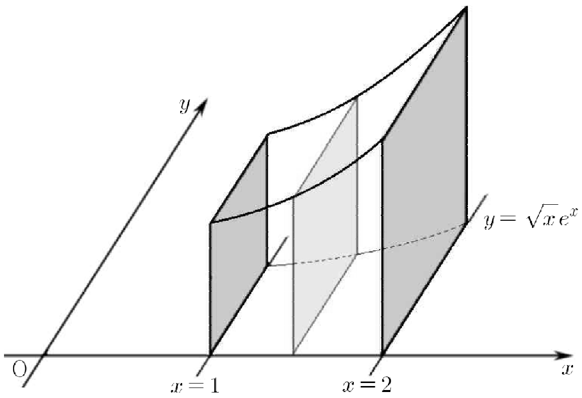
13 정적분의활용

04 정적분과 부피

01 부피1 (좌표평면과 함수)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 12

**45.** 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}e^{x}$ $(1 \le x \le 2)$와 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?

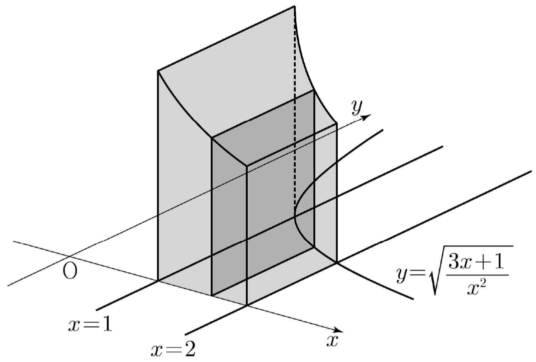



① $\dfrac{e^4+e^2}{4}$ ② $\dfrac{2e^4-e^2}{4}$ ③ $\dfrac{2e^4+e^2}{4}$

④ $\dfrac{3e^4-e^2}{4}$ ⑤ $\dfrac{3e^4+e^2}{4}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 26

**46.** 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\dfrac{3x+1}{x^2}}$ $(x>0)$과 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 $x$축과 수직으로 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피는?

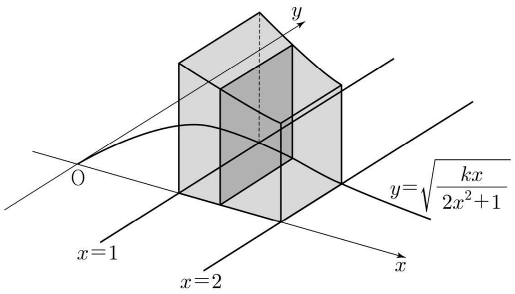



① $3\ln 2$ ② $\dfrac{1}{2}+3\ln 2$ ③ $1+3\ln 2$

④ $\dfrac{1}{2}+4\ln 2$ ⑤ $1+4\ln 2$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 26

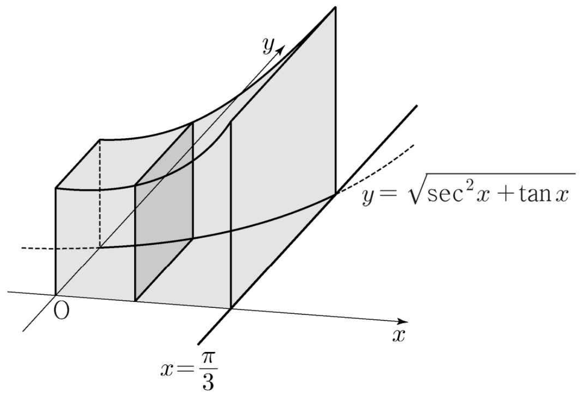
**47.** 그림과 같이 양수 $k$에 대하여 곡선 $y=\sqrt{\dfrac{kx}{2x^2+1}}$와 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $2\ln 3$일 때, $k$의 값은?




① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 미적분 26

**48.** 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\sec^2 x+\tan x}$ $\left(0\le x\le \dfrac{\pi}{3}\right)$와 $x$축, $y$축 및 직선 $x=\dfrac{\pi}{3}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?




① $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\ln 2}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\ln 2$ ③ $\sqrt{3}+\dfrac{\ln 2}{2}$
④ $\sqrt{3}+\ln 2$ ⑤ $\sqrt{3}+2\ln 2$

06 미적 13 정적분의활용

05 평면운동과 곡선의 길이

04 평면운동2 (매개변수 함수 구하기)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 27

**49.** 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$ $(t>0)$에서의 위치가 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\dfrac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 중점일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는?

① $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{3}{8}$ ② $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{5}{16}$ ③ $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{1}{4}$

④ $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{3}{16}$ ⑤ $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{1}{8}$

06 미적 13 정적분의활용

05 평면운동과 곡선의 길이

05 곡선의 길이1 (매개변수로 주어진 함수)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 25

**50.** 매개변수 $t$로 나타내어진 곡선

$$x=e^t\cos(\sqrt{3}t)-1,\ y=e^t\sin(\sqrt{3}t)+1$$

$$(0\le t\le \ln 7)$$

의 길이는?

① 9 ② 10 ③ 11

④ 12 ⑤ 13

[미적] [03적분전체] 교사평경 최근 3개년(빠른 정답)

미적 3개년 2022.12.29

1. [정답] ②
2. [정답] ⑤
3. [정답] ④
4. [정답] ①
5. [정답] ④

6. [정답] ③
7. [정답] ⑤
8. [정답] ①
9. [정답] ②
10. [정답] 143

11. [정답] ①
12. [정답] 26
13. [정답] 48
14. [정답] **25**
15. [정답] 14

16. [정답] **115**
17. [정답] 283
18. [정답] **586**
19. [정답] ①
20. [정답] ⑤

21. [정답] ③
22. [정답] ①
23. [정답] ①
24. [정답] 12
25. [정답] 12

26. [정답] ②
27. [정답] ③
28. [정답] **19**
29. [정답] ②
30. [정답] **242**

31. [정답] ①
32. [정답] ④
33. [정답] ④
34. [정답] ③
35. [정답] ②

36. [정답] ③
37. [정답] ②
38. [정답] ①
39. [정답] ②
40. [정답] ①

41. [정답] **7**
42. [정답] ②
43. [정답] ⑤
44. [정답] ②
45. [정답] ④

46. [정답] ②
47. [정답] ③
48. [정답] ④
49. [정답] ①
50. [정답] ④

# [미적] [03적분전체] 교사평경 최근 3개년(해설)

미적 3개년 2022.12.29

1) [정답] ②

[해설]

$x>0$에서 $f'(x)=2-\dfrac{3}{x^2}$이므로

$f(x)=\int\left(2-\dfrac{3}{x^2}\right)dx=\int(2-3x^{-2})dx=2x+\dfrac{3}{x}+C_1$

(단, $C_1$은 적분상수)

$f(1)=5$이므로

$f(1)=2+3+C_1=5$에서 $C_1=0$

즉, $f(x)=2x+\dfrac{3}{x}(x>0)$

$x<0$에서 $g'(x)=f'(-x)=2-\dfrac{3}{(-x)^2}=2-\dfrac{3}{x^2}$이므로

$g(x)=\int\left(2-\dfrac{3}{x^2}\right)dx=\int(2-3x^{-2})dx=2x+\dfrac{3}{x}+C_2$

(단, $C_2$는 적분상수)

$f(2)+g(-2)=9$이므로

$f(2)+g(-2)=\left(4+\dfrac{3}{2}\right)+\left(-4-\dfrac{3}{2}+C_2\right)=9$에서 $C_2=9$

즉, $g(x)=2x+\dfrac{3}{x}+9(x<0)$

따라서 $g(-3)=-6-1+9=2$

2) [정답] ⑤

[해설]

$f'(x)=\dfrac{3x-4}{\sqrt{x-1}}$이므로 $f(x)=\int\dfrac{3x-4}{\sqrt{x-1}}dx$에서

$x-1=t$로 치환하면 $1=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$\int\dfrac{3x-4}{\sqrt{x-1}}dx=\int\dfrac{3t-1}{\sqrt{t}}dt$

$=\int\left(3t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\right)dt$

$=2t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+C$($C$는 적분상수)

$=2(x-1)^{\frac{3}{2}}-2(x-1)^{\frac{1}{2}}+C$

$f(5)=12+C$, $f(2)=C$

따라서 $f(5)-f(2)=12$

3) [정답] ④

[해설]

$f'(t)=\dfrac{\ln t}{t^2}$이므로 부분적분을 이용하면

$f(x)=\int\dfrac{\ln x}{x^2}dx$

$=\ln x\times\left(-\dfrac{1}{x}\right)-\int\dfrac{1}{x}\times\left(-\dfrac{1}{x}\right)dx$

$=-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}+C$ (단, $C$는 적분상수)

$f(1)=0$에서

$f(1)=-1+C=0$ $\therefore C=1$

따라서 $f(x)=-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}+1$이므로

$f(e)=-\dfrac{2}{e}+1=\dfrac{e-2}{e}$

4) [정답] ①

[해설]

$\int_2^4\dfrac{6}{x^2}dx=\left[-\dfrac{6}{x}\right]_2^4=-\dfrac{3}{2}-(-3)=\dfrac{3}{2}$

5) [정답] ④

[해설]

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x dx=\left[-\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1$

6) [정답] ③

[해설]

$\int_1^e\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)\ln x dx-\int_1^e\dfrac{2}{x^2}\ln x dx$

$=\int_1^e\dfrac{3}{x}\ln x dx$

$\ln x=t$라 하면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$

따라서 $\int_1^e\dfrac{3}{x}\ln x dx=3\int_0^1 t dt$

$=3\left[\dfrac{1}{2}t^2\right]_0^1=3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

7) [정답] ⑤

[해설]

$\sin 2x = t$라 하면 $2\cos 2x = \dfrac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$일 때 $t=1$이다.

따라서

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2x \sin^2 2x dx$$
$$= \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{3}$$

8) [정답] ①

[해설]

부분적분을 이용하면

$$\int_1^2 (x-1)e^{-x} dx$$
$$= \left[-(x-1)e^{-x}\right]_1^2 - \int_1^2 1\cdot(-e^{-x})dx$$
$$= -e^{-2} - \left[e^{-x}\right]_1^2$$
$$= -e^{-2} - (e^{-2} - e^{-1})$$
$$= \frac{1}{e} - \frac{2}{e^2}$$

9) [정답] ②

[해설]

$$\int_0^{\pi} x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = \int_0^{\pi} x\sin x dx$$
$$= [-x\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos x)dx$$
$$= -\pi\times\cos\pi + \int_0^{\pi}\cos x dx$$
$$= \pi + 0$$
$$= \pi$$

10) [정답] 143

[해설]

조건 (가)에서 $f(1)=1$이므로 조건 (나)에 의하여

$g(2)=2f(1)=2$

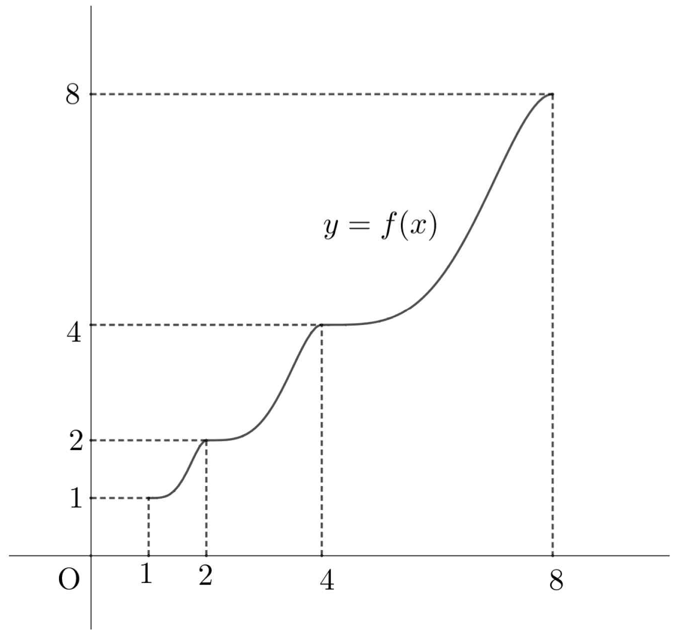
따라서 $f(2)=2$이므로

$g(4)=2f(2)=4$

따라서 $f(4)=4$이므로

$g(8)=2f(4)=8$

따라서 $f(8)=8$이다.




부분적분법에 의하여

$$\int_1^8 xf'(x)dx = \left[xf(x)\right]_1^8 - \int_1^8 f(x)dx$$
$$= 8f(8) - f(1) - \int_1^8 f(x)dx$$
$$= 8\times 8 - 1 - \int_1^8 f(x)dx$$
$$= 63 - \int_1^8 f(x)dx \cdots\cdots ㉠$$

이때

$$\int_1^8 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx + \int_4^8 f(x)dx \cdots\cdots ㉡$$

이고,

$$\int_1^2 f(x)dx = \frac{5}{4} \cdots\cdots ㉢$$

이다.

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 대칭성에 의하여

$$\int_2^4 f(x)dx = 4\times 4 - 2\times 2 - \int_2^4 g(y)dy$$
$$= 12 - \int_2^4 g(y)dy \cdots\cdots ㉣$$

이때 $y=2t$로 놓으면 치환적분법에 의하여

$$\int_2^4 g(y)dy = 2\int_1^2 g(2t)dt$$

이므로 조건 (나)에서

$$\int_2^4 g(y)dy = 2\int_1^2 g(2t)dt$$

$=2\int_{1}^{2} 2f(t)\,dt$

$=4\int_{1}^{2} f(x)\,dx$

$=4\times\frac{5}{4}=5$

ⓔ에서

$\int_{2}^{4} f(x)\,dx=12-\int_{2}^{4} g(y)\,dy$

$=12-5=7 \cdots\cdots$ ⓜ

또, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 대칭성에 의하여

$\int_{4}^{8} f(x)\,dx=8\times 8-4\times 4-\int_{4}^{8} g(y)\,dy$

$=48-\int_{4}^{8} g(y)\,dy \cdots\cdots$ ⓑ

이때 $y=2t$로 놓으면 치환적분법에 의하여

$\int_{4}^{8} g(y)dy=2\int_{2}^{4} g(2t)\,dt$

이므로 조건 (나)에서

$\int_{4}^{8} g(y)\,dy=2\int_{2}^{4} g(2t)\,dt$

$=2\int_{2}^{4} 2f(t)\,dt$

$=4\int_{2}^{4} f(x)\,dx$

$=4\times 7=28$

ⓑ에서

$\int_{4}^{8} f(x)\,dx=48-\int_{4}^{8} g(y)\,dy$

$=48-28=20 \cdots\cdots$ ⓢ

ⓛ, ⓒ, ⓜ, ⓢ에서

$\int_{1}^{8} f(x)\,dx=\int_{1}^{2} f(x)\,dx+\int_{2}^{4} f(x)\,dx+\int_{4}^{8} f(x)\,dx$

$=\frac{5}{4}+7+20=\frac{113}{4}$

이므로 ⓖ에서

$\int_{1}^{8} xf'(x)\,dx=63-\int_{1}^{8} f(x)\,dx$

$=63-\frac{113}{4}=\frac{139}{4}$

따라서

$p+q=4+139=143$

[다른 풀이]

$\int_{1}^{8} xf'(x)\,dx$에서 $x=g(y)$라 하면

$x=1$일 때 $y=1$, $x=8$일 때 $y=8$이고,

$\frac{dx}{dy}=g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$

이므로

$\int_{1}^{8} xf'(x)\,dx=\int_{1}^{8} g(y)\,dy$

$=\int_{1}^{2} g(y)\,dy+\int_{2}^{4} g(y)\,dy+\int_{4}^{8} g(y)\,dy$

이때

$\int_{1}^{2} g(y)\,dy=2\times 2-1\times 1-\int_{1}^{2} f(x)\,dx$

$=3-\frac{5}{4}=\frac{7}{4}$

한편, $\int_{2}^{4} g(y)\,dy=\int_{2}^{4} 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$에서

$\frac{y}{2}=t$라 하면 $y=2$일 때 $t=1$, $y=4$일 때 $t=2$이고,

$\frac{1}{2}=\frac{dt}{dy}$이므로

$\int_{2}^{4} g(y)\,dy=\int_{2}^{4} 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$

$=\int_{1}^{2} 4f(t)\,dt=4\int_{1}^{2} f(t)\,dt$

$=4\times\frac{5}{4}=5,$

또, $\int_{4}^{8} g(y)\,dy=\int_{4}^{8} 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$에서

$\frac{y}{2}=t$라 하면 $y=4$일 때 $t=2$, $y=8$일 때 $t=4$이고,

$\frac{1}{2}=\frac{dt}{dy}$이므로

$\int_{4}^{8} g(y)\,dy=\int_{4}^{8} 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$

$=\int_{2}^{4} 4f(t)\,dt=4\int_{2}^{4} f(t)\,dt$

$=4\times\left\{4\times 4-2\times 2-\int_{2}^{4} g(y)\,dy\right\}$

$=4(12-5)=28$

따라서

$\int_{1}^{8} xf'(x)\,dx=\int_{1}^{8} g(y)\,dy$

$=\int_{1}^{2} g(y)\,dy+\int_{2}^{4} g(y)\,dy+\int_{4}^{8} g(y)\,dy$

$=\frac{7}{4}+5+28=\frac{139}{4}$

이므로

$p+q=4+139=143$

11) [정답] ①

[해설]

$$\int_{-1}^{5} f(x)(x+\cos 2\pi x)dx$$

$$=\int_{-1}^{5} xf(x)dx+\int_{-1}^{5} f(x)\cos 2\pi x dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (가)에 의하여

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx=0,\ \int_{-1}^{1} f(x)dx=2\int_{0}^{1} f(x)dx$$

$$\int_{-1}^{5} xf(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1} xf(x)dx+\int_{1}^{3} xf(x)dx+\int_{3}^{5} xf(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1} xf(x)dx+\int_{-1}^{1} (x+2)f(x+2)dx$$

$$+\int_{-1}^{1} (x+4)f(x+4)dx$$

$$=\int_{-1}^{1} xf(x)dx+\int_{-1}^{1} (x+2)f(x)dx$$

$$+\int_{-1}^{1} (x+4)f(x)dx$$

$$=3\int_{-1}^{1} xf(x)dx+6\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

$$=12\int_{0}^{1} f(x)dx=24 \quad \cdots\cdots ㉡$$

조건 (가), (나)에 의하여 모든 실수 $x$에 대하여

$f(-x)\cos 2\pi(-x)=f(x)\cos 2\pi x$

$f(x+2)\cos 2\pi(x+2)=f(x)\cos 2\pi x$

$$\int_{-1}^{5} f(x)\cos 2\pi x dx$$

$$=\int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x dx+\int_{1}^{3} f(x)\cos 2\pi x dx$$

$$+\int_{3}^{5} f(x)\cos 2\pi x dx$$

$$=\int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x dx$$

$$+\int_{-1}^{1} f(x+2)\cos 2\pi(x+2)dx$$

$$+\int_{-1}^{1} f(x+4)\cos 2\pi(x+4)dx$$

$$=\int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x dx+\int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x dx$$

$$+\int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x dx$$

$$=3\int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x dx$$

$$=6\int_{0}^{1} f(x)\cos 2\pi x dx$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\int_{0}^{1} f(x)\cos 2\pi x dx=\frac{1}{6}\left(\frac{47}{2}-24\right)=-\frac{1}{12}$$

따라서

$$\int_{0}^{1} f'(x)\sin 2\pi x dx$$

$$=\Big[f(x)\sin 2\pi x\Big]_{0}^{1}-2\pi\int_{0}^{1} f(x)\cos 2\pi x dx$$

$$=-2\pi\int_{0}^{1} f(x)\cos 2\pi x dx$$

$$=\frac{\pi}{6}$$

12) [정답] 26

[해설]

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+6}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ae^{2x}+be^x+c+6}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(ae^x+b+\frac{c+6}{e^x}\right)$$

극한값이 1에 수렴하므로 $c=-6,\ b=1$

$\therefore\ f(x)=ae^{2x}+e^x-6$

조건 (나)에서

$f(\ln 2)=ae^{2\ln 2}+e^{\ln 2}-6=4a+2-6=0$

$a=1$

즉, $f(x)=e^{2x}+e^x-6$

$\int_{0}^{14} g(x)dx$에서 $x=f(t)$라 하면 $dx=f'(t)dt$이고

$x=0$일 때, $f(t)=(e^t+3)(e^t-2)=0$에서

$e^t=2,\quad t=\ln 2$

$x=14$일 때, $f(t)=e^{2t}+e^t-6=14$에서

$(e^t+5)(e^t-4)=0,\quad e^t=4,\quad t=\ln 4$

$$\therefore\ \int_{0}^{14} g(x)dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4} g(f(t))f'(t)dt$$

$$=\int_{\ln 2}^{\ln 4} tf'(t)dt$$

$$=\Big[tf(t)\Big]_{\ln 2}^{\ln 4}-\int_{\ln 2}^{\ln 4} f(t)dt$$

$$=14\ln 4-\int_{\ln 2}^{\ln 4}(e^{2t}+e^t-6)dt$$

$$=14\ln 4-\left[\frac{1}{2}e^{2t}+e^t-6t\right]_{\ln 2}^{\ln 4}$$

$$=28\ln 2-(8-6\ln 2)$$

$$=34\ln 2-8$$

따라서 $p=-8,\ q=34$이므로

$p+q=26$

13) [정답] 48

[해설]

$g'(x)=f'(x)\{ae^{af(x)}+b\}$이고 $g'(x)=0$에서

$f'(x)=0$ 또는 $ae^{af(x)}+b=0$

( i ) $f'(x)=0$인 경우

$f'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x=0$

$x=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11$

( ii ) $ae^{af(x)}+b=0$인 경우

$e^{af(x)}=-\frac{b}{a}$를 만족시키는 $x$의 값이 존재해야 하므로

$\frac{b}{a}<0$

조건 (나)와 ( i )에 의하여 $x$이 짝수일 때 $\alpha_n$은 방정식 $ae^{af(x)}+b=0$의 실근이다.

$ae^{af(\alpha_n)}+b=0$ …… ㉠

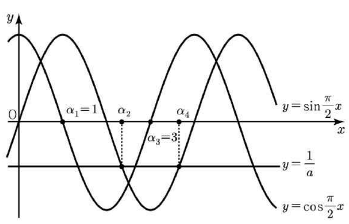
조건 (나)에 의하여 $n$이 짝수일 때

$e^{af(\alpha_n)}+bf(\alpha_n)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $abf(\alpha_n)-b=0$이고, $f(\alpha_n)=\frac{1}{a}$

$n$이 짝수일 때, $f(\alpha_n)=\frac{1}{a}$을 만족시키려면 $-1<\frac{1}{a}<0$

그러므로 $a<-1,\ b>0$




열린구간 (0, 4)에서 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극소인 서로 다른 $\alpha$의 개수는 2이다.

함수 $g(x)$의 열린구간 (0, 4)에서의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\alpha_1$ | $\cdots$ | $\alpha_2$ | $\cdots$ | $\alpha_3$ | $\cdots$ | $\alpha_4$ | $\cdots$ | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\nearrow$ | $e^a+b$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | $e^{-a}-b$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=4$에서 극값을 갖지 않고 열린구간 (0, 12)에서 $g(x+4)=g(x)$를 만족한다.

열린구간 (0, 12)에서 함수 $g(x)$가 극댓값을 갖도록 하는 서로 다른 $x$의 개수와 극솟값을 갖도록 하는 서로 다른 $x$의 개수는 각각 6이므로 $m=12$

함수 $g(x)$는 열린구간 (0, 4)에서 $x=\alpha_1$과 $x=\alpha_3$일 때 각각 극댓값 $e^a+b,\ e^{-a}-b$를 갖는다.

함수 $g(x)$의 서로 다른 두 극댓값의 합이 $e^3+e^{-3}$이므로

$(e^a+b)+(e^{-a}-b)=e^a+e^{-a}=e^3+e^{-3}$

$a$는 음수이므로 $a=-3$

$f(\alpha_2)=f(\alpha_4)=-\frac{1}{3}$이고 ㉡에 대입하면

$g(\alpha_2)=e^{-3f(\alpha_2)}+bf(\alpha_2)=e-\frac{1}{3}b=0$

에서 $b=3e$

$m\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}g(x)\cos\frac{\pi}{2}xdx$

$=12\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}\left\{e^{-3\sin\frac{\pi}{2}x}+3e\sin\frac{\pi}{2}x\right\}\cos\frac{\pi}{2}xdx$

$\sin\frac{\pi}{2}x=t$로 치환하면 $\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x=\frac{dt}{dx}$이고

$\sin\frac{\pi}{2}\alpha_3=\sin\frac{3}{2}\pi=-1,\ \sin\frac{\pi}{2}\alpha_4=-\frac{1}{3}$이다.

$=12\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}\left\{e^{-3\sin\frac{\pi}{2}x}+3e\sin\frac{\pi}{2}x\right\}\cos\frac{\pi}{2}xdx$

$=24\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}(e^{-3t}+3et)dt$

$=24\left[-\frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{3}{2}et^2\right]_{-1}^{-\frac{1}{3}}$

$=8e^3-40e$

따라서 $p=8,\ q=-40$이므로 $p-q=48$

14) [정답] 25

[해설]

$f(x)=kx^2+px+q$ ($p,\ q$는 상수)라 하면

$f(0)=f(-2)$이므로 $q=4k-2p+q,\ p=2k$

$f(0)\neq0$이므로 $q\neq0$

따라서 $f(x)=kx^2+2kx+q$ ($k>0,\ q\neq0$)

조건 (가)에서 $(x+1)\{g(x)-mx-m\}\leq0$

$x\geq-1$일 때, $g(x)\leq mx+m$

$x<-1$일 때, $g(x)\geq mx+m$이고, $g(x)$는 연속함수이므로

$$g(-1)=0$$

$(-a+b)e^{f(-1)}=0$에서 $b=a$

$g(x)=(ax+a)e^{kx^2+2kx+q}$에서

$$g'(x)=a\{1+2k(x+1)^2\}e^{kx^2+2kx+q}$$

$$g''(x)=2ak(x+1)\{3+2k(x+1)^2\}e^{kx^2+2kx+q}$$

$a<0$, $k>0$이므로 모든 실수 $x$에 대하여

$g'(x)<0$이고, $x<-1$이면 $g''(x)>0$, $x>-1$이면 $g''(x)<0$이다.

조건 (가)에서 $m$의 최솟값이 $-2$이므로 $g'(-1)=-2$

$$ae^{-k+q}=-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)의 $\int_0^1 g(x)dx=\dfrac{e-e^4}{k}$에서 $kx^2+2kx+q=t$라 하면

$$\int_0^1 g(x)dx=\int_q^{3k+q}\frac{a}{2k}e^t dt$$
$$=\left[\frac{a}{2k}e^t\right]_q^{3k+q}$$
$$=\frac{a}{2k}\left(e^{3k+q}-e^q\right)$$

㉠을 대입하면 $\dfrac{-2e^k}{2k}(e^{3k}-1)=\dfrac{e-e^4}{k}$, $-e^{4k}+e^k=e-e^4$

$$e^{4k}-e^4-e^k+e=0$$

$$(e^k-e)\{(e^{2k}+e^2)(e^k+e)-1\}=0$$

$(e^{2k}+e^2)(e^k+e)-1>0$이므로 $e^k-e=0$, 즉 $k=1$

조건 (나)에서

$$\int_{-2f(0)}^1 g(x)dx-\int_0^1 g(x)dx$$
$$=\int_{-2f(0)}^0 g(x)dx$$
$$=0$$

$k=1$이므로 $x^2+2x+q=t$라 하면

$$\int_{-2f(0)}^0 g(x)dx=\int_{4q^2-3q}^q \frac{a}{2}e^t dt$$
$$=\left[\frac{a}{2}e^t\right]_{4q^2-3q}^q$$
$$=\frac{a}{2}\left(e^q-e^{4q^2-3q}\right)$$
$$=0$$

$a\neq 0$에서 $q=4q^2-3q$이고 $q\neq 0$이므로 $q=1$

㉠에 대입하면 $ae^{-1+1}=-2$, $a=-2$

따라서 $a=-2$, $b=-2$, $f(x)=x^2+2x+1$이므로

$$f(ab)=f(4)=16+8+1=25$$

15) [정답] 14

[해설]

조건 (가)에서

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{a}}\sin(ax)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{a}\cos(ax)\right]_0^{\frac{\pi}{a}}=\frac{2}{a}$$

$\dfrac{2}{a}\geq\dfrac{1}{2}$이므로

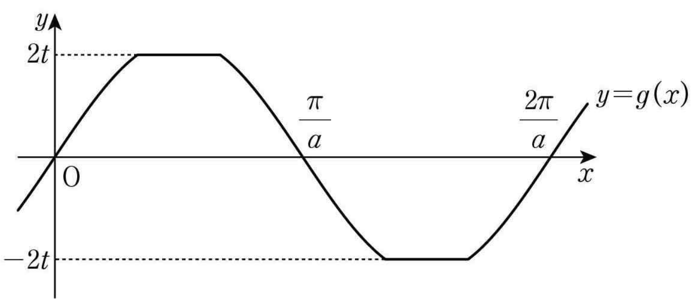
$$0<a\leq 4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에서

$$\int_0^{3\pi}\{|f(x)+t|-|f(x)-t|\}dx=0$$

$g(x)=|f(x)+t|-|f(x)-t|$라 하면

$$g(x)=\begin{cases}-2t & (-1\leq\sin(ax)<-t)\\ 2\sin(ax) & (-t\leq\sin(ax)<t)\\ 2t & (t\leq\sin(ax)\leq 1)\end{cases}$$




함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같으므로

$0<k<\dfrac{2\pi}{a}$인 모든 실수 $k$에 대하여

$\int_0^k g(x)\,dx>0$이고, $\int_0^{\frac{2\pi}{a}} g(x)\,dx=0$이다.

함수 $g(x)$는 주기가 $\dfrac{2\pi}{a}$이고 $\int_0^{3\pi} g(x)\,dx=0$이므로

$3\pi=\dfrac{2\pi}{a}\times n$ ($n$은 자연수), $a=\dfrac{2}{3n}$

㉠에서 $0<\dfrac{2}{3}n\leq 4$

따라서 구하는 모든 실수 $a$의 값은

$\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{4}{3}$, $2$, $\dfrac{8}{3}$, $\dfrac{10}{3}$, $4$이므로 그 합은 $14$이다.

16) [정답] 115

[해설]

조건 (가)에서 $x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\sin(\pi\times f(x))=\sin(\pi\times f(0))=0$에서

$f(0)=n$ ($n$은 정수)

이다.

한편, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 9이므로

$f(x)=9x^3+ax^2+bx+n$ ($a$, $b$는 상수)로 놓을 수 있다.

이때, $h(x)=\sin(\pi\times f(x))$라 하면 $h(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\times f(x))}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=h'(0)$$

이다. 즉, $h'(0)=0$이다.

이때, $h'(x)=\pi f'(x)\times\cos(\pi\times f(x))$이므로

$h'(0)=\pi f'(0)\times\cos(n\pi)=0$에서 $f'(0)=0$

$f'(x)=27x^2+2ax+b$에서 $f'(0)=b=0$ …… ㉠

한편, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1+}g(x)$이어야 한다.

이때, 함수 $g(x)$는 $0\le x<1$일 때 $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 $x$에 대하여 $g(x+1)=g(x)$이므로

$\lim_{x\to 1+}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)$이다.

$$\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=9+a+n,$$

$$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)=n$$

이므로 $9+a+n=n$

$a=-9$ …… ㉡

$f'(x)=27x^2-18x=9x(3x-2)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 $x=\frac{2}{3}$에서 극소이다.

조건 (나)에 의해 $f(0)\times f\left(\frac{2}{3}\right)=5$이므로

$n\times\left(n-\frac{4}{3}\right)=5$, $(3n+5)(n-3)=0$

$n$이 정수이므로 $n=3$ …… ㉢

㉠~㉢에 의해 $f(x)=9x^3-9x^2+3$

따라서

$$\begin{aligned}&\int_0^5 xg(x)dx\\&=\int_0^1 xg(x)dx+\int_1^2 xg(x)dx+\int_2^3 xg(x)dx\\&\quad+\int_3^4 xg(x)dx+\int_4^5 xg(x)dx\\&=\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1(x+1)g(x+1)dx\\&\quad+\int_0^1(x+2)g(x+2)dx\\&\quad+\int_0^1(x+3)g(x+3)dx\\&\quad+\int_0^1(x+4)g(x+4)dx\\&=\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1(x+1)f(x)dx\\&\quad+\int_0^1(x+2)f(x)dx+\int_0^1(x+3)f(x)dx\\&\quad+\int_0^1(x+4)f(x)dx\\&=5\int_0^1 xf(x)dx+10\int_0^1 f(x)dx\\&=5\int_0^1(9x^4-9x^3+3x)dx+10\int_0^1(9x^3-9x^2+3)dx\\&=5\left[\frac{9}{5}x^5-\frac{9}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1+10\left[\frac{9}{4}x^4-3x^3+3x\right]_0^1\\&=\frac{21}{4}+\frac{45}{2}=\frac{111}{4}\end{aligned}$$

따라서 $p=4$, $q=111$이므로

$p+q=4+111=115$

17) [정답] 283

[해설]

(나) 조건에서 $x=0$을 대입하면 $g(3)\times 0=f'(0)$에서

$f'(0)=0$이다.

그런데 $g(x+3)$는 $x=0$에서 부호가 바뀌지 않으므로

$f'(x)$도 $x=0$에서 부호가 바뀌지 않음을 알 수 있다.

$g(x+3)$이 $x>-3$에서 부호가 한 번도 바뀌지 않기 때문에

$f'(x)=4x^2(x-\alpha)$ $(\alpha\le -3)$이다.

그런데 $f'(x)=4x^2(x-\alpha)$ $(\alpha<-3)$이면 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖고, 그렇다면 $x\le -3$인 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)\ge f(-3)$이라는 (가) 조건에 모순이다.

따라서 $f'(x)=4x^2(x+3)=4x^3+12x^2$이고

$f(x)=x^4+4x^3+C$ (단, $C$는 적분상수)이다.

이제 $g(x+3)=\frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}$라 할 수 있고,

$$\int_4^5 g(x)dx=\int_1^2 g(x+3)dx=\int_1^2\frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}dx$$

$f(x)-f(0)=t$라 하면

$f'(x)dx=dt$이고 $f(1)-f(0)=5$, $f(2)-f(0)=48$이므로

$$\int_{5}^{48}\frac{1}{t^2}dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_{5}^{48}=-\frac{1}{48}+\frac{1}{5}=\frac{43}{240}$$

이므로 $p+q=240+43=283$

18) [정답] **586**

[해설]

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{1}{10}f'(x)$$

$$=\frac{f'(x)}{10f(x)}\{10-f(x)\}$$

$g'(x)=0$이 되려면 $f'(x)=0$ 또는 $f(x)=10$

$f'(x)=2ax$이므로 $x=0$일 때에만 $f'(x)=0$

( i ) 방정식 $f(x)-10=0$이 실근을 갖지 않을 때,

$f'(0)=0,\ f(x)>10$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g(x)$ | $\nearrow$ | 극대 | $\searrow$ |

( ii ) 방정식 $f(x)-10=0$이 중근을 가질 때,

$f'(0)=0,\ f(0)=10,\ f(x)\geq 10$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g(x)$ | $\nearrow$ | 극대 | $\searrow$ |

( i ), ( ii )의 경우에는 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

그러므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) 방정식 $f(x)-10=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때,

방정식 $f(x)-10=0$의 서로 다른 두 실근을 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$라 하면 $\alpha=-\beta$

$f(-x)=f(x)$이므로 $g(-x)=g(x)$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 $y$축 대칭이므로 $g(\alpha)=g(\beta)$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\beta$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g(x)$ | $\nearrow$ | 극대 | $\searrow$ | 극소 | $\nearrow$ | 극대 | $\searrow$ |

(iii)의 경우에는 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극솟값을 가지므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$f(0)=b<f(\alpha)=10$이므로 $1\leq b<10$

$$g(0)=\ln f(0)-\frac{1}{10}(f(0)-1)$$

$$=\ln b-\frac{1}{10}(b-1)$$

$p(x)=\ln x-\dfrac{1}{10}(x-1)$이라 하면

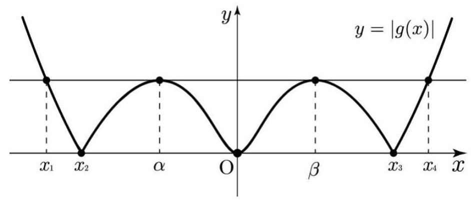
$$p'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{10}=\frac{10-x}{10x}$$

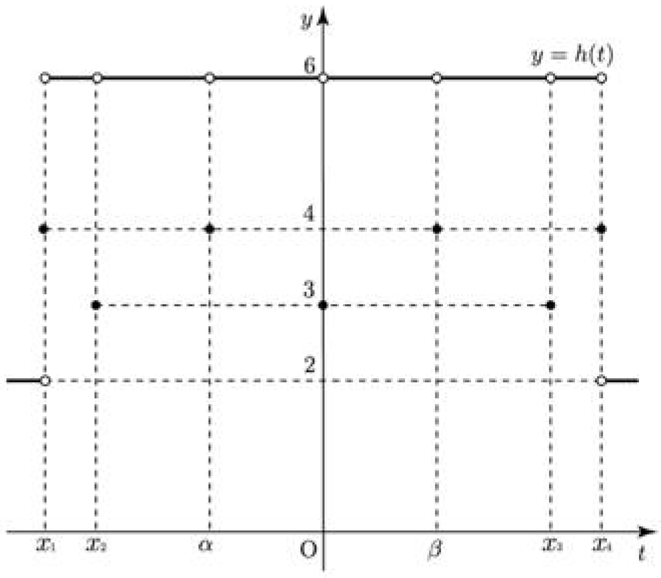
$1\leq x<10$일 때 $p'(x)>0$이므로 $p(x)$는 증가함수이다.

$g(0)\geq p(1)=0$

함수 $|g(x)|$의 그래프의 개형은 다음 2가지 경우와 같다.

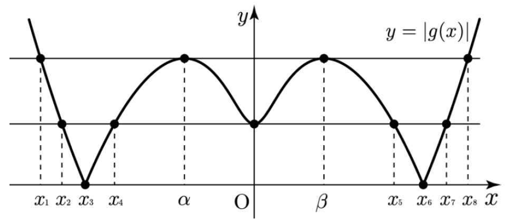
(1) $g(0)=0$일 때

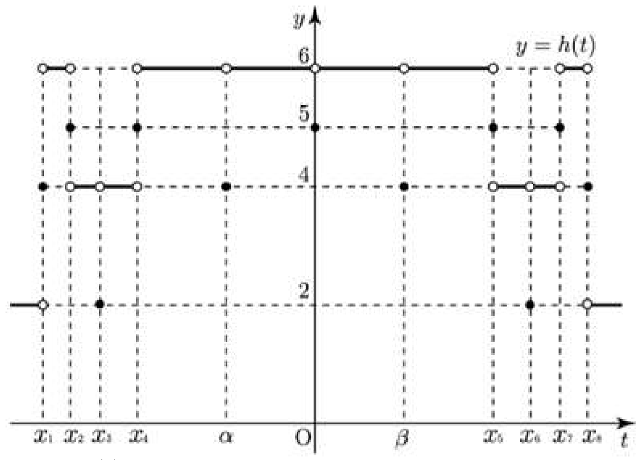



함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속인 $k$의 값의 개수는 7이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(2) $g(0)>0$일 때




함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속인 $k$의 값의 개수는 11이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $g(0)=0$

$0=g(0)=p(b)\geq p(1)=0$이므로 $p(b)=p(1)$

함수 $p(x)$는 $1 \le x < 10$에서

증가함수이므로 $b=1$, $f(x)=ax^2+1$

$$\int_0^a exf(x)dx$$

$$=\int_0^a (ax^2+1)e^x dx$$

$$=\Big[(ax^2+1)e^x\Big]_0^a - \int_0^a 2axe^x dx$$

$$=(a^3+1)e^a-1-\Big[2axe^x\Big]_0^a+\int_0^a 2ae^x dx$$

$$=(a^3+1)e^a-1-2a^2e^a+\Big[2ae^x\Big]_0^a$$

$$=(a^3-2a^2+2a+1)e^a-2a-1$$

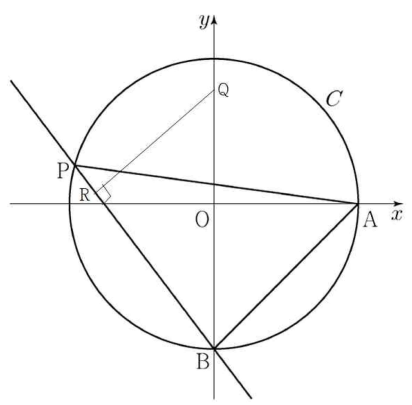
$$me^a-19=(a^3-2a^2+2a+1)e^a-2a-1$$

따라서 $a=9$이므로

$$m=a^3-2a^2+2a+1=586$$

19) [정답] ①

[해설]




$\overline{QB}=2+2\cos\theta=2(1+\cos\theta)$이고 직각삼각형 QRB에서

$\angle QBR=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로

$$\overline{BR}=\overline{QB}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2(1+\cos\theta)\sin\theta$$

삼각형 APB의 외접원의 반지름의 길이가 2이므로

사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{BP}}{\sin\theta}=2\times2$이므로 $\overline{BP}=4\sin\theta$

따라서

$$f(\theta)=\overline{BP}-\overline{BR}$$
$$=4\sin\theta-2(1+\cos\theta)\sin\theta$$
$$=2\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta$$

이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(2\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta)d\theta$$

$$=\Big[-2\cos\theta-\sin^2\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\left(-2\cos\frac{\pi}{3}-\sin^2\frac{\pi}{3}\right)-\left(-2\cos\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\left(-1-\frac{3}{4}\right)-\left(-\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$$

20) [정답] ⑤

[해설]

함수 $h(x)=f(nx)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고,

함수 $g(x)$의 치역이 $\{0,\ 1\}$이다.

한편, 구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(nx)$의 함숫값이 0이 되는 $x$의 값은

$$x=\frac{k}{2n}\ (\text{단, } -2n \le k \le 2n\text{인 정수})$$

그러므로 함수 $g(x)$는 어떤 정수 $k$에 대하여

$\left[\dfrac{k}{2n},\ \dfrac{k+1}{2n}\right]$에서 0이어야 한다.

한편,

$$\int_0^{\frac{1}{2n}} f(nx)dx=\int_0^{\frac{1}{2n}}\pi\sin 2\pi x dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2n}\cos 2n\pi x\right]_0^{\frac{1}{2n}}$$

$$=\frac{1}{2n}-\left(-\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}$$

즉, $f(x)\ge0$인 구간에서 함수 $f(nx)$의 정적분은

$$\frac{1}{n}\times n\times2=2$$

조건에서 $\displaystyle\int_{-1}^{1}h(x)dx=2$이므로 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}1 & (f(nx)>0)\\ 0 & (f(nx)\le0)\end{cases} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이어야 한다.

$$\int_{-1}^{1}xh(x)dx$$

$$=\int_0^{-1}xf(nx)g(x)dx+\int_0^1 xf(nx)g(x)dx$$

$$=\int_0^1 xf(nx)dx\ (\because ㉠)$$

$$=\int_{0}^{1}\pi x\sin 2n\pi x\,dx\ (\because ㉡)$$

$$=\left[-\frac{x}{2n}\cos(2n\pi x)\right]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}\left(-\frac{1}{2n}\cos 2n\pi x\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\times\left[\frac{1}{2n\pi}\sin 2n\pi x\right]_{0}^{1}$$

$$=-\frac{1}{2n}$$

조건에서 $\int_{-1}^{1}xh(x)dx=-\frac{1}{32}$이므로 $-\frac{1}{2n}=-\frac{1}{32}$

$\therefore n=16$

21) [정답] ③

[해설]

주어진 식에서 $t=1$이면 $a^2-a=a(a-1)=0$

이때 $a\neq 0$이므로 $a=1$

주어진 식의 양변을 $t$에 대하여 미분하면

$$f(\ln t)\times\frac{1}{t}=2(t\ln t+1)(\ln t+1)$$

$$f(\ln t)=2t(t\ln t+1)(\ln t+1)$$

$\ln t=1$이면 $t=e$

따라서 $f(1)=2e(e+1)\times 2=4e^2+4e$

22) [정답] ①

[해설]

$g(x)=\int_{0}^{x}tf(x-t)dt\,(x\geq 0)$에서 $x-t=s$라 하면

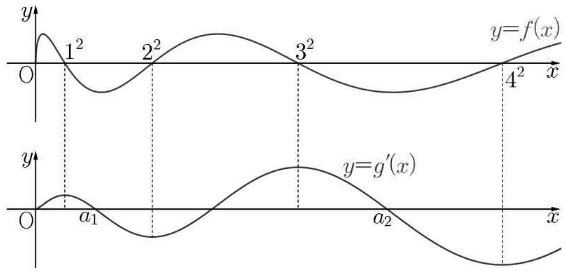
$-dt=ds$이므로

$$g(x)=\int_{x}^{0}(x-s)f(s)(-ds)$$

즉, $g(x)=\int_{0}^{x}(x-s)f(s)ds$이므로 양변을 미분하면

$$g'(x)=\int_{0}^{x}f(s)ds$$

함수 $f(x)$가 $g'(x)$의 도함수이므로 그래프를 그려보면 다음과 같다.




즉, 극대가 되는 값을 조사해보면

$$1^2<a_1<2^2,\ 3^2<a_2<4^2,\ \cdots$$

$$\therefore (2n-1)^2<a_n<(2n)^2$$

따라서 $n=6$일 때, $11^2<a_6<12^2$이므로 $k=11$

23) [정답] ①

[해설]

$g(x)=\int_{0}^{x}\ln f(t)dt$에서

$$g(0)=0,\ g'(x)=\ln f(x),\ g''(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

조건 (가)에 의하여 $g(1)=2,\ g'(1)=0$

조건 (나)에 의하여 $g'(-1)=g'(1)=0$

$$\int_{-1}^{1}\frac{xf'(x)}{f(x)}dx=\int_{-1}^{1}xg''(x)dx$$

$$=\left[xg'(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}g'(x)dx$$

$$=g'(1)+g'(-1)-2\int_{0}^{1}g'(x)dx$$

$$=2g'(1)-2\{g(1)-g(0)\}$$

$$=2\times 0-2(2-0)$$

$$=-4$$

24) [정답] 12

[해설]

함수 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 하자.

조건 (가)에서

$$\int_{2a}^{3a+x}g(t)dt=\int_{3a-x}^{2a+2}g(t)dt$$

$$G(3a+x)-G(2a)=G(2a+2)-G(3a-x)$$

위 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$g(3a+x)=g(3a-x)$ …… ㉠

모든 실수 $x$에 대하여 ㉠이 성립하므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=3a$에 대하여 대칭이다.

$$\int_{2a}^{3a+x} g(t)dt = \int_{3a-x}^{2a+2} g(t)dt = \int_{3a-x}^{4a} g(t)dt + \int_{4a}^{2a+2} g(t)dt$$

$\int_{2a}^{3a+x} g(t)dt = \int_{3a-x}^{4a} g(t)dt$에서 $\int_{4a}^{2a+2} g(t)dt = 0$

조건 (가)에서 $g(x) > 0$이므로 $2a+2=4a$, $a=1$

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$h(x)=f(x)+f'(x)+1=x^2+px+q$($p$, $q$는 상수)

라 하자.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$g(4)=g(2)$, 즉 $h(4)=h(2)$

$16+4p+q=4+2p+q$에서 $p=-6$

조건 (나)에서 $h(4)=5$이므로

$16-24+q=5$에서 $q=13$

$h(x)=x^2-6x+13$에서

$h'(x)=f'(x)+f''(x)=f'(x)+2$

$$\int_3^5 \{f'(x)+2a\}g(x)dx$$

$$=\int_3^5 \{f'(x)+2\}g(x)dx = \int_3^5 h'(x)\ln h(x)dx$$

$$=[h(x)\ln h(x)]_3^5 - \int_3^5 \left\{h(x)\times\frac{h'(x)}{h(x)}\right\}dx$$

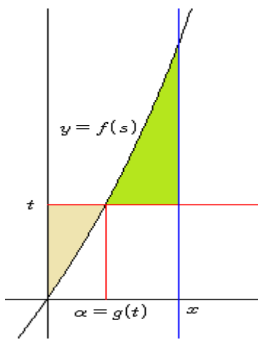
$$=h(5)\ln h(5)-h(3)\ln h(3)-\{h(5)-h(3)\}$$

$$=8\ln 8-4\ln 4-(8-4)=-4+16\ln 2$$

따라서 $m=-4$, $n=16$이므로 $m+n=12$

25) [정답] 12

[해설]




$F'(x)=t-f(x)=0$에서

$f(\alpha)=t$이므로 $\alpha=f^{-1}(t)=g(t)$

$g(t)=x$로 치환하면 $f(x)=t$이므로

$dt=f'(x)dx=(e^x+1)dx$

$$\int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}dt$$

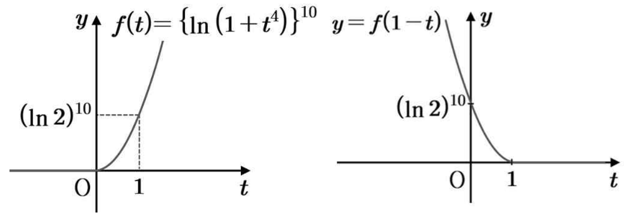
$$=\int_1^5 \frac{x}{1+e^x}(e^x+1)dx$$

$$=\int_1^5 xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^5 = 12$$

26) [정답] ②

[해설]

함수 $f(t)$와 함수 $f(1-t)$의 그래프는 다음과 같다.




ㄱ. $x \le 0$에서 $f(x)=0$이므로

$$g(x)=-\int_x^0 f(t)f(1-t)dt$$

$$=-\int_x^0 0\times f(1-t)dt$$

$=0$ (참)

ㄴ. 위의 그래프에서 $f(t)$와 $f(1-t)$가 $t=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로

$$g(1)=\int_0^1 f(t)f(1-t)dt$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)dt$$

$=2g\left(\frac{1}{2}\right)$ (참)

ㄷ. (ⅰ) $t \le 0$, $t \ge 1$일 때 $g(x)=0<1$

(ⅱ) $0<t<1$일 때

$f(t)<1$, $f(1-t)<1$이므로 $f(t)f(1-t)<1$

정적분의 정의는 함숫값의 총합이므로 (ⅰ)과 (ⅱ)에 의해

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)dt<1$$

$g(a)\ge 1$인 실수 $a$는 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

27) [정답] ③

[해설]

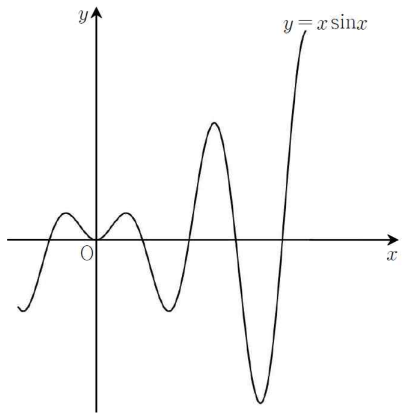
수직선 운동에서 점 P의 속도를 $v(t)=t\sin t$로 보면

$\int_0^x |t\sin t|dt$, $\int_0^x t\sin t dt$는 각각 움직인 거리와 위치의 변화량이다.

$$\int_0^\pi t\sin t dt = \Big[-t\cos t+2\sin t\Big]_0^\pi = \pi$$

$$\int_\pi^{2\pi} t\sin t dt = \Big[-t\cos t+2\sin t\Big]_\pi^{2\pi} = -3\pi$$

$$\int_{2\pi}^{3\pi} t\sin t dt = \Big[-t\cos t + 2\sin t\Big]_{2\pi}^{3\pi} = 5\pi$$




$$f(x) = \int_0^x |t\sin t|dt - \left|\int_0^x t\sin t dt\right|$$

따라서 $f(x)$=(거리의 합)−|(위치의 변화량)|이다.

ㄱ. $f(2\pi) = (\pi + 3\pi) - |\pi - 3\pi| = 2\pi$ (참)

ㄴ. $\pi < \alpha < 2\pi$, $\int_0^\alpha t\sin t dt = 0$이면

$f(\alpha) = (\pi + \pi) - |\pi - \pi| = 2\pi$ (거짓)

ㄷ. $2\pi < \beta \le x \le 3\pi$, $\int_0^\beta t\sin t dt = 0$이면

$$f(x) = \int_0^x |t\sin t|dt - \left|\int_0^x t\sin t dt\right|$$

$= 6\pi + \int_\beta^x t\sin t dt - \int_\beta^x t\sin t dt$

$= 6\pi$

$\therefore \int_\beta^{3\pi} f(x)dx = 6\pi(3\pi - \beta)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

28) [정답] **19**

[해설]

$-1 \le x \le 0$일 때, $|f(x)\sin x| = f(x)\sin x$

$0 \le x \le 1$일 때. $|f(x)\sin x| = -f(x)\sin x$

$\therefore \int_{-1}^0 |f(x)\sin x|dx = 2$, $\int_0^1 |f(x)\sin x|dx = 3$

$g(x)$에 $x=0$을 대입하면

$g(0) = \int_{-1}^0 |f(x)\sin x|dx = 2$

$\therefore g(0) = 2$

$g(x)$에 $x=1$을 대입하면

$g(1) = \int_{-1}^1 |f(t)\sin t|dt$

$= \int_{-1}^0 |f(x)\sin x|dx + \int_0^1 |f(x)\sin x|dx$

$= 2 + 3$

$\therefore g(1) = 2 + 3 = 5$

$g(x)$에 $x=-1$을 대입하면

$g(-1) = \int_{-1}^{-1} |f(x)\sin x|dx = 0$

$\therefore g(-1) = 0$

이때 $g'(x) = |f(x)\sin x|$가

$-1 \le x \le 0$일 때, $|f(x)\sin x| = f(x)\sin x$

$0 \le x \le 1$일 때. $|f(x)\sin x| = -f(x)\sin x$이므로

$\int_{-1}^1 f(-x)g(-x)\sin x dx$에서 $-x = t$로 치환하면

$dx = -dt$, $-1 \le t \le 1$

$\therefore \int_{-1}^1 f(-x)g(-x)\sin x dx$

$= \int_1^{-1} f(t)g(t)\sin(-t)(-1)dt$

$= -\int_{-1}^1 f(t)g(t)\sin t dt$

$= -\int_{-1}^0 g'(t)g(t)dt + \int_0^1 g'(t)g(t)dt$

$= -\left[\frac{1}{2}\{g(t)\}^2\right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}\{g(t)\}^2\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}[\{g(1)\}^2 - \{g(0)\}^2] - \frac{1}{2}[\{g(0)\}^2 - \{g(-1)\}^2]$

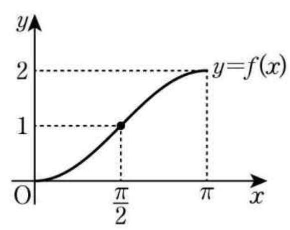
$= \frac{1}{2}(5^2 - 2^2) - \frac{1}{2}(2^2 - 0^2)$

$= \frac{17}{2}$

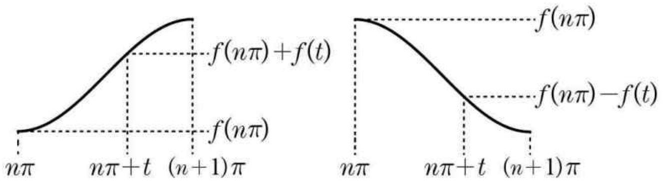
29) [정답] ②

[해설]

조건 (가)에서 곡선 $y = f(x)$는 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 아래로 볼록이고, 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$에서 위로 볼록이므로 점 $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$는 곡선 $y = f(x)$의 변곡점이다.

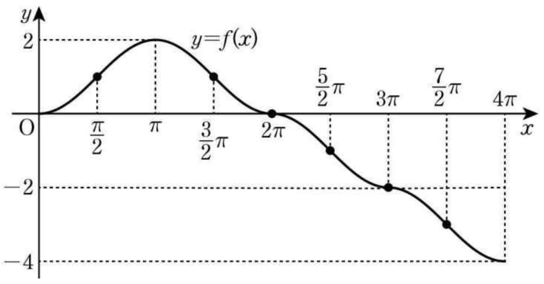



조건 (나)에 의하여 $n\pi < x \le (n+1)\pi$에서 곡선의 모양은 다음 두 가지 중 하나이다.




$0<x<4\pi$에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수가 6인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 함수 $y=f(x)$가 $x=\pi$에서 극대일 때




위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 $x$좌표가

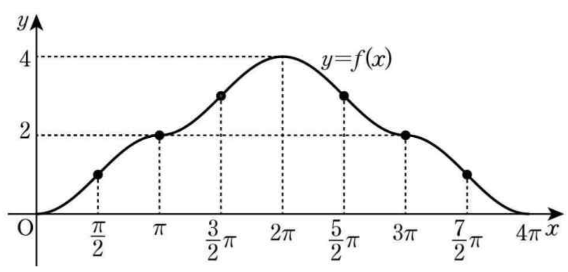
$\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, $2\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, $3\pi$, $\frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$$\int_0^{4\pi}|f(x)|dx=4\int_0^{\pi}f(x)dx+\pi\times 2$$

$$=4\int_0^{\pi}(1-\cos x)dx+2\pi$$

$$=4\Big[x-\sin x\Big]_0^{\pi}+2\pi=6\pi$$

(ⅱ) 함수 $y=f(x)$가 $x=2\pi$에서 극대일 때

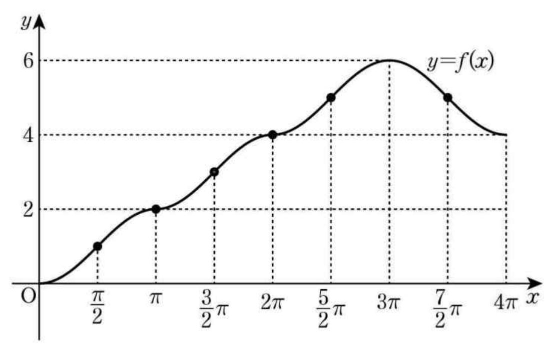



위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 $x$좌표가

$\frac{\pi}{2}$, $\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, $3\pi$, $\frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$$\int_0^{4\pi}|f(x)|dx=4\int_0^{\pi}f(x)dx+2\pi\times 2=8\pi$$

(ⅲ) 함수 $y=f(x)$가 $x=3\pi$에서 극대일 때




위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 $x$좌표가

$\frac{\pi}{2}$, $\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $2\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$$\int_0^{4\pi}|f(x)|dx=4\int_0^{\pi}f(x)dx+2\pi\times 5=14\pi$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 최솟값은 $6\pi$이다.

30) [정답] **242**

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4$$

$$=\int_1^3 x^4dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^3$$

$$=\frac{242}{5}$$

따라서 $a=\frac{242}{5}$이므로 $5a=242$

31) [정답] ①

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3n}{3n+k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3}{3+\frac{k}{n}}}\times\frac{1}{n}=\int_3^4\sqrt{\frac{3}{x}}dx$$

$$=\sqrt{3}\int_3^4 x^{-\frac{1}{2}}dx=\sqrt{3}\times\left[2\times x^{\frac{1}{2}}\right]_3^4$$

$$=\sqrt{3}\times(4-2\sqrt{3})=4\sqrt{3}-6$$

32) [정답] ④

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$1+\frac{k}{n}\to x$라 하면 $\frac{1}{n}\to dx$

$x$의 구간은 $[1,\ 2]$이므로

$$(\text{준식})=\int_1^2\frac{1}{x}f(x)dx$$

따라서 함수 $f(x)=\ln x$를 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_1^2\frac{1}{x}\ln x\,dx$$

$\ln x=t$라 하면 $\frac{1}{x}\cdot dx=dt$이 되고, 구간은 $[0,\ \ln2]$

$$=\int_0^{\ln2}t\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\ln2}$$

$$=\frac{1}{2}(\ln2)^2$$

33) [정답] ④

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\pi}{n^2}f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xf\left(\frac{\pi}{2}+x\right)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x(-\sin x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left[x\cos x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos x\,dx\right)$$

$$=\frac{i}{\pi}\left(-\pi-\left[\sin x\right]_0^{\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\times(-\pi)=-1$$

34) [정답] ③

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2+2\times\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^3+3\times\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\times\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\int_0^1\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\ln\left(x^3+3x^2+1\right)\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}(\ln5-\ln1)$$

$$=\frac{\ln5}{3}$$

35) [정답] ②

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+3k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{3k}{n}}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{3}{n}}{1+\frac{3k}{n}}$$

$$=\frac{1}{3}\int_1^4\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\ln x\right]_1^4$$

$$=\frac{2}{3}\ln2$$

36) [정답] ③

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}$$

$$=\frac{1}{3}\int_1^4\sqrt{x}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$=\frac{2}{9}\times(8-1)$$

$$=\frac{14}{9}$$

[다른 풀이]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}=\int_0^1\sqrt{1+3x}\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{9}(1+3x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{9}(8-1)$$

$$=\frac{14}{9}$$

37) [정답] ②

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2n-k)^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}-2\right)^2}\times\frac{1}{n}=\int_{-2}^{-1}\frac{x+2}{x^2}dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx=\left[\ln|x|-\frac{2}{x}\right]_{-2}^{-1}$$

$$=1-\ln2$$

38) [정답] ①

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n+k}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+\frac{k}{n}}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_1^2\frac{2}{x}f(x)\,dx$$

$$=\int_1^2 2xe^{x^2-1}dx \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$x^2-1=t$라 하면 $2x=\dfrac{dt}{dx}$이고, $x=1$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=3$이므로 ㉠에서

$$\int_1^2 2xe^{x^2-1}dx=\int_0^3 e^t\,dt$$

$$=\left[e^t\right]_0^3$$

$$=e^3-1$$

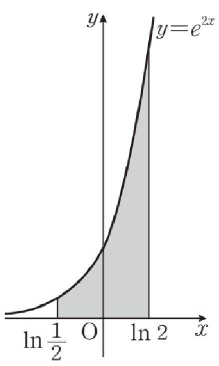
39) [정답] ②

[해설]

곡선$y=e^{2x}$과 $x$축 및 두 직선

$x=\ln\frac{1}{2}$, $x=\ln2$로 둘러싸인 부분은

그림과 같으므로 구하는 넓이는




$$\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln2}e^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln2}$$

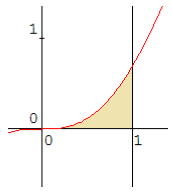
$$=\frac{1}{2}e^{2\ln2}-\frac{1}{2}e^{2\ln\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}e^{\ln4}-\frac{1}{2}e^{\ln\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\times4-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{15}{8}$$

40) [정답] ①

[해설]




$$S=\int_0^1 x\ln(x^2+1)dx$$

$x^2+1=t$로 치환하면 $2xdx=dt$

$$S=\int_1^2\frac{1}{2}\ln t dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t\ln t-\frac{1}{2}t\right]_1^2=\ln2-\frac{1}{2}$$

41) [정답] **7**

[해설]

$A=B$이므로 $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=0$

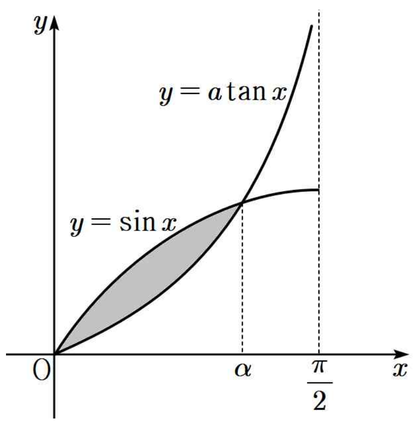
$$\int_0^2(2x+3)f'(x)dx=\Big[(2x+3)f(x)\Big]_0^2-\int_0^2 2f(x)dx$$

$$=7f(2)-3f(0)-0$$

$$=7$$

42) [정답] ②

[해설]




두 함수 $y=\sin x$, $y=a\tan x$의 교점의 $x$좌표를

$\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\sin\alpha=a\tan\alpha$, $\sin\alpha=a\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin\alpha\neq=$이므로 $\cos\alpha=a$

$$f(a)=\int_0^\alpha(\sin x-a\tan x)\,dx$$

$$=\int_0^\alpha\sin x\,dx-a\int_0^\alpha\tan x\,dx \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠을 $a$에 대하여 미분하면

$f'(a)=\sin\alpha\dfrac{d\alpha}{da}-\displaystyle\int_0^{\alpha}\tan x\,dx-a\tan\alpha\dfrac{d\alpha}{da}$

$=(\sin\alpha-\cos\alpha\tan\alpha)\dfrac{d\alpha}{da}-\displaystyle\int_0^{\alpha}\dfrac{\sin x}{\cos x}dx$

$=\Big[\ln\cos x\Big]_0^{\alpha}$

$=\ln\cos\alpha$

$=\ln a$

$\therefore f'\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\ln\dfrac{1}{e^2}=-2$

43) [정답] ⑤

[해설]
조건 (가)에 의해 함수 $f(x)$는 감소한다.
그러므로 조건 (나)에 의해
$f(-1)=1,\ f(3)=-2$ 즉 $f^{-1}(1)=-1,\ f^{-1}(-2)=3$

$\displaystyle\int_{-2}^{1}f^{-1}(x)dx$에서 $f^{-1}(x)=t$로 놓으면

$x=-2$일 때 $t=3,\ x=1$일 때 $t=-1$이고,

$x=f(t)$에서 $\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$이므로

$\displaystyle\int_{-2}^{1}f^{-1}(x)dx=\int_3^{-1}tf'(t)dt$

$=\Big[tf(t)\Big]_3^{-1}-\displaystyle\int_3^{-1}f(t)dt$

$=-f(-1)-3f(3)+\displaystyle\int_{-1}^{3}f(t)dt$

$=-1+6+3=8$

44) [정답] ②

[해설]

$$f'(x)=\frac{8x(x^2+3)-4x^2\times 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{24x}{(x^2+3)^2}$$

양의 실수 전체의 집합에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$f(x)=x$에서 $x^3-4x^2+3x=x(x-1)(x-3)=0$이므로

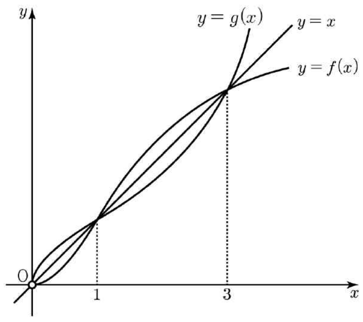
두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 $x$좌표는 1, 3이다.

$$f''(x)=\frac{24(x^2+3)^2-24x\times 2(x^2+3)\times 2x}{(x^2+3)^4}$$

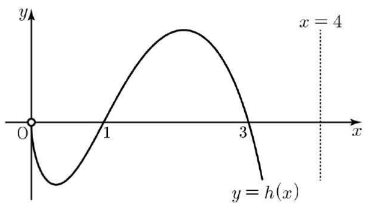
$$=\frac{72(1-x)(1+x)}{(x^2+3)^3}$$

곡선 $y=f(x)$는 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 아래로 볼록하고,열린 구간 $(1,\ \infty)$에서 위로 볼록하며,변곡점은 $(1,\ 1)$이다.

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.




함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서만 $h(x)\ge 0$이고, 함수 $h(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.




ㄱ. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 $x$좌표는 1, 3이므로

$f(1)=g(1)=1,\ h(1)=0$ (참)

ㄴ. 두 양수 $a,\ b$에 대하여 $\displaystyle\int_a^b h(x)dx$의 값이 최대가 되려면 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $h(x)\ge 0$이고 $b-a$의 값이 최대이어야 하므로 $a=1,\ b=3$

그러므로 $b-a=2$ (참)

ㄷ. $f(g(x))=x$에서 $f'(g(x))g'(x)=1$이고

$g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{f'(g(x))}$

$g''(x)=-\dfrac{f''(g(x))g'(x)}{\{f'(g(x))\}^2}$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 1)$에서만 변곡점을 가지므로

$f''(1)=0$

$f(1)=g(1)=1$이므로

$g''(1)=-\dfrac{f''(g(1))g'(1)}{\{f'(g(1))\}^2}=-\dfrac{f''(1)g'(1)}{\{f'(1)\}^2}=0$

$h''(1)=f''(1)-g''(1)=0$

(ⅰ) $0<x<1$인 모든 실수 $x$에 대하여

$f''(x)>0,\ g'(x)>0,\ 0<g(x)<1$이므로

$g''(x)=-\dfrac{f''(g(x))g'(x)}{\{f'(g(x))\}^2}<0$

열린구간 $(0,\ 1)$에서 $h''(x)=f''(x)-g''(x)>0$

(ii) $1<x<4$인 모든 실수 $x$에 대하여
$g'(x)>0,\ g(x)>1$이고 $x>1$인 모든 실수 $x$에 대하여
$f''(x)<0$이므로

$$g''(x)=-\frac{f''(g(x))g'(x)}{\{f'(g(x))\}^2}>0$$

열린구간 $(1,\ 4)$에서 $h''(x)=f''(x)-g''(x)<0$

(i), (ii)에 의하여 함수 $h'(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $h''(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $h'(x)$ | | $\nearrow$ | $\frac{5}{6}$ | $\searrow$ | |

함수 $h'(x)$는 $x=1$에서 최댓값을 갖는다.

$f'(1)=\frac{3}{2}$이므로

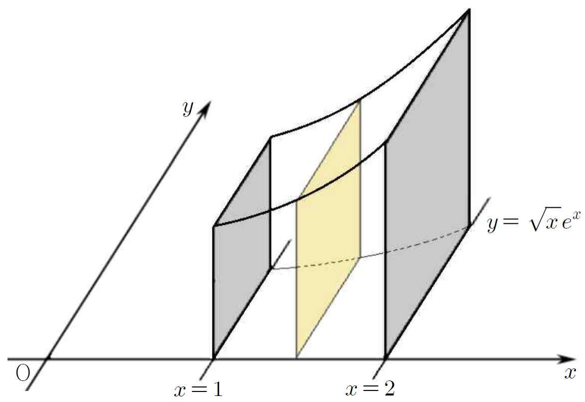
$$h'(1)=f'(1)-\frac{1}{f'(g(1))}=f'(1)-\frac{1}{f'(1)}=\frac{5}{6}$$

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

45) [정답] ④

[해설]




위의 그래프에서 $x$점에서의 사각형은 정사각형이므로
단면의 넓이를 $S(x)$라 하면 $S(x)=(\sqrt{x}e^x)^2=xe^{2x}$

구간 $[1,\ 2]$에서의 부피를 $V$라 하면 $V=\int_1^2 S(x)dx$이므로

$$V=\int_1^2 xe^{2x}dx$$

$$=\left[\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)e^{2x}\right]_1^2$$

$$=\frac{3}{4}e^4-\frac{1}{4}e^2$$

$$=\frac{3e^4-e^2}{4}$$

46) [정답] ②

[해설]
$x$좌표가 $t(1\le t\le 2)$인 점을 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{\frac{3t+1}{t^2}}$인 정사각형이므로
단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{3t+1}{t^2}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 $V$라 하면

$$V=\int_1^2 S(t)dt$$

$$=\int_1^2\frac{3t+1}{t^2}dt$$

$$=\int_1^2\left(\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\left[3\ln|t|-\frac{1}{t}\right]_1^2$$

$$=\left(3\ln2-\frac{1}{2}\right)-(3\ln1-1)$$

$$=\frac{1}{2}+3\ln2$$

47) [정답] ③

[해설]

$$V=\int_1^2 y^2dx=\int_1^2\frac{kx}{2x^2+1}dx\text{에서}$$

$2x^2+1=t$라 하면 $4x=\frac{dt}{dx}$이고,
$x=1$일 때 $t=3$,
$x=2$일 때 $t=9$이므로

$$V=k\int_1^2\frac{x}{2x^2+1}dx$$

$$=\frac{k}{4}\int_3^9\frac{1}{t}dt$$

$$=\frac{k}{4}[\ln t]_3^9$$

$$=\frac{k}{4}(\ln9-\ln3)$$

$$=\frac{k}{4}\ln3$$

따라서 $\frac{k}{4}\ln3=2\ln3$에서 $k=8$이다.

48) [정답] ④

[해설]

$0 \le t \le \frac{\pi}{3}$인 실수 $t$에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\left(\sqrt{\sec^2 t+\tan t}\right)^2=\sec^2 t+\tan t$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 $V$라 하면

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 t+\tan t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sec^2 x+\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\sec^2 x-\frac{(\cos x)'}{\cos x}\right\}dx$$

$$=\Big[\tan x-\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\tan\frac{\pi}{3}-\ln\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\sqrt{3}-\ln\frac{1}{2}=\sqrt{3}+\ln 2$$

49) [정답] ①

[해설]

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 두 점의 $x$좌표를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면 두 점의 좌표는 $(\alpha, \alpha^2)$, $(\beta, \beta^2)$이므로 이 두 점을 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$ …… ㉠

이다. 또 $\alpha$, $\beta$는 $x$에 대한 이차방정식 $x^2=t^2x-\frac{\ln t}{8}$, 즉 $x^2-t^2x+\frac{\ln t}{8}=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=t^2$, $\alpha\beta=\frac{\ln t}{8}$

이고, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=t^4-\frac{\ln t}{4}$이므로 ㉠에서

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}t^2$, $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\frac{1}{2}t^4-\frac{\ln t}{8}$

그러므로 점 P의 시각 $t$에서의 위치 $(x, y)$는 $x=\frac{1}{2}t^2$, $y=\frac{1}{2}t^4-\frac{\ln t}{8}$이다.

$x=\frac{1}{2}t^2$에서 $\frac{dx}{dt}=t$이고, $y=\frac{1}{2}t^4-\frac{\ln t}{8}$에서

$\frac{dy}{dt}=2t^3-\frac{1}{8t}$이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=t^2+\left(2t^3-\frac{1}{8t}\right)^2=4t^6+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{64t^2}=\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)^2$$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^e\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_1^e\sqrt{\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)^2}\,dt=\int_1^e\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{8}\ln|t|\right]_1^e$$

$$=\left(\frac{e^4}{2}+\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{2}+0\right)=\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$$

50) [정답] ④

[해설]

$x=e^t\cos(\sqrt{3}t)-1$, $y=e^t\sin(\sqrt{3}t)+1\,(0\le t\le \ln 7)$에서 양변을 시간에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=e^t\cos\sqrt{3}t-\sqrt{3}e^t\sin\sqrt{3}t$$

$$\frac{dy}{dt}=e^t\sin\sqrt{3}t+\sqrt{3}\,e^t\cos\sqrt{3}t$$

$$\int_0^{\ln 7}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$=\int_0^{\ln 7}\sqrt{(1+3)e^{2t}}\,dx$$

$$=\Big[2e^t\Big]_0^{\ln 7}$$

$$=12$$