[미적] [02미분전체] 교사평경 최근 3개년

06 미적 03 지수, 로그함수의 미분

02 지수, 로그함수의 극한

04 e를 포함한 극한의 계산1 (로그식. 무한소)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 6

1. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+4x}{\ln(x^2+x+1)}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 미적분 23

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 25

3. $\lim_{x \to 0+} \frac{\ln(2x^2+3x)-\ln 3x}{x}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 24

4. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{\ln(1+3x)}=2$$

일 때, $f'(0)$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

06 미적 03 지수, 로그함수의 미분

02 지수, 로그함수의 극한

06 e를 포함한 극한의 계산3 (지수식. 무한소)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 23

5. $\lim_{x \to 0} \frac{4^x-2^x}{x}$의 값은?

① ln2 ② 1 ③ 2ln2
④ 2 ⑤ 3ln2

06 미적 03 지수, 로그함수의 미분

02 지수, 로그함수의 극한

11 극한의 활용2 (지수식 극한)

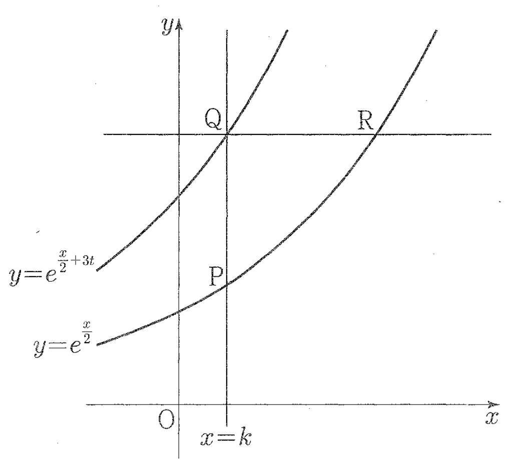
[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 16

6. 양수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 값을 $f(t)$라 하자.

> 직선 $x=k$와 두 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$, $y=e^{\frac{x}{2}+3t}$이 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$과 만나는 점을 R라 할 때, $\overline{PQ}=\overline{QR}$이다.

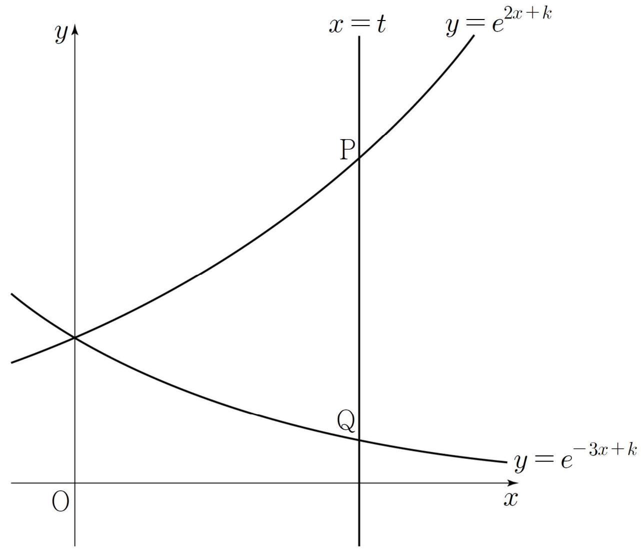
함수 $f(t)$에 대하여 $\lim_{t\to0+}f(t)$의 값은?

① ln2 ② ln3 ③ ln4
④ ln5 ⑤ ln6



[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 26

7. 좌표평면에서 양의 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=e^{2x+k}$, $y=e^{-3x+k}$과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{PQ}=t$를 만족시키는 실수 k의 값을 $f(t)$라 하자. 함수 $f(t)$에 대하여 $\lim_{t\to0+}e^{f(t)}$의 값은?



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

06 미적 　03 지수, 로그함수의 미분

03 지수, 로그함수의 도함수

01 미분법 공식1 (지수함수)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 23

8. 함수 $f(x)=(x+a)e^x$에 대하여 $f'(2)=8e^2$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

06 미적 　03 지수, 로그함수의 미분

03 지수, 로그함수의 도함수

02 미분법 공식2 (로그함수)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 24

9. 함수 $f(x)=\log_3 6x$에 대하여 $f'(9)$의 값은?

① $\frac{1}{9\ln 3}$ ② $\frac{1}{6\ln 3}$ ③ $\frac{2}{9\ln 3}$
④ $\frac{5}{18\ln 3}$ ⑤ $\frac{1}{3\ln 3}$

06 미적

04 삼각함수의 덧셈정리

01 삼각함수의 정의

01 정의1 (역수 관계)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 23

10. $0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$일 때, $\sec\theta$의 값은?

① $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ ③ $\sqrt{5}$
④ $\frac{5\sqrt{5}}{4}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

06 미적

04 삼각함수의 덧셈정리

01 삼각함수의 정의

02 정의2 (삼각함수 사이의 관계)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 24

11. $\sec\theta=\frac{\sqrt{10}}{3}$일 때, $\sin^2\theta$의 값은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{3}{20}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

06 미적 04 삼각함수의 덧셈정리

02 삼각함수의 덧셈정리

02 덧셈정리2 (탄젠트)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 24

12. $2\cos\alpha = 3\sin\alpha$이고 $\tan(\alpha+\beta)=1$일 때, $\tan\beta$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

06 미적 04 삼각함수의 덧셈정리

03 삼각함수의 해석 및 활용

06 해석 및 활용6 (다각형의 성질)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 26

13. 삼각형 ABC에 대하여 $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$라 할 때, α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이루고 $\cos\alpha$, $2\cos\beta$, $8\cos\gamma$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $\tan\alpha\tan\gamma$의 값을 구하시오. (단, $\alpha<\beta<\gamma$)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 14

14. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AD_1}=4$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다.

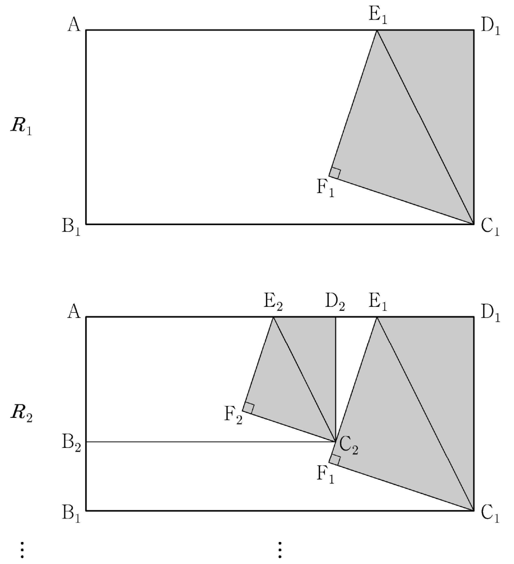
선분 AD_1을 $3:1$로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 직사각형 $AB_1C_1D_1$의 내부에 점 F_1을 $\overline{F_1E_1}=\overline{F_1C_1}$, $\angle E_1F_1C_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고 삼각형 $E_1F_1C_1$을 그린다.

사각형 $E_1F_1C_1D_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 AB_1위의 점 B_2, 선분 E_1F_1위의 점 C_2, 선분 AE_1위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{AD_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다.

그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 삼각형 $E_2F_2C_2$를 그리고 사각형 $E_2F_2C_2D_2$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?

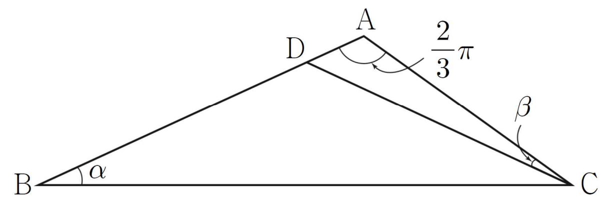


① $\frac{441}{103}$ ② $\frac{441}{109}$ ③ $\frac{441}{115}$

④ $\frac{441}{121}$ ⑤ $\frac{441}{127}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 29

15. 그림과 같이 $\angle BAC=\frac{2}{3}\pi$이고 $\overline{AB}>\overline{AC}$인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{BD}=\overline{CD}$인 선분 AB 위의 점 D에 대하여 $\angle CBD=\alpha$, $\angle ACD=\beta$라 하자. $\cos^2\alpha=\frac{7+\sqrt{21}}{14}$일 때, $54\sqrt{3}\times\tan\beta$의 값을 구하시오.



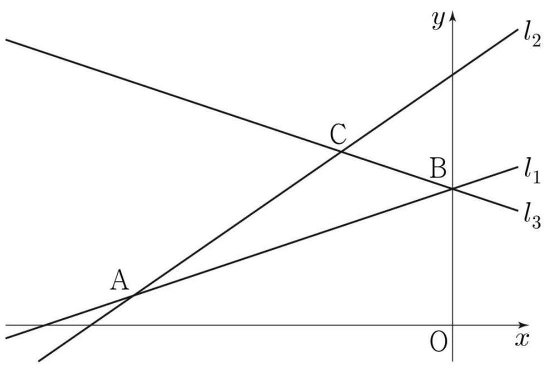
[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 29

16. 그림과 같이 좌표평면 위의 제 2사분면에 있는 점 A를 지나고 기울기가 각각 m_1, $m_2(0<m_1<m_2<1)$인 두 직선을 l_1, l_2라 하고, 직선 l_1을 y축에 대하여 대칭이동한 직선을 l_3이라 하자. 직선 l_3이 두 직선 l_1, l_2와 만나는 점을 각각 B, C라 하면 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB}=12$, $\overline{AC}=9$

(나) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{15}{2}$이다.

$78\times m_1\times m_2$의 값을 구하시오.



06 미적 05 삼각함수의 미분

02 극한의 해석 및 활용

02 해석2 (연속성)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 10

17. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(e^{2x}-1)^2 f(x)=a-4\cos\frac{\pi}{2}x$$

를 만족시킬 때, $a\times f(0)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{\pi^2}{6}$ ② $\frac{\pi^2}{5}$ ③ $\frac{\pi^2}{4}$

④ $\frac{\pi^2}{3}$ ⑤ $\frac{\pi^2}{2}$

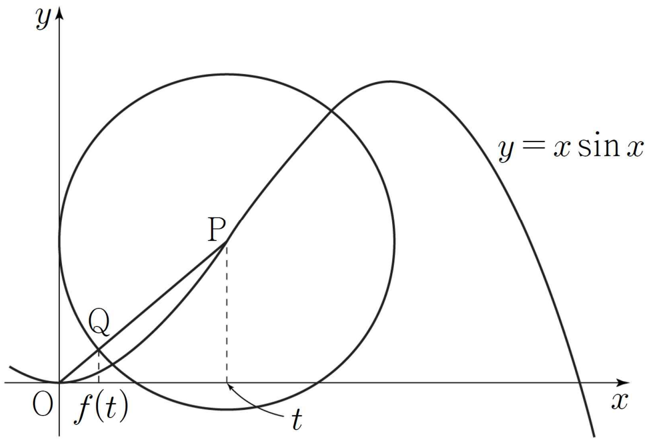
06 미적 05 삼각함수의 미분

02 극한의 해석 및 활용

03 활용1 (함수의 그래프)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 27

18. 그림과 같이 곡선 $y=x\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t\sin t)$ $(0<t<\pi)$를 중심으로 하고 y축에 접하는 원이 선분 OP와 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t^3}$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

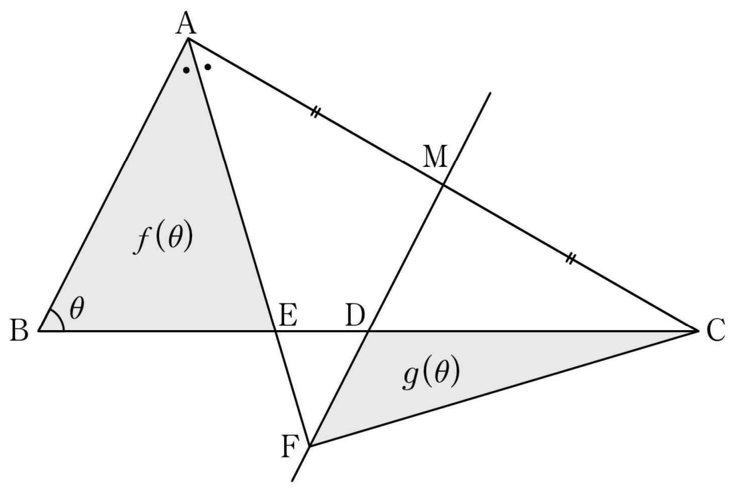
06 미적 05 삼각함수의 미분

02 극한의 해석 및 활용

04 활용2 (다각형의 성질)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 28

19. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{BC}}=2$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AC의 중점을 M이라 하고, 점 M을 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. $\angle\mathrm{BAC}$의 이등분선이 두 직선 BC, DM과 만나는 점을 각각 E, F라 하자. $\angle\mathrm{CBA}=\theta$일 때, 삼각형 ABE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 DFC의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$)



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ 1 ⑤ 2

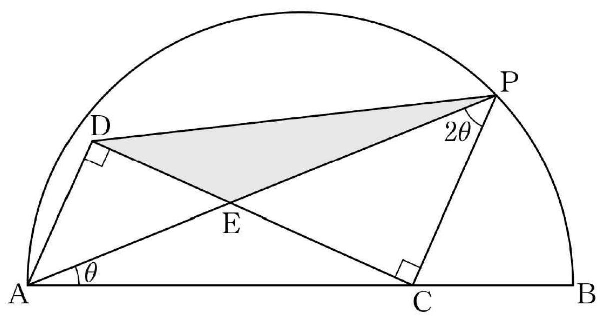
06 미적 05 삼각함수의 미분

02 극한의 해석 및 활용

06 활용4 (원과 도형)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 21

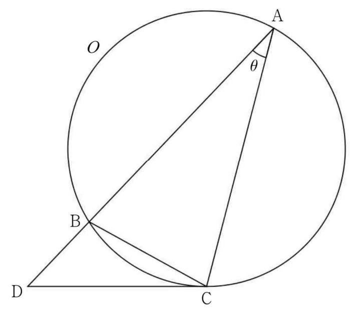
20. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB위의 점 P와 선분 AB위의 점 C에 대하여 $\angle PAC = \theta$일 때, $\angle APC = 2\theta$이다.
$\angle ADC = \angle PCD = \frac{\pi}{2}$인 점 D에 대하여 두 선분 AP와 CD가 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 DEP의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? $\left(단, 0 < \theta < \frac{\pi}{6}\right)$



① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{7}{9}$
④ $\frac{8}{9}$ ⑤ 1

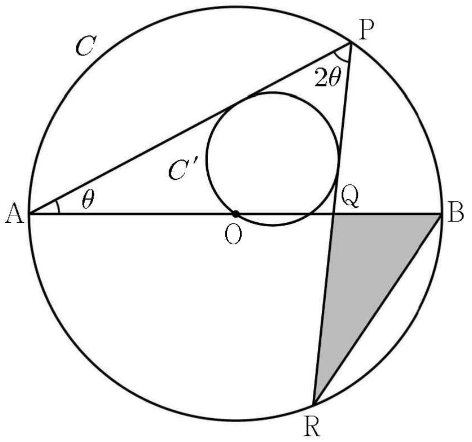
[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

21. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC} = 4$인 이등변삼각형 ABC에 외접하는 원 O가 있다. 점 C를 지나고 원 O에 접하는 직선과 직선 AB의 교점을 D라 하자. $\angle CAB = \theta$라 할 때, 삼각형 BDC의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$)



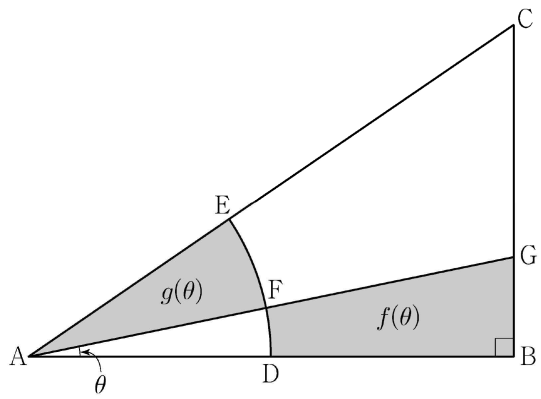
[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 29

22. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 원 C가 있다. 원 C 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$라 할 때, 선분 AB 위에 $\angle \mathrm{APQ}=2\theta$를 만족시키는 점을 Q라 하자. 직선 PQ가 원 C와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R라 할 때, 중심이 삼각형 AQP의 내부에 있고 두 선분 PA, PR에 동시에 접하는 원을 C'이라 하자. 원 C'이 점 O를 지날 때, 원 C'의 반지름의 길이를 $r(\theta)$, 삼각형 BQR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{r(\theta)}=a$일 때, $45a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



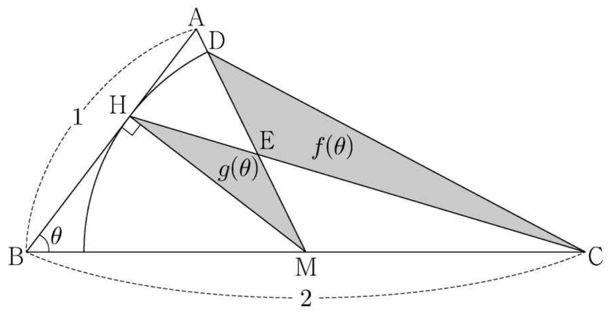
[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 24

23. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\angle \mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 중심이 A, 반지름의 길이가 1인 원이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자.
호 DE의 삼등분점 중 점 D에 가까운 점을 F라 하고, 직선 AF가 선분 BC와 만나는 점을 G라 하자. $\angle \mathrm{BAG}=\theta$라 할 때, 삼각형 ABG의 내부와 부채꼴 ADF의 외부의 공통부분의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 AFE의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.
$40\times\lim\limits_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$의 값을 구하시오. $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$



[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 28

24. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 두 선분 AB, BC에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 점 M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\overline{MH}$인 원이 선분 AM과 만나는 점을 D, 선분 HC가 선분 DM과 만나는 점을 E라 하자. $\angle ABC=\theta$라 할 때, 삼각형 CDE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 MEH의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $80a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$)



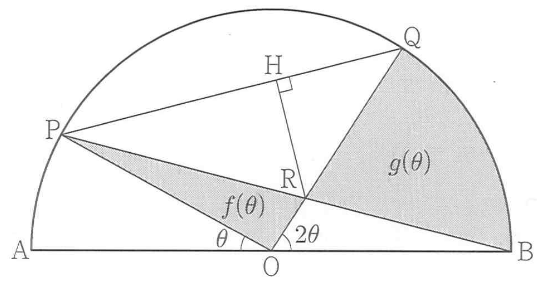
[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 28

25. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle POA=\theta$, $\angle QOB=2\theta$가 되도록 잡는다. 두 선분 PB, OQ의 교점을 R라 하고, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 POR의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 RQ, RB와 호 QB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{RH}}=\frac{q}{p}$$

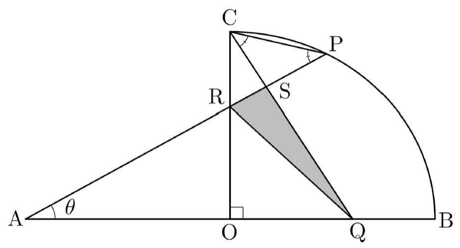
이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 28

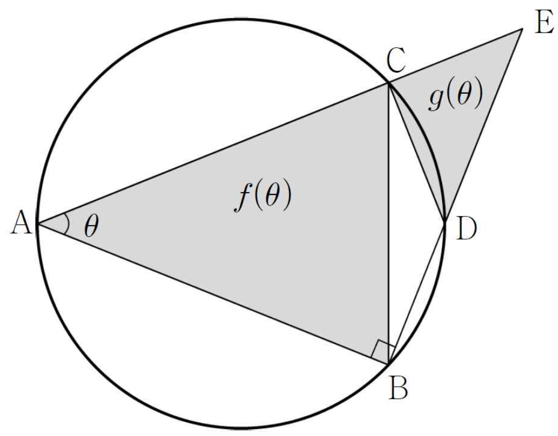
26. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB의 중점 O에 대하여 선분 OB를 반지름으로 하는 사분원 OBC가 있다. 호 BC위를 움직이는 점 P에 대하여 선분 OB위의 점 Q가 $\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{PCQ}$를 만족시킨다. 선분 AP가 두 선분 CO, CQ와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. $\angle\mathrm{PAB}=\theta$일 때, 삼각형 RQS의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 28

27. 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원에 내접하고, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle\mathrm{BAC}=\theta$라 하고, 점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D, 직선 BD와 직선 AC가 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 CDE의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

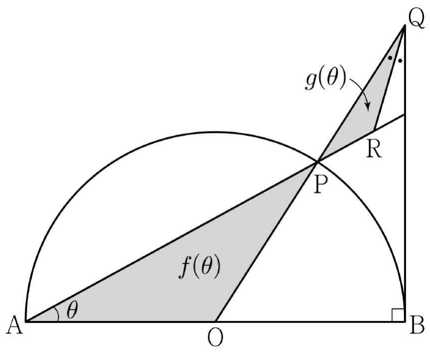


① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 28

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, $\angle$OQB의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자.
$\angle \mathrm{OAP}=\theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{g(\theta)}{\theta^4 \times f(\theta)}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$

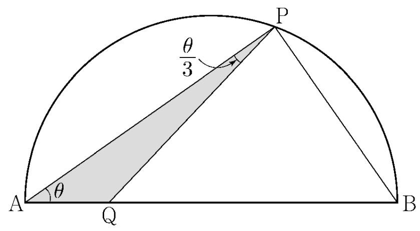


① 2 ② $\dfrac{5}{2}$ ③ 3

④ $\dfrac{7}{2}$ ⑤ 4

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 미적분 28

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 점 P가 있고, 선분 AB 위에 점 Q가 있다. $\angle \mathrm{PAB}=\theta$이고 $\angle \mathrm{APQ}=\dfrac{\theta}{3}$일 때, 삼각형 PAQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 PB의 길이를 $l(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{S(\theta)}{l(\theta)}$의 값은?
(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$)



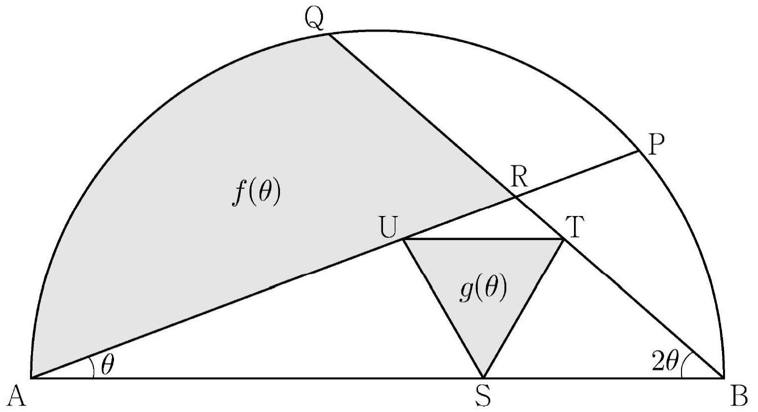
① $\dfrac{1}{12}$ ② $\dfrac{1}{6}$ ③ $\dfrac{1}{4}$

④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{12}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 29

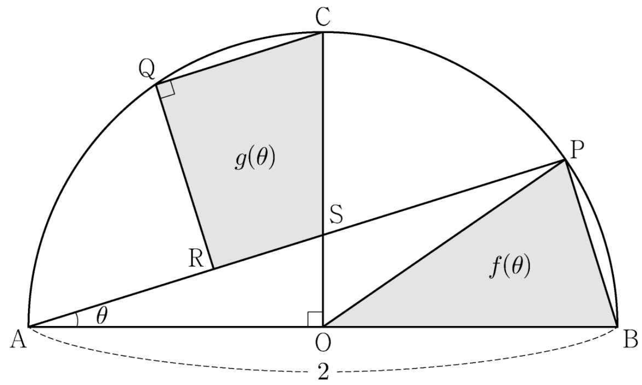
30. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle PAB = \theta$, $\angle QBA = 2\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R라 하자.
선분 AB 위의 점 S, 선분 BR 위의 점 T, 선분 AR 위의 점 U를 선분 UT가 선분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)} = \frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 미적분 28

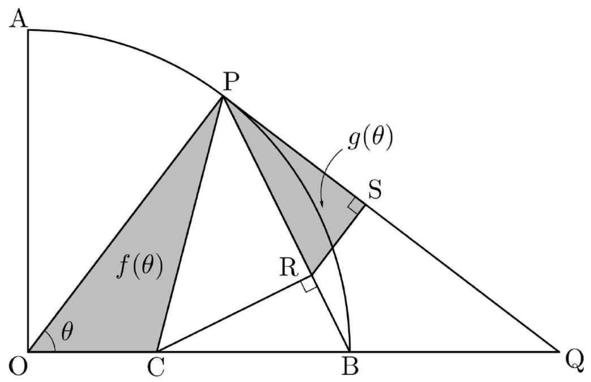
31. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 $\angle AOC = \frac{\pi}{2}$인 점 C가 있다. 호 BC 위에 점 P와 호 CA 위에 점 Q를 $\overline{PB} = \overline{QC}$가 되도록 잡고, 선분 AP 위에 점 R를 $\angle CQR = \frac{\pi}{2}$가 되도록 잡는다. 선분 AP와 선분 CO의 교점을 S라 하자. $\angle PAB = \theta$일 때, 삼각형 POB의 넓이를 $f(\theta)$, 사각형 CQRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{3f(\theta) - 2g(\theta)}{\theta^2}$의 값은? $\left(단, 0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

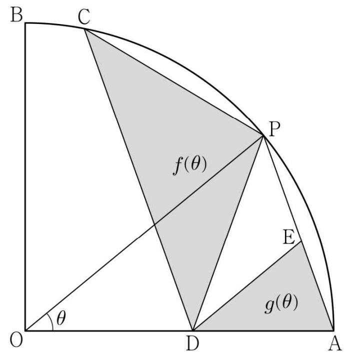
[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 29

32. 그림과 같이 반지름의 길이가 5이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB에서 선분 OB를 $2:3$으로 내분하는 점을 C라 하자. 점 P에서 호 AB에 접하는 직선과 직선 OB의 교점을 Q라 하고, 점 C에서 선분 PB에 내린 수선의 발을 R, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 S라 하자. $\angle \mathrm{POB}=\theta$일 때, 삼각형 OCP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $80 \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$의 값을 구하시오. $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 28

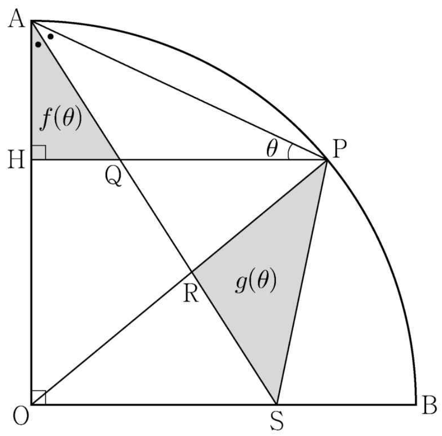
33. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{PD}}$가 되도록 호 PB 위에 점 C와 선분 OA 위에 점 D를 잡는다. 점 D를 지나고 선분 OP와 평행한 직선이 선분 PA와 만나는 점을 E라 하자. $\angle \mathrm{POA}=\theta$일 때, 삼각형 CDP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 EDA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 29

34. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle$OAP를 이등분하는 직선과 세 선분 HP, OP, OB의 교점을 각각 Q, R, S라 하자. $\angle$APH$=\theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PSR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \frac{\theta^3 \times g(\theta)}{f(\theta)} = k$일 때, $100k$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)

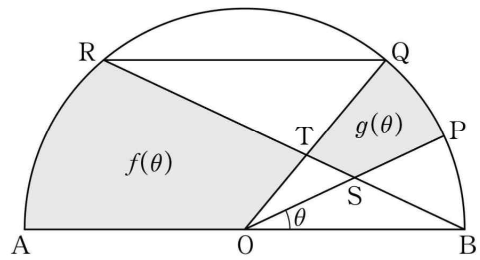


[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 29

35. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 하고 호 AB 위에 두 점 P, Q를

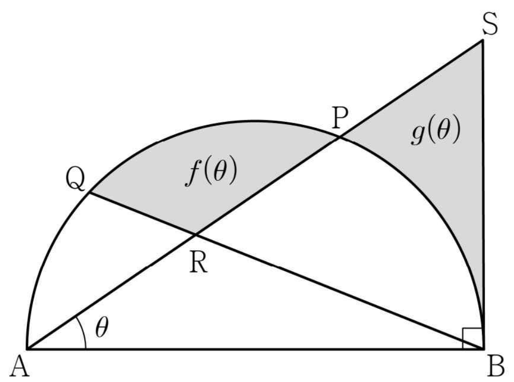
$\angle$BOP$=\theta$, $\angle$BOQ$=2\theta$

가 되도록 잡는다. 점 Q를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R라 하고, 선분 BR가 두 선분 OP, OQ와 만나는 점을 각각 S, T라 하자.
세 선분 AO, OT, TR와 호 RA로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$라 하고, 세 선분 QT, TS, SP와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{f(\theta)} = a$일 때, $80a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 29

36. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 호 AP 위에 점 Q를 호 PB와 호 PQ의 길이가 같도록 잡을 때, 두 선분 AP, BQ가 만나는 점을 R라 하고 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 AP와 만나는 점을 S라 하자. $\angle BAP = \theta$라 할 때, 두 선분 PR, QR와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 PS, BS와 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



06 미적 05 삼각함수의 미분

03 삼각함수의 도함수

04 조건해석2 (극한식의 해석)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 30

37. 함수 $f(x)=a\cos x+x\sin x+b$와 $-\pi<\alpha<0<\beta<\pi$인 두 실수 α, β가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$
> (나) $\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{\beta-\alpha}+\frac{1}{\beta}=0$

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2}=c$일 때, $f\left(\frac{\beta-\alpha}{3}\right)+c=p+q\pi$이다.
두 유리수 p, q에 대하여 $120\times(p+q)$의 값을 구하시오.
(단, a, b, c는 상수이고, $a<1$이다.)

06 미적 06 여러 가지 함수의 미분법

01 몫의 미분법

01 몫의 미분법1 (기본 공식)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 23

38. 함수 $f(x)=\dfrac{x^2-2x-6}{x-1}$에 대하여 $f'(0)$의 값을 구하시오.

06 미적 06 여러 가지 함수의 미분법

02 합성함수의 미분법

01 합성함수 미분법1 (미분계수)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 24

39. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x^3+x)=e^x$$

을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은?

① e ② $\dfrac{e}{2}$ ③ $\dfrac{e}{3}$

④ $\dfrac{e}{4}$ ⑤ $\dfrac{e}{5}$

06 미적 06 여러 가지 함수의 미분법

03 초월함수의 미분법

01 삼각함수1 (공식)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 22

40. 함수 $f(x)=\sin(3x-6)$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오.

06 미적 06 여러 가지 함수의 미분법

03 초월함수의 미분법

05 지수함수1 (공식)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 11

41. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\dfrac{f(x)}{(e^x+1)^2}$라 하자. $f'(0)-f(0)=2$일 때, $g'(0)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

06 미적 06 여러 가지 함수의 미분법

03 초월함수의 미분법

07 지수함수3 (활용)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 11

42. 함수 $f(x)=\dfrac{e^x}{\sin x+\cos x}$에 대하여 $-\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3}{4}\pi$에서 방정식 $f(x)-f'(x)=0$의 실근은? [3점]

① $-\dfrac{\pi}{6}$ ② $\dfrac{\pi}{6}$ ③ $\dfrac{\pi}{4}$

④ $\dfrac{\pi}{3}$ ⑤ $\dfrac{\pi}{2}$

06 미적 06 여러 가지 함수의 미분법

03 초월함수의 미분법

09 로그함수1 (공식)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 23

43. 함수 $f(x)=x\ln(2x-1)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

06 미적 06 여러 가지 함수의 미분법

03 초월함수의 미분법

12 로그함수4 (함수 구하기)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 30

44. $t>\frac{1}{2}\ln 2$ 인 실수 t에 대하여 곡선

$y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2)=\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

06 미적 06 여러 가지 함수의 미분법

03 초월함수의 미분법

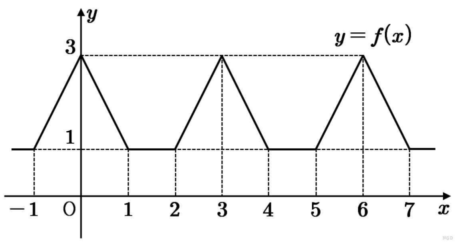
13 초월함수의 미분가능성

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 30

45. 실수전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 $0\leq x<3$일 때 $f(x)=|x-1|+|x-2|$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{h}\right|$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속인 a의 값 중에서 열린구간 $(-5,\ 5)$에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1,\ a_2,\ \cdots\ ,\ a_n$ (n은 자연수)라 할 때, $n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}$의 값을 구하시오.



06 미적 07 여러 가지 미분법

01 매개변수 미분법

02 매개변수 미분법1 (공식)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 6

46. 매개변수 t $(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x=t^2+1,\ y=4\sqrt{t}$$

에서 $t=4$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 24

47. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^t+\cos t,\ y=\sin t$$

에서 $t=0$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 25

48. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^t-4e^{-t},\ y=t+1$$

에서 $t=\ln 2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 25

49. 매개변수 $t(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x=t^2\ln t+3t,\ y=6te^{t-1}$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 25

50. 매개변수 $t(0<t<\pi)$로 나타내어진 곡선

$$x=\sin t-\cos t,\ y=3\cos t+\sin t$$

위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 3일 때, $a+b$의 값은?

① 0 ② $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $-\frac{\sqrt{10}}{5}$
④ $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

06 미적 07 여러 가지 미분법

01 매개변수 미분법

03 매개변수 미분법2 (해석 및 활용)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 7

51. 매개변수 $t(t>0)$으로 나타내어진 함수

$$x=\ln t+t,\ y=-t^3+3t$$

에 대하여 $\frac{dy}{dx}$가 $t=a$에서 최댓값을 가질 때, a의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

06 미적 07 여러 가지 미분법

02 음함수 미분법

01 음함수의 미분법1 (공식)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 7

52. 곡선 $x^2-2xy+3y^3=5$ 위의 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 기울기는?

① $-\frac{6}{5}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{4}{3}$
④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ -2

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 25

53. 곡선 $x^3-y^3=e^{xy}$ 위의 점 $(a,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 b일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 24

54. 곡선 $x^2-y\ln x+x=e$ 위의 점 $(e,\ e^2)$에서의 접선의 기울기는?

① $e+1$ ② $e+2$ ③ $e+3$
④ $2e+1$ ⑤ $2e+2$

06 미적

07 여러 가지 미분법

03 역함수 미분법

01 역함수의 미분법1 (공식)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 9

55. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{e^{x}+2}$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $g'\left(\dfrac{1}{4}\right)$의 값은?

① -5 ② -6 ③ -7

④ -8 ⑤ -9

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 25

56. 함수 $f(x)=x^{3}+2x+3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은?

① 1 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{3}$

④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

06 미적 07 여러 가지 미분법

03 역함수 미분법

02 역함수의 미분법2 (결합 또는 합성함수)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 30

57. 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=-\frac{ax^3+bx}{x^2+1}$$

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq 0$이고, 두 함수 $g(x)=f(x)-f^{-1}(x)$, $h(x)=(g\circ f)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(2)=h(0)$
(나) $g'(2)=-5h'(2)$

$4(b-a)$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 24

58. 함수 $f(x)=x^3+3x+1$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 함수 $h(x)=e^x$에 대하여 $(h\circ g)'(5)$의 값은?

① $\frac{e}{8}$ ② $\frac{e}{7}$ ③ $\frac{e}{6}$
④ $\frac{e}{5}$ ⑤ $\frac{e}{4}$

06 미적 07 여러 가지 미분법

03 역함수 미분법

03 역함수의 미분법3 (해석)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 15

59. 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\ln\left(\frac{\sec x+\tan x}{a}\right)$$

의 역함수를 $g(x)$라 하자. $\lim_{x\to -2}\frac{g(x)}{x+2}=b$일 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, $a>0$)

① $\frac{e^2}{4}$ ② $\frac{e^2}{2}$ ③ e^2

④ $2e^2$ ⑤ $4e^2$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 26

60. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$가 함수 $g(x)$의 역함수이고, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\frac{1}{3}$이다. 함수 $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$라 할 때, $h'(2)$의 값은?

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

06 미적 07 여러 가지 미분법

03 역함수 미분법

05 역함수의 미분법5 (함수 구하기)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 27

61. 양의 실수 t에 대하여 곡선

$$y=\ln(2x^2+2x+1)\,(x>0)$$

과 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $f'(2\ln 5)$의 값은?

① $\frac{25}{14}$ ② $\frac{13}{7}$ ③ $\frac{27}{14}$

④ 2 ⑤ $\frac{29}{14}$

06 미적 07 여러 가지 미분법

03 역함수 미분법

06 역함수의 미분법6 (미분가능성)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 28

62. 두 상수 a, b $(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x-a)(x-b)^2$$

이라 하자. 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(나) $h'(3)=2$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 29

63. 함수 $f(x)=x^3-x$와 실수 전체의 집합에서

미분가능한 역함수가 존재하는 삼차함수

$g(x)=ax^3+x^2+bx+1$이 있다.

함수 $g(x)$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases}(f\circ g^{-1})(x) & (x<0 \text{ 또는 } x>1)\\ \dfrac{1}{\pi}\sin\pi x & (0\le x\le 1)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $g(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

06 미적

08 접선의 방정식

01 접선의 방정식

01 접점 이용1 (기본)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 10

64. 함수 $f(x)=\tan 2x+\dfrac{\pi}{2}$의 그래프 위의 점

$\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{8},\ f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\right)$에서의 접선의 y절편은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{3}{4}$ ③ 1

④ $\dfrac{5}{4}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

06 미적 08 접선의 방정식

01 접선의 방정식

02 접점 이용2 (매개변수)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 미적분 25

65. 매개변수 t로 나타낸 곡선

$$x=e^{t}+2t,\ y=e^{-t}+3t$$

에 대하여 $t=0$에 대응하는 점에서의 접선이 점 $(10, a)$를 지날 때, a의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

06 미적 08 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

01 활용1 (두 직선이 이루는 각의 크기)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 25

66. 원점에서 곡선 $y=e^{|x|}$에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은?

① $\dfrac{e}{e^2+1}$ ② $\dfrac{e}{e^2-1}$ ③ $\dfrac{2e}{e^2+1}$
④ $\dfrac{2e}{e^2-1}$ ⑤ 1

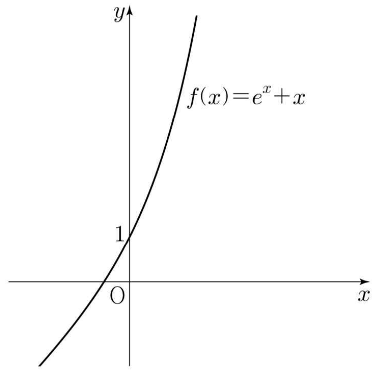
06 미적 08 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

04 활용4 (Mm)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 29

67. 함수 $f(x)=e^x+x$가 있다. 양수 t에 대하여 점 $(t,\ 0)$과 점 $(x,\ f(x))$사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오.



06 미적 09 극대,극소와최대,최소

01 증가와 감소, 극대와 극소

04 극대와 극소1 (기본)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 7

68. 함수 $f(x)=(x^2-2x-7)e^x$의 극댓값과 극솟값을 각각 $a,\ b$라 할 때, $a\times b$의 값은?

① -32 ② -30 ③ -28

④ -26 ⑤ -24

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 28

69. 함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$$

라 하자. $0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

06 미적 09 극대,극소와최대,최소

02 곡선의 개형과 변곡점

04 곡선의 개형4 (변곡점의 해석)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 15

70. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖고 $g(x)$가 증가함수일 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=(f\circ g)(x)$$

라 하자. 점 $(2,\ 2)$가 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이고 $\dfrac{h''(2)}{f''(2)}=4$이다. $f'(2)=4$일 때, $h'(2)$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

06 미적 09 극대,극소와최대,최소

02 곡선의 개형과 변곡점

05 곡선의 개형5 (변곡점과 접선)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 27

71. 곡선 $y=xe^{-2x}$의 변곡점을 A라 하자. 곡선 $y=xe^{-2x}$위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

① e^{-2} ② $3e^{-2}$ ③ 1
④ e^{2} ⑤ $3e^{2}$

06 미적 09 극대,극소와최대,최소

03 그래프의 개형

05 그래프의 개형5 (함수 구하기)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

72. 세 상수 a, b, c $(a>0,\ c>0)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -ax^2+6ex+b & (x<c) \\ a(\ln x)^2-6\ln x & (x\ge c) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
>
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

$f\left(\dfrac{1}{2e}\right)$의 값은?

① $-4\left(e^2+\dfrac{1}{4e^2}\right)$ ② $-4\left(e^2-\dfrac{1}{4e^2}\right)$
③ $-3\left(e^2+\dfrac{1}{4e^2}\right)$ ④ $-3\left(e^2-\dfrac{1}{4e^2}\right)$
⑤ $-2\left(e^2+\dfrac{1}{4e^2}\right)$

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 30

73. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (0 \le x \le 2) \\ \dfrac{f(x)}{x-1} & (x<0 \text{ 또는 } x>2) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, $g(2) \neq 0$이다.
(나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.
(다) $g(k)=0$, $g'(k)=\dfrac{16}{3}$인 실수 k가 존재한다.

함수 $g(x)$의 극솟값이 p일 때, p^2의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 30

74. 최고차항의 계수가 3보다 크고 실수 전체의 집합에서 최솟값이 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=e^x f(x)$$

이다. 양수 k에 대하여 집합 $\{x \mid g(x)=k, x\text{는 실수}\}$의 모든 원소의 합을 $h(k)$라 할 때, 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(k)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(k)$가 $k=t$에서 불연속인 t의 개수는 1이다.
(나) $\lim\limits_{k \to 3e+} h(k) - \lim\limits_{k \to 3e-} h(k) = 2$

$g(-6) \times g(2)$의 값을 구하시오. (단, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0$)

06 미적 09 극대,극소와최대,최소

03 그래프의 개형

06 그래프의 개형6 (정의된 함수)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 29

75. $t>2e$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$인 실수 α에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

06 미적 09 극대,극소와최대,최소

04 최대와 최소

04 Mm4 (함수 구하기)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 30

76. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)=f(\sin^2\pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.

(나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2)=a+b\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

(단, a와 b는 유리수이다.)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 29

77. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(a)=6$인 a에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다.
(나) $g(x)$는 $x=b$, $x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.)

06 미적 10 방부등식에의 활용과 평면운동

01 방정식과 미분

03 방정식과 미분3 (동치변형)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 27

78. 두 함수 $f(x)=e^x$, $g(x)=k\sin x$에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 k의 값은?

① $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$ ② $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$ ③ $\sqrt{2}e^{2\pi}$
④ $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$ ⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}}$

06 미적 10 방부등식에의 활용과 평면운동

01 방정식과 미분

04 방정식과 미분4 (활용)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 20

79. 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{nx}{x^n+1} & (x\neq -1) \\ -2 & (x=-1) \end{cases}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $n=3$일 때, 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$에서 증가한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이 되도록 하는 n에 대하여 방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. 구간 $(-1,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖도록 하는 10이하의 모든 자연수 n의 값의 합은 24이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

06 미적 10 방부등식에의 활용과 평면운동

01 방정식과 미분

05 방정식과 미분5 (함수 구하기)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

80. 두 함수

$$f(x)=x^2-ax+b\ (a>0),\ g(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$$

에 대하여 상수 k와 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(0)<h(4)$

(나) 방정식 $|h(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수는 7이고, 그 중 가장 큰 실근을 α라 할 때 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이다.

$f(1)=-\dfrac{7}{32}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+16b$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } \dfrac{5}{2}<e<3\text{이고, } \lim_{x\to\infty} g(x)=0\text{이다.}\right)$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 28

81. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} \ln|f(x)| & (f(x)\neq 0) \\ 1 & (f(x)=0) \end{cases}$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은?

(가) 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
(나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고,
함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소이다.
(다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$
④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 미적분 30

82. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=e^{\sin \pi x}-1$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)=g(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.
(나) 열린구간 $(0, 3)$에서 방정식 $h(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

$f(3)=\frac{1}{2}$, $f'(3)=0$일 때, $f(2)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

06 미적

10 방부등식에의 활용과 평면운동

01 방정식과 미분

06 방정식과 미분6 (실근 또는 교점의 개수로 정의된 함수)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 미적분 30

83. 두 양수 a, $b(b<1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+ax & (x\le 0) \\ \dfrac{\ln(x+b)}{x} & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. 양수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(m)$이라 할 때, 함수 $g(m)$은 다음 조건을 만족시킨다.

$\lim\limits_{m\to\alpha-} g(m)-\lim\limits_{m\to\alpha+} g(m)=1$을 만족시키는 양수 α가 오직 하나 존재하고, 이 α에 대하여 점 $(b,\ f(b))$는 직선 $y=\alpha x$와 곡선 $y=f(x)$의 교점이다.

$ab^2=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이고, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$이다.)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 30

84. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}$$

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.

$g(5)+\lim\limits_{t\to 5} g(t)=5$일 때, $\lim\limits_{t\to k-} g(t)\neq\lim\limits_{t\to k+} g(t)$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

06 미적 10 방부등식에의 활용과 평면운동

02 부등식과 미분

04 부등식과 미분4 (활용)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 30

85. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
>
> $$-e^{-x+1} \le ax+b \le e^{x-2}$$
>
> 이 성립한다.

$\left| M \times m^3 \right| = \dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 30

86. 최고차항의 계수가 -2인 이차함수 $f(x)$와 두 실수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x+1)}{x} & (x<0) \\ f(x)e^{x-a}+b & (x \ge 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\lim_{x\to 0-} g(x)=2$이고 $g'(a)=-2$이다.
>
> (나) $s<0\le t$이면 $\dfrac{g(t)-g(s)}{t-s}\le -2$이다.

$a-b$의 최솟값을 구하시오.

06 미적 10 방부등식에의 활용과 평면운동

03 속도와 가속도

03 평면 운동2 (속도, 가속도의 크기)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 25

87. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=3t-\frac{2}{\pi}\cos\pi t,\ y=6\ln t-\frac{2}{\pi}\sin\pi t$$

이다. 시각 $t=\frac{1}{2}$에서 점 P의 속력을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 25

88. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>2)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=t\ln t,\ y=\frac{4t}{\ln t}$$

이다. 시각 $t=e^2$에서 점 P의 속력은?

① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 3
④ $\sqrt{10}$ ⑤ $\sqrt{11}$

[미적] [02미분전체] 교사평경 최근 3개년(빠른 정답)

미적 3개년 2022.12.29

1. [정답] ②
2. [정답] ④
3. [정답] ③
4. [정답] ④
5. [정답] ①

6. [정답] ③
7. [정답] ②
8. [정답] ⑤
9. [정답] ①
10. [정답] ①

11. [정답] ①
12. [정답] ②
13. [정답] 5
14. [정답] ③
15. [정답] 18

16. [정답] 18
17. [정답] ⑤
18. [정답] ③
19. [정답] ③
20. [정답] ④

21. [정답] 8
22. [정답] 120
23. [정답] 60
24. [정답] 15
25. [정답] 23

26. [정답] ④
27. [정답] ②
28. [정답] ①
29. [정답] ③
30. [정답] 11

31. [정답] ②
32. [정답] 49
33. [정답] ④
34. [정답] 50
35. [정답] 20

36. [정답] 4
37. [정답] 135
38. [정답] **8**
39. [정답] ④
40. [정답] **3**

41. [정답] ③
42. [정답] ③
43. [정답] **2**
44. [정답] **11**
45. [정답] **331**

46. [정답] ①
47. [정답] ②
48. [정답] ④
49. [정답] ③
50. [정답] ⑤

51. [정답] ⑤
52. [정답] ①
53. [정답] 4
54. [정답] ①
55. [정답] ④

56. [정답] ②
57. [정답] 10
58. [정답] ③
59. [정답] ③
60. [정답] ②

61. [정답] ①
62. [정답] **72**
63. [정답] **15**
64. [정답] ③
65. [정답] ②

66. [정답] ④
67. [정답] 3
68. [정답] ①
69. [정답] ②
70. [정답] ①

71. [정답] ①

72. [정답] ③
73. [정답] **64**
74. [정답] 129
75. [정답] **17**

76. [정답] **29**
77. [정답] **24**
78. [정답] ④
79. [정답] ②
80. [정답] **6**

81. [정답] ⑤
82. [정답] 31
83. [정답] 5
84. [정답] 16
85. [정답] **43**

86. [정답] 4
87. [정답] **13**
88. [정답] ④

[미적] [02미분전체] 교사평경 최근 3개년(해설)

미적 3개년 2022.12.29

1) [정답] ②

[해설]

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+4x}{\ln(x^2+x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{x^2+x}{\ln(x^2+x+1)}\times\frac{x^2+4x}{x^2+x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x}{\ln(x^2+x+1)}\times\lim_{x\to0}\frac{x(x+4)}{x(x+1)}$$
$$=1\times4=4$$

2) [정답] ④

[해설]

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x}\times(\sqrt{x+4}+2)\right\}$$
$$=1\times(2+2)$$
$$=4$$

3) [정답] ③

[해설]

$$\lim_{x\to0+}\frac{\ln(2x^2+3x)-\ln3x}{x}$$
$$=\frac{2}{3}\times\lim_{x\to0+}\frac{\ln\left(\frac{2x}{3}+1\right)}{\frac{2x}{3}}$$
$$=\frac{2}{3}\times\lim_{x\to0+}\ln\left(\frac{2x}{3}+1\right)^{\frac{3}{2x}}$$
$$=\frac{2}{3}\times\ln\lim_{x\to0+}\left(\frac{2x}{3}+1\right)^{\frac{3}{2x}}$$
$$=\frac{2}{3}\ln e=\frac{2}{3}$$

4) [정답] ④

[해설]

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}}{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times3}=\frac{f'(0)}{3}$$

$\frac{f'(0)}{3}=2$에서 $f'(0)=6$

5) [정답] ①

[해설]

$$\lim_{x\to0}\frac{4^x-2^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x(2^x-1)}{x}=\ln2$$

[다른 풀이]

$$\lim_{x\to0}\frac{4^x-2^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{4^x-1-2^x+1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}$$
$$=\ln4-\ln2$$
$$=2\ln2-\ln2$$
$$=\ln2$$

6) [정답] ③

[해설]

두 점 P, Q의 y좌표는 각각 $e^{\frac{k}{2}}$, $e^{\frac{k}{2}+3t}$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=e^{\frac{k}{2}+3t}-e^{\frac{k}{2}}=e^{\frac{k}{2}}(e^{3t}-1)$

점 R의 x좌표는 방정식 $e^{\frac{x}{2}}=e^{\frac{k}{2}+3t}$의 실근이므로

$\frac{x}{2}=\frac{k}{2}+3t$에서 $x=k+6t$

따라서

$\overline{\mathrm{QR}}=(k+6t)-k=6t$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$에서

$e^{\frac{k}{2}}(e^{3t}-1)=6t$

$e^{\frac{k}{2}}=\frac{6t}{e^{3t}-1}$이므로

$k=2\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}$

즉, $f(t)=2\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}$이므로

$$\lim_{t\to0+}f(t)=2\lim_{t\to0+}\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}$$
$$=2\lim_{t\to0+}\ln\frac{2}{\frac{e^{3t}-1}{3t}}$$

$=2\ln 2=\ln 4$

7) [정답] ②

[해설]

$x=t$일 때 두 점 P, Q의 y좌표는 각각

e^{2t+k}, e^{-3t+k}이고

$\overline{PQ}=t$를 만족시키는 k의 값이 $f(t)$이므로

$e^{2t+f(t)}-e^{-3t+f(t)}=t$

$e^{f(t)}(e^{2t}-e^{-3t})=t$

$e^{f(t)}=\dfrac{t}{e^{2t}-e^{-3t}}$

$$\lim_{t\to0+}e^{f(t)}=\lim_{t\to0+}\frac{t}{e^{2t}-e^{-3t}}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{1}{2\times\dfrac{e^{2t}-1}{2t}+3\times\dfrac{e^{-3t}-1}{-3t}}$$

$$=\frac{1}{2\times1+3\times1}=\frac{1}{5}$$

8) [정답] ⑤

[해설]

$f'(x)=e^x+(x+a)e^x=(x+a+1)e^x$

$f'(2)=(a+3)e^2=8e^2$에서 $a=5$

9) [정답] ①

[해설]

$f(x)=\log_3 6x=\log_3 6+\log_3 x$

$f'(x)=(\log_3 6+\log_3 x)'=\dfrac{1}{x\ln 3}$

따라서 $f'(9)=\dfrac{1}{9\ln 3}$

10) [정답] ①

[해설]

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$이므로

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

11) [정답] ①

[해설]

$\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$에서 $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\dfrac{9}{10}=\dfrac{1}{10}$

12) [정답] ②

[해설]

$2\cos\alpha=3\sin\alpha$에서 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{2}{3}$이므로

$\tan\alpha=\dfrac{2}{3}$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{2}{3}+\tan\beta}{1-\dfrac{2}{3}\tan\beta}$$

$$=\frac{2+3\tan\beta}{3-2\tan\beta}$$

이고, $\tan(\alpha+\beta)=1$이므로 $\dfrac{2+3\tan\beta}{3-2\tan\beta}=1$

따라서 $\tan\beta=\dfrac{1}{5}$

13) [정답] 5

[해설]

α, β, γ가 삼각형 ABC의 세 내각의 크기이므로

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ ……㉠

α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$, $\alpha+\gamma=2\beta$ ……㉡

㉠, ㉡ 에서 $3\beta=\pi$, $\beta=\dfrac{\pi}{3}$

$\beta=\dfrac{\pi}{3}$이므로 $\alpha+\gamma=\dfrac{2\pi}{3}$에서

$\cos(\alpha+\gamma)=\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$

$\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma=-\dfrac{1}{2}$ ……㉢

$\cos\alpha$, $2\cos\beta$, $8\cos\gamma$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(2\cos\beta)^2=8\cos\alpha\cos\gamma$

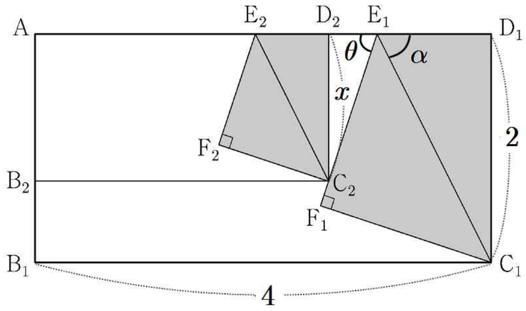
$\cos\alpha\cos\gamma=\frac{1}{8}$ ……㉣

㉢, ㉣ 에서 $\sin\alpha\sin\gamma=\frac{5}{8}$ ……㉤

따라서 $\tan\alpha\tan\gamma=\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\gamma}=5$

14) [정답] ③

[해설]



선분 AD_1을 $3:1$로 내분하는 점을 E_1이므로 $\overline{D_1E_1}=1$

위의 그림에서

$(\triangle C_1D_1E_1$의 넓이$)=\frac{1}{2}\times\overline{D_1E_1}\times\overline{C_1D_1}$

$=\frac{1}{2}\times1\times2$

$=1$ …… ㉠

삼각형 $C_1D_1E_1$에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{E_1C_1}^2=\overline{E_1D_1}^2+\overline{C_1D_1}^2$

$=1^2+2^2=5$

그런데 $\triangle E_1F_1C_1$은 직각이등변삼각형이므로

$\overline{E_1F_1}=\overline{C_1F_1}=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\therefore$ $(\triangle E_1F_1C_1$의 넓이$)=\frac{1}{2}\times\overline{E_1F_1}\times\overline{C_1F_1}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

$=\frac{5}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $S_1=1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$

$\overline{D_2C_2}=x$, $\angle D_1E_1C_1=\alpha$, $\angle D_2E_1C_2=\theta$라 하면 조건에서

$\overline{AB_2}:\overline{AD_2}=1:2$이므로 $\overline{AD_2}=2x$

즉, $\overline{AE_1}=3$이고, $\overline{AD_2}=2x$이므로 $\overline{D_2E_1}=3-2x$

$\therefore \tan\alpha=2,\ \tan\theta=\frac{x}{3-2x}$

그런데 $\theta+\alpha+\frac{\pi}{4}=\pi$이므로 $\theta=\frac{3}{4}\pi-\alpha$

즉, $\tan\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)=\frac{x}{3-2x}$

$\tan\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)=\frac{\tan\frac{3}{4}\pi-\tan\alpha}{1+\tan\frac{3}{4}\pi\tan\alpha}$

$=\frac{-1-2}{1-2}=3$

이므로 $\frac{x}{3-2x}=3$, $x=9-6x$, $7x=9$

$\therefore x=\frac{9}{7}$

따라서 $S_2=\frac{1}{2}\times\frac{9}{7}\times\frac{9}{14}+\frac{5}{4}\times\frac{9}{14}\times\frac{9}{14}=\frac{9}{4}\left(\frac{9}{14}\right)^2$

즉, 수열 $\{S_n\}$은 초항이 $\frac{9}{4}$이고 공비가 $\left(\frac{9}{14}\right)^2$인 등비급수이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{9}{4}}{1-\left(\frac{9}{14}\right)^2}=\frac{441}{115}$$

15) [정답] 18

[해설]

삼각형 BCD는 이등변삼각형이므로

$\angle CBD=\angle DCB=\alpha$이고 $\angle CDA=2\alpha$

삼각형 ADC에서 $\beta=\frac{\pi}{3}-2\alpha$

$\cos2\alpha=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$=2\cos^2\alpha-1=\frac{\sqrt{21}}{7}$

$\sin^2 2\alpha=1-\cos^2 2\alpha=\frac{28}{49}$이고

$0<2\alpha<\pi$이므로 $\sin2\alpha=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

$\tan2\alpha=\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\tan\beta = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right)$$
$$= \frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan 2\alpha}{1 + \tan\frac{\pi}{3} \times \tan 2\alpha}$$
$$= \frac{\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}}{1 + \sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

따라서 $54\sqrt{3} \times \tan\beta = 18$

16) [정답] 18

[해설]
두 직선 l_1, l_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면
$m_1 = \tan\alpha$, $m_2 = \tan\beta$이고
$0 < m_1 < m_2 < 1$에서 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{4}$이다.
직선 l_3은 직선 l_1을 y축에 대하여 대칭이동한 직선이므로
$\angle CBA = 2\alpha$, $\angle BAC = \beta - \alpha$
$\angle ACB = \pi - 2\alpha - (\beta - \alpha) = \pi - (\alpha + \beta)$
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
$$\frac{9}{\sin 2\alpha} = \frac{12}{\sin\{\pi - (\alpha+\beta)\}} = 15 \cdots\cdots ㉠$$
$\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$이고 $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$이므로
$$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}, \quad \tan 2\alpha = \frac{3}{4}$$
$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{3}{4}$$
$3\tan^2\alpha + 8\tan\alpha - 3 = 0$
$(3\tan\alpha - 1)(\tan\alpha + 3) = 0$
$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$이므로 $m_1 = \tan\alpha = \frac{1}{3}$
㉠에서 $\sin\{\pi - (\alpha+\beta)\} = \sin(\alpha+\beta) = \frac{4}{5}$이고
$0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$이므로
$$\cos(\alpha+\beta) = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}, \quad \tan(\alpha+\beta) = \frac{4}{3}$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{3} + \tan\beta}{1 - \frac{1}{3}\tan\beta} = \frac{4}{3}$$
$$1 + 3\tan\beta = 4 - \frac{4}{3}\tan\beta$$
$\frac{13}{3}\tan\beta = 3$에서 $m_2 = \tan\beta = \frac{9}{13}$
따라서 $78 \times m_1 \times m_2 = 78 \times \frac{1}{3} \times \frac{9}{13} = 18$

17) [정답] ⑤

[해설]
$(e^{2x} - 1)^2 f(x) = a - 4\cos\frac{\pi}{2}x$에서 양변에 $x = 0$을 대입하면
$0 = a - 4$에서 $a = 4$
$x \neq 0$이면 $e^{2x} - 1 \neq 0$이므로
$$f(x) = \frac{4 - 4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x} - 1)^2} \; (x \neq 0)$$
이때 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = 0$에서 연속이다.
$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{4 - 4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x} - 1)^2}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{4\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}x\right)\left(1 + \cos\frac{\pi}{2}x\right)}{(e^{2x} - 1)^2\left(1 + \cos\frac{\pi}{2}x\right)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{4\sin^2\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x} - 1)^2\left(1 + \cos\frac{\pi}{2}x\right)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi}{2}x}\right)^2}{\left(\frac{e^{2x} - 1}{2x}\right)^2} \times \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\pi^2}{4}}{1 + \cos\frac{\pi}{2}x}$$
$$= \frac{1^2}{1^2} \times \frac{\frac{\pi^2}{4}}{1 + 1} = \frac{\pi^2}{8}$$
따라서 $a \times f(0) = 4 \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{2}$

18) [정답] ③

[해설]

점 P와 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각

P′, Q′이라 하면 $\overline{\mathrm{OP'}}=t$, $\overline{\mathrm{OQ'}}=f(t)$

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+t^2\sin^2 t}=t\sqrt{1+\sin^2 t}$

$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{PQ}}=t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)$

삼각형 OPP′과 삼각형 OQQ′은 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{OP'}}:\overline{\mathrm{OQ'}}=\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OQ}}$

$t:f(t)=t\sqrt{1+\sin^2 t}:t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)$에서

$$f(t)=\frac{t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$$

$$\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1+\sin^2 t}-1}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sin^2 t}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\times\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}$$

$$=1^2\times\frac{1}{\sqrt{1}\times\left(\sqrt{1}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

19) [정답] ③

[해설]

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos\theta=5-4\cos\theta$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{5-4\cos\theta}$

직선 AE가 ∠BAC의 이등분선이므로

$\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=1:\sqrt{5-4\cos\theta}$에서

$\overline{\mathrm{BE}}=\dfrac{1}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{2}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}$

그러므로

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BE}}\times\sin(\angle\mathrm{CBA})$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{1+}\sqrt{5-4\cos\theta}\times\sin\theta$$

$$=\frac{\sin\theta}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}$$

두 직선 AB, DM이 서로 평행하므로

$\angle\mathrm{CDM}=\theta$, $\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{DFE}$

이다. 이때 $\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{FAC}$이므로 삼각형 AMF는

이등변삼각형이다.

점 M은 선분 AC의 중점이므로

$\overline{\mathrm{FM}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{\sqrt{5-4\cos\theta}}{2}$이고

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}=1$, $\overline{\mathrm{DM}}=\dfrac{1}{2}$

그러므로 $\overline{\mathrm{DF}}=\overline{\mathrm{FM}}-\overline{\mathrm{DM}}=\dfrac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{2}$

$\angle\mathrm{FDC}=\pi-\angle\mathrm{CDM}=\pi-\theta$이므로

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{DF}}\times\sin(\angle\mathrm{FDC})$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{2}\times\sin(\pi-\theta)$$

$$=\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{4}\times\sin\theta$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\sin\theta}{4}\left(\sqrt{5-4\cos\theta}-1\right)}{\theta^2\times\frac{\sin\theta}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\sqrt{5-4\cos\theta}-1\right)\left(\sqrt{5-4\cos\theta}+1\right)}{4\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(5-4\cos\theta)-1}{4\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$

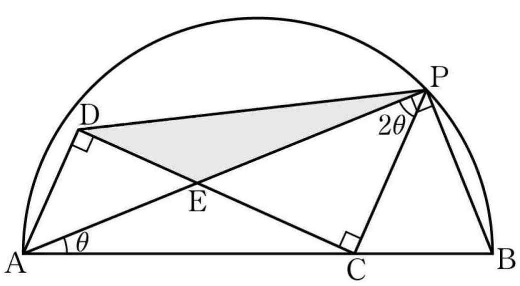
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

20) [정답] ④

[해설]



두 직각삼각형 PCE와 ADE는 닮음이므로

$\overline{\mathrm{EP}}:\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{EC}}:\overline{\mathrm{ED}}$에서 $\overline{\mathrm{EP}}\times\overline{\mathrm{ED}}=\overline{\mathrm{EA}}\times\overline{\mathrm{EC}}$

$\angle\text{DEP}=\frac{\pi}{2}+2\theta$이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\text{EP}}\times\overline{\text{ED}}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{\text{EA}}\times\overline{\text{EC}}\times\cos2\theta$$

직각삼각형 APB에서 $\overline{\text{AP}}=2\cos\theta$

삼각형 ACP에서 $\angle\text{ACP}=\pi-3\theta$이므로

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{\text{AC}}}{\sin2\theta}=\frac{\overline{\text{AP}}}{\sin(\pi-3\theta)}$에서

$$\overline{\text{AC}}=\frac{2\sin2\theta\cos\theta}{\sin3\theta}$$

삼각형 ACE에서 $\angle\text{ACE}=\frac{\pi}{2}-3\theta$, $\angle\text{CEA}=\frac{\pi}{2}+2\theta$이고

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\text{EC}}}{\sin\theta}=\frac{\overline{\text{EA}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)}=\frac{\overline{\text{AC}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)}$$이므로

$$\overline{\text{EC}}=\frac{\overline{\text{AC}}\sin\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)}=\frac{2\sin2\theta\sin\theta\cos\theta}{\sin3\theta\cos2\theta}$$

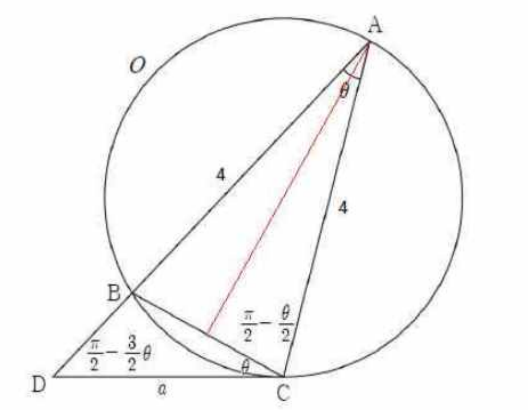
$$\overline{\text{EA}}=\frac{\overline{\text{AC}}\sin\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)}=\frac{2\sin2\theta\cos\theta\cos3\theta}{\sin3\theta\cos2\theta}$$

$$S(\theta)=\frac{2\sin^2 2\theta\sin\theta\cos^2\theta\cos3\theta}{\sin^2 3\theta\cos2\theta}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^2 2\theta\sin\theta\cos^2\theta\cos3\theta}{\theta\sin^2 3\theta\cos2\theta}$$
$$=\frac{8}{9}\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)^2\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\left(\frac{3\theta}{\sin3\theta}\right)^2\left(\frac{\cos^2\theta\cos3\theta}{\cos2\theta}\right)$$
$$=\frac{8}{9}$$

21) [정답] 8

[해설]



이등변삼각형 ABC에서 $\overline{\text{BC}}=8\sin\frac{\theta}{2}$

삼각형 ACD에 사인법칙에 의하면

$$\frac{\overline{\text{CD}}}{\sin\theta}=\frac{4}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\theta\right)},\quad \overline{\text{CD}}=\frac{4\sin\theta}{\cos\frac{3}{2}\theta}$$

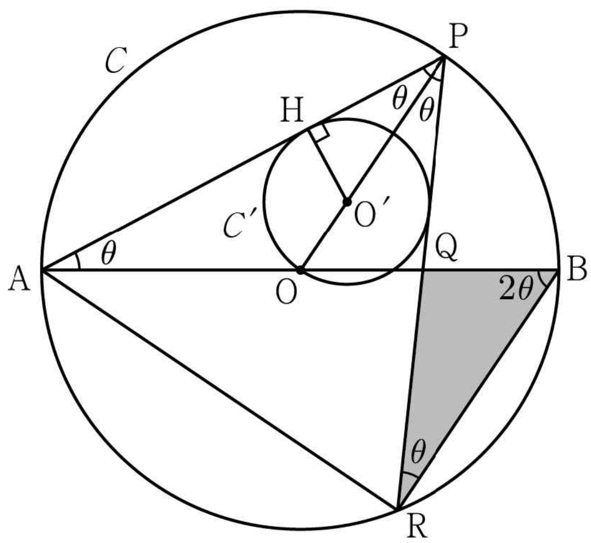
$$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\text{BC}}\times\overline{\text{CD}}\times\sin\theta=\frac{16\sin\frac{\theta}{2}\sin^2\theta}{\cos\frac{3}{2}\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=8$$

22) [정답] 120

[해설]

원 C'의 중심을 O$'$, 원 C'과 선분 PA가 만나는 점을 H라 하자.



삼각형 OPA는 이등변삼각형이므로 $\angle\text{OPA}=\theta$

$r(\theta)=\overline{\text{O}'\text{O}}=\overline{\text{O}'\text{H}}$이므로 $\overline{\text{PO}'}=2-r(\theta)$

삼각형 O$'$PH에서 $\angle\text{PHO}'=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\sin\theta=\frac{\overline{\text{O}'\text{H}}}{\overline{\text{PO}'}}=\frac{r(\theta)}{2-r(\theta)}$$

$$r(\theta)=\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

$\angle$PRB는 호 BP의 원주각이므로 $\angle \mathrm{PRB}=\theta$

$\angle$RBA는 호 AR의 원주각이므로 $\angle \mathrm{RBA}=2\theta$

선분 AB가 원 C의 지름이므로 삼각형

ARB는 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{RB}}=4\cos 2\theta$이다.

삼각형 QRB 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{RB}}}{\sin(\angle \mathrm{BQR})}=\frac{\overline{\mathrm{RQ}}}{\sin(\angle \mathrm{RBQ})}$$

$$\frac{4\cos 2\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{\mathrm{RQ}}}{\sin 2\theta},\ \overline{\mathrm{RQ}}=\frac{4\sin 2\theta\cos 2\theta}{\sin 3\theta}$$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{RQ}}\times\overline{\mathrm{RB}}\times\sin\theta$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{r(\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{8\sin\theta\sin 2\theta(\cos 2\theta)^2}{\sin 3\theta}}{\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{4\sin 2\theta(\cos 2\theta)^2(1+\sin\theta)}{\sin 3\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{4\sin 2\theta}{\sin 3\theta}\times(\cos 2\theta)^2(1+\sin\theta)\right\}$$

$$=4\times\frac{2}{3}\times 1^2\times(1+0)=\frac{8}{3}$$

따라서 $a=\frac{8}{3}$이므로 $45a=120$

23) [정답] 60

[해설]

부채꼴 AFE에서 $\angle \mathrm{EAF}=2\theta$이므로

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times 1^2\times 2\theta=\theta$$

직각삼각형 ABG에서 $\overline{\mathrm{BG}}=2\tan\theta$이므로

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BG}}-\frac{1}{2}\times 1^2\times\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\times 2\tan\theta-\frac{\theta}{2}$$

$$=2\tan\theta-\frac{\theta}{2}$$

따라서

$$40\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=40\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\tan\theta-\frac{\theta}{2}}{\theta}$$

$$=40\times\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{2\tan\theta}{\theta}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=40\times\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{2}{\cos\theta}\times\frac{\sin\theta}{\theta}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=40\times\left(\frac{2}{1}\times 1-\frac{1}{2}\right)=60$$

24) [정답] 15

[해설]

직각삼각형 BMH에서 $\overline{\mathrm{MB}}=1$

$\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{MH}}}{\overline{\mathrm{MB}}}$에서

$\overline{\mathrm{MH}}=\overline{\mathrm{MB}}\times\sin\theta=\sin\theta$

삼각형 DMC에서

$\overline{\mathrm{MD}}=\overline{\mathrm{MH}}=\sin\theta$

$\overline{\mathrm{MC}}=1$,

$$\angle \mathrm{DMC}=\pi-\angle \mathrm{DMB}$$

$$=\pi-\angle \mathrm{AMB}$$

$$=\pi-\frac{\pi-\theta}{2}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\ \text{이므로}$$

$$\triangle \mathrm{DMC}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{MD}}\times\overline{\mathrm{MC}}\times\sin(\angle \mathrm{DMC})$$

$$=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times 1\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}$$

삼각형 HMC에서

MH$=\sin\theta$

MC$=1$

HMC$=\pi-\angle$HMB

$$=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}+\theta\ \text{이므로}$$

$$\triangle \mathrm{HMC}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{MH}}\times\overline{\mathrm{MC}}\times\sin(\angle \mathrm{HMC})$$

$$=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times 1\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

$$\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

이때 $f(\theta)-g(\theta)$

$$=\triangle \mathrm{DMC}-\triangle \mathrm{HMC}$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

$$=\frac{\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)}{2}\ \text{이므로}$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)}{2\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + \cos\theta\right)}{2\theta^3\left(\cos\frac{\theta}{2} + \cos\theta\right)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin\theta\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\theta\right)}{2\theta^3\left(\cos\frac{\theta}{2} + \cos\theta\right)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin\theta\left(\sin^2\theta - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{2\theta^3\left(\cos\frac{\theta}{2} + \cos\theta\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin\theta}{\theta} \times \left\{\lim_{\theta \to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\lim_{\theta \to 0+}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\right\} \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2} + \cos\theta}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \left(1^2 - \frac{1}{4} \times 1^2\right) \times \frac{1}{1+1}$$

$$= \frac{3}{16}$$

따라서 $a = \frac{3}{16}$이므로

$80a = 80 \times \frac{3}{16} = 15$

25) [정답] 23

[해설]

중심각과 원주각의 성질에 의하여 $\angle\text{AOP} = \theta$이므로

$\angle\text{ABP} = \frac{\theta}{2}$

삼각형 OBR 에서

$\angle\text{BRO} = \pi - \left(2\theta + \frac{\theta}{2}\right) = \pi - \frac{5\theta}{2}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\text{OB}}}{\sin\left(\pi - \frac{5\theta}{2}\right)} = \frac{\overline{\text{OR}}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$\frac{1}{\sin\frac{5\theta}{2}} = \frac{\overline{\text{OR}}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ 에서 $\overline{\text{OR}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}$

(ⅰ) 삼각형 POR 에서 $\angle\text{POR} = \pi - 3\theta$ 이므로

$f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{\text{OP}} \times \overline{\text{OR}} \times \sin(\pi - 3\theta)$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}} \times \sin 3\theta$$

$$= \frac{\sin\frac{\theta}{2}\sin 3\theta}{2\sin\frac{5\theta}{2}}$$

(ⅱ) $g(\theta)$는 부채꼴 QOB 의 넓이에서 삼각형 OBR 의 넓이를 뺀 것이므로

$g(\theta) = \frac{1}{2} \times 1^2 \times 2\theta - \frac{1}{2} \times \overline{\text{OB}} \times \overline{\text{OR}} \times \sin 2\theta$

$$g(\theta) = \theta - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}} \times \sin 2\theta$$

$$g(\theta) = \theta - \frac{\sin\frac{\theta}{2}\sin 2\theta}{2\sin\frac{5\theta}{2}}$$

(ⅲ) 이등변삼각형 POQ 에서 점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$$\overline{\text{OH}'} = \overline{\text{OP}} \times \cos\left(\frac{\pi - 3\theta}{2}\right)$$

$$= 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\theta}{2}\right)$$

$$= \sin\frac{3\theta}{2}$$

두 삼각형 OQH′, RQH가 서로 닮음이므로

$\overline{\text{OH}'} : \overline{\text{RH}} = \overline{\text{OQ}} : \overline{\text{RQ}} = 1 : (1 - \overline{\text{OR}})$

$$\overline{\text{RH}} = \overline{\text{OH}'} \times (1 - \overline{\text{OR}}) = \sin\frac{3\theta}{2} \times \left(1 - \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\right)$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$f(\theta) + g(\theta) = \theta + \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{5\theta}{2}} \times (\sin 3\theta - \sin 2\theta)$ 이고,

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}}{\frac{\sin\frac{5\theta}{2}}{\theta}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}$이므로

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta) + g(\theta)}{\overline{\text{RH}}}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta + \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{5\theta}{2}} \times (\sin 3\theta - \sin 2\theta)}{\sin\frac{3\theta}{2} \times \left(1 - \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\right)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+} \frac{1+\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{5\theta}{2}}\times\left(\dfrac{\sin3\theta}{\theta}-\dfrac{\sin2\theta}{\theta}\right)}{\dfrac{\sin\frac{3\theta}{2}}{\theta}\times\left(1-\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\right)}$$

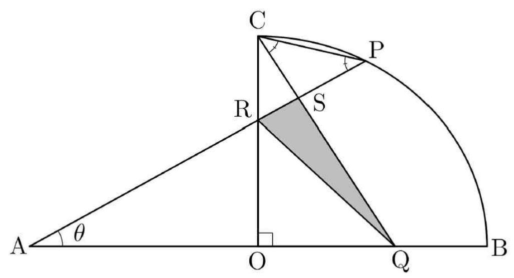
$$= \frac{1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times(3-2)}{\frac{3}{2}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)}$$

$$= \frac{\frac{11}{10}}{\frac{6}{5}} = \frac{11}{12}$$

따라서 $p+q=12+11=23$

26) [정답] ④

[해설]



$\triangle OAP$는 이등변삼각형이므로 $\angle OPA=\theta$이고 $\angle POQ=2\theta$이다.

$\triangle OAP$에 한 점O에서 마주보는 변CP에 수선의 발을 점 M이라 두자.

$\angle COQ=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle COP=\frac{\pi}{2}-2\theta$이다.

이등변삼각형의 꼭짓각은 밑변을 수직이등분하므로

$\angle MOP=\frac{\pi}{4}-\theta$ ($\angle MOP=\angle COM=\angle ROS$····· ㉠)이고

$\triangle OPS$의 한 외각인 $\angle PSM=\frac{\pi}{4}$이다.

이때 $\angle CSP$는 $\angle PSM$의 2배이므로 $\frac{\pi}{2}$이다.

$\overline{AO}=2$이므로 $\overline{RO}=2\tan\theta$

$\overline{CO}$의 길이는 $\overline{CO}-\overline{RO}=2-2\tan\theta$

$\triangle AOR$과 $\triangle CSR$은

$\angle ORA=\angle SRC$(∵ 맞꼭짓각)

$\angle AOR=\angle CSR=90^\circ$

이므로 AA닮음이다.

따라서 $\angle RAO=\angle RCS=\theta$이므로 $\overline{RS}=(2-2\tan\theta)\sin\theta$

□SOQR의 마주보고 있는 두 각인 $\angle ROQ$와 $\angle RSQ$의 합이 π이므로 □SOQR은 원에 내접하는 사각형이다. 따라서

$\angle ROS$와 $\angle RQS$는 원주각으로 같고 $\frac{\pi}{4}-\theta$ (∵ ㉠)이다.

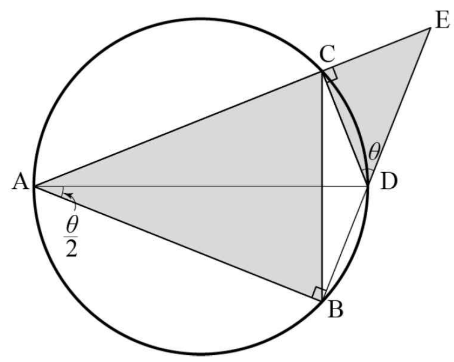
$$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot(1-\tan\theta)^2\cdot\sin^2\theta\cdot\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0}\frac{2^2\cdot(1-\tan\theta)^2\cdot\sin^2\theta}{2\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\cdot\theta^2}$$

$=2$

27) [정답] ②

[해설]



$\angle ABD=\frac{\pi}{2}$이므로 선분 AD는 원의 지름이다.

$\angle ECD=\frac{\pi}{2}$, $\angle DAB=\angle CAD=\frac{\theta}{2}$

$\overline{AB}=10\cos\frac{\theta}{2}$, $\overline{CD}=\overline{BD}=10\sin\frac{\theta}{2}$

$\angle AEB=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 $\angle CDE=\theta$

$\overline{CE}=10\sin\frac{\theta}{2}\tan\theta$

따라서 $f(\theta)=\frac{1}{2}\times\left(10\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin\theta$,

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times10\sin\frac{\theta}{2}\times10\sin\frac{\theta}{2}\tan\theta$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{50\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\theta}{\theta^2\times50\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\times\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\theta}{\theta^2\times\sin\theta}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{1\times\frac{1}{4}\times\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\times\frac{\theta}{\sin\theta}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}$$

28) [정답] ①

[해설]

그림에서 $\overline{OA}=\overline{OP}=$(반지름)$=1$이므로 $\triangle AOP$는 이등변삼각형이다.

즉, $\angle APO=\theta$

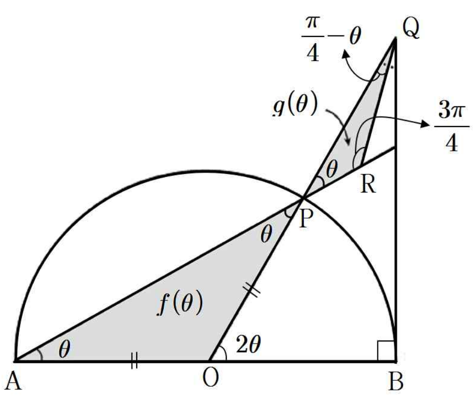
또, $\angle AOP=\pi-2\theta$이므로 $\angle QOB=2\theta$

$\triangle QOB$가 $\angle B$가 직각인 직각삼각형이므로 $\angle OQB=\dfrac{\pi}{2}-2\theta$

따라서 $\angle PQQ=\dfrac{1}{2}\angle OQB=\dfrac{\pi}{4}-\theta$

$\triangle QPR$에서 $\angle APO=\angle QPR=\theta$ (맞꼭지각)이고,

$\angle PQQ=\dfrac{\pi}{4}-\theta$이므로 $\angle QRP=\dfrac{3}{4}\pi$



$\triangle AOP$의 넓이 $f(\theta)$는

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AO}\cdot\overline{OP}\cdot\sin(\angle AOP)$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin(\pi-2\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\sin2\theta \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\triangle QOB$에서 $\overline{OB}=1$이므로 $\overline{OQ}=\dfrac{1}{\cos2\theta}$이므로

$$\overline{QP}=\overline{OQ}-\overline{OP}=\frac{1}{\cos2\theta}-1=\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}$$

따라서 $\triangle PQR$에서 사인법칙을 적용하면

$$\frac{\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}}{\sin\frac{3\pi}{4}}=\frac{\overline{QR}}{\sin\theta},$$

$$\therefore \overline{QR}=\sqrt{2}\sin\theta\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)$$

즉, $\triangle PQR$의 넓이 $g(\theta)$는

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{QR}\cdot\sin(\angle PQR)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)\cdot\sqrt{2}\sin\theta\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)^2\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)^2\sin\theta\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta-\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)^2(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)^2(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)}{\theta^4\sin2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)^2(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)}{2\theta^4\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)^2}{2\theta^4}\cdot\frac{(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)^2}{2\theta^4}\cdot(1-\tan\theta)$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)^2}{2\theta^4}\cdot\lim_{\theta\to0+}(1-\tan\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{1}{\cos2\theta}\right)^2\left(\frac{1-\cos2\theta}{\theta^2}\right)^2\cdot1$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{1}{\cos2\theta}\right)^2\left(\frac{\sin^22\theta}{\theta^2}\times\frac{1}{1+\cos2\theta}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times\left(2^2\times\frac{1}{1+1}\right)^2$$

$$=2$$

29) [정답] ③

[해설]

$\overline{AP}=2\cos\theta$, $\overline{AQ}=\overline{AP}\times\dfrac{\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta}=\dfrac{2\cos\theta\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta}$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}\,\overline{\mathrm{AQ}}\sin\theta=\frac{2\cos\theta\sin\frac{\theta}{3}\sin\theta}{\sin\frac{4}{3}\theta}$$

$$l(\theta)=2\sin\theta$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{l(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta}=\frac{1}{4}$$

30) [정답] 11

[해설]

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\angle\mathrm{AMQ}=2\times\angle\mathrm{ABQ}=2\times2\theta=4\theta$

이므로

(부채꼴 AMQ의 넓이)$=\frac{1}{2}\times1^2\times4\theta=2\theta$,

(삼각형 MBQ의 넓이)$=\frac{1}{2}\times1^2\times\sin(\pi-4\theta)=\frac{1}{2}\sin4\theta$

삼각형 RAB에서 $\angle\mathrm{ARB}=\pi-3\theta$이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{2}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{\mathrm{BR}}}{\sin\theta},$$

즉

$$\overline{\mathrm{BR}}=\frac{2\sin\theta}{\sin3\theta}$$

이므로

$$\begin{aligned}(\text{삼각형 RAB의 넓이})&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BR}}\times\sin2\theta\\&=\frac{1}{2}\times2\times\frac{2\sin\theta}{\sin3\theta}\times\sin2\theta\\&=\frac{2\sin\theta\sin2\theta}{\sin3\theta}\end{aligned}$$

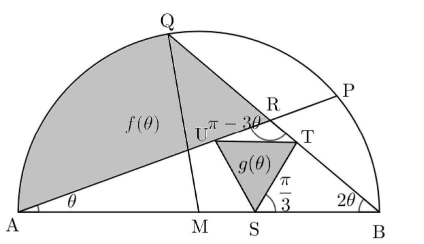
그러므로

$$f(\theta)=2\theta+\frac{1}{2}\sin4\theta-\frac{2\sin\theta\sin2\theta}{\sin3\theta}$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left(2+2\times\frac{\sin4\theta}{4\theta}-\frac{4\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin2\theta}{2\theta}}{3\times\frac{\sin3\theta}{3\theta}}\right)$$

$$=2+2-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\cdots\cdots ㉠$$



정삼각형 STU의 한 변의 길이를 a라 하면 삼각형 TSB에서

사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin2\theta}=\frac{\overline{\mathrm{BT}}}{\sin\frac{\pi}{3}},$$

즉

$$\overline{\mathrm{BT}}=\frac{\sqrt{3}a}{2\sin2\theta}$$

두 삼각형 RUT, RAB가 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{RT}}:\overline{\mathrm{RB}}=\overline{\mathrm{UT}}:\overline{\mathrm{AB}}$

$$\frac{2\sin\theta}{\sin3\theta}-\frac{\sqrt{3}a}{2\sin2\theta}:\frac{2\sin\theta}{\sin3\theta}=a:2$$

$$\frac{2\sin\theta}{\sin3\theta}a=\frac{4\sin\theta}{\sin3\theta}-\frac{\sqrt{3}}{\sin2\theta}a$$

$$\left(\frac{2\sin\theta}{\sin3\theta}+\frac{\sqrt{3}}{\sin2\theta}\right)a=\frac{4\sin\theta}{\sin3\theta}$$

$$\frac{2\sin\theta\sin2\theta+\sqrt{3}\sin3\theta}{\sin2\theta\sin3\theta}a=\frac{4\sin\theta}{\sin3\theta}$$

$$a=\frac{4\sin\theta}{\sin3\theta}\times\frac{\sin2\theta\sin3\theta}{2\sin\theta\sin2\theta+\sqrt{3}\sin3\theta}$$

이때

$$g(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

이고

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{a}{\theta}&=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{4\sin\theta}{\sin3\theta}\times\frac{\sin2\theta\sin3\theta}{2\sin\theta\sin2\theta+\sqrt{3}\sin3\theta}\times\frac{1}{\theta}\right)\\&=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{4\sin\theta}{\sin3\theta}\times\frac{\frac{\sin2\theta\sin3\theta}{\theta^2}}{\frac{2\sin\theta\sin2\theta+\sqrt{3}\sin3\theta}{\theta}}\right)\\&=\frac{4}{3}\times\frac{2\times3}{0+3\sqrt{3}}\\&=\frac{8}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2}&=\frac{\sqrt{3}}{4}\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{a}{\theta}\right)^2\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)^2\\&=\frac{16\sqrt{3}}{27}\cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

따라서 ㉠, ㉡에서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{g(\theta)}{\theta^2}}{\frac{f(\theta)}{\theta}}$$

$$=\frac{\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2}}{\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}}$$

$$= \frac{\frac{16\sqrt{3}}{27}}{\frac{8}{3}}$$

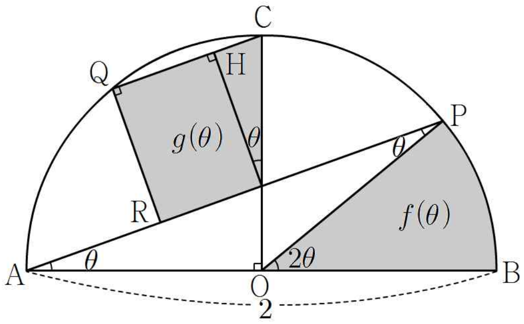
$$= \frac{2}{9}\sqrt{3}$$

이므로

$p+q=9+2=11$

31) [정답] ②

[해설]



$\angle \mathrm{OAP} = \angle \mathrm{OPA} = \theta$이므로 $\angle \mathrm{BOP} = 2\theta$

$$\therefore\ f(\theta) = \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

또한, $\overline{\mathrm{OA}}=1$에서 $\overline{\mathrm{OS}}=\tan\theta$이므로

$$\overline{\mathrm{CS}} = 1-\tan\theta$$

이때, $\angle \mathrm{BOP} = \angle \mathrm{COQ} = 2\theta$이고 삼각형 OCQ는 이등변삼각형이므로

$$\angle \mathrm{SCQ} = \frac{\pi}{2}-\theta$$

또한, $\angle \mathrm{CSR} = \theta + \frac{\pi}{2}$이므로 $\angle \mathrm{QRS} = \frac{\pi}{2}$

따라서 점 S에서 변 CQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle \mathrm{CSH} = \theta$$

이므로

$$\overline{\mathrm{SH}} = \overline{\mathrm{RQ}} = (1-\tan\theta)\cos\theta$$

$$\overline{\mathrm{CH}} = (1-\tan\theta)\sin\theta$$

이고

$$\overline{\mathrm{CQ}} = \overline{\mathrm{BP}} = 2\sin\theta$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{RS}} = \overline{\mathrm{QH}} &= \overline{\mathrm{CQ}} - \overline{\mathrm{CH}} \\ &= 2\sin\theta - (\sin\theta - \sin\theta\tan\theta) \\ &= \sin\theta + \sin\theta\tan\theta \\ &= \sin\theta(1+\tan\theta)\end{aligned}$$

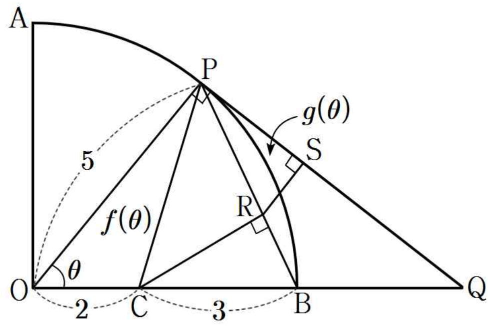
$$\begin{aligned}\therefore\ g(\theta) &= \frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{CQ}}+\overline{\mathrm{RS}})\times\overline{\mathrm{QR}} \\ &= \frac{1}{2}\sin\theta(3+\tan\theta)\times(1-\tan\theta)\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3f(\theta)-2g(\theta) &= \frac{3}{2}\sin 2\theta - \sin\theta\cos\theta(3+\tan\theta)(1-\tan\theta) \\ &= 3\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta(3+\tan\theta)(1-\tan\theta) \\ &= \sin\theta\cos\theta\tan\theta(\tan\theta+2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\lim_{\theta\to 0+}\frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2} \\ &= \lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta\cos\theta\tan\theta(\tan\theta+2)}{\theta^2} \\ &= \lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\times\cos\theta\times(\tan\theta+2)\right\} \\ &= 1\times1\times1\times2 = 2\end{aligned}$$

32) [정답] 49

[해설]



$\overline{\mathrm{OC}}=2$, $\overline{\mathrm{OP}}=5$이므로

$f(\theta) = \frac{1}{2}\times2\times5\sin\theta = 5\sin\theta$ …… ㉠

삼각형 OBP는 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{BP}} = 2\times5\sin\frac{\theta}{2} = 10\sin\frac{\theta}{2}$

$\angle \mathrm{OBP} = \frac{\pi-\theta}{2}$이므로 $\angle \mathrm{BCR} = \frac{\theta}{2}$이고 $\overline{\mathrm{BR}} = 3\sin\frac{\theta}{2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PR}} = \overline{\mathrm{BP}} - \overline{\mathrm{BR}} = 7\sin\frac{\theta}{2}$ …… ㉡

$\angle \mathrm{OPQ} = \frac{\pi}{2}$이고 $\angle \mathrm{OPB} = \frac{\pi-\theta}{2}$이므로

$\angle \mathrm{RPS} = \frac{\theta}{2}$ …… ㉢

$\therefore\ \overline{\mathrm{PS}} = \overline{\mathrm{PR}}\cos\frac{\theta}{2} = 7\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣에서

$$g(\theta) = \frac{1}{2}\times7\sin\frac{\theta}{2}\times7\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\theta}{2}$$

$= \frac{49}{2}\sin^3\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ …… ㉤

㉠, ㉤에서

$$80\times\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$$

$$= 80\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{49}{2}\sin^3\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\theta^2\times5\sin\theta}$$

$$=8\times 49\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^3\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\theta^2\times\sin\theta}$$

$$=8\times 49\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^3\times\cos\frac{\theta}{2}\times\frac{1}{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)}\times\frac{1}{8}$$

$$=8\times 49\times\frac{1}{8}=49$$

33) [정답] ④

[해설]

$\overline{AP}=\overline{PC}$이므로 삼각형 OPC에서

$\angle COP=\angle POA=\theta$

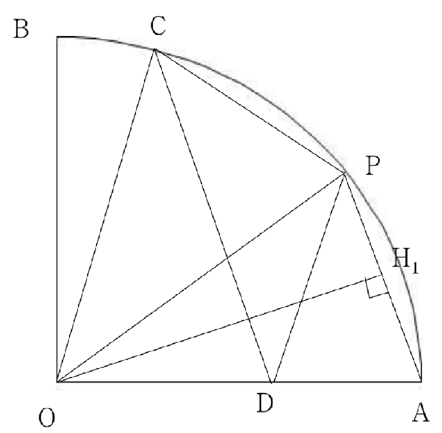
또, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의

발을 H_1이라 하면

$\angle H_1OA=\frac{\theta}{2}$

이므로

$\overline{AP}=2\overline{AH_1}=2\times\overline{OA}\sin\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{\theta}{2}$ …… ㉠



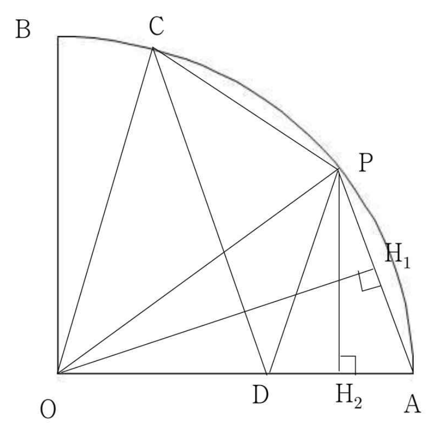
한편, 점 P에서 선분 DA에 내린 수선의 발을 H_2라 하면

$\angle APD=2\angle APH_2$

$=2\times\{\pi-(\angle PH_2A+\angle H_2AP)\}$

$=2\times\left[\pi-\left\{\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}\right]$

$=\theta$



또한

$\angle APO=\angle OPC=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$

이므로

$\angle DPC=\angle APO+\angle OPC-\angle APD$

$=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)-\theta$

$=\pi-2\theta$ ……㉡

㉠과 ㉡으로부터

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PD}\times\overline{PC}\times\sin(\pi-2\theta)$

$=\frac{1}{2}\times\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin 2\theta$

$=2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin 2\theta$

또, ㉠으로부터 삼각형 APD에서

$\overline{DA}=2\overline{AP}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$

$=2\times 2\sin\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\theta}{2}$

$=4\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$

이때, 두 삼각형 OAP, DAE는 닮음이고 $\overline{OA}=1$,

$\overline{DA}=4\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$이므로

$g(\theta)=\triangle DAE$

$=4^2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\triangle OAP$

$=16\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}\sin\theta$

$=8\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\sin\theta$

따라서,

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{8\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\sin\theta}{\theta^2\times 2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin 2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{4\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin\theta}{\theta^2\times\sin 2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{4\times\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{4}}{\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\times 2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

34) [정답] 50

[해설]

직각삼각형 AHP에서 $\angle\mathrm{APH}=\theta$이므로

$\angle\mathrm{HAP}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

한편, 삼각형 OPA는

$\mathrm{OP}=\mathrm{OA}=1$

인 이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{AOP}=\pi-2\times\angle\mathrm{HAP}$

$=\pi-2\times\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=2\theta$

그러므로

$\overline{\mathrm{AH}}=1-\overline{\mathrm{OH}}$

$=1-\mathrm{OP}\cos2\theta$

$=1-\cos2\theta\cdots\cdots$㉠

또,

$\angle\mathrm{HAQ}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{HAP}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}$

이므로

$\overline{\mathrm{HQ}}=\overline{\mathrm{AH}}\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)$

$=(1-\cos2\theta)\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)\cdots\cdots$㉡

㉠과 ㉡에서

$f(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\overline{\mathrm{HQ}}$

$=\dfrac{1}{2}\times(1-\cos2\theta)^2\times\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sin^4 2\theta}{(1+\cos2\theta)^2}\times\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)$

그러므로

$\lim\limits_{\theta\to0-}\dfrac{f(\theta)}{\theta^4}$

$=\dfrac{1}{2}\times16\lim\limits_{\theta\to0+}\left(\dfrac{\sin2\theta}{2\theta}\right)^4\times\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{1}{(1+\cos2\theta)^2}$

$\times\lim\limits_{\theta\to0+}\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times16\times1^2\times\dfrac{1}{4}\times1$

$=2\cdots\cdots$㉢

한편, 이등변삼각형 OPA에서 점 O에서 선분 PA에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 ㉠에서 $\angle\mathrm{H'OP}=\theta$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{PH'}}$

$=2\times\overline{\mathrm{OP}}\times\sin\theta$

$=2\sin\theta$

삼각형 AOP에서 각의 이등분선이 선분 OP와 만나는 점이 R이므로

$\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{OR}}:\overline{\mathrm{RP}}$

$1:2\sin\theta=\mathrm{OR}:1-\mathrm{OR}$

$2\sin\theta\times\overline{\mathrm{OR}}=1-\overline{\mathrm{OR}}$

$\overline{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{1+2\sin\theta}\cdots\cdots$㉣

또,

$\overline{\mathrm{OS}}=\overline{\mathrm{OA}}\tan(\angle\mathrm{SAO})$

$=1\times\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)$

$=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)\ \cdots-(a)$

㉣과 ㉤에서

$g(\theta)=\triangle\mathrm{OSP}-\triangle\mathrm{OSR}$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OS}}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\sin(\angle\mathrm{POS})$

$-\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OS}}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin(\angle\mathrm{POS})$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OS}}\times\sin(\angle\mathrm{POS})\times(\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OR}})$

$=\dfrac{1}{2}\times\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)\times\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\theta\right)$

$\times\left(1-\dfrac{1}{2\sin\theta+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)\times\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\theta\right)$

$\times\dfrac{2\sin\theta}{2\sin\theta+1}$

그러므로

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{g(\theta)}{\theta}$

$=\dfrac{1}{2}\times\lim\limits_{\theta\to0+}\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)\times\lim\limits_{\theta\to0+}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\theta\right)$

$\times2\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\sin\theta}{\theta}\times\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{1}{2\sin\theta+1}$

$=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times2\times1\times1=1\cdots\cdots$㉥

따라서, ㉢과 ㉥을 이용하면

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\theta^3\times g(\theta)}{f(\theta)}$

$=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\dfrac{g(\theta)}{\theta}}{\dfrac{f(\theta)}{\theta^4}}$

$=\frac{1}{2}$

이므로

$100k=100\times\frac{1}{2}=50$

35) [정답] 20

[해설]

$\angle RBO=\angle BRQ=\frac{1}{2}\angle BOQ=\theta$이므로

$\angle OST=2\theta$, $\angle OTS=\pi-3\theta$

삼각형 OBS에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{OS}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(\pi-2\theta)}$, $\overline{OS}=\frac{\sin\theta}{\sin2\theta}$

삼각형 OBT에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{OT}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(\pi-3\theta)}$, $\overline{OT}=\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}$

$\angle ROA=2\times\angle RBA=2\theta$, $\angle TOR=\pi-4\theta$

$f(\theta)=$(부채꼴 ORA의 넓이)+(삼각형 OTR의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta+\frac{1}{2}\times1\times\overline{OT}\times\sin(\pi-4\theta)$

$=\theta+\frac{\sin\theta\sin4\theta}{2\sin3\theta}$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left(1+\frac{4\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin4\theta}{4\theta}}{6\times\frac{\sin3\theta}{3\theta}}\right)$$

$$=1+\frac{4\times1\times1}{6\times1}=\frac{5}{3}$$

$g(\theta)=$(부채꼴 OPQ의 넓이)$-$ (삼각형 OST의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times1^2\times\theta-\frac{1}{2}\times\overline{OS}\times\overline{OT}\times\sin\theta$

$=\frac{\theta}{2}-\frac{\sin^3\theta}{2\sin2\theta\sin3\theta}$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3}{12\times\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times\frac{\sin3\theta}{3\theta}}\right\}$$

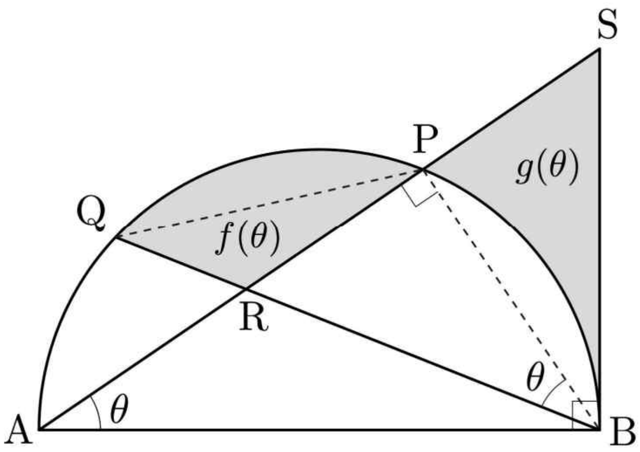
$$=\frac{1}{2}-\frac{1^3}{12\times1\times1}=\frac{5}{12}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{g(\theta)}{\theta}}{\frac{f(\theta)}{\theta}}=\frac{1}{4}$$

따라서 $a=\frac{1}{4}$이므로 $80a=80\times\frac{1}{4}=20$

36) [정답] 4

[해설]



호 PB와 호 PQ의 길이가 서로 같으므로 원주각의 성질에 의하여 $\angle PAB=\angle QBP=\theta$

$\angle ABS=\angle APB=\frac{\pi}{2}$이고 $\angle PBA=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 $\angle SBP=\theta$

두 삼각형 SPB, RPB는 서로 합동이므로 두 삼각형 SPB, RPB의 넓이가 서로 같다.

선분 PQ와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이와 선분 PB와 호 PB로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같다.

그러므로 $f(\theta)+g(\theta)$는 삼각형 QBP의 넓이와 같다.

$\overline{PB}=\overline{PQ}=2\sin\theta$

$f(\theta)+g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PB}\times\overline{PQ}\times\sin(\pi-2\theta)$

$=\frac{1}{2}\times(2\sin\theta)^2\times\sin2\theta$

$=2\sin^2\theta\sin2\theta$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^2\theta\sin2\theta}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(2\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\frac{\sin2\theta}{\theta}\right)$$

$$=2\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times2\right)$$

$=2\times1^2\times2=4$

37) [정답] 135

[해설]

$f(x)=a\cos x+x\sin x+b$에서

$f'(x)=(1-a)\sin x+x\cos x$

$\cos x=0$이면 $\sin x\neq0$이고 $a<1$이므로 $f'(x)\neq0$

그러므로 $f'(x)=0$이면 $\cos x\neq0$이고

$f'(x)=0$에서

$x\cos x=(a-1)\sin x$

$\tan x=\frac{x}{a-1}$ ⋯⋯ ㉠

함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{a-1}$는 모두

원점에 대하여 대칭이고

$a<1$에서 직선 $y=\frac{x}{a-1}$의 기울기가 음수이므로

$-\pi<x<\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와

직선 $y=\frac{x}{a-1}$는 원점을 포함한 서로 다른

세 점에서 만난다.

조건 (가)에서 원점을 제외한 두 점의 x좌표는 α, β이고

원점을 제외한 두 점은 원점에 대하여 대칭이므로

$\alpha=-\beta$이다.

조건 (나)에서

$\frac{1}{\beta}=-\frac{\tan\beta-\tan(-\beta)}{\beta-(-\beta)}=-\frac{\tan\beta}{\beta}$

$\tan\beta=-1$

$0<\beta<\pi$이므로 $\beta=\frac{3}{4}\pi$, $\alpha=-\frac{3}{4}\pi$

㉠에 $x=\frac{3}{4}\pi$를 대입하면

$\tan\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{4(a-1)}\pi$, $-4(a-1)=3\pi$

$a=1-\frac{3}{4}\pi\cdots\cdots$㉡

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=c$에서 $\lim_{x\to0}x^2=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(a\cos x+x\sin x+b)=a+b=0$

$b=-a$이고

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{a(\cos x-1)+x\sin x}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\left\{\frac{a(\cos x-1)}{x^2}+\frac{\sin x}{x}\right\}\\&=\lim_{x\to0}\left\{\frac{a(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^2(\cos x+1)}+\frac{\sin x}{x}\right\}\\&=\lim_{x\to0}\left\{-\frac{a\sin^2 x}{x^2(\cos x+1)}+\frac{\sin x}{x}\right\}\\&=-\frac{a}{2}+1=c\end{aligned}$$

㉡에서 $c=-\frac{a}{2}+1=-\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{4}\pi\right)+1=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\pi$

따라서

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\beta-\alpha}{3}\right)+c&=f\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\pi\\&=\frac{\pi}{2}-\left(1-\frac{3}{4}\pi\right)+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\pi\\&=-\frac{1}{2}+\frac{13}{8}\pi=p+q\pi\end{aligned}$$

에서 $p=-\frac{1}{2}$, $q=\frac{13}{8}$이므로 $120\times(p+q)=135$

38) [정답] **8**

[해설]

$$f(x)=\frac{x^2-2x-6}{x-1}=\frac{(x-1)^2-7}{x-1}=x-1-\frac{7}{x-1}$$

이므로 x에 대하여 양변을 미분하면

$$f'(x)=1+\frac{7}{(x-1)^2}$$

$$\therefore f'(0)=1+7=8$$

39) [정답] ④

[해설]

$f(x^3+x)=e^x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x^3+x)\times(x^3+x)'=(e^x)'$

$f'(x^3+x)\times(3x^2+1)=e^x$

$f'(x^3+x)=\frac{e^x}{3x^2+1}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x^3+x=2$에서

$x^3+x-2=0$

$(x-1)(x^2+x+2)=0$

$x=1$ 또는 $x^2+x+2=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

이차방정식 $x^2+x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times1\times2=-7<0$

이므로 이차방정식 $x^2+x+2=0$을 만족시키는 실수는

존재하지 않는다.

그러므로 ㉡에서 $x=1$이다.

따라서 ㉠에 $x=1$을 대입하면

$f'(2)=\frac{e}{4}$

40) [정답] **3**

[해설]

$f'(x)=3\cos(3x-6)$이므로 $f'(2)=3\cos0=3$

41) [정답] ③

[해설]

$$g'(x)=\frac{f'(x)\times(e^x+1)^2-f(x)\times\{2(e^x+1)\times e^x\}}{\{(e^x+1)^2\}^2}$$

$$=\frac{(e^x+1)f'(x)-2e^xf(x)}{(e^x+1)^3}$$

이고, $f'(0)-f(0)=2$이므로

$$g'(0)=\frac{(1+1)f'(0)-2\times1\times f(0)}{(1+1)^3}=2\times\frac{f'(0)-f(0)}{8}$$

$$=2\times\frac{2}{8}=\frac{1}{2}$$

42) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)=\dfrac{e^x}{\sin x+\cos x}$ 의 양변을 미분하면

$$f'(x)=\frac{e^x(\sin x+\cos x)-e^x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$=\frac{2e^x\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}$$

조건에서 $f(x)=f'(x)$이므로

$$\frac{e^x}{\sin x+\cos x}=\frac{2e^x\sin x}{(\sin x+\cos x)^2},$$

$$2\sin x=\sin x+\cos x$$

$$\therefore \sin x=\cos x$$

즉 $\tan x=1$이므로 $x=\dfrac{\pi}{4}\left(\because\ -\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3}{4}\pi\right)$

43) [정답] **2**

[해설]

함수 $f(x)=x\ln(2x-1)$를 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\ln(2x-1)+\dfrac{2x}{2x-1}$ 이므로 $f'(1)=2$

44) [정답] **11**

[해설]

곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 서로 다른 두 점을 $(\alpha,\ \alpha+t)$, $(\beta,\ \beta+t)$ (단, $\alpha<\beta$)라 하면

$$f(t)=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}$$

$$=\sqrt{2}(\beta-\alpha) \quad \cdots\cdots ㉠$$

곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$와 직선 $y=x+t$를 연립하면

$$\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})=x+t,$$

$$1+e^{2x}-e^{-2t}=e^{x+t},$$

$$e^{2x}-e^t\times e^x+1-e^{-2t}=0,$$

$$(e^x+e^{-t})(e^x-e^{-t})-e^t(e^x-e^{-t})=0,$$

$$(e^x-e^{-t})(e^x+e^{-t}-e^t)=0$$

$$\therefore e^x=e^{-t} \text{ 또는 } e^x=e^t-e^{-t}$$

$$\therefore x=-t \text{ 또는 } x=\ln(e^t-e^{-t})$$

그런데, $t>\dfrac{1}{2}\ln2$이므로 $e^t-e^{-t}>e^{-t}$

즉, $\alpha=-t$, $\beta=\ln(e^t-e^{-t})$

㉠에 대입하면 $f(t)=\sqrt{2}\{\ln(e^t-e^{-t})+t\}=\sqrt{2}\ln(e^{2t}-1)$

양변을 미분하면 $f'(t)=\dfrac{2\sqrt{2}e^{2t}}{e^{2t}-1}$이므로

$$f'(\ln2)=\frac{2\sqrt{2}\times4}{4-1}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

따라서 $p=3$, $q=8$이므로 $p+q=3+8=11$

45) [정답] **331**

[해설]

$g(x)=\displaystyle\lim_{h\to0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{h}\right|$에서 $f(2^x)=h(x)$라 하면

$$g(x)=\lim_{h\to0+}\left|\frac{h(x+h)-h(x)}{h}\right|$$

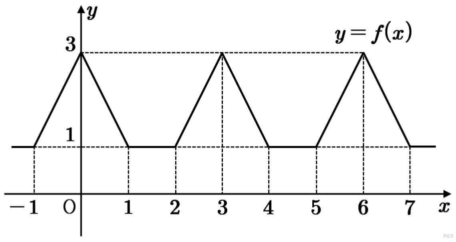
$$=\left|\lim_{h\to0+}\frac{h(x+h)-h(x)}{h}\right| \quad \cdots\cdots ㉠$$

또, $f(2^x)=h(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$h'(x)=f'(2^x)\cdot2^x\ln2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{h(x+h)-h(x)}{h}$가 의미하는 것은 x좌표에서의 우미분계수를 의미한다.

$0\le x<3$에서 $f(x)=|x-1|+|x-2|$이고,
$f(x+3)=f(x)$를 만족하므로 함수 $f(x)$의 그래프와 식은 다음과 같다.



$$f(x)=\begin{cases} -2x+3 & (0 \le x < 1) \\ 1 & (1 \le x < 2) \\ 2x-3 & (2 \le x < 3) \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

각각의 식을 미분하면

$$f'(x)=\begin{cases} -2 & (0 \le x < 1) \\ 0 & (1 \le x < 2) \\ 2 & (2 \le x < 3) \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

$$\therefore f'(2^x)=\begin{cases} -2 & (0 \le 2^x < 1) \\ 0 & (1 \le 2^x < 2) \\ 2 & (2 \le 2^x < 3) \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

㉡에 대입하면

$$h'(x)=\begin{cases} -2\ln 2 \cdot 2^x & (0 \le 2^x < 1) \\ 0 & (1 \le 2^x < 2) \\ 2\ln 2 \cdot 2^x & (2 \le 2^x < 3) \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

열린구간 $(-5,\ 5)$, 즉 $-5 < x < 5$의 범위이므로 $2^{-5} < 2^x < 2^5$에서 $g(x)$의 불연속점을 구하면 된다.

(i) $2^{-5} < 2^x < 1$일 때, 즉 $-5 < x < 0$ 에서

$g(x) = 2\ln 2 \cdot 2^x$

(ii) $1 \le 2^x < 2$일 때, 즉, $0 \le x < 1$에서

$g(x) = 0$

(iii) $2 \le 2^x < 3$일 때, 즉, $1 \le x < \log_2 3$에서

$g(x) = 2\ln 2 \cdot 2^x$

(iv) $3 \le 2^x < 4$일 때, 즉, $\log_2 3 \le x < 2$에서

$g(x) = 2\ln 2 \cdot 2^x$

(v) $4 \le 2^x < 5$일 때, 즉, $2 \le x < \log_2 5$에서

$g(x) = 0$

(vi) $5 \le 2^x < 6$일 때, 즉, $\log_2 5 \le x < \log_2 6$에서

$g(x) = 2\ln 2 \cdot 2^x$

$\vdots$

($*$) $31 \le 2^x < 32$일 때, 즉, $\log_2 31 \le x < 5$에서

$g(x) = 0$

따라서 $2^x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 29,\ 31$에서의 연속성을 조사해보면 다음과 같다.

따라서 불연속점은 $x = \log_2 1,\ \log_2 2,\ \log_2 4,\ \log_2 5,\ \cdots,$ $\log_2 28,\ \log_2 29,\ \log_2 31$ ($\because x$가 3의 배수인 점들은 연속이다.)

또, 불연속점의 개수는 $31-10=21$(개)이다.

그런데, $\log_2 1,\ \log_2 4,\ \log_2 7,\ \cdots$인 점에서는 $g(a_m)=0$이고, $x=\log_2 2,\ \log_2 5,\ \log_2 8,\ \cdots,\ \log_2 29$인 점에서는 $g(a_m) = 2\ln 2 \cdot 2^x$이므로

$$g(a_m) = 2\ln 2 \cdot 2^{\log_2 2},\ 2\ln 2 \cdot 2^{\log_2 5},\ 2\ln 2 \cdot 2^{\log_2 8},\ \cdots$$

으로 봐도 무방하다.

즉, $g(a_m)$의 개수는 10개이고

$$g(a_m) = 4\ln 2,\ 10\ln 2,\ 16\ln 2,\ \cdots$$

따라서 수열 $\{g(a_m)\}$의 일반항은

$$g(a_m) = 4\ln 2 + (m-1)6\ln 2$$

$= (6m-2)\ln 2$

로 볼 수 있다.

$$\therefore\ n + \sum_{k=1}^{n} \frac{g(a_k)}{\ln 2} = 21 + \sum_{m=1}^{10} \frac{g(a_m)}{\ln 2}$$

$= 21 + \sum_{m=1}^{10} \frac{(6m-2)\ln 2}{\ln 2}$

$= 21 + \sum_{m=1}^{10} (6m-2)$

$= 21 + 6 \cdot \frac{10 \times 11}{2} - 2 \cdot 10$

$= 21 + 330 - 20$

$= 331$

46) [정답] ①

[해설]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{t}}}{2t} = \frac{1}{t\sqrt{t}}$$

따라서 $t=4$일 때 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{8}$

47) [정답] ②

[해설]

$x=e^t+\cos t$, $y=\sin t$를 각각 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=e^t-\sin t,\ \frac{dy}{dt}=\cos t$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{e^t-\sin t}$$

$t=0$을 대입하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos 0}{e^0-\sin 0}=1$

48) [정답] ④

[해설]

$x=e^t-4e^{-t}$, $y=t+1$에서 $\frac{dx}{dt}=e^t+4e^{-t}$, $\frac{dy}{dt}=1$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{e^t+4e^{-t}}$$

따라서 $t=\ln 2$일 때, $\frac{dt}{dx}$의 값은

$$\frac{1}{e^{\ln 2}+4e^{-\ln 2}}=\frac{1}{2+4\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

49) [정답] ③

[해설]

$\frac{dx}{dt}=2t\ln t+t+3$

$\frac{dy}{dt}=6e^{t-1}+6te^{t-1}=6e^{t-1}(1+t)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6e^{t-1}(1+t)}{2t\ln t+t+3}\ (2t\ln t+t+3\neq 0)$

따라서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}=\frac{6\times 2}{1+3}=\frac{12}{4}=3$

50) [정답] ⑤

[해설]

$\frac{dx}{dt}=\cos t+\sin t$, $\frac{dy}{dt}=-3\sin t+\cos t$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-3\sin t+\cos t}{\cos t+\sin t}$ (단, $\cos t+\sin t\neq 0$)

$\frac{dy}{dx}=3$인 t의 값을 $\alpha(0<\alpha<\pi)$라 하면

$\cos\alpha=-3\sin\alpha$

$\sin 2\alpha+\cos^2\alpha=1$이므로 $\sin^2\alpha+9\sin^2\alpha=1$

$\sin\alpha>0$이므로 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$a=\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{2\sqrt{10}}{5}$, $b=3\cos\alpha+\sin\alpha=-\frac{4\sqrt{10}}{5}$

따라서 $a+b=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

51) [정답] ⑤

[해설]

$x=\ln t+t$, $y=-t^3+3t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-3t^2+3}{\frac{1}{t}+1}=\frac{-3t(t+1)(t-1)}{t+1}=-3t(t-1)$$

이때, $f(t)=-3t(t-1)$이라 하면 함수 $y=f(t)$의 그래프는

$t=\frac{1}{2}$에서 대칭이고 최고차항의 계수가 음수이므로

$t=\frac{1}{2}$에서 최댓값을 갖는다.

따라서 $a=\frac{1}{2}$

52) [정답] ①

[해설]

$2x-2y-2x\frac{dy}{dx}+9y^2\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{2x-2y}{2x-9y^2}=\frac{4+2}{4-9}=-\frac{6}{5}$

53) [정답] 4

[해설]

점 $(a,\ 0)$은 곡선 $x^3-y^3=e^{xy}$ 위의 점이므로 $a^3=1$에서

$a=1$

$x^3-y^3=e^{xy}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2-3y^2\frac{dy}{dx}=e^{xy}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-ye^{xy}}{xe^{xy}+3y^2}\ (\text{단, } xe^{xy}+3y^2\neq 0)$$

곡선 $x^3-y^3=e^{xy}$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$$b=\frac{3-0}{1+0}=3$$

따라서

$a+b=1+3=4$

54) [정답] ①

[해설]

$x^2-y\ln x+x=e$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x-\frac{dy}{dx}\times\ln x-y\times\frac{1}{x}+1=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-\frac{y}{x}+1}{\ln x}$$

그러므로 점 $(e,\ e^2)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2e-\frac{e^2}{e}+1}{\ln e}=e+1$$

55) [정답] ④

[해설]

$g\left(\frac{1}{4}\right)=k$라 하면 $f(k)=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{e^k+2}=\frac{1}{4}$이므로 $e^k=2$, 즉 $k=\ln 2$

$f'(x)=-\frac{e^x}{(e^x+2)^2}$이므로 $f'(\ln 2)=-\frac{1}{8}$

따라서 $g'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{f'(\ln 2)}=-8$

56) [정답] ②

[해설]

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)=x^3+2x+3$의 역함수이므로

$x=y^3+2y+3$ ……㉠

$x=3$일 때,

$3=y^3+2y+3$

$y(y^2+2)=0$

$y=0$

또, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$1=(3y^2+2)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3y^2+2}$$

따라서,

$$g'(3)=\frac{1}{3\times 0^2+2}=\frac{1}{2}$$

57) [정답] 10

[해설]

$f(x)=-\frac{ax^3+bx}{x^2+1}$에서

$f'(x)=-\frac{(3ax^2+b)(x^2+1)-(ax^3+bx)(2x)}{(x^2+1)^2}$이므로

$$f'(x)=-\frac{ax^4+(3a-b)x^2+b}{(x^2+1)^2}\qquad \cdots\cdots ㉠$$

모든 실수 x에 대하여 $x^2+1\neq 0$이므로 함수 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq 0$이고 $f'(0)=-b<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이다.

$h(x)=g(f(x))=f(f(x))-x$이므로

$h(0)=f(f(0))-0=f(0)=0$이다.

조건 (가)에서 $g(2)=f(2)-f^{-1}(2)=h(0)=0$이므로

$f(2)=f^{-1}(2)=t$ (t는 상수)라 하면 $f(t)=2$이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

$f(-2)=-f(2)=-t$이다.

즉 두 점 $(t,\ 2)$, $(-2,\ -t)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 있다.

$t\neq -2$일 때, 두 점 $(t,\ 2)$, $(-2,\ -t)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{2-(-t)}{t-(-2)}=1$이므로 평균값 정리에 의하여 $f'(c)=1$인 상수 c가 존재한다. 그러나 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이므로 모순이다. 즉 $t=-2$

$f(2)=-2$에서 $-\frac{8a+2b}{5}=-2$

그러므로 $4a+b=5$ …… ㉡

$f^{-1}(2)=-2$이므로 역함수의 미분법에 의하여

$$g'(2)=f'(2)-(f^{-1})'(2)=f'(2)-\frac{1}{f'(-2)}$$

㉠에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$이므로

$f'(-2)=f'(2)$이다.

즉 $g'(2)=f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}$

$h(x)=f(f(x))-x$에서 $h'(x)=f'(f(x))f'(x)-1$이므로

$h'(2)=f'(f(2))f'(2)-1=f'(-2)f'(2)-1=\{f'(2)\}^2-1$

조건 (나)에서 $g'(2)=-5h'(2)$이므로

$f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}=-5\{f'(2)\}^2+5$

$5\{f'(2)\}^3+\{f'(2)\}^2-5f'(2)-1=0$

$\{5f'(2)+1\}\{f'(2)+1\}\{f'(2)-1\}=0$

$f'(x)<0$이므로 $f'(2)=-\dfrac{1}{5}$ 또는 $f'(2)=-1$이다.

㉠에서 $f'(2)=-\dfrac{16a+4(3a-b)+b}{(4+1)^2}=-\dfrac{28a-3b}{25}$

(i) $f'(2)=-\dfrac{1}{5}$일 때, $-\dfrac{28a-3b}{25}=-\dfrac{1}{5}$이므로

$28a-3b=5$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하면 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=3$이다.

(ii) $f'(2)=-1$일 때, $-\dfrac{28a-3b}{25}=-1$이므로

$28a-3b=25$ …… ㉣

㉡, ㉣을 연립하면 $a=1$, $b=1$이므로 모순이다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 $4(b-a)=4\times\left(3-\dfrac{1}{2}\right)=10$

58) [정답] ③

[해설]

$k(x)=(h\circ g)(x)$라 하면 $k(x)=e^{g(x)}$이고,

$k'(x)=e^{g(x)}\times g'(x)$ …… ㉠

$g(5)=a$라 하면 $f(a)=5$에서

$a^3+3a+1=5$, $a^3+3a-4=0$

$(a-1)(a^2+a+4)=0$

$a=1$이므로 $g(5)=1$

$f'(x)=3x^2+3$에서 $g'(5)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{6}$

따라서 ㉠에서 $k'(5)=e^{g(5)}\times g'(5)=\dfrac{e}{6}$이다.

59) [정답] ③

[해설]

$\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{g(x)}{x+2}=b$에서 $x\to-2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이

존재하므로 $\displaystyle\lim_{x\to-2}g(x)=0$

함수 $f(x)$가 열린구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 연속이므로 함수

$f(x)$의 역함수 $g(x)$도 $x=-2$를 포함한 구간에서 연속이다.

그러므로 $g(-2)=\displaystyle\lim_{x\to-2}g(x)=0$이고, $f(0)=-2$

이때 $f(0)=\ln\left(\dfrac{\sec0+\tan0}{a}\right)=\ln\dfrac{1}{a}=-\ln a$이므로

$-\ln a=-2$, $\ln a=2$, $a=e^2$

또 미분계수의 정의에 의하여

$$b=\lim_{x\to-2}\frac{g(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}=g'(-2)$$

한편, $f(x)=\ln\left(\dfrac{\sec x+\tan x}{a}\right)=\ln(\sec x+\tan x)-2$에서

$$f'(x)=\frac{(\sec x+\tan x)'}{\sec x+\tan x}=\frac{\sec x\tan x+\sec^2x}{\sec x+\tan x}$$

$$=\frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}=\sec x$$

또 $f(g(x))=x$이므로 이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$

위 식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$f'(g(-2))g'(-2)=1$, $f'(0)\times g'(-2)=1$

이때 $f'(0)=\sec0=1$, $g'(-2)=b$이므로

$1\times b=1$, $b=1$

따라서 $a=e^2$, $b=1$이므로 $ab=e^2\times1=e^2$

60) [정답] ②

[해설]

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\frac{1}{3}$에서 $f(2)=2$, $f'(2)=\dfrac{1}{3}$

$f(x)$는 함수 $g(x)$의 역함수이므로 $g(2)=2$

$g'(2)=\dfrac{1}{f'(g(2))}=\dfrac{1}{f'(2)}=3$

$f(2)\neq0$이고 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $h(x)$는

$x=2$에서 미분가능하다.

$h'(x)=\dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

$h'(2)=\dfrac{g'(2)f(2)-g(2)f'(2)}{\{f(2)\}^2}$

$=\dfrac{3\times2-2\times\dfrac{1}{3}}{2^2}=\dfrac{6-\dfrac{2}{3}}{4}=\dfrac{4}{3}$

61) [정답] ①

[해설]
$g(x)=\ln(2x^2+2x+1)(x>0)$라 두자
$g(x)$를 x에 대하여 미분하면
$$g'(x)=\frac{4x+2}{2x^2+2x+1}$$
$g(x)$와 $y=t$가 만나는 x좌표를 $f(t)$이면 $g(f(t))=t$이다.
$$g(f(2\ln 5))=2\ln 5=\ln 25$$
$f(2\ln 5)=k$라 치환하면 $g(k)=\ln 25$
$$\ln(2k^2+2k+1)=\ln 5,\ 2k^2+2k+1=5$$
$$k^2+k-12=0(k>0)$$
$$\therefore k=3$$
$g(f(t))=t$를 t에 대해 미분하면 $g'(f(t))\cdot f'(t)=1$
$$\therefore f'(2\ln 5)=\frac{1}{g'(f(2\ln 5))}$$
$$=\frac{1}{g'(3)}$$
$$=\frac{18+6+1}{14}$$
$$=\frac{25}{14}$$

62) [정답] **72**

[해설]
$g^{-1}(x)=k(x)$라 하면
$$h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$$
$$=f(k(x))$$
$$=(k(x)-a)(k(x)-b)^2$$
이때, 조건 (가)에서 함수 $(x-1)|h(x)|$ 즉,
$$(x-1)|(k(x)-a)(k(x)-b)^2|$$
$$=(x-1)(k(x)-b)^2|(k(x)-a)|$$
절댓값 안의 값이 $(x-1)$의 인수를 가져야 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
$$k(1)-a=0$$
한편, $y=k(x)$는 $x=\{(k(x)\}^3+\{(k(x)\}+1$을 만족하므로
$$1=\{(k(1)\}^3+\{(k(1)\}+1$$
$$k(1)=0$$
즉, $a=0$
따라서 함수 $f(x)$는 $f(x)=x(x-b)^2$ …… ㉠
이 성립한다.
또, 조건 (나)에서 $h'(3)=2$을 만족하므로 $h(x)=f(k(x))$의 양변을 미분하면 $h'(x)=f'(k(x))\times k'(x)$
식에 $x=3$을 대입하면
$$f'(k(3))\times k'(3)=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$
그런데, $3=\{(k(3)\}^3+\{(k(3)\}+1$에서
$$(k(3)-1)(\{(k(3)\}^2+k(3)+2)=0$$
$$\therefore k(3)=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$
㉠을 미분하면 $f'(x)=(x-b)^2+2x(x-b)$이므로
$$f'(k(3))=f'(1)$$
$$=(1-b)^2+2(1-b)$$
$$=(1-b)(3-b)$$
또, $x=\{(k(x)\}^3+\{(k(x)\}+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$$1=(3\{(k(x)\}^2+1)k'(x)$$
$x=3$을 대입하면 $1=(3\{k(3)\}^2+1)k'(3)$
㉡을 대입하면 $k'(3)=\frac{1}{4}$
㉠에 대입하면 $(1-b)(3-b)\times\frac{1}{4}=2$
$$b^2-4b+3=8,\ b^2-4b-5=0$$
$$(b+1)(b-5)=0$$
이때, 조건에서 $a<b$, 즉, $b>0$ ($\because a=0$)이므로
$$b=5$$
따라서 $f(x)=x(x-5)^2$이므로 $x=8$을 대입하면
$$f(8)=8\times 3^2=72$$

63) [정답] **15**

[해설]
함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
연속함수이다.
함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이므로
$h(0)=\lim_{x\to 0-}h(x)=\lim_{x\to 0+}h(x)$에서 $h(0)=0$이고 $f(g^{-1}(0))=0$
$g^{-1}(0)=\alpha$라 하면 $f(\alpha)=0,\ g(\alpha)=0$
$f(\alpha)=0$에서
$$\alpha=-1 \text{ 또는 } \alpha=0 \text{ 또는 } \alpha=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$
함수 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이므로
$h(1)=\lim_{x\to 1-}h(x)=\lim_{x\to 1+}h(x)$에서 $h(1)=0$이고 $f(g^{-1}(1))=0$

$g(0)=1$이므로 $g^{-1}(1)=0$이고 $f(0)=0$이므로 $f(g^{-1}(1))=0$은 성립한다.

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 0-}\frac{h(x)-h(0)}{x-}=\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)-h(0)}{x-}$에서

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(g^{-1}(x))}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x}=1$$

$$f'(g^{-1}(0))(g^{-1})'(0)=1$$

$g^{-1}(0)=\alpha$이고 $(g^{-1})'(0)=\frac{1}{g'(\alpha)}$이므로

$$f'(\alpha)\times\frac{1}{g'(\alpha)}=1,\ f'(\alpha)=g'(\alpha)$$

$$3\alpha^2-1=3a\alpha^2+2\alpha+b \qquad \cdots\cdots ㉡$$

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 1-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$에서

$$\lim_{x\to 1-}\frac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{f(g^{-1}(x))}{x-1}$$

$\lim_{x\to 1-}\frac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x-1}$에서 $x-1=t$라 하면

$$\lim_{x\to 1-}\frac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x-1}=\lim_{t\to 0-}\frac{-\sin\pi t}{\pi t}=-1$$

$\lim_{x\to 1+}\frac{f(g^{-1}(x))}{x-1}=-1$에서

$$f'(g^{-1}(1))(g^{-1})'(1)=-1$$

$g^{-1}(1)=0$이고 $(g^{-1})'(1)=\frac{1}{g'(0)}$이므로

$$f'(0)\times\frac{1}{g'(0)}=-1$$

$f'(0)=-1$이므로 $g'(0)=b=1$

삼차함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 가지고 $g'(0)=1>0$이므로 증가함수이다.

$g(\alpha)=0,\ g(0)=1$이므로 $\alpha<0$

㉠에 의하여 $\alpha=-1$

㉡에 의하여 $a=1$

$$g(x)=x^3+x^2+x+1$$

따라서 $g(a+b)=g(2)=15$

64) [정답] ③

[해설]

점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{8},\ 1+\frac{\pi}{2}\right)$이고 $f'(x)=2\sec^2 2x$이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=4$$

곡선 $y=f(x)$위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$y=4\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+1+\frac{\pi}{2}=4x+1$$

따라서 접선의 y절편은 1

65) [정답] ②

[해설]

$t=0$이면 $(x,\ y)=(1,\ 1)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-e^{-t}+3}{e^t+2}=\frac{2}{3}=\frac{a-1}{10-1},\ \therefore a=7$

66) [정답] ④

[해설]

$y=e^x$와 제 1사분면에서 접하는 접선이 원점을 지나므로 접선의 방정식을 $y=mx$라 하면 $y=e^{-x}$와 제 2사분면에서 접하는 접선의 방정식은 $y=-mx$이 된다.

$y=e^x$와 제 1사분면에서 접하는 접점의 좌표를 $(t,\ e^t)$라 하면 접선의 기울기가 e^t이므로 접선의 방정식은

$y=e^t(x-t)+e^t$

접선이 원점을 지나므로 $0=-te^t+e^t$

즉, $e^t(t-1)=0$에서 $t=1$ $(\because e^t\neq 0)$

따라서 두 접선의 방정식은 각각 $y=ex$와 $y=-ex$이다.

두 직선 $y=ex,\ y=-ex$이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\tan\alpha=e,\ \tan\beta=-e$

두 접선이 이루는 각이 θ이므로 $\theta=\beta-\alpha$

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\tan(\beta-\alpha)\\&=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\&=\frac{-e-e}{1-e^2}\\&=\frac{2e}{e^2-1}\end{aligned}$$

67) [정답] 3

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 한 점을 $(s, f(s))$라 하자.
t가 정해져 있다면 점 $(t, 0)$에서 $(s, f(s))$사이의 거리가 최소일 때, $(t, 0)$과 $(s, f(s))$를 연결한 직선은 $y=f(x)$ 위의 점 $(s, f(s))$에서의 접선과 수직이다.

따라서 $\dfrac{-f(s)}{t-s}=-\dfrac{1}{f'(s)}$이고,

$t=s+f(s)f'(s)\cdots\cdots$㉠

이때, $g(t)=e^s+s$, $h(g(t))=t$이므로,
$h(1)$을 찾기 위해 $g(t)=1$이 되는 s를 찾으면 $s=0$이고,
㉠에서 $s=0$일 때, $t=2$이다.

한편, $g'(t)=(e^s+1)\dfrac{ds}{dt}\cdots\cdots$㉡

㉠을 미분하면

$1=\{1+f'(s)f'(s)+f(s)f''(s)\}\dfrac{ds}{dt}\cdots\cdots$㉢

$s=0$을 대입하면 $f'(0)=2$, $f''(0)=1$이므로 ㉢에 대입하면

$1=6\dfrac{ds}{dt}$, $\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{1}{6}$

㉡에 대입하면 $g'(2)=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ h'(1)=\dfrac{1}{g'(h(1))}=\dfrac{1}{g'(2)}=3$

[다른 풀이]
점 $(t, 0)$과 점 $(x, f(x))$사이의 거리가 최소일 때, 두 점 $(t, 0)$과 $(x, f(x))$를 지나는 직선과 점 $(x, f(x))$에서의 $y=f(x)$에서의 접선은 서로 수직이다.
이때 $x=s$이므로

$\dfrac{f(s)}{s-t}\times f'(s)=-1$, $t=s+f(s)\times f'(s)\cdots\cdots$㉠

$h(1)=a$라 하면 $g(a)=1$이고, $h'(1)=\dfrac{1}{g'(a)}$이다.

$t=a$일 때 $s=b$라 하면 $g(a)=f(b)=1$에서
$e^b+b=1$, $b=0$이다.
㉠에서 $a=0+f(0)\times f'(0)=2$이다.
㉠의 양변을 s로 미분하면

$\dfrac{dt}{ds}=1+f'(s)\times f'(s)+f(s)\times f''(s)$

$\quad=1+(e^s+1)^2+(e^s+s)e^s$

이므로

$t=2$, $s=0$일 때 $\dfrac{dt}{ds}=6$이다.

$g(t)=f(s)$의 양변을 s로 미분하면

$g'(t)\times\dfrac{dt}{ds}=f'(s)$이므로 $g'(2)\times 6=f'(0)$,

$g'(2)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$이다.

$\therefore\ h'(1)=\dfrac{1}{g'(2)}=3$

68) [정답] ①

[해설]

주어진 함수 $f(x)=(x^2-2x-7)e^x$를 미분하면

$$f'(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x-7)e^x$$
$$=(x^2-9)e^x$$

이때, 모든 x에 대해 $e^x>0$이므로 $x^2-9=0$

즉, $x=3$일 때, 극대, $x=-3$일 때, 극솟값을 갖는다.

준 식에 대입하면

$a=f(3)=-4e^3$, $b=f(-3)=8e^{-3}$

$\therefore\ a\times b=(-4e^3)\times 8e^{-3}=-32$

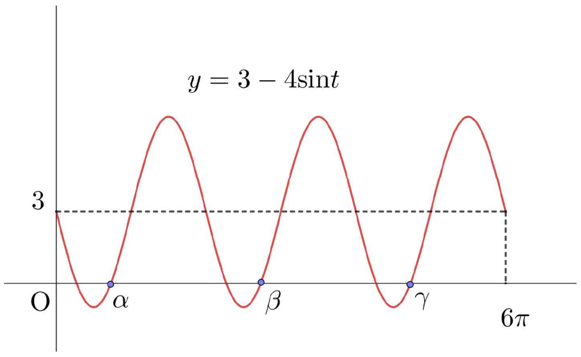
69) [정답] ②

[해설]
$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$이므로
$g'(x)=3f'(x)-4f'(x)\sin f(x)$
$\quad=f'(x)\{3-4\sin f(x)\}$
$\quad=12\pi(x-1)\{3-4\sin(6\pi(x-1)^2)\}$
이므로 $g'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $\sin(6\pi(x-1)^2)=\dfrac{3}{4}$

(i) $x=1$일 때
$x=1$일 때 $\sin(6\pi(x-1)^2)=0$이므로
$x=1$ 부근에서 $3-4\sin(6\pi(x-1)^2)>0$이다.
이때 $x-1$은 $x=1$의 좌우에서 음에서 양으로 변하므로
$g'(x)=12\pi(x-1)\{3-4\sin(6\pi(x-1)^2)\}$도 $x=1$의 좌우에서 음에서 양으로 변한다.
따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

(ii) $1<x<2$일 때
$12\pi(x-1)>0$이고, 함수 $f(x)$는 구간 $[1, 2]$에서 0에서 6π까지 증가한다.
즉, $f(x)=t$라 하면 x의 값이 1에서 2까지 증가할 때 t의 값은 0에서 6π까지 증가한다.
이때 함수 $y=3-4\sin t$의 그래프는 다음과 같으므로 $t=\alpha$, β, γ의 좌우에서 $y=3-4\sin t$의 값은 음에서 양으로 변한다.



따라서 $f(x)=\alpha,\ \beta,\ \gamma$인 x의 좌우에서

$y=3-4\sin f(x)$의 값은 음에서 양으로 변하고 이러한

x는 세 수 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$에 대하여 각각 하나씩 존재한다.

따라서 함수 $g(x)$가 $1<x<2$에서 극소가 되는 x의 개수는 3이다.

(iii) $0<x<1$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

즉, 모든 실수 x에 대하여

$f(1-x)=f(1+x)$

가 성립한다.

이때

$$\begin{aligned} g(1-x) &= 3f(1-x)+4\cos f(1-x) \\ &= 3f(1+x)+4\cos f(1+x) \\ &= g(1+x) \end{aligned}$$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프도 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

따라서 (ii)와 같이 $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수도 3이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 x의 개수는

$1+3+3=7$

이다.

70) [정답] ①

[해설]

점 (2, 2)가 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이므로

$g(2)=2,\ g''(2)=0$

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$h''(x)=f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)$

$h''(2)=f''(g(2))\{g'(2)\}^2+f'(g(2))g''(2)$

$=f''(2)\{g'(2)\}^2$

$\dfrac{h''(2)}{f''(2)}=4$이므로 $\{g'(2)\}^2=4$

$g(x)$가 증가함수이므로 $g'(2)=2$

따라서 $h'(2)=f'(g(2))g'(2)=f'(2)g'(2)=8$

71) [정답] ①

[해설]

함수 $f(x)=xe^{-2x}$이라 하면

$f'(x)=(1-2x)e^{-2x}$

$f''(x)=(4x-4)e^{-2x}=0$에서 $x=1$

$x<1$에서 $f''(x)<0$이고, $x>1$에서 $f''(x)>0$이다.

$x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점 A의 좌표는

$(1,\ e^{-2})$

$f'(1)=-e^{-2}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 A에서의 접선의 방정식은 $y-e^{-2}=-e^{-2}(x-1)$

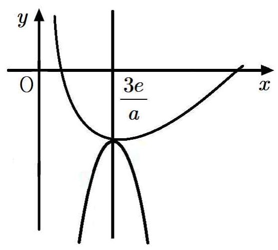
$\therefore y=-e^{-2}(x-2)$

그러므로 점 B의 좌표는 (2, 0)

따라서 삼각형 OAB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 2\times e^{-2}=e^{-2}$

72) [정답] ③

[해설]



$g(x)=-ax^2+6ex+b$라 하면

$g'(x)=-2ax+6e$ 즉, $g'(x)=0$인

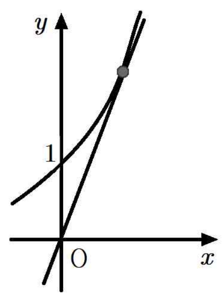
점 $x=\dfrac{3e}{a}$에서 극대가 된다.

$h(x)=a(\ln x)^2-6\ln x$라 하면

$h'(x)=\dfrac{2a\ln x}{x}-\dfrac{6}{x}$ 즉 $h'(x)=0$인 점 $\ln x=\dfrac{3}{a}$,

$x=e^{\frac{3}{a}}$에서 극소가 된다.

따라서 $e^{\frac{3}{a}}\le c\le\dfrac{3e}{a}$이고, (가), (나)조건에서 $e^{\frac{3}{a}}=\dfrac{3e}{a}$



$\dfrac{3}{a}=x$라 하면 $y=e^x$와 $y=ex$의

그래프는 그림과 같이 $e^x\ge ex$이고

등호는 $x=1$일 때 성립한다.

그러므로 $\dfrac{3}{a}=1$

$\therefore a=3,\ c=e$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 식에 대입하면

$$f(x)=\begin{cases} -3x^2+6ex+b & (x<e) \\ 3(\ln x)^2-6\ln x & (x\ge e) \end{cases}$$

(가)조건에서 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 $x=e$에서도 연속이어야 한다.

$$-3e^2+6e^2+b=3-6$$

$$\therefore b=-3-3e^2$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}-3x^2+6ex-3-3e^2 & (x<e)\\ 3(\ln x)^2-6\ln x & (x\ge e)\end{cases}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2e}\right)=-3\left(\frac{1}{4e^2}\right)+\frac{6e}{2e}-3-3e^2$$

$$=-3\left(e^2+\frac{1}{4e^2}\right)$$

73) [정답] 64

[해설]

조건(가)에서 $g(x)$는 실수 전체에서 연속이므로 $x=0$, $x=2$에서 극한값과 함숫값이 같아야 되고 $g(0)\neq0$이면 $f(0)\neq0$이어야 된다.

$x=0$일 때 $\lim_{x\to0+}g(x)=-f(0)$이고 $g(0)=f(0)$이므로

$$-f(0)=f(0)$$

$$\therefore f(0)=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x=2$일 때 $\lim_{x\to2-}g(x)=f(2)$이고 $g(2)=f(2)$이므로

$$f(2)=f(2)$$

$x=2$에서 항상 연속이다.

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (0\le x\le2)\\ \dfrac{f(x)}{x-1} & (x<0 \text{ 또는 } x>2)\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases}f'(x) & (0\le x\le2)\\ \dfrac{f'(x)(x-1)-f(x)}{(x-1)^2} & (x<0 \text{ 또는 } x>2)\end{cases}$$

$x=0$일 때 $\lim_{x\to0+}g'(x)=f'(0)$이고,

$$\lim_{x\to0-}g'(x)=-f'(0)-f(0)=-f'(0)\,(\because f(0)\neq0)$$

$x=2$일 때 $\lim_{x\to2+}g'(x)=f'(2)-f(2)$이고

$$\lim_{x\to2-}g'(x)=f'(2)$$

$$f'(2)-f(2)\neq f'(2)\,(\because f(2)\neq0)$$

따라서 $x=2$에서 미분불가능하다.

조건(나)에서 $x=a$에 미분불가능한 x값이 1개이므로 $x=0$에서 미분불가능해야 된다.

$$\therefore f'(0)=-f'(0)$$

$$\therefore f'(0)=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의해 $f(x)=x^2(x-\alpha)\,(\alpha\neq0)$

조건 (다)에 따라 $g(k)=0$이면 $f(k)=0$이다.

이때 $k=0$ 또는 $k=\alpha$인데 $g'(0)=0$이므로 $k=\alpha$이어야 한다.

(i) $0\le\alpha\le2$일 때, $f'(\alpha)=\dfrac{16}{3}$, $\alpha^2=\dfrac{16}{3}$,

$$\therefore \alpha=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$\alpha>2$이므로 모순

(ii) $\alpha<0$, $2<\alpha$일 때

$$\frac{(\alpha-1)f'(\alpha)}{(\alpha-1)^2}=\frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}=\frac{16}{3}$$

$$\therefore 3\alpha^2-16\alpha+16=0$$

$$\therefore \alpha=4$$

$$\therefore f(x)=x^2(x-4)$$

$\lim_{x\to2-}g'(x)<0$, $\lim_{x\to2+}g'(x)>0$이므로 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

$$\therefore g(2)=-8,\ p=-8$$

$$\therefore p^2=64$$

74) [정답] 129

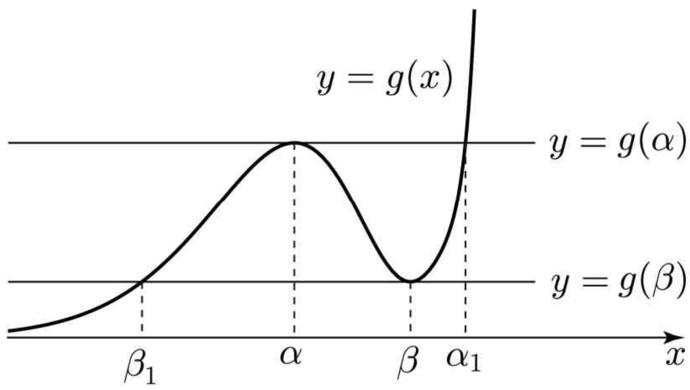
[해설]

$f(x)=ax^2+bx+c$(a, b, c는 상수)라 하면

$g'(x)=e^x\{f(x)+f'(x)\}$

$=e^x\{ax^2+(2a+b)x+b+c\}$

함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않으면 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 함수 $g(x)$는 극값을 갖는다.



함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다고 하면 $g'(x)=e^x\{a(x-\alpha)(x-\beta)\}$

함수 $h(k)$는 $k=t(t\neq g(\alpha),\ t\neq g(\beta))$에서

$$\lim_{k\to t-}h(k)=\lim_{k\to t+}h(k)=h(t)$$

그러므로 함수 $h(k)$는

$k=t(t\neq g(\alpha),\ t\neq g(\beta))$에서 연속이다.

조건 (가)에 의하여 함수 $h(k)$가 $k=t$에서 불연속인 t의 개수가 1이므로 함수 $h(k)$는 $k=g(\alpha)$에서 연속이고 $k=g(\beta)$에서 불연속 또는 $k=g(\alpha)$에서 불연속이고 $k=g(\beta)$에서 연속이다.

(i) 함수 $h(k)$가 $k=g(\alpha)$에서 연속이고 $k=g(\beta)$에서

불연속인 경우

$\lim_{k \to g(\alpha)-} h(k) = 2\alpha + \alpha_1$, $\lim_{k \to g(\alpha)+} h(k) = \alpha_1 h(g(\alpha)) = \alpha + \alpha_1$

이므로 $\lim_{k \to g(\alpha)-} h(k) = \lim_{k \to g(\alpha)+} h(k) = h(g(\alpha))$에서

$2\alpha + \alpha_1 = \alpha_1 = \alpha + \alpha_1$ 그러므로 $\alpha = 0$

함수 $h(k)$는 $k = g(\beta)$에서 불연속이므로

$\lim_{k \to g(\beta)+} h(k) - \lim_{k \to g(\beta)-} h(k) = 2\beta \neq 0$

조건 (나)에 의하여 $\beta = 1$, $g(\beta) = 3e$

$g'(0) = 0$, $g'(1) = 0$이므로 $g'(x) = e^x\{ax(x-1)\}$

$g(x) = e^x\{a(x^2 - 3x + 3)\}$

$g(1) = 3e$이므로 $a = 3$

최고차항의 계수가 3이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 함수 $h(k)$가 $k = g(\alpha)$에서 불연속이고 $k = g(\beta)$에서 연속인 경우 $\lim_{k \to g(\beta)_-} h(k) = \beta_1$

$\lim_{k \to g(\beta)_+} h(k) = 2\beta + \beta_1$

$h(g(\beta)) = \beta + \beta_1$이므로

$\lim_{k \to g(\beta)-} h(k) = \lim_{k \to g(\beta)+} h(k) = h(g(\beta))$에서

$\beta_1 = 2\beta + \beta_1 = \beta + \beta_1$

그러므로 $\beta = 0$

함수 $h(k)$는 $k = g(\alpha)$에서 불연속이므로

$\lim_{k \to g(\alpha)+} h(k) - \lim_{k \to g(\alpha)-} h(k) = -2\alpha \neq 0$

조건 (나)에 의하여 $\alpha = -1$, $g(\alpha) = 3e$

$g'(0) = 0$, $g'(-1) = 0$이므로 $g'(x) = e^x\{ax(x+1)\}$

$g(x) = e^x\{a(x^2 - x + 1)\}$

$g(-1) = 3e$이므로 $a = e^2$

$g(x) = e^{x+2}(x^2 - x + 1)$

따라서 $g(-6) \times g(2) = 43e^{-4} \times 3e^4 = 129$

75) [정답] **17**

[해설]

$f(x) = t(\ln x)^2 - x^2$이 $x = k$에서 극대일 때, 실수 k의 값을 $g(t)$이므로 $f'(k) = 0$, 즉, $f'(g(t)) = 0$이 성립한다.

$f'(x) = \dfrac{2t\ln x}{x} - 2x$에서

$$f'(g(t)) = \frac{2t\ln g(t)}{g(t)} - 2g(t) = 0$$

$$t\ln g(t) - \{g(t)\}^2 = 0 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠에 $t = \alpha$를 대입하면

$$\alpha\ln g(\alpha) - \{g(\alpha)\}^2 = 0$$

그런데 $g(\alpha) = e^2$이므로 $\alpha\ln e^2 - (e^2)^2 = 0$

$$2\alpha - e^4 = 0$$

$$\therefore \alpha = \frac{e^4}{2} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\ln g(t) + \frac{tg'(t)}{g(t)} - 2g(t)g'(t) = 0$$

$t = \alpha$를 대입하면

$$\ln g(\alpha) + \frac{\alpha g'(\alpha)}{g(\alpha)} - 2g(\alpha)g'(\alpha) = 0$$

$$\ln e^2 + \frac{\frac{e^4}{2}g'(\alpha)}{e^2} - 2e^2 g'(\alpha) = 0$$

$$2 + \frac{e^2}{2}g'(\alpha) - 2e^2 g'(\alpha) = 0$$

$$\therefore g'(\alpha) = \frac{4}{3e^2} \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

㉡, ㉢에서 $\alpha \times \{g'(\alpha)\}^2 = \dfrac{e^4}{2} \times \left(\dfrac{4}{3e^2}\right)^2 = \dfrac{e^4}{2} \times \dfrac{16}{9e^4} = \dfrac{8}{9}$

따라서 $p = 9$, $q = 8$이므로 $p + q = 8 + 9 = 17$

76) [정답] **29**

[해설]

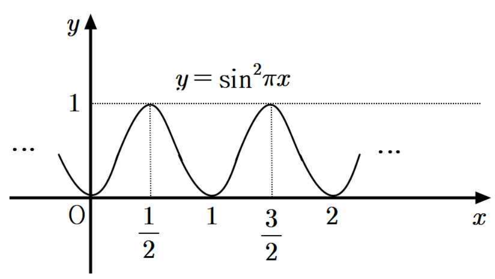
함수 $g(x) = f(\sin^2 \pi x)$에서 $h(x) = \sin^2 \pi x$라 하면

$h'(x) = 2\sin\pi x \cdot \cos\pi x \cdot \pi$이므로 $h'(x) = 0$인 값은

$\sin\pi x = 0$ 또는 $\cos\pi x = 0$

따라서 $x = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots$, 즉,

$x = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots$에서 극점이므로 그래프를 그리면 다음과 같다.



[그림1]

함수 $g(x)=f(\sin^2\pi x)$에서

$$g'(x)=f'(\sin^2\pi x)\cdot 2\pi\sin\pi x\cos\pi x$$

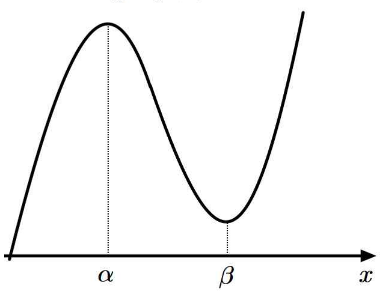
따라서 $0<x<1$에서 $g'(x)=0$이 되는 값은

$$f'(\sin^2\pi x)=0 \text{ 또는 } \cos\pi x=0$$

(가)조건에서 $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이므로 극소가 최소 2개가 있어야 한다.

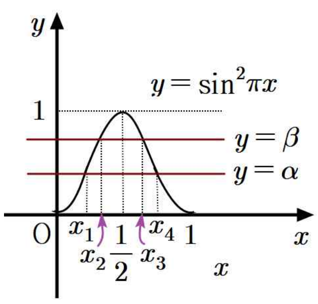
즉, $g'(x)=0$인 값이 최소 5개 이상이어야 하므로 삼차하수 $f(x)$도 극점이 존재해야 한다.

극점을 α, β라고 하면 $f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$이므로 아래 그림과 같이 유추할 수 있다.



[그림2]

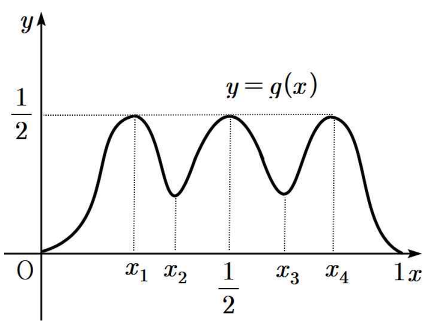
따라서 $f'(\sin^2\pi x)=0$을 만족하는 값은 $\sin^2\pi x=\alpha$, β을 만족하는 x의 값이므로 아래 그림과 같다.



[그림3]

즉, $g'(x)=0$인 값은 $x=x_1,\ x_2,\ \frac{1}{2},\ x_3,\ x_4$이다.

$g(x)$의 그래프를 조건에 맞게 유추해보면 다음 그림과 같다.



따라서 위의 그래프에서 $g(0)=g(1)=0$에서

$f(0)=0$ …… ㉠

$g(x_1)=g(x_4)=\frac{1}{2}$이므로 [그림3]에서 $f(\alpha)=\frac{1}{2}$

…… ㉡

[그림2]에서 $f'(\alpha)=0$ …… ㉢

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$이므로 $f(1)=\frac{1}{2}$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣에서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는

$$f(x)-\frac{1}{2}=(x-\alpha)^2(x-1)$$

㉠을 대입하면 $-\frac{1}{2}=-\alpha^2$ $\quad\therefore a=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore f(x)=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(x-1\right)+\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(2)=\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=5-2\sqrt{2}$$

따라서 $a=5$, $b=-2$이므로 $a^2+b^2=29$

77) [정답] **24**

[해설]

$g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이므로

$$g'(x)=f'(x)\{f(x)+3\}e^{f(x)}$$

$g'(x)=0$에서

$$f'(x)=0 \text{ 또는 } f(x)+3=0$$

$f(x)$가 이차함수이므로 조건 (가), (나)에 의해

$$f'(a)=0,\ f(a)=6$$

$f(b)+3=0$, $f(b+6)+3=0$이어야 한다.

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 p라 하면

$f(b)+3=0$, $f(b+3)+3=0$이므로

$$f(x)+3=p(x-b)(x-b-6)$$

즉, $f(x)=p(x-b)(x-b-6)-3$ …… ㉠

이때, $f'(a)=0$이므로 $\frac{b+(b+6)}{2}=a$

$b=a-3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=p(x-a+3)(x-a-3)-3$이므로

$f(a)=-9p-3=6$에서 $p=-1$

방정식 $f(x)=0$에서

$$-(x-a+3)(x-a-3)-3=0,$$

$$(x-a)^2-6=0$$

$$\therefore x=a\pm\sqrt{6}$$

따라서 $(\alpha-\beta)^2=\{(a+\sqrt{6})-(a-\sqrt{6})\}^2=24$

78) [정답] ④

[해설]

$e^x = k\sin x$에서 $\dfrac{1}{k}=e^{-x}\sin x \cdots\cdots$ ㉠

$h(x)=e^{-x}\sin x$라 하면

$h'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=e^{-x}(\cos x-\sin x)$

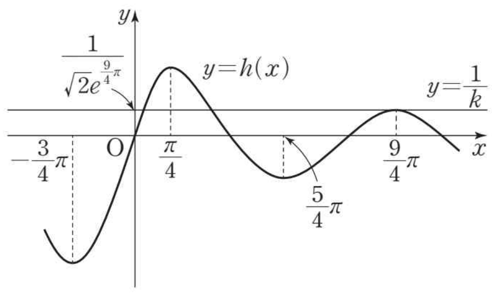
$h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{9}{4}\pi,\ \cdots$ 또는

$x=-\dfrac{3}{4}\pi,\ -\dfrac{7}{4}\pi,\ \cdots$ 이므로 실수 전체의 집합에서 함수

$h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{9}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{13}{4}\pi$	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$-\frac{e^{\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}}$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{13}{4}\pi}}$	

이때 $h(0)=0$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



㉠의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3이기 위해서는 그림과 같이 직선 $y=\dfrac{1}{k}$이 곡선 $y=e^{-x}\sin x$와 점 $\left(\dfrac{9}{4}\pi,\ h\left(\dfrac{9}{4}\pi\right)\right)$에서 접해야 한다.

따라서

$\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$ 이므로 $k=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$

79) [정답] ②

[해설]

$x\neq-1$일 때, $f'(x)=\dfrac{n-(n^2-n)x^n}{(x^n+1)^2}$

ㄱ. $n=3$이면 $x<-1$일 때, $f'(x)=\dfrac{3-6x^3}{(x^3+1)^2}>0$이므로

함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$에서 증가한다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=f(-1)$이 성립한다.

n이 홀수일 때, $x\to-1$이면 (분모)$\to0$이고

(분자)$\to-n$이므로 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않는다.

n이 짝수일 때, $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-\dfrac{n}{2}$이고 $f(-1)=2$이므로

$n=4$이다.

따라서 $n=4$일 때만 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$f'(x)=\dfrac{4-12x^4}{(x^4+1)^2}$이다.

$x<0$일 때 $f(x)<0$이고, $x\geq0$일 때 함수 $f(x)$의 증가와 감소는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	$\sqrt[4]{27}$	↘

$2<\sqrt[4]{27}$이므로 방정식 $f(x)=2$는 $x\geq0$에서만 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $f'(x)=0$에서 $x^n=\dfrac{1}{n-1}$ $(n\neq1)$

(ⅰ) n이 홀수일 때 함수 $f(x)$는 극솟값을 갖지 않는다.

(ⅱ) n이 짝수일 때

$n=2$이면 함수 $f(x)$는 극솟값을 갖지 않고,

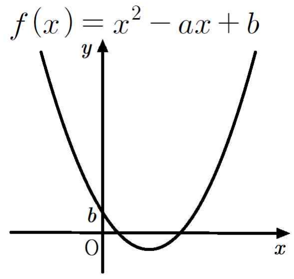
$n\geq4$이면 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$에서 극솟값을 갖는다.

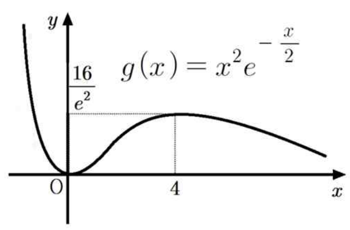
(ⅰ), (ⅱ)에서 구간 $(-1,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖도록 하는 10이하의 모든 자연수 n은 4, 6, 8, 10이므로 그 합은 28이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

80) [정답] **6**

[해설]





$g(x)$는 극솟값 $g(0)=0$, 극댓값 $g(4)=\dfrac{16}{e^2}$을 갖고,

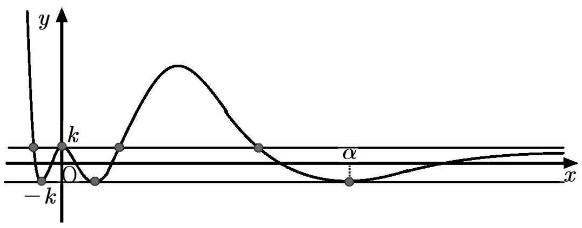
$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\infty$가 된다.

(가) $h(0)=f(0)=b$, $h(4)=f\left(\dfrac{16}{e^2}\right)=\left(\dfrac{16}{e^2}\right)^2-a\left(\dfrac{16}{e^2}\right)+b$이고

$h(0)<h(4)$이므로 $b<\left(\dfrac{16}{e^2}\right)^2-a\left(\dfrac{16}{e^2}\right)+b$

$0<a<\dfrac{16}{e^2}\left(\because\ a>0\right)$ …… ㉠

(나)를 만족시키려면 $h(x)=f(g(x))$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



또, $f'(x)=2x-a$, $g'(x)=\dfrac{1}{2}x(4-x)e$이므로

$h'(x)=g'(x)f'(g(x))$

$=\dfrac{1}{2}x(4-x)e^{-\frac{x}{2}}\{2g(x)-a\}$

$g(x)=\dfrac{a}{2}$, 즉 $\alpha=\dfrac{a}{2}$(㉠에서 $0<\dfrac{a}{2}<\dfrac{8}{e^2}$)에서 $h(x)$는 극솟값이 된다.

따라서 $-k=f\left(\dfrac{a}{2}\right)$이어야 하므로

$f(x)=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+b-\dfrac{a^2}{4}$에서 $b-\dfrac{a^2}{4}=-k$

그런데 $f(0)=k=b$이므로 $\dfrac{a^2}{4}=2b$, 즉 $b=\dfrac{a^2}{8}$ …… ㉡

한편 $f(1)=1-a+b=1-a+\dfrac{a^2}{8}=-\dfrac{7}{32}$이므로

$4a^2-32a+39=0$, $(2a-13)(2a-3)=0$

㉠에서 $0<a<\dfrac{16}{e^2}$이므로 $a=\dfrac{3}{2}$

…… ㉢

㉡에 대입하면 $b=\dfrac{9}{32}$

따라서 ㉡, ㉢에서 $a+16b=\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{2}-=6$

81) [정답] ⑤

[해설]
함수 $f(x)$는 최고차항이 양수인 삼차함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축은 적어도 한 점에서 만난다.
조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 $x\neq1$인 모든 실수 x에서 연속이므로

$\begin{cases} x=1\text{일 때, } & f(1)=0 \\ x\neq1\text{일 때, } & f(x)\neq0 \end{cases}$ ……㉠

한편,

$g(x)=\begin{cases} \ln|f(x)| & (f(x)\neq0) \\ 1 & (f(x)=0) \end{cases}$

이므로

$g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}(f(x)\neq0)$

이때, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극값을 가지고 ㉠을 만족해야 하므로

$f'(2)=0$ ……㉡

한편, 조건 (다)에서 주어진 방정식 $g(x)=0$은

$\ln|f(x)|=0$

$|f(x)|=1$

$f(x)=-1$ 또는 $f(x)=1$

이때, 이 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖고 ㉠을 만족하려면 함수 $y=f(x)$는 극값을 가져야 한다.

한편, ㉡으로부터 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 가지므로

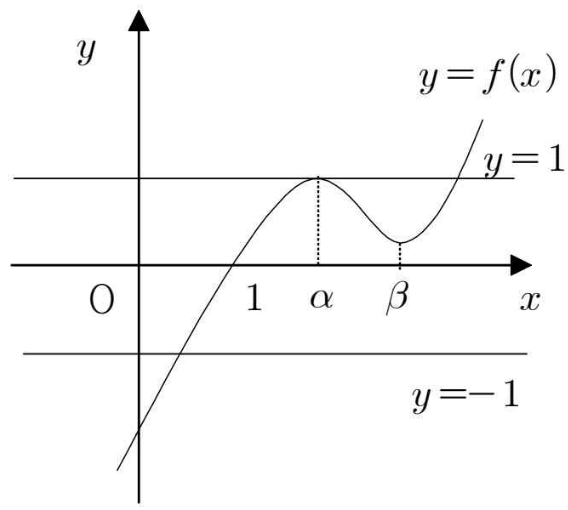
$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ $(1<\alpha<\beta)$

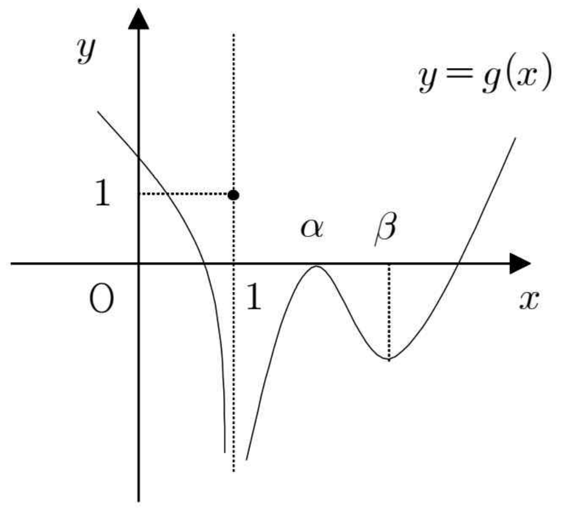
로 놓을 수 있다.

이때, $\alpha=2$이거나 $\beta=2$이다.

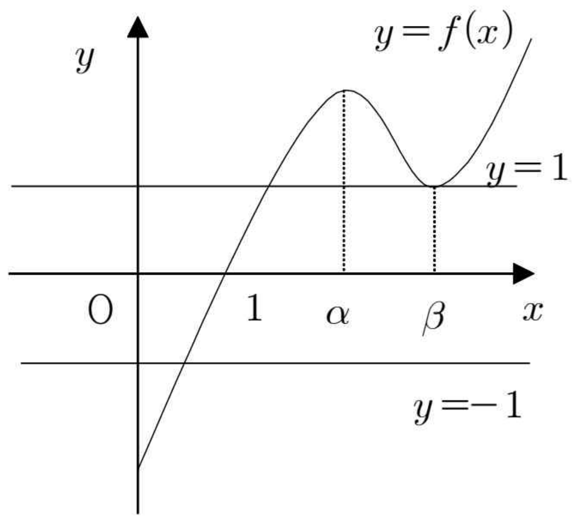
이때, 조건 (다)를 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프와 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

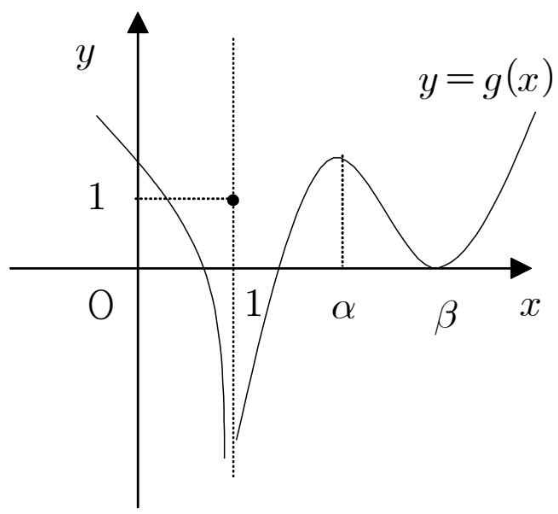
(i)





(ii)





이때, 조건 (나)로부터 $g(x)$가 $x=2$에서 극대이고 $|g(x)|$가 $x=2$에서 극소이기 위해서는 그림 (i)과 같아야 하고 $\alpha=2$

이때, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로

$f(x)-1=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-k)$($k$는 상수)

즉, $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-k)+1$

이고 ㉠에서 $f(1)=0$이므로

$f(1)=\frac{1}{2}(1-k)+1=0$

$1-k=-2$

$k=3$

이때,

$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-3)+1$

이므로

$f'(x)=(x-2)(x-3)+\frac{1}{2}(x-2)^2$

$=\frac{1}{2}(x-2)\{(2x-6)+(x-2)\}$

$=\frac{1}{2}(x-2)(3x-8)$

이때, $f'(x)=0$에서

$x=2$ 또는 $x=\frac{8}{3}$

그러므로 $\beta=\frac{8}{3}$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=\frac{8}{3}$에서 극솟값을 갖고 그 값은

$\ln\left|f\left(\frac{8}{3}\right)\right|=\ln\left|\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right|$

$=\ln\frac{25}{27}$

82) [정답] 31

[해설]

조건 (가)에서

$h(0)=g(f(0))=e^{\sin\pi f(0)}-1=0$

$\sin\pi f(0)=0$

이므로 $f(0)$은 정수이다.

또한, $g'(x)=e^{\sin\pi x}\times\pi\cos\pi x$, $h'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$이므로

$h'(0)=g'(f(0))\times f'(0)=0$

에서 $g'(f(0))=0$ 또는 $f'(0)=0$

$g'(f(0))=e^{\sin\pi f(0)}\times\pi\cos\pi f(0)=0$에서 $f(0)$이 정수이므로

$\cos\pi f(0)\neq 0$

따라서 $g'(f(0))\neq 0$이므로 $f'(0)=0$

$f'(0)=f'(3)=0$에서

$f'(x)=ax(x-3)$ (단, a는 양수) …… ㉠

로 놓을 수 있다.

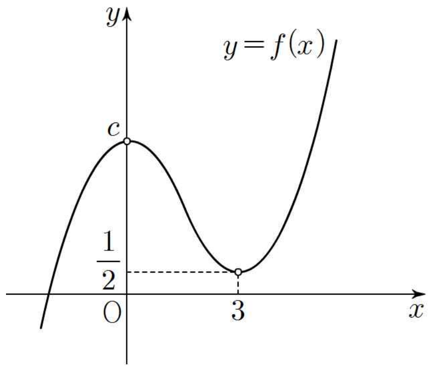
$h'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$

$=e^{\sin\pi f(x)}\times\pi\cos\pi f(x)\times f'(x)$

에서 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가지기 위해서는 함수 $f'(x)$가 $x=0$의 좌우에서 부호가 양수에서 음수로 바뀌므로 $\cos\pi f(0)>0$을 만족해야 한다.

따라서 $f(0)$의 값은 짝수이다.

㉠에서 $f(x)=\frac{a}{3}x^3-\frac{3}{2}ax^2+c$ (단, c는 짝수)



조건 (나)에서

$$e^{\sin\pi f(x)}-1=1,\ e^{\sin\pi f(x)}=2$$

따라서 열린구간 $(0,3)$에서 방정식 $\sin\pi f(x)=\ln 2$을 만족하는 서로 다른 실근의 개수가 7이어야 한다.

열린구간 $(0,3)$에서 함수 $f(x)$는 $\frac{1}{2}<f(x)<c$를 만족하면서 감소하므로 방정식 $\sin\pi f(x)=\ln 2$의 실근의 개수가 7이 되는 c의 값은 7 또는 8이 가능하지만, c는 짝수이므로

$$c=8$$

$f(x)=\frac{a}{3}x^3-\frac{3}{2}ax^2+8$에서 $f(3)=\frac{1}{2}$ 이므로

$$f(3)=9a-\frac{27}{2}a+8=\frac{1}{2},\qquad a=\frac{5}{3}$$

따라서 $f(x)=\frac{5}{9}x^3-\frac{5}{2}x^2+8$이므로

$$f(2)=\frac{22}{9}$$

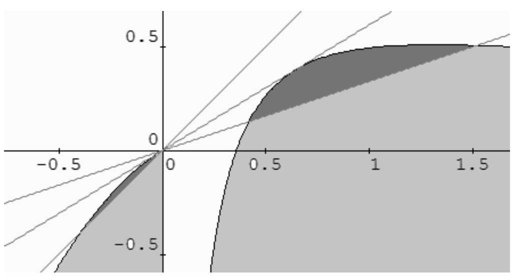
$p=9,\ q=22$이므로 $\quad p+q=31$

83) [정답] 5

[해설]

그림과 같이 $y=\alpha x$가 원점에서 $y=-x^2+ax$에 접하고

점 $(b,f(b))$에서 $y=\frac{\ln(x+b)}{x}$에 접할 때,



$\lim_{m\to\alpha-}g(m)=3,\ \lim_{m\to\alpha+}g(m)=2$이므로

주어진 조건을 만족한다.

$y=-x^2+ax$에서 $y'=-2x+a$

$y=\frac{\ln(x+b)}{x}$에서 $y'=\frac{x-(x+b)\ln(x+b)}{x^2(x+b)}$

$$a=\frac{\ln(2b)}{b^2}=\frac{b-2b\ln(2b)}{2b^3}$$

이것을 풀면 $\ln(2b)=\frac{1}{4}$이므로 $ab^2=\frac{1}{4}$,

$\therefore p+q=4+1=5$

84) [정답] 16

[해설]

$$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}=(x^2-ax)e^{-x}$$

이므로

$$f'(x)=(2x-a)e^{-x}+(x^2-ax)e^{-x}\times(-1)$$
$$=e^{-x}\{-x^2+(a+2)x-a\}$$
$$=-e^{-x}\{x^2-(a+2)x+a\}$$

이때, $f'(x)=0$에서

$x^2-(a+2)x+a=0\cdots\cdots$ ㉠

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a+2)^2-4a=a^2+4>0$

또, ㉠의 서로 다른 두 근은

$x=\frac{(a+2)\pm\sqrt{a^2+4}}{2}\cdots\cdots$ ㉡

이때, $a>0$이므로

$a+2=\sqrt{(a+2)^2}>\sqrt{a^2+4}$

그러므로 두 양의 실근을 갖는다.

㉡의 두 근을 $\alpha,\ \beta(0<\alpha<\beta)$라 하면

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

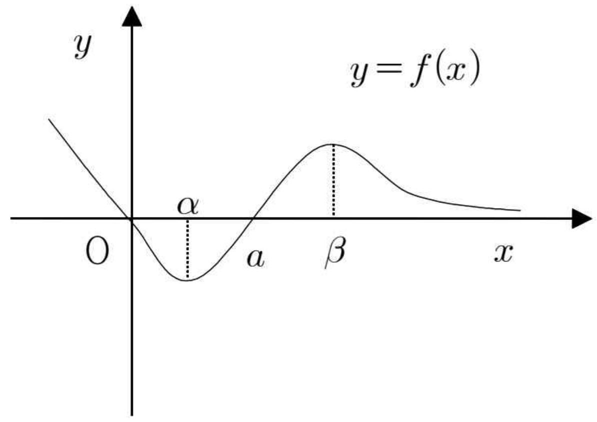
이때,

$f(0)=0,\ f(a)=0$

이고

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-ax}{e^x}=0$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



또,

$f''(x)=e^{-x}\{x^2-(a+2)x+a\}\ -e^{-x}\{2x-(a+2)\}$

$=e^{-x}\{x^2-(a+4)x+2a+2\}$

이때, $f''(x)=0$에서

$x^2-(a+4)x+2a+2=0$……㉡

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a+4)^2-4\times1\times(2a+2)$

$=a^2+8>0$

그러므로 함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값의 개수는 2이다.

한편, 방정식

$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$

의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=f'(t)(x-t)+f(t)$

의 그래프의 교점의 개수이다.

이때, 직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선이다

한편, 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 연속이면 $g(a)=\lim_{t\to a}g(t)$이므로

$g(a)+\lim_{t\to 5}g(t)$의 값은 짝수이어야 한다.

그런데

$g(5)+\lim_{t\to 5}g(t)=5$ ……㉢

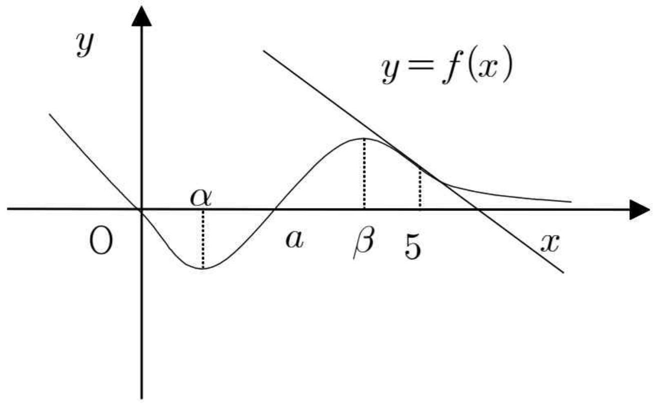
이므로 함수 $g(t)$는 $t=5$에서 불연속이다.

함수 $g(t)$가 불연속이 되는 t의 값은 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값이거나 변곡점을 갖는 x의 값이다.

한편, 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값을 m이라 하면 함수 $g(t)$는 $t=m$에서 극한값을 갖지 않는다.

또, 함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값을 n이라 하면 함수 $g(t)$는 $t=n$에서 극한값을 갖는다.

그러므로 ㉢을 만족시키는 t의 값은 함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값 중 큰 값이다.



즉, 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 변곡점을 갖고 이때

$\lim_{t\to 5}g(t)=3,\ g(5)=2$

이므로 조건을 만족시킨다.

따라서, $x=5$가 방정식 ㉡의 근이므로

대입하면

$5^2-(a+4)\times5+2a+2=0$

$-3a+7=0$

$a=\dfrac{7}{3}$……㉢

한편,

$\lim_{t\to k-}g(t)\neq\lim_{t\to k+}g(t)$

를 만족시키는 k의 값은 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값이다.

㉠에 ㉢을 대입하면

$x^2-\left(\dfrac{7}{3}+2\right)x+\dfrac{7}{3}=0$

$x^2-\dfrac{13}{3}x+\dfrac{7}{3}=0$

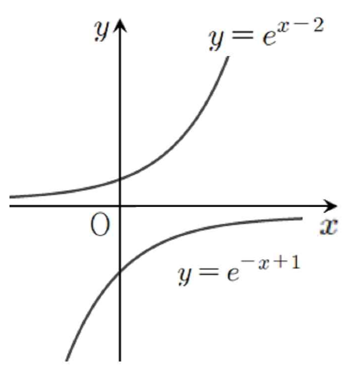
따라서, 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 근과 계수의 관계를 이용하면 $\dfrac{13}{3}$이므로

$p+q=3+13=16$

85) [정답] **43**

[해설]

$y=e^{x-2}$와 $y=-e^{-x+1}$의 그래프는 다음과 같다.



모든 실수 x에 대하여 부등식

$-e^{-x+1} \le ax+b \le e^{x-2}$

이 성립하려면 직선 $y=ax+b$가 두 그래프의 사이에 있으면 된다.

즉, $a \ge 0$

그래프 $y=e^{x-2}$ 위의 점 $(t,\ e^{t-2})$에서의 접선의 방정식은

$y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}$ …… ㉠

그래프 $y=-e^{-x+1}$위의 점 $(s,\ -e^{-s+1})$에서의 접선의 방정식은

$y=e^{-s+1}(x-s)-e^{-s+1}$ …… ㉡

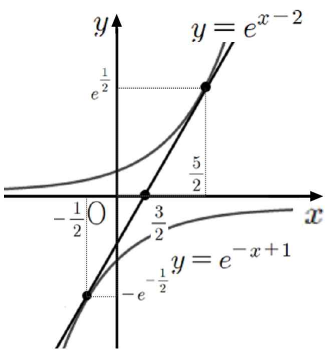
이때, 그래프 $y=e^{x-2}$와 그래프 $y=-e^{-x+1}$에 동시에 접하는 접선의 방정식을 구하면 ㉠, ㉡이 일치할 때이다.

즉, $e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}=e^{-s+1}(x-s)-e^{-s+1}$

$t-2=-s+1$ …… ㉢

$(-t+1)e^{t-2}=(-s-1)e^{-s+1}$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하면 $t=\dfrac{5}{2}$, $s=\dfrac{1}{2}$



위의 그래프에서 조건을 만족하려면

$t \le \dfrac{5}{2}$, $s \ge \dfrac{1}{2}$ …… ㉤

(ⅰ) 그래프 $y=e^{x-2}$위의 점 $(t,\ e^{t-2})$에서의 접선의 방정식 $y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}$에서

$a=e^{t-2}$, $b=(-t+1)e^{t-2}$

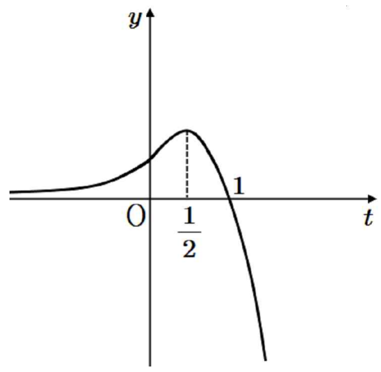
따라서 $ab=f(t)=e^{2t-4}(-t+1)$

그런데 ㉤에서 $t \le \dfrac{5}{2}$을 만족하므로

$f(t)=e^{2t-4}(-t+1)\left(단,\ t \le \dfrac{5}{2}\right)$

$f'(t)=e^{2t-4}(-2t+1)$이고 $f'(t)=0$에서 $t=\dfrac{1}{2}$이므로

그래프 개형을 그리면 다음과 같다.



이때 ab의 최댓값은 $t=\dfrac{1}{2}$일 때, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}e^{-3}$

(ⅱ) 그래프 $y=-e^{-x+1}$위의 점 $(s,\ -e^{-s+1})$에서의 접선의 방정식 $y=e^{-s+1}(x-s)-e^{-s+1}$에서

$a=e^{-s+1}$, $b=e^{-s+1}(-s-1)$

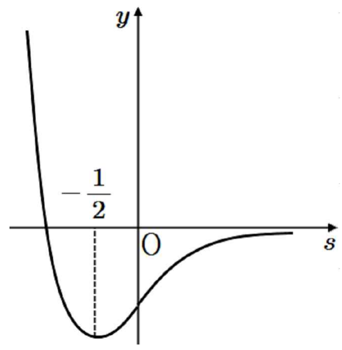
따라서 $ab=g(s)=e^{-2s+2}(-s-1)$

그런데 ㉤에서 $s \ge \dfrac{1}{2}$을 만족하므로

$g(s)=e^{-2s+2}(-s-1)\left(단,\ s \ge \dfrac{1}{2}\right)$

$g'(s)=e^{-2s+2}(2s+1)$이고 $g'(s)=0$에서 $s=-\dfrac{1}{2}$이므로

그래프 개형을 그리면 다음과 같다.



이때, ab의 최솟값은 $s=\dfrac{1}{2}$일 때, $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}e$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $M=\dfrac{1}{2}e^{-3}$, $m=-\dfrac{3}{2}e$이므로

$|M\times m^3|=\dfrac{27}{16}$

86) [정답] 4

[해설]

조건 (가)의 $\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=2$ 에서

$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x+1)}{x}=2$ …… ㉠

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x+1)=0$에서 $f(1)=0$

$f(x)=-2(x-1)(x-\alpha)$라 하면 ㉠에서

$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{-2x(x+1-\alpha)}{x}=-2(1-\alpha)=2,\ \alpha=2$

$\therefore f(x)=-2(x-1)(x-2),\ f'(x)=-4x+6$

$x>0$일 때, $g'(x)=f'(x)e^{x-a}+f(x)e^{x-a}$이므로

$g'(a)=f'(a)+f(a)$

조건 (가)에서 $g'(a)=-2$이므로

$f'(a)+f(a)=-2a^2+2a+2=-2$

$a^2-a-2=0,\ (a+1)(a-2)=0$

$a>0$이므로 $a=2$

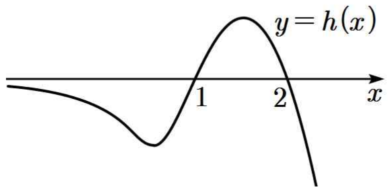
$\therefore g(x)=\begin{cases}-2x+2 & (x<0)\\ -2(x-1)(x-2)e^{x-2}+b & (x\geq 0)\end{cases}$

$h(x)=-2(x-1)(x-2)e^{x-2}$이라 하면

$h'(x)=-2(2x-3)e^{x-2}-2(x-1)(x-2)e^{x-2}$

$\quad=-2(x^2-x-1)e^{x-2}$

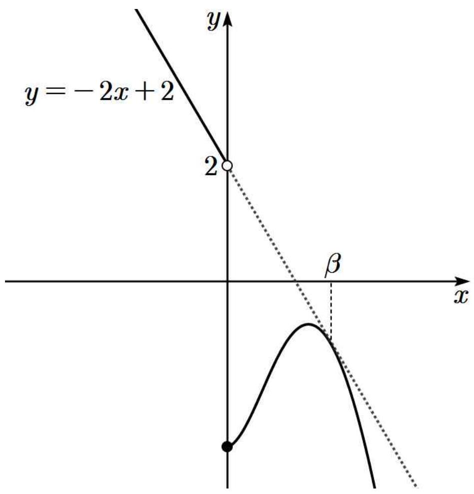
함수 $h(x)$는 2개의 극값을 가지므로 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 $x\geq 0$에서 함수 $g(x)$의 그래프는 함수 $h(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프이다.

조건 (나)에서 $\dfrac{g(t)-g(s)}{t-s}$는 두 점 $(s,\ g(s)),\ (t,\ g(t))$을 지나는 직선의 기울기를 의미한다.

$x<0$일 때 함수 $g(x)=-2x-2$이므로 조건 (나)의 부등식을 만족하기 위해서는 다음 그림과 같이 $x\geq 0$에서 함수 $g(x)$가 $y=-2x-2$와 접하거나 아래쪽에 존재해야 한다.



따라서 b가 최대일 때는 $x\geq 0$에서 함수 $g(x)$가 $y=-2x-2$와 접할 때이다. 이때, 접점의 x좌표를 $\beta\,(\beta>0)$라 하면

$g(\beta)=-2\beta+2,\ g'(\beta)=-2$

$x>0$에서 $g'(x)=-2(x^2-x-1)e^{x-2}$이므로 $g'(\beta)=-2$에서

$-2(\beta^2-\beta-1)e^{\beta-2}=-2,\ (\beta^2-\beta-1)e^{\beta-2}=1$

$\therefore \beta=2$ ($\because (\beta^2-\beta-1)e^{\beta-2}=1$에서 $\beta^2-\beta-1=e^{2-\beta}$이고, 두 함수 $y=x^2-x-1$과 $y=e^{2-x}$의 그래프는 $x>0$에서 한 점에서만 만나므로 $\beta=2$가 유일한 해임을 알 수 있다.)

$g(\beta)=-2\beta+2$에서 $g(2)=-2$이므로

$g(2)=b=-2$

따라서 $x\geq 0$에서 함수 $g(x)$가 $y=-2x-2$와 접할 때의 b의 값은 -2이다.

이상에서 $a=2,\ b$의 최댓값은 -2이므로 $a-b$의 최댓값은 4이다.

87) [정답] **13**

[해설]

시각 t에서의 속도는

$\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=\left(3+2\sin\pi t,\ \dfrac{6}{t}-2\cos\pi t\right)$이므로

따라서 시각 $t=\dfrac{1}{2}$에서의 속력은

$$\sqrt{(3+2)^2+(12-0)^2}=13$$

88) [정답] ④

[해설]

$\dfrac{dx}{dt}=\ln t+1,\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{4\ln t-4}{(\ln t)^2}$이므로

시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(\ln t+1)^2+\left\{\dfrac{4\ln t-4}{(\ln t)^2}\right\}^2}$

따라서 시각 $t=e^2$에서 점 P의 속력은

$\sqrt{(\ln e^2+1)^2+\left\{\dfrac{4\ln e^2-4}{(\ln e^2)^2}\right\}^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$