[기하] [03공도좌] 교사평경 최근 3개년

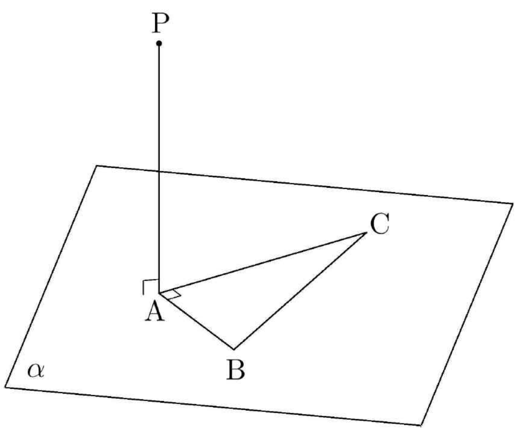
07 기하 09 공간도형

02 삼수선의 정리

01 삼수선의 정리1 (기본, 길이)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 24

1. 그림과 같이 평면 α 위에 $\angle \mathrm{BAC}=\frac{\pi}{2}$ 이고 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{3}$ 인 직각삼각형 ABC 가 있다. 점 A 를 지나고 평면 α 에 수직인 직선 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}=2$ 일 때, 점 P 와 직선 BC 사이의 거리는?



① $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{70}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{\sqrt{74}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{19}}{2}$

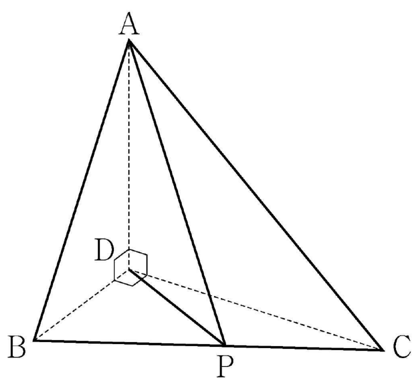
07 기하 09 공간도형

02 삼수선의 정리

02 삼수선의 정리2 (길이, 입체도형에 활용)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 27

2. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AD}}=3$, $\overline{\mathrm{DB}}=2$, $\overline{\mathrm{DC}}=2\sqrt{3}$ 이고 $\angle \mathrm{ADB}=\angle \mathrm{ADC}=\angle \mathrm{BDC}=\frac{\pi}{2}$ 인 사면체 ABCD가 있다. 선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{DP}}$ 의 최솟값은?

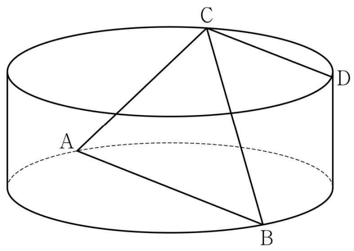


① $3\sqrt{3}$ ② $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{11\sqrt{3}}{3}$
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{13\sqrt{3}}{3}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 27

3. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 4, 높이가 3인 원기둥이 있다. 선분 AB는 이 원기둥의 한 밑면의 지름이고 C, D는 다른 밑면의 둘레 위의 서로 다른 두 점이다. 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킬 때, 선분 CD의 길이는?

(가) 삼각형 ABC의 넓이는 16이다.
(나) 두 직선 AB, CD는 서로 평행하다.



① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

07 기하

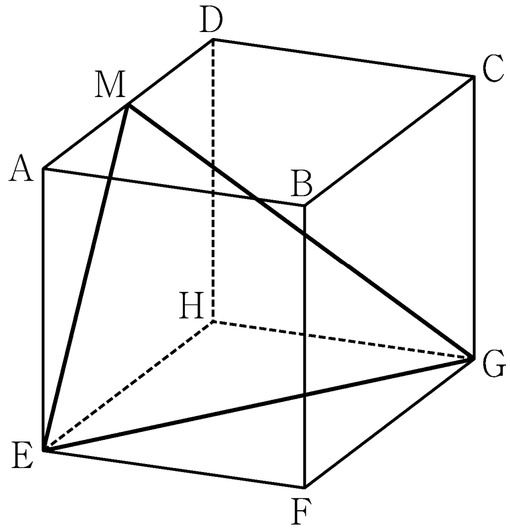
09 공간도형

02 삼수선의 정리

03 삼수선의 정리3 (넓이와 부피)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 27

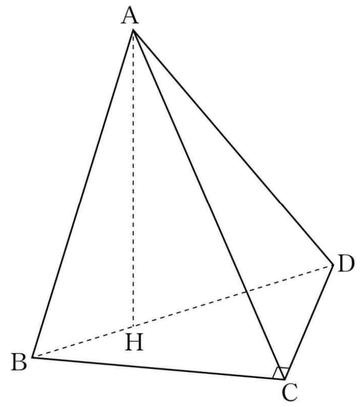
4. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 ABCD－EFGH가 있다. 선분 AD의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 MEG의 넓이는?



① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 26

5. 그림과 같이 $\overline{BC}=\overline{CD}=3$이고 $\angle BCD=90^\circ$인 사면체 ABCD가 있다. 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 선분 BD를 $1:2$로 내분하는 점이다. 삼각형 ABC의 넓이가 6일 때, 삼각형 AHC의 넓이는?



① $2\sqrt{3}$　② $\frac{5\sqrt{3}}{2}$　③ $3\sqrt{3}$
④ $\frac{7\sqrt{3}}{2}$　⑤ $4\sqrt{3}$

07 기하

09 공간도형

02 삼수선의 정리

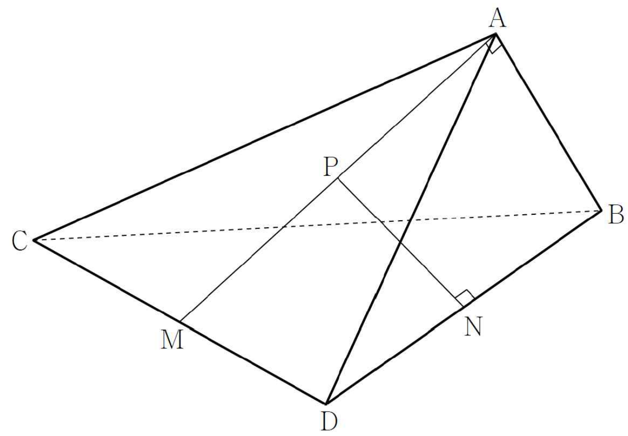
06 이면각1 (이면각 구하기)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 29

6. 그림과 같이

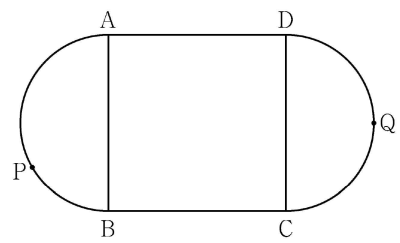
$$\overline{AB}=4,\ \overline{CD}=8,\ \overline{BC}=\overline{BD}=4\sqrt{5}$$

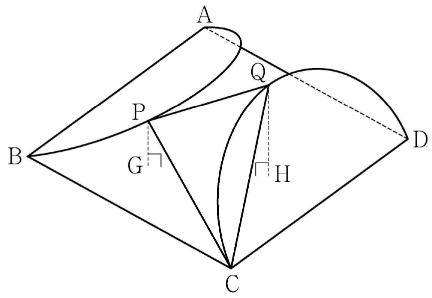
인 사면체 ABCD에 대하여 직선 AB와 평면 ACD는 서로 수직이다. 두 선분 CD, DB의 중점을 각각 M, N이라 할 때, 선분 AM 위의 점 P에 대하여 선분 DB와 선분 PN은 서로 수직이다. 두 평면 PDB와 CDB가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $40\cos^2\theta$의 값을 구하시오.



[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 29

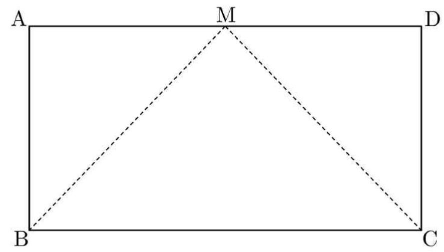
7. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정사각형 ABCD에 두 선분 AB, CD를 각각 지름으로 하는 두 반원이 붙어 있는 모양의 종이가 있다. 반원의 호 AB의 삼등분점 중 점 B에 가까운 점을 P라 하고, 반원의 호 CD를 이등분하는 점을 Q라 하자.
이 종이에서 두 선분 AB와 CD를 접는 선으로 하여 두 반원을 접어 올렸을 때 두 점 P, Q에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면 두 점 G, H는 정사각형 ABCD의 내부에 놓여 있고, $\overline{PG}=\sqrt{3}$, $\overline{QH}=2\sqrt{3}$이다. 두 평면 PCQ와 ABCD가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $70\times\cos^2\theta$의 값을 구하시오.
(단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)



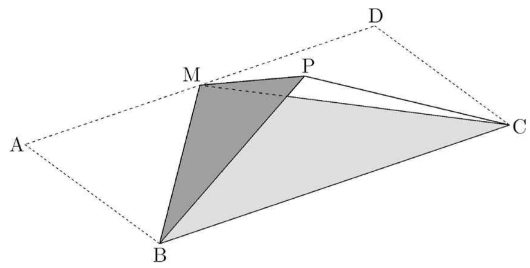


[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 28

8. [그림1]과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AD}=2\sqrt{7}$인 직사각형 ABCD 모형의 종이가 있다. 선분 AD의 중점을 M이라 하자. 두 선분 BM, CM을 접는 선으로 하여 [그림2]와 같이 두 점 A, D가 한 점 P에서 만나도록 종이를 접었을 때, 평면 PBM과 평면 BCM이 이루는 각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은?
(단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)



[그림 1]



[그림 2]

① $\frac{17}{27}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{19}{27}$
④ $\frac{20}{27}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

07 기하

09 공간도형

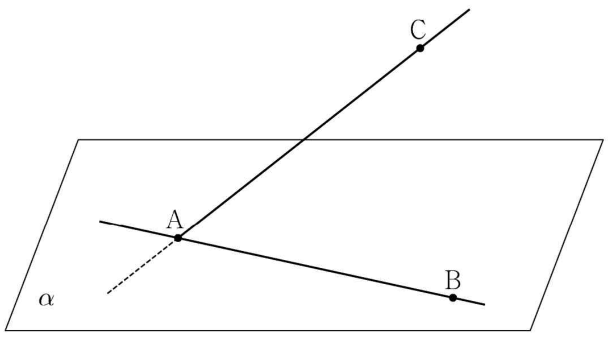
02 삼수선의 정리

07 이면각2 (이면각 조건)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 기하 27

9. 좌표공간에 직선 AB를 포함하는 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 C에 대하여 직선 AB와 직선 AC가 이루는 예각의 크기를 θ_1이라 할 때 $\sin\theta_1 = \frac{4}{5}$이고, 직선 AC와 평면 α가 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2} - \theta_1$이다. 평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ_2라 할 때, $\cos\theta_2$의 값은?

① $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{6}$
④ $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{8}$



07 기하

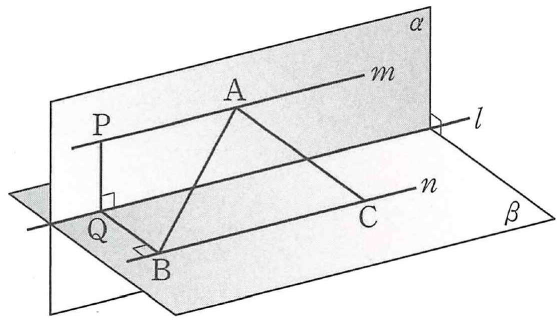
09 공간도형

02 삼수선의 정리

08 이면각3 (서로 수직인 두 평면)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 기하 25

10. 좌표공간에서 수직으로 만나는 두 평면 α, β의 교선을 l이라 하자. 평면 α 위의 직선 m과 평면 β 위의 직선 n은 각각 직선 l과 평행하다. 직선 m 위의 $\overline{AP}=4$인 두 점 A, P에 대하여 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 Q, 점 Q에서 직선 n에 내린 수선의 발을 B라 하자. $\overline{PQ}=3$, $\overline{QB}=4$이고, 점 B가 아닌 직선 n 위의 점 C에 대하여 $\overline{AB}=\overline{AC}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

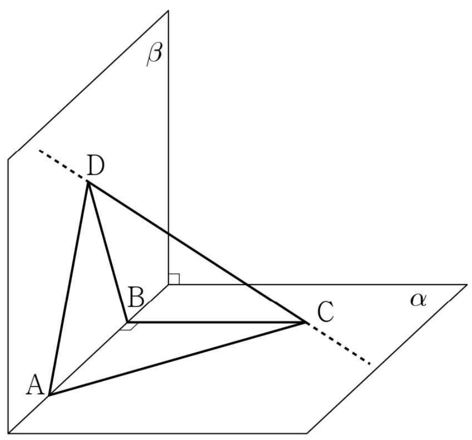


① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 27

11. 공간에서 수직으로 만나는 두 평면 α, β의 교선 위에 두 점 A, B가 있다. 평면 α 위에 $\overline{AC}=2\sqrt{29}$, $\overline{BC}=6$인 점 C와 평면 β 위에 $\overline{AD}=\overline{BD}=6$인 점 D가 있다. $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$일 때, 직선 CD와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은?

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{29}}{6}$
④ $\frac{\sqrt{30}}{6}$ ⑤ $\frac{\sqrt{31}}{6}$



07 기하 09 공간도형

03 정사영

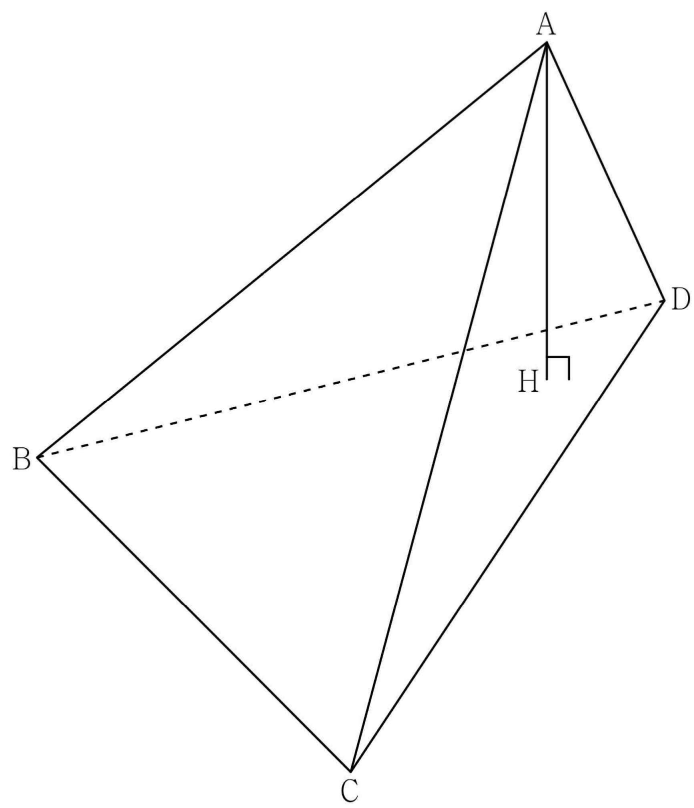
05 정사영5 (정사영의 넓이 구하기. 이면각이 주어지지 않은 경우)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 30

12. 한 변의 길이가 4이 정삼각형 ABC를 한 면으로 하는 사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 놓여 있다. 직선 DH가 선분 BC와 만나는 점을 E라 할 때, 점 E가 다음 조건을 만족시킨다.

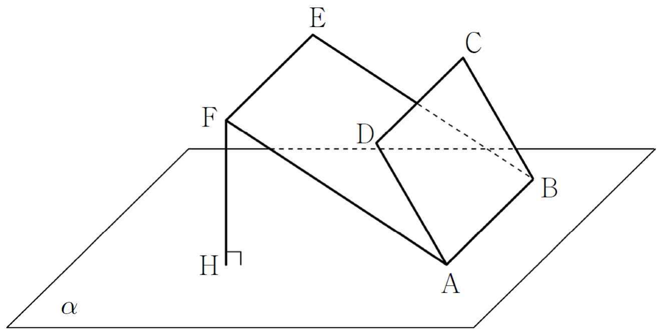
(가) $\angle AEH=\angle DAH$
(나) 점 E는 선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점이고 $\overline{DE}=4$이다.

삼각형 AHD의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 27

13. 그림과 같이 평면 α위에 있는 서로 다른 두 점 A, B와 평면 α위에 있지 않은 서로 다른 네 점 C, D, E, F가 있다. 사각형 ABCD는 한 변의 길이가 6인 정사각형이고 사각형 ABEF는 $\overline{\mathrm{AF}}=12$인 직사각형이다. 정사각형 ABCD의 평면 α위로의 정사영의 넓이는 18이고, 점 F의 평면 α위로의 정사영을 H라 하면 $\overline{\mathrm{FH}}=6$이다. 정사각형 ABCD의 평면 ABEF 위로의 정사영의 넓이는? $\left(\text{단, } 0<\angle \mathrm{DAF}<\frac{\pi}{2}\right)$



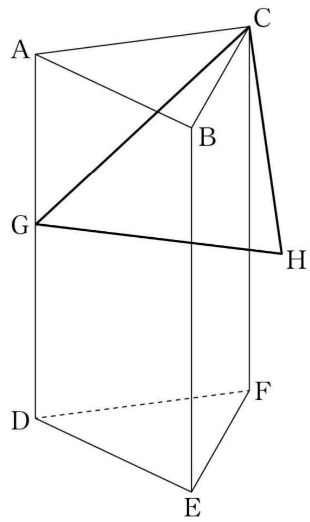
① $12\sqrt{3}$ ② $15\sqrt{2}$ ③ $18\sqrt{2}$
④ $15\sqrt{3}$ ⑤ $18\sqrt{3}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 30

14. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형을 밑면으로 하고 높이가 $4+2\sqrt{3}$인 정삼각기둥 ABC$-$DEF와 $\overline{\mathrm{DG}}=4$인 선분 AD 위의 점 G가 있다. 점 H가 다음 조건을 만족시킨다.

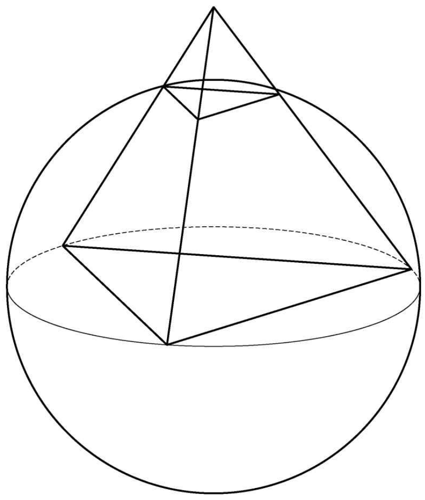
(가) 삼각형 CGH의 평면 ADEB위로의 정사영은 정삼각형이다.
(나) 삼각형 CGH의 평면 DEF위로의 정사영의 내부와 삼각형 DEF의 내부의 공통부분의 넓이는 $2\sqrt{3}$이다.

삼각형 CGH의 평면 ADFC위로의 정사영의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오.



[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 기하 30

15. 좌표공간에 정사면체 ABCD가 있다. 정삼각형 BCD의 외심을 중심으로 하고 점 B를 지나는 구를 S라 하자.
구 S와 선분 AB가 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P,
구 S와 선분 AC가 만나는 점 중 C가 아닌 점을 Q,
구 S와 선분 AD가 만나는 점 중 D가 아닌 점을 R라 하고,
점 P에서 구 S에 접하는 평면을 α라 하자.
구 S의 반지름의 길이가 6일 때, 삼각형 PQR의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 k이다. k^2의 값을 구하시오.

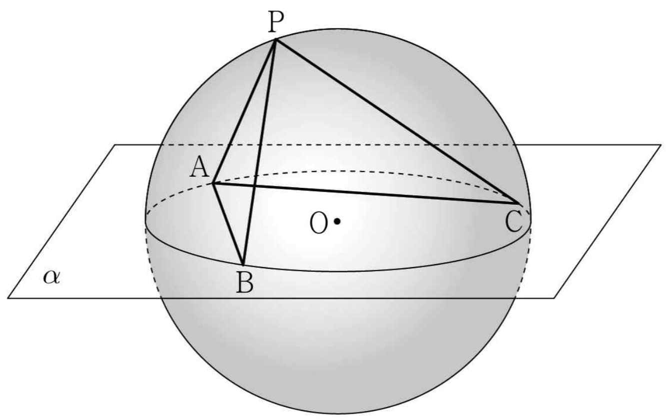


[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 30

16. 공간에서 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 구와 점 O를 지나는 평면 α가 있다. 평면 α와 구가 만나서 생기는 원 위의 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 두 직선 OA, BC가 서로 수직일 때, 구 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\angle PAO = \frac{\pi}{3}$ (나) 점 P의 평면 α위로의 정사영은 선분 OA 위에 있다.

$\cos(\angle PAB) = \frac{\sqrt{10}}{8}$일 때, 삼각형 PAB의 평면 PAC위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. $30 \times S^2$의 값을 구하시오. (단, $0 < \angle BAC < \frac{\pi}{2}$)



07 기하

10 공간좌표

01 공간좌표

02 공간좌표2 (두 점 사이의 거리)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 기하 23

17. 좌표공간의 점 $P(1, 3, 4)$를 zx평면에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하자. 두 점 P와 Q 사이의 거리는?

① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 23

18. 좌표공간의 점 $A(2,\ 1,\ 3)$을 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 P라 하고, 점 A를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는?

① $5\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $3\sqrt{6}$

④ $2\sqrt{14}$ ⑤ $2\sqrt{15}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 23

19. 좌표공간의 점 $A(3,\ 0,\ -2)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하자. 점 $C(0,\ 4,\ 2)$에 대하여 선분 BC의 길이는?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 23

20. 좌표공간에서 점 $P(2, 1, 3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이는?

① $2\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $4\sqrt{3}$

④ $2\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{14}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 기하 23

21. 좌표공간의 점 A$(2, 2, -1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하자. 점 C$(-2, 1, 1)$에 대하여 선분 BC의 길이는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

07 기하

10 공간좌표

02 분점

01 분점1 (분점의 좌표)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 24

22. 좌표공간의 두 점 A$(0, 2, -3)$, B$(6, -4, 15)$에 대하여 선분 AB 위에 점 C가 있다. 세 점 A, B, C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 A$'$, B$'$, C$'$이라 하자. $2\overline{\mathrm{A'C'}}=\overline{\mathrm{C'B'}}$일 때, 점 C의 z좌표는?

① -5 ② -3 ③ -1
④ 1 ⑤ 3

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 23

23. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 1,\ -1)$, $\mathrm{B}(-5,\ b,\ 3)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표가 $(8,\ 3,\ 1)$일 때, $a+b$의 값은?

① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

07 기하 10 공간좌표

02 분점

02 분점2 (분점의 위치)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 24

24. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ -2)$, $\mathrm{B}(2,\ 4,\ 1)$에 대하여 선분 AB가 xy평면과 만나는 점을 P라 할 때, 선분 AP의 길이는?

① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{14}$
④ $\sqrt{15}$ ⑤ 4

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 23

25. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(3,\ a,\ -2)$, $\mathrm{B}(-1,\ 3,\ a)$에 대하여 선분 AB의 중점이 xy평면 위에 있을 때, a의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

07 기하

10 공간좌표

03 구의 방정식

04 구의 방정식4 (현 또는 접선의 길이)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 26

26. 좌표공간에서 중심이 $\mathrm{A}(a,\ -3,\ 4)\ (a>0)$인 구 S가 x축과 한 점에서만 만나고 $\overline{\mathrm{OA}}=3\sqrt{3}$일 때, 구 S가 z축과 만나는 두 점 사이의 거리는? (단, O는 원점이다.)

① $3\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{14}$ ③ $\sqrt{58}$

④ $2\sqrt{15}$ ⑤ $\sqrt{62}$

07 기하

10 공간좌표

03 구의 방정식

05 구의 방정식5 (구와 평면의 교선)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 27

27. 좌표공간에 $\overline{\mathrm{OA}}=7$인 점 A가 있다. 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 8인 구 S와 xy평면이 만나는 생기는 원의 넓이가 25π이다. 구 S와 z축이 만나는 두 점을 각각 B, C라 할 때, 선분 BC의 길이는? (단, O는 원점이다.)

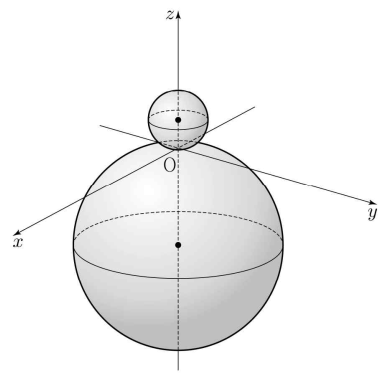
① $2\sqrt{46}$ ② $8\sqrt{3}$ ③ $10\sqrt{2}$
④ $4\sqrt{13}$ ⑤ $6\sqrt{6}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 29

28. 좌표공간에 두 개의 구

$$S_1 : x^2+y^2+(z-2)^2=4,\quad S_2 : x^2+y^2+(z+7)^2=49$$

가 있다. 점 $\mathrm{A}(\sqrt{5},\,0,\,0)$을 지나고 zx평면에 수직이며, 구 S_1과 z좌표가 양수인 한 점에서 접하는 평면을 α라 하자. 구 S_2가 평면 α와 만나서 생기는 원을 C라 할 때, 원 C 위의 점 중 z좌표가 최소인 점을 B라 하고 구 S_2와 점 B에서 접하는 평면을 β라 하자. 원 C의 평면 β위로의 정사영의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



07 기하 10 공간좌표

03 구의 방정식

06 구의 방정식6 (자취 및 활용)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 29

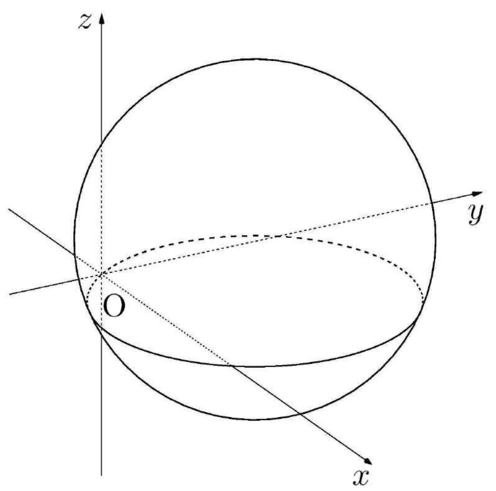
29. 좌표공간에 점 $(4, 3, 2)$를 중심으로 하고 원점을 지나는 구

$$S : (x-4)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=29$$

가 있다. 구 S위의 점 $\mathrm{P}(a, b, 7)$에 대하여 직선 OP를 포함하는 평면 α가 구 S와 만나서 생기는 원을 C라 하자. 평면 α와 원 C가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 직선 OP와 xy평면이 이루는 각의 크기와 평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기는 같다.
> (나) 선분 OP는 원 C의 지름이다.

$a^2+b^2<25$일 때, 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는 $k\pi$이다. $8k^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



07 기하 10 공간좌표

03 구의 방정식

07 구의 방정식7 (Mm)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 기하 30

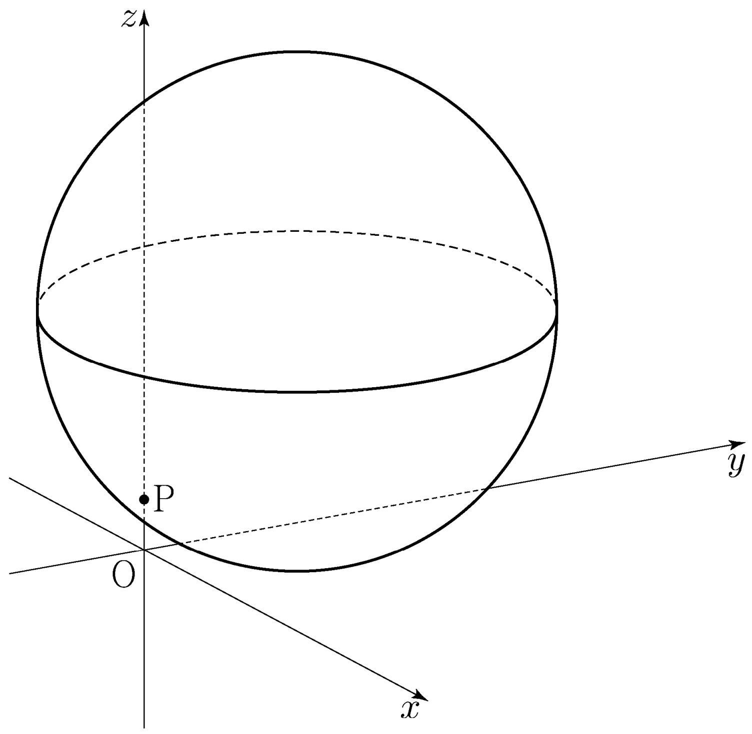
30. 좌표공간에서 점 $\mathrm{A}(0, 0, 1)$을 지나는 직선이 중심이 $\mathrm{C}(3, 4, 5)$이고 반지름의 길이가 1인 구와 한 점 P에서만 만난다. 세 점 A, C, P를 지나는 원의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 $\frac{q}{p}\sqrt{41}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 30

31. 좌표공간에 중심이 C$(2,\ \sqrt{5},\ 5)$이고 점 P$(0,\ 0,\ 1)$을 지나는 구

$$S:(x-2)^2+(y-\sqrt{5})^2+(z-5)^2=25$$

가 있다. 구 S가 평면 OPC와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점 Q, 구 S 위를 움직이는 점 R에 대하여 두 점 Q, R의 xy평면 위로의 정사영을 각각 $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{R_1}$이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 Q, R에 대하여 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고 세 점 O, $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{R_1}$은 한 직선 위에 있지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[기하] [03공도좌] 교사평경 최근 3개년(빠른 정답)

기백 3개년 2022.12.29

1. [정답] ⑤
2. [정답] ①
3. [정답] ③
4. [정답] ④
5. [정답] ②

6. [정답] **25**
7. [정답] **40**
8. [정답] ⑤
9. [정답] ①
10. [정답] ②

11. [정답] ②
12. [정답] 7
13. [정답] ⑤
14. [정답] 48
15. [정답] 24

16. [정답] 50
17. [정답] ①
18. [정답] ②
19. [정답] ⑤
20. [정답] ①

21. [정답] ⑤
22. [정답] ⑤
23. [정답] ④
24. [정답] ①
25. [정답] ③

26. [정답] ②
27. [정답] ⑤
28. [정답] 127
29. [정답] 261
30. [정답] 9

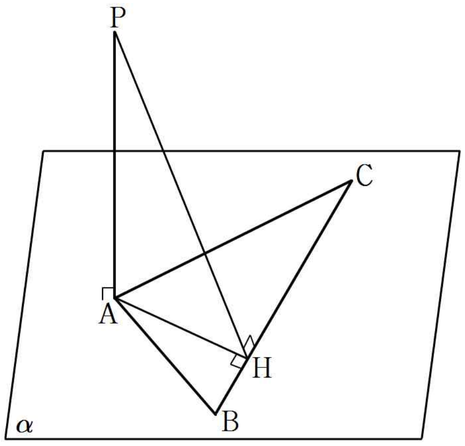
31. [정답] 23

[기하] [03공도좌] 교사평경 최근 3개년(해설)

기백 3개년 2022.12.29

1) [정답] ⑤

[해설]



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의해 $\overline{PH}\perp\overline{BC}$이다.
삼각형 ABC가 직각삼각형이므로 $\overline{BC}=2$
$\overline{AH}\times\overline{BC}=\overline{AB}\times\overline{AC}$에서
$2\overline{AH}=\sqrt{3}$ $\quad\therefore\ \overline{AH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
직각삼각형 PAH에서
$\overline{PH}=\sqrt{2^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$

2) [정답] ①

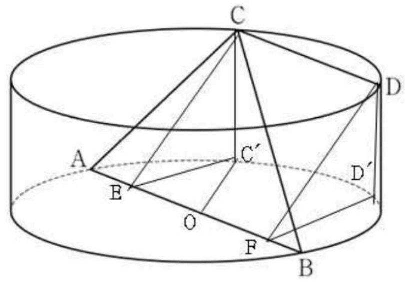
[해설]
점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 P′이라 하면 $\overline{AD}\perp$(평면 BCD)이고 $\overline{AP'}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{DP'}\perp\overline{BC}$이다.
이때, $\overline{AP}+\overline{DP}\geq\overline{AP'}+\overline{DP'}$이므로 구하는 최소의 길이는 $\overline{AP'}+\overline{DP'}$이다. 한편, 직각삼각형 BCD에서
$\overline{BC}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{DB}\times\overline{DC}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{DP'}$$
$$\overline{DB}\times\overline{DC}=\overline{BC}\times\overline{DP'}$$
$$2\times2\sqrt{3}=4\times\overline{DP'}$$
$$\overline{DP'}=\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때, 직각삼각형 ADP′에서
$$\overline{AP'}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{DP'}^2}$$
$=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}$
$=2\sqrt{3}$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡
㉠과 ㉡에서 구하는 최솟값은
$$\overline{AP'}+\overline{DP'}=2\sqrt{3}+\sqrt{3}$$
$=3\sqrt{3}$

3) [정답] ③

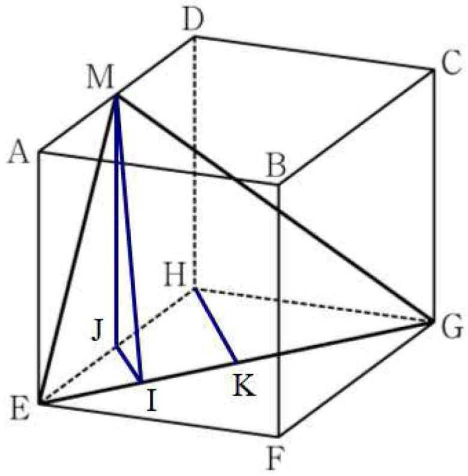
[해설]
두 점 C, D에서 두 점 A, B를 포함하는 밑면에 내린 수선의 발을 각각 C′, D′이 라 하고, 두 점 C′, D′에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자.



$\overline{CC'}\perp$(평면 ABD′C′),, $\overline{C'E}\perp\overline{AB}$
이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{CE}\perp\overline{AB}$이다.
조건 (가)에서 삼각형 ABC의 넓이가 16이므로
$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CE}=16$
$\dfrac{1}{2}\times8\times\overline{CE}=16$
$\overline{CE}=4$
직각삼각형 CC′E에서 $\overline{CC'}=3$이므로
$\overline{C'E}=\sqrt{\overline{CE}^2-\overline{CC'}^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$
선분 AB의 중점을 O라 하면
직각삼각형 OC′E에서
$\overline{OE}=\sqrt{\overline{OC'}^2-\overline{C'E}^2}=\sqrt{4^2-(\sqrt{7})^2}=3$
마찬가지 방법으로
$\overline{OF}=3$
조건 (나)에서 두 직선 AB, CD가 서로 평행하므로
$\overline{CD}=\overline{EF}=\overline{OE}+\overline{OF}=3+3=6$

4) [정답] ④

[해설]
그림과 같이 점 M에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 I, 선분 EH에 내린 수선의 발을 J라 하자.



삼수선의 정리에 의하여 $\overline{JI} \perp \overline{EG}$이므로 점 H에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 K라 하면 점 K는 선분 EG의 중점이고

$\overline{IJ} = \frac{1}{2} \times \overline{HK}$

$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2}$

$= \sqrt{2}$

한편, 직각삼각형 MJI에서 $\overline{MJ} = 4$이므로

$\overline{MI} = \sqrt{\overline{MJ}^2 + \overline{IJ}^2}$

$= \sqrt{16+2}$

$= 3\sqrt{2}$

따라서 구하는 삼각형 MEG의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{EG} \times \overline{MI} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$

$= 12$

5) [정답] ②

[해설]

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H′이라 하면
삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$\frac{1}{2} \times \overline{AH'} \times \overline{BC} = 6$에서 $\overline{AH'} = 4$

$\overline{AH} \perp$(평면 BCD), $\overline{AH'} \perp \overline{BC}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HH'} \perp \overline{BC}$

두 직각삼각형 BH′H, BCD의 닮음비는 $1:3$이므로

$\overline{HH'} = 1$, $\overline{H'C} = 2$

$\overline{HC} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $\overline{AH} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$

따라서 삼각형 AHC의 넓이는

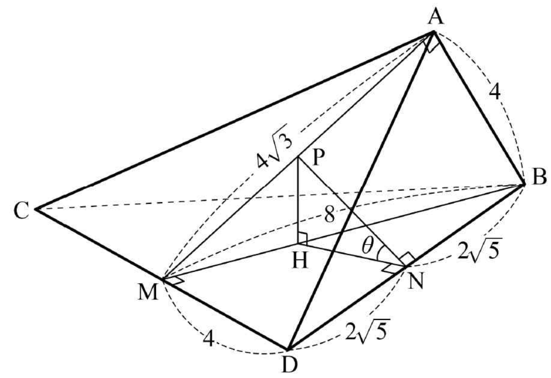
$\frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{HC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{15} \times \sqrt{5} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

6) [정답] **25**

[해설]

$\angle BMD = \frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{BM} = 8$

$\angle BAM = \frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{AM} = 4\sqrt{3}$



점 P에서 직선 BM에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PM} \perp \overline{BM}$ …… ㉠

직선 AB와 평면 ACD가 서로 수직이므로

$\overline{AB} \perp \overline{CD}$

직선 CD는 두 직선 AB, BM과 서로 수직이므로

$\overline{CD} \perp$(평면 AMB)

직선 PH는 평면 AMB에 포함되므로 $\overline{PH} \perp \overline{CD}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\overline{PH} \perp$(평면 CDB)

$\overline{PH} \perp$(평면 CDB)이고 $\overline{PN} \perp \overline{BD}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HN} \perp \overline{BD}$

두 삼각형 DBM과 HBN은 서로 닮은 도형이므로

$\overline{BM} : \overline{MD} = \overline{BN} : \overline{NH}$에서 $\overline{NH} = \frac{\overline{MD} \times \overline{BN}}{\overline{BM}} = \sqrt{5}$

$\angle BNH = \frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{BH}^2 = \overline{BN}^2 + \overline{NH}^2 = 25$

$\overline{BH} = 5$, $\overline{MH} = 3$

$\tan(\angle AMB) = \frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\overline{PH} = \sqrt{3}$

$\overline{PN}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{HN}^2 = 8$, $\overline{PN} = 2\sqrt{2}$

두 평면 PDB, CDB의 교선은 직선 DB이고, 평면 PDB 위의 점 P의 평면 CDB위로의 정사영이 H이므로

$\cos\theta = \frac{\overline{HN}}{\overline{PN}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$

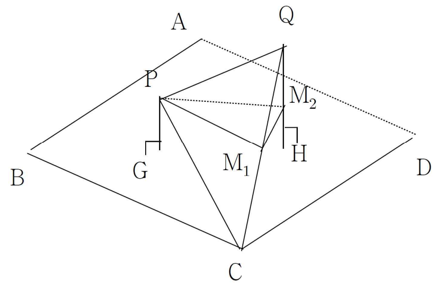
따라서 $40\cos^2\theta = 25$

7) [정답] **40**

[해설]

$\overline{PG} = \sqrt{3}$, $\overline{QH} = 2\sqrt{3}$이므로 점 P를 지나고 평면 ABCD와 평행한 평면이 두 선분 QC, QH와 만나는 점을 각각 M_1, M_2라 하면 두 점은 중점이다.

이때, 구하는 평면이 이루는 각은 두 평면 PM_1M_2, PM_1Q가 이루는 각이다.



한편 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 P′, 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 O_1이라 하면

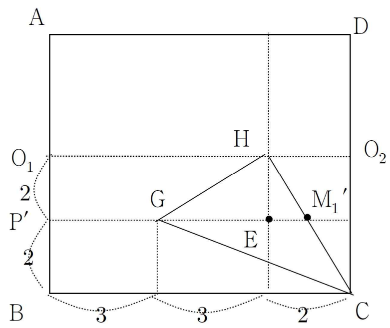
$$\overline{O_1P'}=4\cos60°=2$$

$$\overline{P'G}=\sqrt{\overline{PP'}^2-\overline{PG}^2}$$
$$=\sqrt{(4\sin60°)^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=3$$

또, 점 Q에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 Q′, 선분 CD를 지름으로 하는 원의 중심을 O_2라 하면

$$\overline{HO_2}=\sqrt{\overline{QO_2}^2-\overline{QH}^2}$$
$$=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}$$
$$=2$$

이때, 점 M_1의 평면 ABCD 위로 정사영 시킨 점을 M_1'이라 하면, M_1'은 선분 CH의 중점이므로 그림과 같다.



이때,

$$\overline{GH}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

$$\overline{HM_1'}=\frac{1}{2}\overline{HC}=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{5}$$

또, 선분 GM_1'과 점 H를 지나고 선분 BC에 수직인 직선이 만나는 점을 E라 하면

$$\overline{GM_1'}=\overline{GE}+\overline{EM_1'}=3+1=4$$

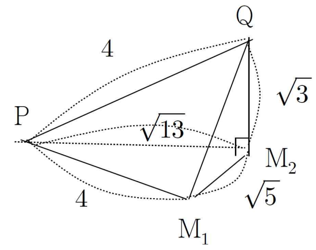
이때,

$$\overline{PM_2}=\overline{GH}=\sqrt{13},\ \overline{M_1M_2}=\overline{HM_1'}=\sqrt{5},$$
$$\overline{PM_1}=\overline{GM_1'}=4$$

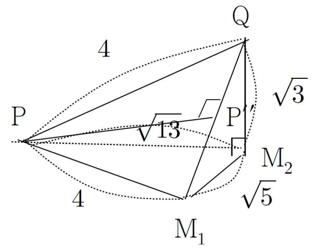
이고

$$\overline{PQ}=\sqrt{(\sqrt{13})^2+(\sqrt{3})^2}=4,$$
$$\overline{QM_1}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{2}$$

이므로 다음 그림과 같다.



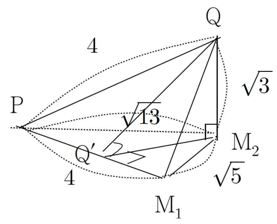
점 P에서 선분 QM_1에 내린 수선의 발을 P″이라 하자.



이때, $\angle PM_1Q=\alpha$라 하면

$$\cos\alpha=\frac{\overline{M_1P''}}{\overline{PM_1}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{M_1Q}}{\overline{PM_1}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

또, 점 Q에서 선분 PM_1에 내린 수선의 발을 Q′이라 하면 $\overline{QQ'}\perp\overline{PM_1}$이고 $\overline{QM_2}\perp$(평면 PM_1M_2)이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{M_2Q'}\perp\overline{PM_1}$



이때, $\overline{M_1Q'}=\overline{QM_1}\cos\alpha=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{4}=1$이므로

$$\overline{QQ'}=\sqrt{\overline{QM_1}^2-\overline{Q'M_1}^2}$$
$$=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1^2}$$
$$=\sqrt{7}$$

$$\overline{M_2Q'}=\sqrt{\overline{M_2M_1}^2-\overline{Q'M_1}^2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}$$
$$=2$$

따라서 $\cos\theta=\frac{\overline{Q'M_2}}{\overline{QQ'}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$이므로

$$70\times\cos^2\theta=70\times\frac{4}{7}=40$$

8) [정답] ⑤

[해설]

$\overline{AM}=\sqrt{7}$이고, 점 M에서 BC에 내린 수선의 발을 H, 점

A에서 $\overline{BM}$에 내린 수선의 발을 X라 하면 직선 AX와 $\overline{BH}$의 교점이 생긴다. 이때 이 점을 Y라 하자.

$\triangle$AXM과 $\triangle$MXY, $\triangle$BXA가 닮음이므로

$$\overline{MY}=\frac{7}{3}$$

$\overline{AX}=\overline{XP}$이므로 $\cos\theta=\frac{\overline{XY}}{\overline{XP}}=\frac{\overline{XY}}{\overline{AX}}$

$\triangle$ABX와 $\triangle$YMX이므로

$$\frac{\overline{XY}}{\overline{XA}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{AB}}=\frac{7}{9}$$

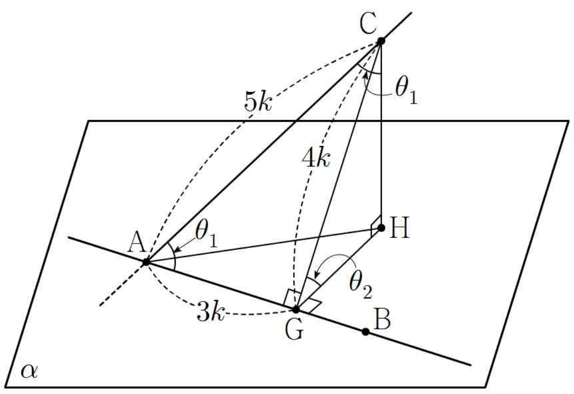
$$\therefore\ \cos\theta=\frac{7}{9}$$

9) [정답] ①

[해설]

그림과 같이 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 G, 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면, 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{HG}\perp\overline{AB}$$



직각삼각형 AGC에서 $\angle CAG=\theta_1$이고, $\sin\theta_1=\frac{4}{5}$이므로 양수 k에 대하여 $\overline{AC}=5k$라 하면

$$\overline{CG}=4k,\ \cos\theta_1=\frac{3}{5}$$

또, 직각삼각형 AHC에서 $\angle CAH=\frac{\pi}{2}-\theta_1$이므로

$$\angle ACH=\theta_1$$

따라서 $\triangle ACG\equiv\triangle CAH$이므로 $\overline{CH}=3k$

이때 직각삼각형 CGH에서

$$\overline{GH}=\sqrt{\overline{CG}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{(4k)^2-(3k)^2}=\sqrt{7}k$$

이고, $\angle CGH=\theta_2$이므로

$$\cos\theta_2=\frac{\overline{GH}}{\overline{CG}}=\frac{\sqrt{7}k}{4k}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

10) [정답] ②

[해설]

삼각형 PQB에서 $\angle PQB=90°$이므로

$\overline{PB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PB}\perp\overline{BC}$이므로 점 A에서 직선 n에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\overline{PB}=5$

한편, 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 점 H는 선분 BC의 중점이다.

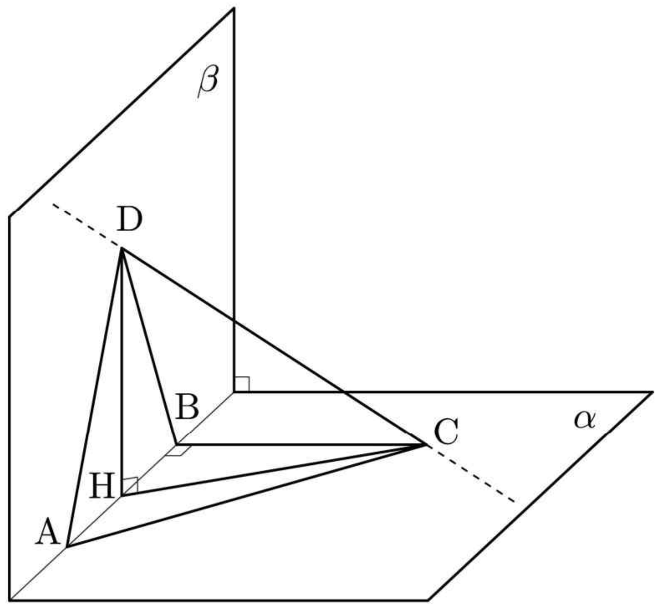
즉, $\overline{BC}=2\overline{BH}=2\overline{PA}=8$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times8\times5=20$

11) [정답] ②

[해설]



삼각형 ABC가 직각삼각형이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(2\sqrt{29})^2-6^2}=4\sqrt{5}$

점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 DAB가 이등변삼각형이므로 $\overline{AH}=\overline{BH}=2\sqrt{5}$,

$\overline{DH}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{5})^2}=4$

삼각형 HBC가 직각삼각형이므로

$\overline{CH}=\sqrt{6^2+(2\sqrt{5})^2}=2\sqrt{14}$

두 평면 α, β는 서로 수직이므로 $\overline{DH}\perp\overline{BC}\overline{DH}\perp\overline{AB}$,

$\overline{DH}\perp\overline{BC}$이므로 직선 DH는 평면 α와 수직이다.

그러므로 $\angle DHC=\frac{\pi}{2}$

$\overline{CD}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{CH}^2}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{14})^2}=6\sqrt{2}$

점 D의 평면 α위로의 정사영이 점 H이므로

$\cos\theta = \dfrac{\overline{CH}}{\overline{CD}}$

따라서 $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{14}}{6\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$

12) [정답] 7

[해설]

조건 (나)에서 $\angle CED = 90^\circ$ 이므로 두 직선 BC, DE는 서로 수직이다.

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AH} \perp$ (평면 BCD), $\overline{HE} \perp \overline{BC}$이므로 $\overline{AE} \perp \overline{BC}$

즉 직선 BC와 평면 AED는 서로 수직이므로

두 직선 BC, AD도 서로 수직이다. …… ㉠

조건 (가)에서 두 삼각형 AEH, DAH는 닮음이므로

$\angle DAE = \angle EAH + \angle HAD = 90^\circ$

그러므로 두 직선 AD, AE는 서로 수직이다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 직선 AD는 평면 ABC와 서로 수직이다.

정삼각형 ABC에서 $\overline{AE} \perp \overline{BC}$이므로 점 E는 선분 BC의 중점이다.

즉, $\overline{AE} = 2\sqrt{3}$

직각삼각형 AED에서

$\overline{AD} = \sqrt{\overline{DE}^2 - \overline{AE}^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2$

직각삼각형 AED에서 $\overline{AE} \times \overline{AD} = \overline{AH} \times \overline{DE}$이므로

$2\sqrt{3} \times 2 = \overline{AH} \times 4$, $\overline{AH} = \sqrt{3}$

직각삼각형 AHD에서

$\overline{DH} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$

두 평면 ABD, AHD가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

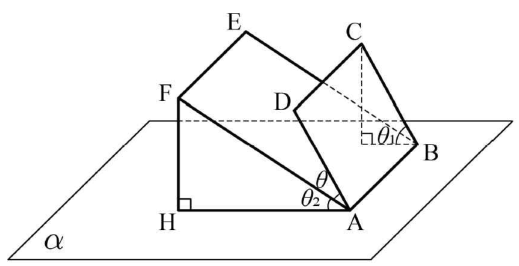
$\theta = \angle BAE = 30^\circ$ 이므로 구하는 정사영의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \cos 30° = \dfrac{3}{4}$

따라서 $p = 4$, $q = 3$이므로 $p + q = 4 + 3 = 7$

13) [정답] ⑤

[해설]



정사각형 ABCD의 넓이는 36

정사각형 ABCD의 평면 α위로의 정사영의 넓이가 18이므로

두 평면 ABCD와 α가 이루는 예각의 크기를 θ_1이라 하면

$36 \times \cos\theta_1 = 18$이므로 $\theta_1 = \dfrac{\pi}{3}$

점 F의 평면 α 위로의 정사영이 H이므로 두 평면 ABEF와 α가 이루는 예각의 크기를 θ_2라 하면

$\cos\theta_2 = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AF}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\theta_2 = \dfrac{\pi}{6}$

두 평면 ABCD와 ABEF가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

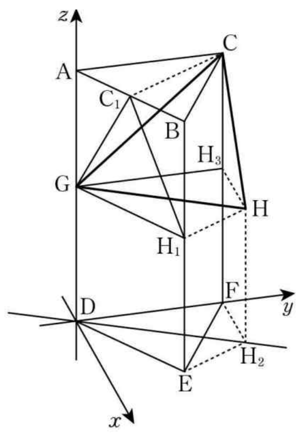
$$\theta = \theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

따라서 정사각형 ABCD의 평면 ABEF 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면 $S' = 36 \times \cos\dfrac{\pi}{6} = 18\sqrt{3}$

14) [정답] 48

[해설]

그림은 정삼각기둥 ABC−DEF를 좌표공간에 나타낸 것이다.



두 점 C, H의 평면 ADEB위로의 정사영을 각각 C_1, H_1이라 하자.

$\overline{AC_1} = 2$, $\overline{AG} = 2\sqrt{3}$이므로

$\overline{GC_1} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$, $\angle AGC_1 = 30^\circ$

조건 (가)에서 삼각형 GH_1C_1은 정삼각형이므로

$\angle C_1GH_1 = 60^\circ$, $\overline{GH_1} = 4$

조건 (나)를 만족시키려면 점 H_1은 점 G에서 선분 BE에 내린 수선의 발과 일치해야 한다.

점 H의 평면 DEF위로의 정사영을 H_2라 하자.

조건 (나)에서 삼각형 CGH의 평면 DEF위로의 정사영인 삼각형 FDH_2의 내부와 삼각형 DEF의 내부의 공통부분의 넓이가 삼각형 DEF의 넓이의 $\dfrac{1}{2}$인 $2\sqrt{3}$이므로 직선 DH_2는 선분 EF의 중점을 지난다.

그러므로 두 삼각형 DEH_2, DFH_2가 합동이고

$\angle DEH_2 = 90^\circ$이므로 $\angle DFH_2 = 90^\circ$이다.

점 H의 평면 ADFC위로의 정사영을 H_3이라 하면

점 H_3은 점 G에서 선분 CF에 내린 수선의 발과 일치한다. 그러므로 삼각형 CGH의 평면 ADFC위로의 정사영인 삼각형 CGH_3의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

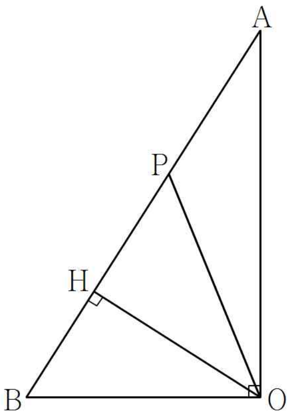
따라서 $S^2=48$

15) [정답] 24

[해설]
구 S의 중심, 즉 삼각형 BCD의 외심을 O라 하면 직각삼각형 ABO에서

$$\overline{AB}=6\sqrt{3},\ \overline{BO}=6,\ \overline{AO}=6\sqrt{2}$$

이다.



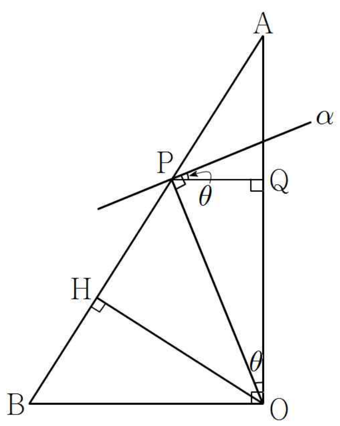
이때 점 P가 구 S 위에 있으므로 $\overline{OP}=6$
즉, 삼각형 OBP가 이등변삼각형이므로 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 BP의 중점이다.
한편, $\triangle ABO \backsim \triangle OBH$이므로

$$6:6\sqrt{3}=\overline{BH}:6$$

에서 $\overline{BH}=2\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{AP}&=\overline{AB}-\overline{BP}\\&=6\sqrt{3}-4\sqrt{3}\\&=2\sqrt{3}\end{aligned}$$

한편, 다음 그림과 같이 평면 α와 평면 PQR가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\angle AOP=\theta$이다.



점 P에서 선분 AO에 내린 수선의 발을 Q라 하면

$$\triangle APQ \backsim \triangle ABO$$

이므로

$$\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{AQ}:\overline{AO}$$
$$2\sqrt{3}:6\sqrt{3}=\overline{AQ}:6\sqrt{2}$$
$$\overline{AQ}=2\sqrt{2}$$

$\overline{OQ}=\overline{OA}-\overline{AQ}=4\sqrt{2}$ 이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

삼각형 PQR는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형이므로 삼각형 PQR의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2=3\sqrt{3}$$

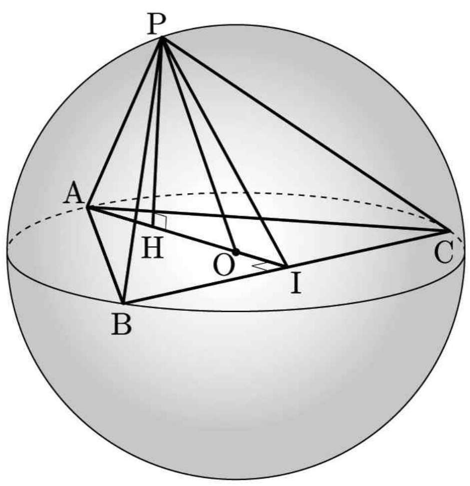
따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$\begin{aligned}k&=3\sqrt{3}\times\cos\theta\\&=3\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\\&=2\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\therefore\ k^2=(2\sqrt{6})^2=24$$

16) [정답] 50

[해설]



점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I라 하자.

$\angle PAO=\frac{\pi}{3}$이고 $\overline{OA}=\overline{OP}$이므로 삼각형 PAO는 정삼각형이다.

$\overline{PA}=4,\ \overline{PH}=2\sqrt{3},\ \overline{AH}=\overline{OH}=2\overline{OI}=a(a>0)$이라 하면

직각삼각형 OIB에서 $\overline{IB}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{OI}^2}=\sqrt{16-a^2}$ 직각삼각형 AIB에서

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\sqrt{\overline{AI}^2+\overline{IB}^2}\\&=\sqrt{(a+4)^2+16-a^2}\\&=\sqrt{8a+32}\end{aligned}$$

직각삼각형 PHI에서

$$\overline{PI}=\sqrt{\overline{PH}^2+\overline{HI}^2}$$

$= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (a+2)^2}$

$= \sqrt{a^2 + 4a + 16}$

$\overline{\mathrm{PH}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{HI}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PI}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$이다.

직각삼각형 PIB에서

$\overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{\overline{\mathrm{PI}}^2 + \overline{\mathrm{IB}}^2}$

$= \sqrt{(a^2+4a+16)+(16-a^2)}$

$= \sqrt{4a+32}$

삼각형 PAB에서

$\cos(\angle \mathrm{PAB}) = \dfrac{\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{PB}}^2}{2 \times \overline{\mathrm{AP}} \times \overline{\mathrm{AB}}}$

$= \dfrac{16 + (8a+32) - (4a+32)}{2 \times 4 \times \sqrt{8a+32}}$

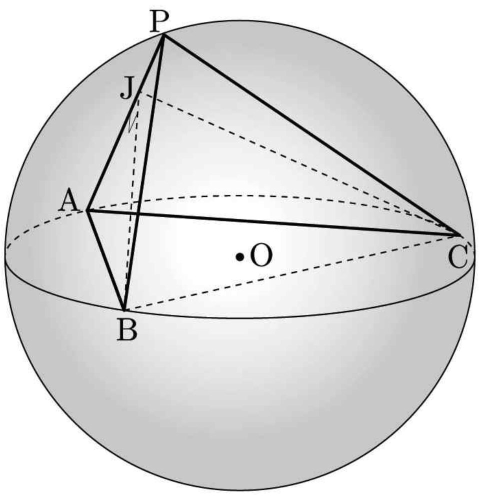
$= \dfrac{a+4}{4\sqrt{2a+8}}$

그러므로 $\dfrac{\sqrt{10}}{8} = \dfrac{a+4}{4\sqrt{2a+8}}$

$(a+4)^2 = 5(a+4)$

$a^2 + 3a - 4 = (a+4)(a-1) = 0$

$a > 0$이므로 $a = 1$



점 B에서 선분 PA에 내린 수선의 발을 J라 하자.

$\sin(\angle \mathrm{PAB}) = \dfrac{\overline{\mathrm{BJ}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{BJ}}}{2\sqrt{10}}$

$\sin(\angle \mathrm{PAB}) = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\sqrt{10}}{8}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{6}}{8}$이므로 $\overline{\mathrm{BJ}} = \dfrac{3\sqrt{15}}{2}$

삼각형 PAB의 넓이를 S'이라 하자.

$S' = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{PA}} \times \overline{\mathrm{BJ}} = \dfrac{1}{2} \times 4 \times \dfrac{3\sqrt{15}}{2} = 3\sqrt{15}$

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{PB}} = \overline{\mathrm{PC}}$이므로 두 삼각형 PAB, PAC는 서로 합동이다.

$\overline{\mathrm{BJ}} \perp \overline{\mathrm{AP}}$이므로 $\overline{\mathrm{CJ}} \perp \overline{\mathrm{AP}}$이고 $\overline{\mathrm{BJ}} = \overline{\mathrm{CJ}}$

두 평면 PAB와 PAC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\overline{\mathrm{BJ}} \perp \overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{CJ}} \perp \overline{\mathrm{AP}}$이므로 $\theta = \angle \mathrm{BJC}$

$\overline{\mathrm{JB}} = \overline{\mathrm{JC}} = \dfrac{3\sqrt{15}}{2}$, $\overline{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{15}$

$\cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{JB}}^2 + \overline{\mathrm{JC}}^2 - \overline{\mathrm{BC}}^2}{2 \times \overline{\mathrm{JB}} \times \overline{\mathrm{JC}}}$

$= \dfrac{2 \times \left(\dfrac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2 - 60}{2 \times \left(\dfrac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2}$

$= \dfrac{1}{9}$

$S = S' \times \cos\theta = 3\sqrt{15} \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$

따라서 $30 \times S^2 = 30 \times \dfrac{15}{9} = 50$

17) [정답] ①

[해설]

$\mathrm{P}(1,\ 3,\ 4)$, $\mathrm{Q}(1,\ -3,\ 4)$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}} = 6$

18) [정답] ②

[해설]

좌표공간의 점 $\mathrm{A}(2,\ 1,\ 3)$을 xy평면에 대하여 대칭이동시킨 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}(2,\ 1,\ -3)$

점 A를 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점 Q의 좌표는

$\mathrm{Q}(-2,\ 1,\ 3)$

따라서 구하는 선분 PQ의 길이는

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(2+2)^2 + (1-1)^2 + (-3-3)^2}$

$= \sqrt{52}$

$= 2\sqrt{13}$

19) [정답] ⑤

[해설]

점 B는 점 $\mathrm{A}(3,\ 0,\ -2)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점이므로 $\mathrm{B}(3,\ 0,\ 2)$

따라서 $\mathrm{C}(0,\ 4,\ 2)$이므로

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{(0-3)^2 + (4-0)^2 + (2-2)^2} = 5$

20) [정답] ①

[해설]

점 Q의 좌표는 $(2,\ -1,\ -3)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{0^2+2^2+6^2}=2\sqrt{10}$

21) [정답] ⑤

[해설]

점 $A(2, 2, -1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$B(2, -2, 1)$

따라서 점 $C(-2, 1, 1)$에 대하여 선분 BC의 길이는

$\overline{BC}=\sqrt{(-2-2)^2+(1+2)^2+(1-1)^2}$

$=5$

22) [정답] ⑤

[해설]

$2\overline{A'C'}=\overline{C'B'}$이므로 점 C'은 선분 $A'B'$의 $1:2$내분점이다.

즉, 점 C는 선분 AB의 $1:2$ 내분점이므로 점 Cz의 좌표는

$\dfrac{(-3)\times2+15\times1}{1+2}=3$

23) [정답] ④

[해설]

두 점 A, B의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{a-5}{2},\ \dfrac{1+b}{2},\ \dfrac{-1+3}{2}\right)$이고,

이점이 $(8, 3, 1)$과 같으므로

$\dfrac{a-5}{2}=8,\ \dfrac{1+b}{2}=3,\ \dfrac{-1+3}{2}=1$

따라서 $a=21,\ b=5$이므로 $a+b=26$

24) [정답] ①

[해설]

점 P는 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점이므로

점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{2m-n}{m+n},\ \dfrac{4m+n}{m+n},\ \dfrac{m-2n}{m+n}\right)$이다.

xy평면 위의 점 P의 z좌표는 0이므로

$m-2n=0,\ m=2n$

그러므로 점 P의 좌표는 $(1,\ 3,\ 0)$이다.

따라서 선분 AP의 길이는

$\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(3-1)^2+\{0-(-2)\}^2}=2\sqrt{3}$

25) [정답] ③

[해설]

선분 AB의 중점이 xy평면 위에 있으려면 중점의 z좌표가 0이어야 하므로

$\dfrac{-2+a}{2}=0$에서 $a=2$이다.

26) [정답] ②

[해설]

구가 x축과 만나는 한 점의 좌표를 H라 하면 점 $H(a,\ 0,\ 0)$이다. 이때 선분 AH의 길이가 반지름이므로

$\overline{AH}=\sqrt{0+(-3)^2+4^2}=5$

$\overline{OA}=3\sqrt{3}$이므로

$\overline{OA}=\sqrt{a^2+3^2+4^2}=\sqrt{a^2+25}=\sqrt{27}$

$\therefore\ a=\sqrt{2}\ (\because\ a>0)$

z축에 수선의 발을 내린 점을 G라 하면 $G(0,\ 0,\ 4)$이고

$\overline{AG}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-3)^2+0}=\sqrt{11}$

z축에서 만나는 두 점을 Q, Q′라 하면 $\overline{QQ'}=2\overline{GQ}$이고

$\overline{GQ}^2=\overline{AQ}^2-\overline{AG}^2=25-11=14$이므로

$\overline{GQ}=\sqrt{14}$

따라서 두 점 사이의 거리는 $2\sqrt{14}$

27) [정답] ⑤

[해설]

좌표공간의 점 A의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면 $\overline{OA}=7$이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=7$

$a^2+b^2+c^2=49$ …… ㉠

구 S의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=64$

xy평면 위의 모든 점의 z좌표는 0이므로 구 S와 xy평면이 만나서 생기는 원 C의 반지름의 길이는 $\sqrt{64-c^2}$이다.

원 C의 넓이가 25π이므로

$64-c^2=25,\ c^2=39$

㉠에서 $a^2+b^2=49-c^2=49-39=10$

점 A에서 z축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(0,\ 0,\ c)$이다.

$\overline{AH}=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2+(c-c)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}$

점 B는 구 위의 점이므로 $\overline{AB}=8$

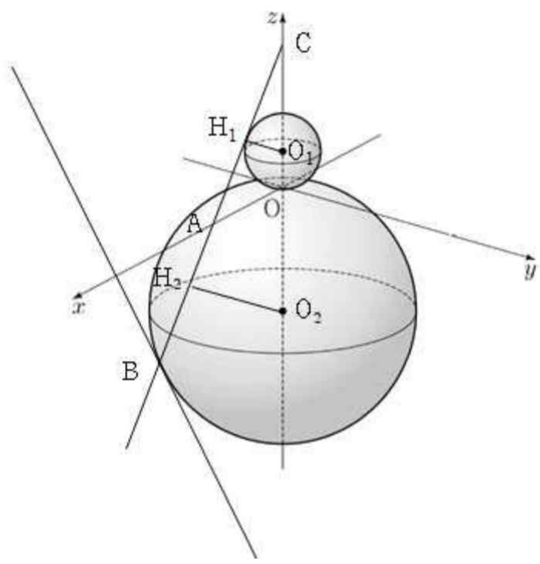
직각삼각형 ABH에서

$\overline{BH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{64-10}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

따라서 $\overline{BC}=2\times\overline{BH}=2\times3\sqrt{6}=6\sqrt{6}$

28) [정답] 127

[해설]



두 구 S_1, S_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하면

$O_1(0,\ 0,\ 2)$, $O_2(0,\ 0,\ -7)$

이고, 두 구 S_1, S_2의 반지름의 길이는 각각 2, 7이다.

두 점 O_1, O_2에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하고, 평면 α와 z축이 만나는 점을 C라 하자.

직각삼각형 O_1CH_1에서 $\overline{O_1C}=k(k>0)$이라 하면

$\overline{CH_1}=\sqrt{\overline{O_1C}^2-\overline{O_1H_1}^2}=\sqrt{k^2-2^2}=\sqrt{k^2-4}$

원점을 O라 하면 $\triangle O_1CH_1$와 $\triangle ACO$는 서로 닮음이고,

$\overline{OC}=2+k$

이므로 $(k+2):\sqrt{k^2-4}=\sqrt{5}:2$ 에서

$k^2-16k-36=0$

$(k-18)(k+2)=0$

$k>0$ 이므로 $k=18$

$\triangle O_1CH_1$과 $\triangle O_2CH_2$도 서로 닮음이고,

$\overline{O_1C}=18$, $\overline{O_2C}=27$이므로 $18:2=27:\overline{O_2H_2}$에서

$\overline{O_2H_2}=3$

평면 α와 구 S_2가 만나서 생기는 원 C의 중심은 H_2이고

반지름의 길이는 $\overline{BH_2}$이다. 이때,

$\overline{BH_2}=\sqrt{\overline{O_2B}^2-\overline{O_2H_2}^2}=\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$

이므로 원 C의 넓이는

$\pi\times(2\sqrt{10})^2=40\pi$

한편, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\theta=\angle BO_2H_2$이므로

$\cos\theta=\dfrac{3}{7}$

원 C의 평면 β위로의 정사영의 넓이는

$40\pi\times\dfrac{3}{7}=\dfrac{120}{7}\pi$

따라서 $p=7$, $q=120$이므로 $p+q=7+120=127$

29) [정답] 261

[해설]

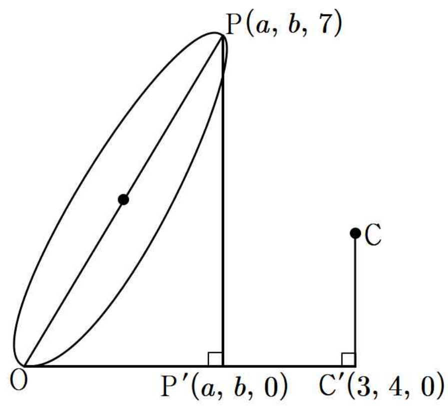
점 $P(a,\ b,\ 7)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 P'이라 하면 $P'(a,\ b,\ 0)$

구의 중심 $(4,\ 3,\ 2)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 C'이라 하면 $C'(4,\ 3,\ 0)$

$a^2+b^2<25$이므로 P'인 C'보다 원점에서 더 가깝다.

원점과 두 점 P', C'을 지나는 직선을 가로축으로 하고,

z축을 세로축으로 하여 그림을 그리면 다음과 같다.



점 P는 구 위의 점이므로

$(a-4)^2+(b-3)^2+25=29$, $(a-4)^2+(b-3)^2=4$

$\therefore \overline{P'C'}=\sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2}=2$

$\overline{PP'}=7$이고, $\overline{OC'}=5$에서 $\overline{OP'}=3$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{7^2+3^2}=\sqrt{58}$

선분 OP는 원 C의 지름이므로 원 C의 반지름은 $\dfrac{\sqrt{58}}{2}$이고,

원 C와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{58}}$이다.

따라서 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는

$\pi\left(\dfrac{\sqrt{58}}{2}\right)^2\times\dfrac{3}{\sqrt{58}}=\dfrac{3}{4}\sqrt{58}\pi$

따라서 $k=\dfrac{3}{4}\sqrt{58}$이므로 $8k^2=261$이다.

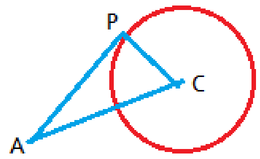
30) [정답] 9

[해설]

삼각형 APC는 빗변이 $\overline{AC}$인 직각삼각형이므로

원의 지름은 $\overline{AC}=\sqrt{41}$이다.

이것의 xy평면으로의 정사영의 길이는 $A'(0,\ 0,\ 0)$, $C'(3,\ 4,\ 0)$에서 $\overline{A'C'}=5$,



따라서 최대 넓이는 장축의 길이가 $\sqrt{41}$,

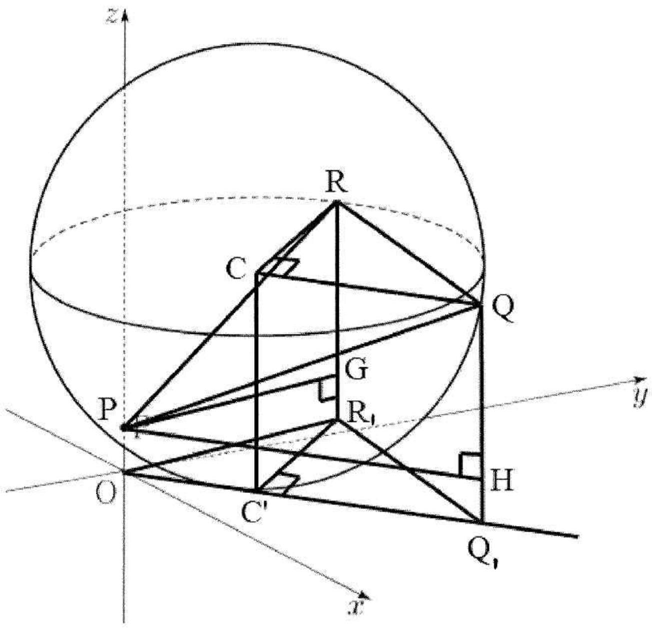
단축의 길이가 5인 타원이므로

$S=\frac{5}{2}\times\frac{\sqrt{41}}{2}\pi=\frac{5}{4}\sqrt{41}\pi$, $\therefore p+q=9$

31) [정답] 23

[해설]

점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 C'이라 하면 $\overline{CC'}=5$이므로 구 S는 점 C'에서 xy평면에 접한다.



평면 OPC는 점 C'을 지나므로 점 Q_1은 직선 OC' 위에 있다. 이때 선분 OQ_1의 길이가 최대가 되려면 점 Q가 점 C를 지나고 직선 OC'와 평행한 직선이 구 S와 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점이어야 한다.

이때

$\overline{OQ_1}=\overline{OC'}+5=3+5=8$

한편, 삼각형 OQ_1R_1의 넓이가 최대가 되려면 점 R가 점 C를 지나고 직선 CQ에 수직인 직선이 구 S와 만나는 점이어야 한다.

이때 $\overline{R_1C'}\perp\overline{OC'}$이고, $\overline{R_1C'}=5$이므로 삼각형 OQ_1R_1의 넓이는

$\frac{1}{2}\times8\times5=20$

이제 삼각형 PQR의 넓이를 구해 보자.

점 P에서 직선 QQ_1에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PH}=\overline{OQ_1}=8$,

$\overline{QH}=\overline{QQ_1}-1=4$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5}$ …… ㉠

직각삼각형 CQR에서

$\overline{QR}=\sqrt{\overline{CQ}^2+\overline{CR}^2}=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$ …… ㉡

직각삼각형 $OC'R_1$에서

$\overline{OR_1}=\sqrt{\overline{OC'}^2+\overline{R_1C'}^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

이므로 점 P에서 직선 RR_1에 내린 수선의 발을 G라 하면

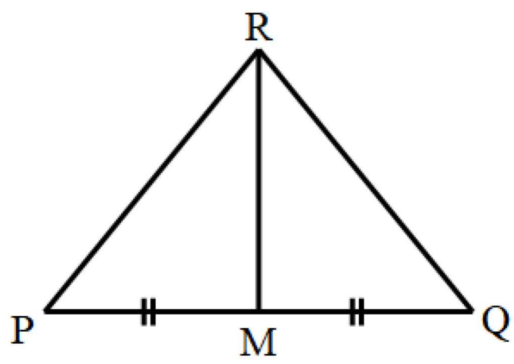
$\overline{PG}=\overline{OR_1}=\sqrt{34}$

$\overline{RG}=\overline{RR_1}-1=4$

직각삼각형 RPG에서

$\overline{PR}=\sqrt{\overline{PG}^2+\overline{RG}^2}=\sqrt{34+16}=5\sqrt{2}$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 삼각형 PQR는 $\overline{PR}=\overline{QR}$인 이등변삼각형이다.



위 그림과 같이 선분 PQ의 중점을 M이라 하면

$\overline{RM}=\sqrt{\overline{PR}^2-\overline{PM}^2}$
$=\sqrt{50-20}$
$=\sqrt{30}$

이므로 삼각형 PQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times\sqrt{30}=10\sqrt{6}$

이때 삼각형 PQR의 xy평면 위로의 정사영이 삼각형 OQ_1R_1이므로 두 평면 PQR와 OQ_1R_1이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\frac{20}{10\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

따라서 삼각형 OQ_1R_1의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는

$20\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{20}{3}\sqrt{6}$이므로

$p+q=3+20=23$