07 기하 05 평면벡터의연산

01 벡터의 뜻과 연산

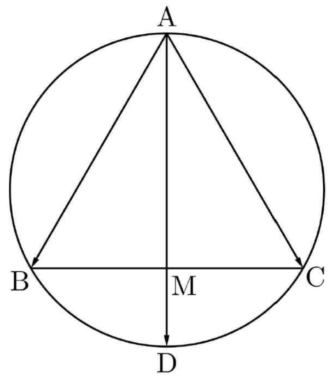
05 벡터의 연산3 (도형에서 벡터의 연산)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 26

1. 그림과 같이 정삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 M이라 하고, 직선 AM이 정삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하자.

$$\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$$

일 때, $m+n$의 값은? (단, m, n은 상수이다.)



① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{17}{12}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

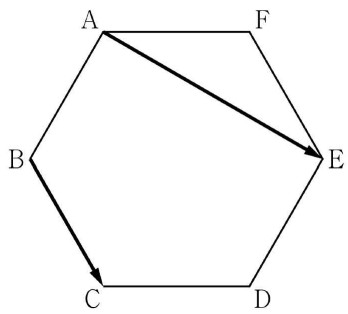
07 기하 05 평면벡터의연산

01 벡터의 뜻과 연산

06 벡터의 연산4 (도형, 벡터의 연산, 그 크기)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 기하 26

2. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 $|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}|$의 값은?

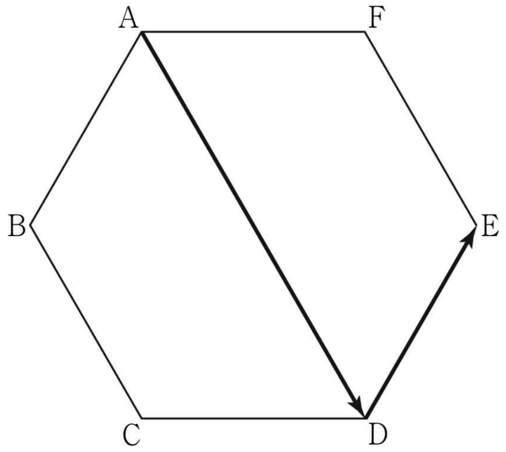


① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$

④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 기하 23

3. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2\overrightarrow{\mathrm{DE}}|$의 값은?



① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ 3 ⑤ $2\sqrt{3}$

07 기하 05 평면벡터의연산

01 벡터의 뜻과 연산

07 벡터의 연산5 (벡터가 서로 같을 조건)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 기하 23

4. 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않을 때,

$$(2\vec{a}-m\vec{b})-(n\vec{a}-4\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$$

를 만족시키는 두 상수 m, n의 합 $m+n$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

07 기하 05 평면벡터의연산

02 벡터의 해석과 활용

01 벡터의 해석1 (실수배와 평행)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 기하 23

5. 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 두 벡터

$$\vec{a}+2\vec{b}, \quad 3\vec{a}+k\vec{b}$$

가 서로 평행하도록 하는 실수 k의 값은? (단, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

07 기하 05 평면벡터의연산

02 벡터의 해석과 활용

03 벡터의 해석3 (벡터방정식)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 25

6. 평면 위의 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$의 값은?

(가) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{0}$
(나) $|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=6$

① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{7}$
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

07 기하　　05 평면벡터의연산

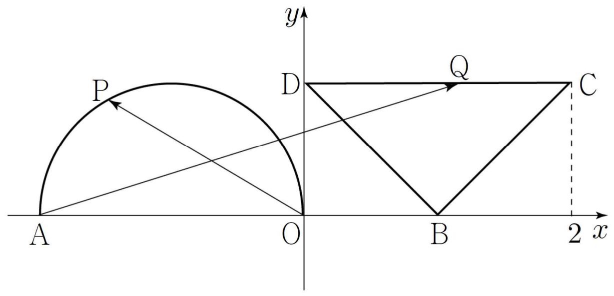
02 벡터의 해석과 활용

05 벡터의 해석5 (Mm)

[출처]　　2021 모의_공공 교육청 고3 04월 기하 29

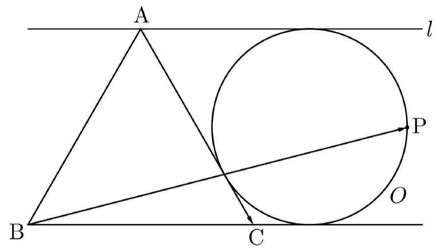
7. 좌표평면 위의 네 점

A$(-2,\ 0)$, B$(1,\ 0)$, C$(2,\ 1)$, D$(0,\ 1)$이 있다. 반원의 호 $(x+1)^2+y^2=1(0\le y\le 1)$ 위를 움직이는 점 P와 삼각형 BCD 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M^2+m^2=p+2\sqrt{q}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 유리수이다.)



[출처]　　2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 27

8. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC에 대하여 점 A를 지나고 직선 BC에 평행한 직선을 l이라 할 때, 세 직선 AC, BC, l에 모두 접하는 원을 O라 하자. 원 O위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?
(단, 원 O의 중심은 삼각형 ABC의 외부에 있다.)



① 46　　② 47　　③ 48
④ 49　　⑤ 50

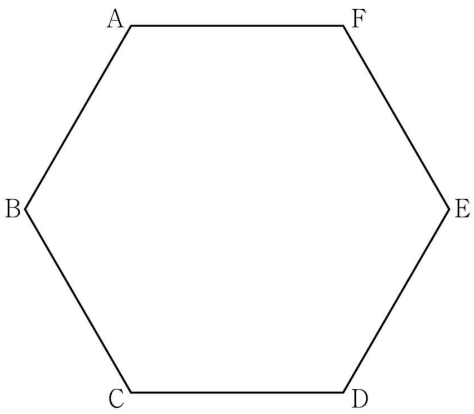
[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 기하 30

9. 좌표평면에서 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF의 변 위를 움직이는 점 P가 있고, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 Q가 있다. 두 점 P, Q와 실수 k에 대하여 점 X가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{\mathrm{CX}}|$의 값이 최소가 되도록 하는 k의 값을 α, $|\overrightarrow{\mathrm{CX}}|$의 값이 최대가 되도록 하는 k의 값을 β라 하자.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{CX}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$

(나) $\overrightarrow{\mathrm{XA}}+\overrightarrow{\mathrm{XC}}+2\overrightarrow{\mathrm{XD}}=k\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

$\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.



07 기하 05 평면벡터의연산

02 벡터의 해석과 활용

06 벡터의 활용 (이차곡선)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 기하 27

10. 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$의 꼭짓점 중 x좌표가 양수인 점을 A라 하자. 이 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=k$를 만족시키는 점 P의 개수가 3일 때, 상수 k의 값은? (단, O는 원점이다.)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2

④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

07 기하 06 위치벡터와평면벡터의성분

01 위치벡터

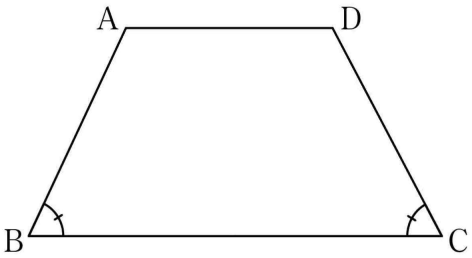
06 벡터방정식의 해석1 (벡터의 크기조건 해석)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 26

11. 그림과 같이 변 AD가 변 BC와 평행하고 $\angle\mathrm{CBA}=\angle\mathrm{DCB}$인 사다리꼴 ABCD가 있다.

$$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=2,\ |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=4,\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2\sqrt{5}$$

일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$의 값은?



① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

07 기하 06 위치벡터와평면벡터의성분

02 벡터의 성분과 연산

03 벡터의 성분3 (벡터가 서로 같을 조건)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 23

12. 세 벡터 $\vec{a}=(x,\ 3)$, $\vec{b}=(1,\ y)$, $\vec{c}=(-3,\ 5)$가 $2\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$를 만족시킬 때, $x+y$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

07 기하 06 위치벡터와평면벡터의성분

02 벡터의 성분과 연산

06 벡터의 성분6 (평행)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 기하 23

13. 두 벡터 $\vec{a}=(k+3,\ 3k-1)$과 $\vec{b}=(1,\ 1)$이 서로 평행할 때, 실수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 23

14. 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 4)$, $\vec{b}=(-1,\ k)$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 서로 평행하도록 하는 실수 k의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 23

15. 두 벡터 $\vec{a}=(m-2,\ 3)$, $\vec{b}=(2m+1,\ 9)$가 서로 평행할 때, 실수 m의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 23

16. 두 벡터 $\vec{a}=(2m-1,\ 3m+1)$, $\vec{b}=(3,\ 12)$가 서로 평행할 때, 실수 m의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

07 기하

07 평면벡터의내적

01 평면벡터의 내적

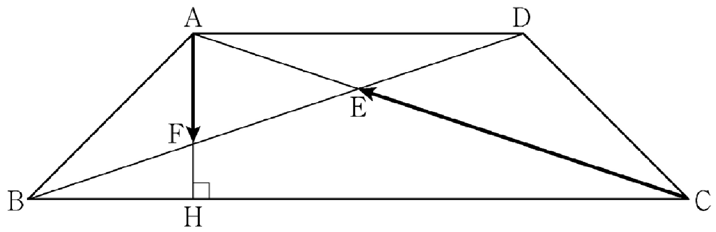
01 내적1 (정의)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 기하 27

17. $\overline{\mathrm{AD}}=2$, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{2}$, $\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{BCD}=45^{\circ}$ 인 사다리꼴 ABCD가 있다. 두 대각선 AC와 BD의 교점을 E, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, 선분 AH와 선분 BD의 교점을 F라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CE}}$의 값은?

① $-\frac{1}{9}$ ② $-\frac{2}{9}$ ③ $-\frac{1}{3}$

④ $-\frac{4}{9}$ ⑤ $-\frac{5}{9}$



07 기하

07 평면벡터의내적

03 내적의 활용

01 활용1 (움직이는 점 조건과 자취)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 30

18. 좌표평면 위의 두 점 A(6, 0), B(6, 5)와 음이 아닌 실수 k에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} \leq 21$이다.
> (나) $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} \leq 21$

$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 기하 24

19. 좌표평면에서 점 A(4, 6)과 원 C 위의 임의의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3$ 일 때, 원 C의 반지름의 길이는? (단, O는 원점이다.)

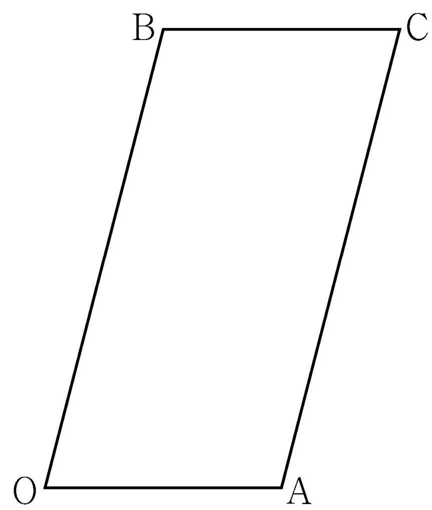
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 29

20. 좌표평면에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OB}}=2\sqrt{2}$ 이고 $\cos(\angle\mathrm{AOB})=\frac{1}{4}$ 인 평행사변형 OACB에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ (0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1)$ (나) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2$

점 O를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M\times m=a\sqrt{6}+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.)



[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 25

21. 좌표평면에서 세 벡터

$\vec{a}=(3,\ 0),\ \vec{b}=(1,\ 2),\ \vec{c}=(4,\ 2)$

에 대하여 두 벡터 $\vec{p},\ \vec{q}$가

$\vec{p}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b},\ |\vec{q}-\vec{c}|=1$

을 만족시킬 때, $|\vec{p}-\vec{q}|$의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 30

22. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(-2,2)$, $\mathrm{B}(2,2)$가 있다.

$(|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|-2)(|\overrightarrow{\mathrm{BX}}|-2)=0,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\geq 2$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형 위를 움직이는 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\vec{u}=(1,0)$에 대하여 $(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{u})(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{u})\geq 0$이다.
(나) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=2$

$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$를 만족시키는 점 Y의 집합이 나타내는 도형의 길이가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 기하 26

23. 좌표평면에서 세 벡터

$\vec{a}=(2,4),\ \vec{b}=(2,8),\ \vec{c}=(1,0)$

에 대하여 두 벡터 $\vec{p},\ \vec{q}$가

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0,\ \vec{q}=\frac{1}{2}\vec{a}+t\vec{c}$ (t는 실수)

를 만족시킬 때, $|\vec{p}-\vec{q}|$의 최솟값은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$

④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

07 기하

07 평면벡터의내적

03 내적의 활용

02 활용2 (벡터방정식의 해석)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 기하 28

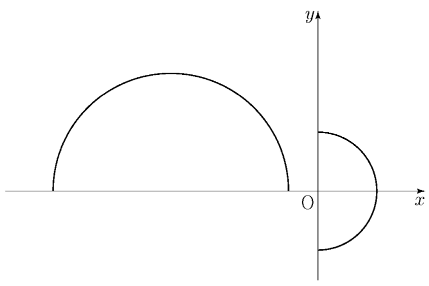
24. 좌표평면에서 반원의 호 $x^2+y^2=4(x \geq 0)$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2$$

를 만족시키는 반원의 호 $(x+5)^2+y^2=16(y \geq 0)$ 위의 점 Q가 하나뿐일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{12}{5}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{13}{5}$

④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{14}{5}$



[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 28

25. 삼각형 ABC와 삼각형 ABC의 내부의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}}=0,\ \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=3$
>
> (나) $\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PB}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=-2|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2$

직선 AP와 선분 BC의 교점을 D라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=k\overrightarrow{\mathrm{PD}}$이다. 실수 k의 값은?

① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$

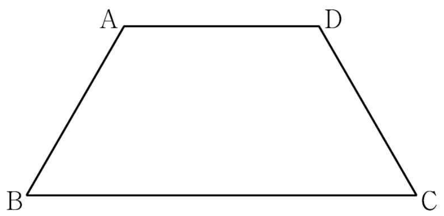
④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 기하 29

26. 평면 α 위에 $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{AD}=2$,

$\angle ABC=\angle BCD=\frac{\pi}{3}$인 사다리꼴 ABCD가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{DQ}$의 값을 구하시오.

(가) $\overrightarrow{AC}=2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BP})$
(나) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PQ}=6$
(다) $2\times\angle BQA=\angle PBQ<\frac{\pi}{2}$



07 기하 07 평면벡터의내적

03 내적의 활용

03 내적의 Mm1 (성분이용)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 기하 30

27. 좌표평면 위의 네 점 A(2, 0), B(0, 2), (−2, 0), D(0, −2)를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 네 변 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AD})=0$
(나) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\geq -2$이고 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}\geq 0$이다.
(다) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}\geq -2$이고 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}\leq 0$이다.

점 R(4, 4)에 대하여 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이다.)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 30

28. 좌표평면에서 세 점 A$(-3,\ 1)$, B$(0,\ 2)$, C$(1,\ 0)$에 대하여 두 점 P, Q가

$$|\overrightarrow{AP}|=1,\ |\overrightarrow{BQ}|=2,\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OC}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

를 만족시킬 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 값이 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q를 각각 P_0, Q_0이라 하자.

선분 AP_0 위의 점 X에 대하여 $\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BQ_0}\geq 1$일 때,

$|\overrightarrow{Q_0X}|^2$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 30

29. 좌표평면 위의 세 점 A$(6,\ 0)$, B$(2,\ 6)$, C$(k,\ -2k)\ (k>0)$과 삼각형 ABC의 내부 또는 변 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $5\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$
(나) 점 P가 나타내는 도형의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CP}$의 최댓값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

07 기하 07 평면벡터의내적

03 내적의 활용

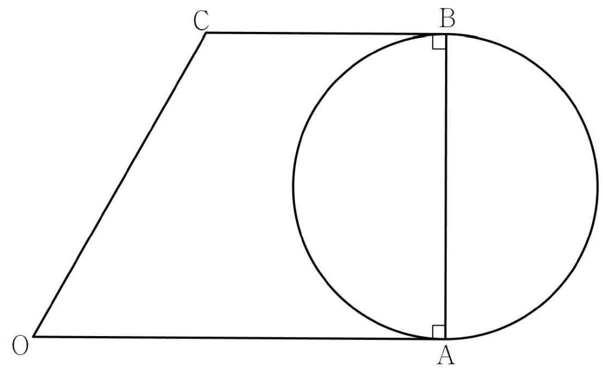
05 내적의 Mm3 (벡터의 분할)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 30

30. 평면 위에

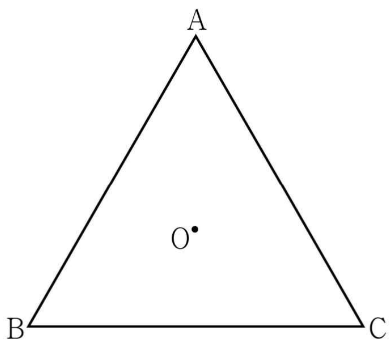
$$\overline{OA}=2+2\sqrt{3},\ \overline{AB}=4,$$
$$\angle COA=\frac{\pi}{3},\ \angle A=\angle B=\frac{\pi}{2}$$

를 만족시키는 사다리꼴 OABC가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때, 직선 OQ가 원과 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 D라 하자. 원 위의 점 R에 대하여 $\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AR}$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오.



[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 29

31. 평면 위에 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC의 무게중심 O에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$를 만족시키는 점을 D라 하자. 선분 CD 위의 점 P에 대하여 $|2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}|$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 Q라 하자. $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$를 만족시키는 점 R에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}$의 최댓값이 $p+q\sqrt{93}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.)

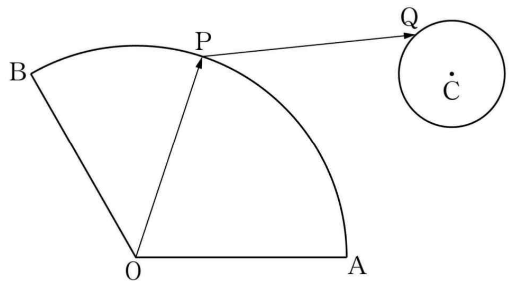


[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 28

32. 그림과 같이 한 평면 위에 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 120°인 부채꼴 OAB와 중심이 C이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있고, 세 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$가

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=24,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$$

을 만족시킨다. 호 AB 위를 움직이는 점 P와 원 C 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?



① $12\sqrt{3}-34$ ② $12\sqrt{3}-32$ ③ $16\sqrt{3}-36$
④ $16\sqrt{3}-34$ ⑤ $16\sqrt{3}-32$

07 기하 08 평면벡터와도형의방정식

01 직선의 방정식

05 직선의 방정식의 활용1 (두 직선이 이루는 각)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 25

33. 좌표평면에서 두 직선 $\frac{x+1}{2}=3-y$, $x-2=\frac{1-y}{2}$가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 기하 25

34. 좌표평면에서 두 직선

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{3},\quad x-1=\frac{2-y}{3}$$

가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

① $\frac{\sqrt{11}}{11}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{7}$

07 기하 08 평면벡터와도형의방정식

01 직선의 방정식

07 직선의 방정식의 활용3 (직선 위의 점의 매개변수 표현)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 25

35. 점 A(2, 6)과 직선 l : $\dfrac{x-5}{2}=y-5$ 위의 한 점 P에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$와 직선 l의 방향벡터가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① 3 ② $2\sqrt{3}$ ③ 4
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 6

07 기하 08 평면벡터와도형의방정식

02 원의 방정식

01 원의 방정식1 (반지름 표현)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 기하 25

36. 좌표평면 위의 두 점 A(1, 2), B(−3, 5)에 대하여

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① 10π ② 12π ③ 14π
④ 16π ⑤ 18π

07 기하 08 평면벡터와도형의방정식

02 원의 방정식

02 원의 방정식2 (지름의 양끝점)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 25

37. 좌표평면에서 두 점 A$(-2, 0)$, B$(3, 3)$에 대하여

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}) \bullet (\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$$

을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① 6π ② 7π ③ 8π
④ 9π ⑤ 10π

07 기하 08 평면벡터와도형의방정식

02 원의 방정식

03 원의 방정식3 (원과 접선)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 26

38. 좌표평면 위의 점 A$(3, 0)$에 대하여

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}) \bullet (\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=5$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형과 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 오직 한 점에서 만날 때, 양수 k의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ 1
④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{7}{5}$

[기하] [02벡터] 교사평경 최근 3개년(빠른 정답)

기백 3개년 2022.12.29

1. [정답] ③
2. [정답] ②
3. [정답] ③
4. [정답] ①
5. [정답] ③

6. [정답] ④
7. [정답] 115
8. [정답] ④
9. [정답] 8
10. [정답] ④

11. [정답] ④
12. [정답] ③
13. [정답] ②
14. [정답] ④
15. [정답] ③

16. [정답] ①
17. [정답] ④
18. [정답] 37
19. [정답] ④
20. [정답] 100

21. [정답] ②
22. [정답] 17
23. [정답] ②
24. [정답] ⑤
25. [정답] ①

26. [정답] 12
27. [정답] 48
28. [정답] 45
29. [정답] 7
30. [정답] 108

31. [정답] 15
32. [정답] ⑤
33. [정답] ⑤
34. [정답] ②
35. [정답] ⑤

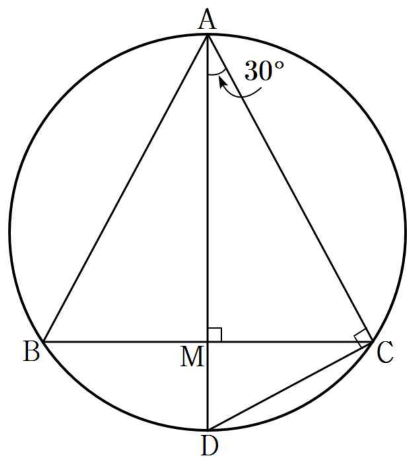
36. [정답] ①
37. [정답] ⑤
38. [정답] ③

[기하] [02벡터] 교사평경 최근 3개년(해설)

기벡 3개년 2022.12.29

1) [정답] ③

[해설]



세 점 A, M, D는 일직선 위에 있으므로 $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AM}$

$\angle CAD=30^\circ$ 이므로

$\overline{AC}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\overline{AM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{AD}$

따라서 $\overline{AD}=\dfrac{4}{3}\overline{AM}$에서 $k=\dfrac{4}{3}$

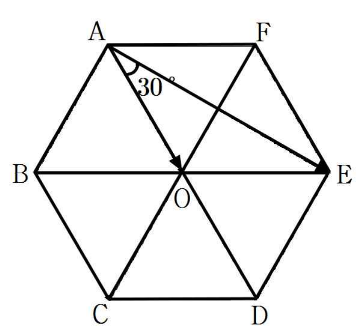
또한, $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$이므로

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AM}=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

따라서 $m=\dfrac{2}{3}$, $n=\dfrac{2}{3}$이므로 $m+n=\dfrac{4}{3}$

2) [정답] ②

[해설]



그림과 같이 정육각형의 중심을 O라 하면 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}$이다.

$|\overrightarrow{AO}|=1$, $|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{3}$이고 두 벡터가 이루는 각의 크기가 30° 이므로 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AO}=\sqrt{3}\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}$

$$|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AO}|^2$$
$$=|\overrightarrow{AE}|^2+|\overrightarrow{AO}|^2+2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AO}$$
$$=1^2+(\sqrt{3})^2+2\times\dfrac{3}{2}$$
$$=7$$

$$\therefore |\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}|=\sqrt{7}$$

3) [정답] ③

[해설]

$$|\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DE}|$$
$$=|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DE}|$$
$$=|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}|$$
$$=|\overrightarrow{BE}|=2$$

4) [정답] ①

[해설]

$(2\vec{a}-m\vec{b})-(n\vec{a}-4\vec{b})=(2-n)\vec{a}-(m-4)\vec{b}$

$=\vec{a}-\vec{b}$

에서 $m-4=1$, $2-n=1$이므로

$m=5$, $n=1$

따라서 $m+n=6$

5) [정답] ③

[해설]

두 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$, $3\vec{a}+k\vec{b}$가 서로 평행하므로

$3\vec{a}+k\vec{b}=l(\vec{a}+2\vec{b})$

를 만족하는 실수 l이 존재한다.

$3\vec{a}+k\vec{b}=l(\vec{a}+2\vec{b})$에서

$3\vec{a}+k\vec{b}=l\vec{a}+2l\vec{b}$

$3=l$, $k=2l$

따라서 $k=6$

6) [정답] ④

[해설]

조건 (가)에서 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}$

조건 (나)에서 $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|=6$

사각형 ABCD는 평행사변형이면서 두 대각선 AC,BD의 길이가 같으므로 직사각형이다.

따라서 $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{\overline{BD}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

7) [정답] 115

[해설]

(i) 두 점 A, O의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{AM}=\vec{0}$이므로

$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{AQ}=(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP})+(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MQ})$$
$$=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}$$

$|\overrightarrow{MP}|=1$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$의 방향이 같고

$|\overrightarrow{MQ}|$의 값이 최대일 때, $|\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}|$의 값은 최대이다.

그러므로 선분 MC와 반원의 호가 만나는 점을 X라 하면

점 Q가 점 C이고 점 P가 점 X일 때

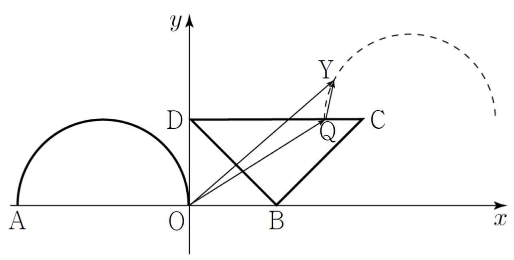
$|\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}|$의 값은 최대이다.

$\overline{MC}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$이므로

$|\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}|\le|\overrightarrow{MX}+\overrightarrow{MC}|=\sqrt{10}+1$

따라서 $M=\sqrt{10}+1$

(ii) $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{AQ}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OQ})$
$$=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OQ}$$



삼각형 BCD 위의 임의의 점 Q에 대하여

$\overrightarrow{QY}=\overrightarrow{AP}$인 점을 Y라 하자.

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{QY}+\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OY}|\ge|\overrightarrow{OQ}|$

이므로 점 Y가 점 Q일 때 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OQ}|$의 값은 최소이다.

점 Q가 선분 BD 위에 있고

$\overline{OQ}\perp\overline{BD}$일 때 $|\overrightarrow{OQ}|$의 값은 최소이므로

$m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(i), (ii)에 의해

$M^2+m^2=(11+2\sqrt{10})+\dfrac{1}{2}=\dfrac{23}{2}+2\sqrt{10}$

따라서 $p=\dfrac{23}{2}$, $q=10$이므로 $p\times q=115$

8) [정답] ④

[해설]

원의 중심을 O라 하면

$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP}$$

이고 점 B를 원점으로 설정하면 점 A$(2,\ 2\sqrt{3})$, 점 C$(4,\ 0)$, 점 O$(5,\ \sqrt{3})$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이다.

$$\therefore\ \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BP}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BO})+\overrightarrow{OP}$$

$=(2,\ -2\sqrt{3})+(5,\ \sqrt{3})+\overrightarrow{OP}$

$=(7,\ -\sqrt{3})+\overrightarrow{OP}$

최댓값은 중심을 지나고 일직선에서 반지름의 길이를 더한 값이고,

최솟값은 중심을 지나는 일직선에서 반지름의 길이를 뺀 값이다.

$$\overline{BO}=\sqrt{7^2+(-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{13}$$

그러므로 최댓값은 $2\sqrt{13}+\sqrt{3}$, 최솟값은 $2\sqrt{13}-\sqrt{3}$

$$\therefore\ Mm=(2\sqrt{13}+\sqrt{3})(2\sqrt{13}-\sqrt{3})=52-3=49$$

9) [정답] 8

[해설]

조건 (가)에서

$\overrightarrow{CX}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}$이므로

선분 CA, CB, CD, CE, CF의 중점을 각각 A′, B′, D′, E′, F′이라 하면

점 X는 정육각형 A′B′CD′E′F′ 위의 점

을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인

원 위를 움직인다.

조건 (나)에서

$\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}+2\overrightarrow{XD}=k\overrightarrow{CD}$이므로

$(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CX})-\overrightarrow{CX}+2(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CX})=k\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{CX}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\dfrac{2-k}{4}\overrightarrow{CD}$

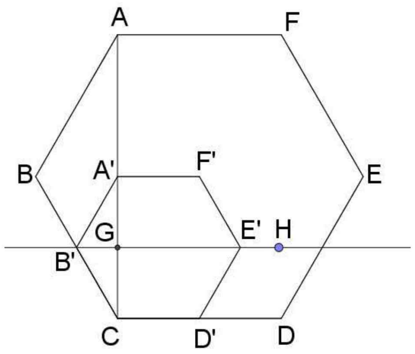
$\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CG}$라 하면

점 X는 점 G를 지나고 직선 CD에 평행한 직선 위를 움직인다.

직선 GE′ 위의 점 H가

$\overline{E'H}=1$, $\overline{GH}>\overline{GE'}$

를 만족시키도록 점 H를 잡는다.



X가 점 G일 때, $|\overrightarrow{CX}|$의 값은 최소이다.

$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CG}+\dfrac{2-k}{4}\overrightarrow{CD}$에서

$\dfrac{2-k}{4}=0$

$k=2$

즉 , $\alpha=2$

점 X가 점 H일 때, $|\overrightarrow{CX}|$의 값은 최대이다.

$|\overrightarrow{GH}|=4$에서

$\left|\dfrac{2-k}{4}\overrightarrow{CD}\right|=4$

즉 $\dfrac{2-k}{4}|\overrightarrow{CD}|=4$이므로

$\dfrac{2-k}{4}\times 4=4$

$k=-2$

즉, $\beta=-2$

따라서 $\alpha^2+\beta^2=2^2+(-2)^2=8$

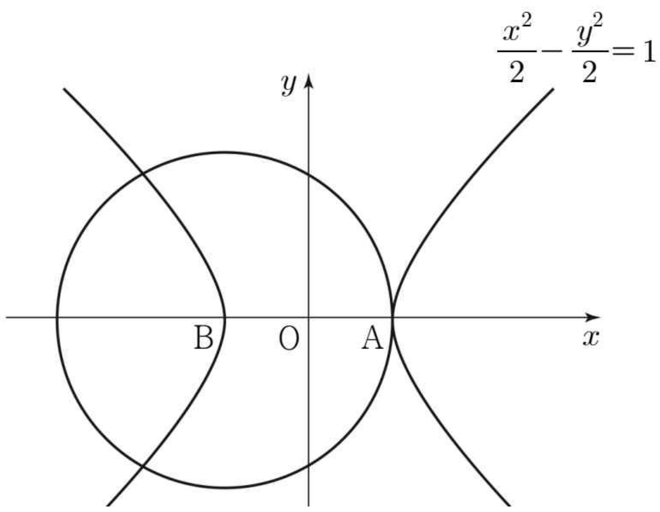
10) [정답] ④

[해설]

쌍곡선의 꼭짓점 중 x좌표가 음수인 점을 B라 하자.

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{BP}|$

$|\overrightarrow{BP}|=k$를 만족시키는 점 P는 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 k인 원과 쌍곡선이 만나는 점이다.



그림과 같이 점 P의 개수가 3이려면

$k=\overline{AB}=2\sqrt{2}$

11) [정답] ④

[해설]

선분 BC의 중점을 M이라 하면 $\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\overrightarrow{AM}$이다.

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{5}$이므로 $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{5}$

사각형 ABMD에서 $\overline{CD}=\overline{AM}=\sqrt{5}$

사각형 ABMD와 사각형 AMCD는 평행사변형이다.

평행사변형 AMCD에서 $\overline{CD}=\overline{AM}=\sqrt{5}$

사각형 ABMD가 평행사변형이므로

$\angle MBA=\angle CMD=\angle DCM$

즉 삼각형 DMC는 이등변삼각형이므로 $\overline{DM}=\sqrt{5}$

점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CM}=2$이므로

$\overline{HM}=\overline{CH}=1$

직각삼각형 DMH에서

$\overline{DH}=\sqrt{\overline{DM}^2-\overline{HM}^2}=\sqrt{5-1}=2$

$\overline{BH}=\overline{BM}+\overline{HM}=2+1=3$

직각삼각형 DBH에서

$|\overrightarrow{BD}|^2=|\overrightarrow{BH}|^2+|\overrightarrow{DH}|^2=3^2+2^2=13$

따라서 $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{13}$

12) [정답] ③

[해설]

$2\vec{a}=(2x,\ 6)$, $\vec{b}-\vec{c}=(4,\ y-5)$이므로 $2x=4$

$\therefore\ x=2$

$6=y-6$ $\therefore\ y=11$

$\therefore\ x+y=13$

13) [정답] ②

[해설]

$\vec{a}=(k+3,\ 3k-1)$과 $\vec{b}=(1,\ 1)$이 서로 평행하므로 $\vec{a}=t\vec{b}$ (t는 실수)

즉, $(k+3,\ 3k-1)=t(1,\ 1)$이 성립하므로

$k+3=t,\ 3k-1=t$

두 식을 연립하면 $k+3=3k-1$

$\therefore k=2$

14) [정답] ④

[해설]

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하면 $(2,\ 4)=t(-1,\ k)$를 만족시키는 실수 $t(t\neq0)$가 존재한다.

그러므로 $2=-t$, $4=kt$

따라서 $k=-2$

15) [정답] ③

[해설]

0이 아닌 실수 k에 대하여 $\vec{b}=k\vec{a}$

$(2m+1,\ 9)=(k(m-2),\ 3k)$이므로

$3k=9$, $k=3$

$2m+1=3(m-2)$, $2m+1=3m-6$

따라서 $m=7$

16) [정답] ①

[해설]

0이 아닌 실수 k에 대하여 $\vec{a}=k\vec{b}$이므로

$(2m-1,\ 3m+1)=(3k,\ 12k)$

$2m-1=3k$ ……㉠

$3m+1=12k$ ……㉡

따라서 두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $m=1$

17) [정답] ④

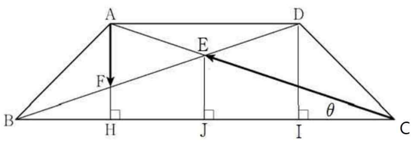
[해설]

직각삼각형 ABH에서

$\overline{AB}=\sqrt{2}$, $\angle ABC=45^\circ$

이므로

$AH=BH=1$



점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{BI}=3$, $\overline{DI}=1$이고

$\triangle BID \backsim \triangle BHF$이므로

$\overline{BI}:\overline{DI}=\overline{BH}:\overline{FH}$

즉, $3:1=1:FH$

$\overline{FH}=\dfrac{1}{3}$

$\overline{AF}=\overline{AH}-\overline{FH}=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

한편 점 E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 J라 하면

$\overline{BJ}=\overline{CJ}=2$, $\overline{BH}=\overline{HJ}=1$

이므로

$\overline{EJ}=2\overline{FH}=\dfrac{2}{3}$

직각삼각형 JCE에서

$\angle JCE=\theta$라 하면

$\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{EJ}|}{|\overrightarrow{CE}|}$

이고,

두 벡터 $\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{CE}$가 이루는 각의 크기는

$\dfrac{\pi}{2}+\theta$이다.

그리고 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EJ}$이므로

$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EJ}\cdot\overrightarrow{CE}$

$=|\overrightarrow{EJ}||\overrightarrow{CE}|\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=|\overrightarrow{EJ}||\overrightarrow{CE}|\times(-\sin\theta)$

$=|\overrightarrow{EJ}||\overrightarrow{CE}|\times\left(-\dfrac{|\overrightarrow{EJ}|}{|\overrightarrow{CE}|}\right)$

$=-|\overrightarrow{EJ}|^2$

$=-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

$=-\dfrac{4}{9}$

18) [정답] **37**

[해설]

(가) $\overrightarrow{OP}=k(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=k(12,\ 5)$이므로 $\overrightarrow{OP}$는 $(12,\ 5)$와 평행한 벡터이다. $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}\leq21$에서 내적의 정의에서 시점을 일치시키고 다른 벡터에 정사영한 선분의 길이의 곱을 의미하는 것이므로 $\overrightarrow{OA}$의 크기가 6이므로 점 P의 x좌표가 $\dfrac{7}{2}$를 넘을 수 없다.

(나) $|\overrightarrow{AQ}|=|\overrightarrow{AB}|=5$ 즉, 점 Q는 중심을 A로 하고 반지름의 길이가 5인 원 위의 점이다.

$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}\leq21$에서 Q의 x좌표가 $\dfrac{7}{2}$를 넘을 수 없다.

$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$에서 변수는 x좌표만 움직일 수 있으므로 넓이는 평행이동하여 잘라 붙이면 직사각형 모양으로 된다. 이때 Q의 y좌표의 폭이 높이가 될 수 있으며, P의 x좌표의 변화는 0에서 $\dfrac{7}{2}$이므로 가로의 길이는 $\dfrac{7}{2}$이다.

중심이 (6, 0)이고 반지름이 5인 원에서 y값의 변화가 가장 큰 값은 $x=\frac{7}{2}$일 때이므로

$$\left(\frac{7}{2}-6\right)^2+y^2=25,\ y^2=25-\frac{25}{4}$$

$$y^2=\frac{75}{4},\ y=\pm\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

그러므로 세로의 길이는 $5\sqrt{3}$이다.

따라서 도형의 넓이는 $5\sqrt{3}\times\frac{7}{2}=\frac{35}{2}\sqrt{3}$

즉, $p=2,\ q=35$이므로 $p+q=35+2=37$

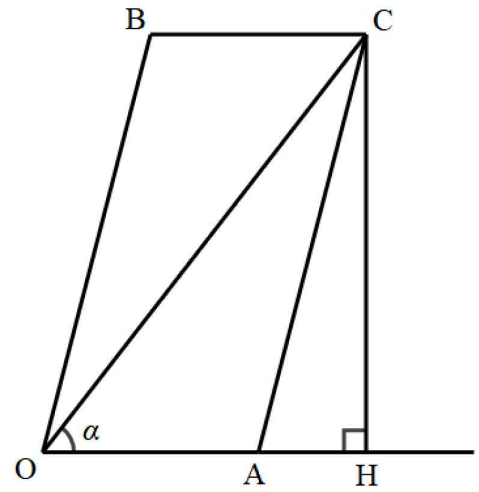
19) [정답] ④

[해설]
$\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면
$(x^2+y^2)-(4x+6y)=3$
$(x-2)^2+(y-3)^2=16,\ \therefore r=4$

20) [정답] 100

[해설]
조건 (가)에 의하여 점 P는 평행사변형 OACB의 둘레 또는 내부에 있는 점이다.
조건 (나)에서
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$
$=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$
$=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
$=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})-|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos(\angle\mathrm{AOB})$
$=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{4}$
$=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-1=2$
이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$

(i) 벡터 $3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}$의 크기는 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 크기가 최대이고 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$가 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 반대 방향일 때 최대가 되고, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 크기는 점 P가 선분 OA 위에 있을 때 최대가 된다.
다음 그림과 같이 점 C에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\angle\mathrm{COA}=\alpha$라 하자.



$\angle\mathrm{CAH}=\angle\mathrm{AOB}$에서
$\cos(\angle\mathrm{CAH})=\cos(\angle\mathrm{AOB})=\frac{1}{4}$이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AC}}\times\cos(\angle\mathrm{CAH})$
$=\overline{\mathrm{OB}}\times\frac{1}{4}$
$=2\sqrt{2}\times\frac{1}{4}$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

한편,
$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$
$=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
$=(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{4}$
$=2+8+2=12$
이므로
$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2\sqrt{3}$
그러므로

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

즉, 점 P가 선분 OA 위에 있을 때
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\alpha$
$=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{4}$
$=\frac{3\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=3$
이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{2}$
이때 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$가 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 반대 방향이면
$|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$이므로
$M=3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

(ii) 벡터 $3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}$의 크기는 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 크기가 최소이고 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$가 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 같은 방향일 때 최소가 되고, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 크기는 점 P가 선분 OC 위에 있을 때 최소가 된다.

이때

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OC}|$

$= |\overrightarrow{OP}| \times 2\sqrt{3} = 3$

이므로 $|\overrightarrow{OP}| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 같은 방향이면

$|3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}| = 3|\overrightarrow{OP}| - |\overrightarrow{OX}|$이므로

$m = 3 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$M \times m = 4\sqrt{2}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}\right)$

$= 6\sqrt{6} - 8$이므로

$a^2 + b^2 = 6^2 + (-8)^2 = 100$

21) [정답] ②

[해설]

$\vec{p} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}$에서 $\vec{a} \cdot \vec{p} = \vec{a} \cdot \vec{b}$

즉, $\vec{a} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$

이때, $\vec{a} = (3,\ 0)$, $\vec{b} = (1,\ 2)$이므로

점 $P(x,\ y)$에 대하여 $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = (x,\ y)$라 하면

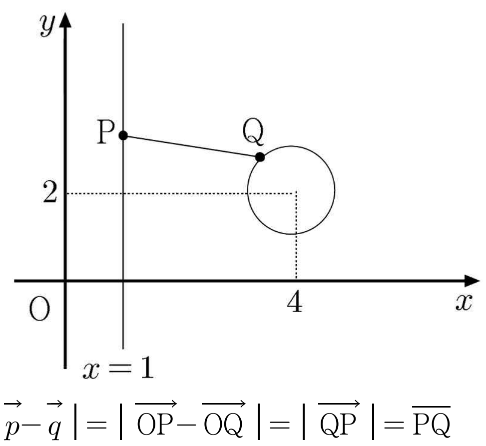
$(3,\ 0) \cdot (x-1,\ y-2) = 0$

$3(x-1) = 0$

$\therefore x = 1$

그러므로 점 P는 직선 $x=1$위의 점이다.

또, $|\vec{q} - \vec{c}| = 1$이고 $\vec{c} = (4,\ 2)$이므로 $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$라 하면 점 Q는 중심이 $(4,\ 2)$이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.



한편, $|\vec{p} - \vec{q}| = |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{QP}| = \overline{PQ}$

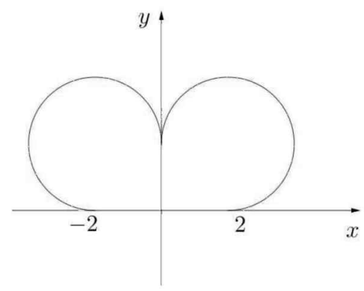
따라서 이 값의 최솟값은 원의 중심 $(4,\ 2)$와 직선 $x=1$ 사이의 거리에서 반지름의 길이 1을 빼면 되므로 $3-1=2$

22) [정답] 17

[해설]

$(|\overrightarrow{AX}|-2)(|\overrightarrow{BX}|-2) = 0$에서 $|\overrightarrow{AX}| = 2$ 또는 $|\overrightarrow{BX}| = 2$이므로

X는 중심이 A이고 반지름이 2인 원 또는 중심이 B이고 반지름이 2인 원 위의 점이다. 그런데, $|\overrightarrow{OX}| \geq 2$를 만족해야 하므로 만족하는 도형은 [그림1]과 같다.



[그림1]

또한 $(\overrightarrow{OP} \cdot \vec{u})(\overrightarrow{OQ} \cdot \vec{u}) \geq 0$를 만족하므로 점 P, Q의 x좌표가 모두 같은 방향이어야 한다.

즉, [그림1]에서 점 P, Q가 제 1사분면 도형에 있는 경우와 제 2사분면 도형에 있는 경우 2가지가 있다.

(i) 제 1사분면에 있는 경우

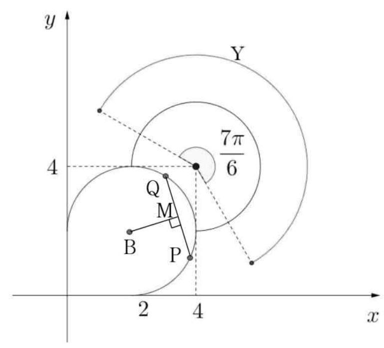
선분 PQ의 중점을 M이라고 하면

$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = 2\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OP} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OQ}\right) = 2\overrightarrow{OM}$

즉, $\overrightarrow{OY} = 2(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM})$

그런데, 조건 (나)에서 $|\overrightarrow{PQ}| = 2$이므로 $|\overrightarrow{PM}| = 1$

따라서 $|\overrightarrow{BM}| = \sqrt{|\overrightarrow{BP}|^2 - |\overrightarrow{PM}|^2}$에서 $|\overrightarrow{BM}| = \sqrt{3}$



따라서 P, Q가 조건을 만족하며 움직일 때의 M의 자취는 중심이 B이고 반지름이 $\sqrt{3}$이며 중심각이 $\dfrac{7}{6}\pi$인 부채꼴의 호가 된다.

이때 $\overrightarrow{OY} = 2\overrightarrow{OM}$이므로 점 Y의 자취는 중심이 $(4,\ 4)$이고 반지름이 $2\sqrt{3}$이며 중심각이 $\dfrac{7}{6}\pi$인 부채꼴의 호이다.

따라서 구하는 자취의 길이는

$2\sqrt{3} \times \dfrac{7}{6}\pi = \dfrac{7}{3}\sqrt{3}\pi$

(ii) 제2사분면에 있는 경우

(i)과 마찬가지이므로 자취의 길이는

$2\sqrt{3} \times \dfrac{7}{6}\pi = \dfrac{7}{3}\sqrt{3}\pi$

(i), (ii)에서 점 Y의 집합이 나타내는 도형의 길이는

$\frac{14}{3}\sqrt{3}\pi$이므로 $p=3$, $q=14$

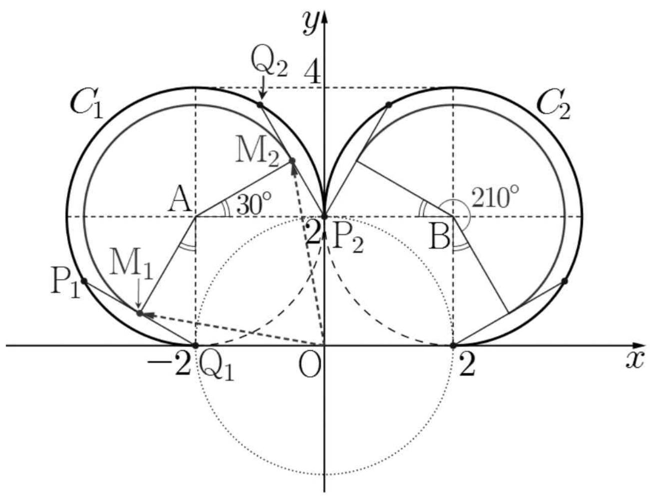
$\therefore\ p+q=3+14=17$

[다른 풀이]

주어진 등식과 부등식

$(|\overrightarrow{AX}|-2)(|\overrightarrow{BX}|-2)=0,\ |\overrightarrow{OX}|\geq 2$

에서 점 X는 두 점 A 또는 B로부터의 거리가 2이고, 원점 O로부터의 거리가 2 이상이므로 A, B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 두 원 C_1 또는 C_2의 둘레 중 아래 그림과 같이 실선 부분이다.



또, 조건 (가)는 두 점 P, Q의 x좌표가 같은 부호임을 뜻하므로 원 C_1 또는 C_2 중 어느 한쪽에 존재해야 하고, $\overline{PQ}=2$이다.

한편, $\frac{1}{2}\overrightarrow{OY}=\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}}{2}=\overrightarrow{OM}$으로 놓자.

y축 대칭성으로 인해 원 C_1에서만 고려하면, 삼각형 AP_1Q_1은 정삼각형이므로 $\angle M_1AQ_1=\frac{\pi}{6}$이고, $\overline{AM_1}=\sqrt{3}$

그러므로 점 M은 점 A를 중심, 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이고 중심각의 크기가 $\frac{7}{6}\pi$인 호에 해당하고 그 길이는

$\sqrt{3}\times\frac{7}{6}\pi=\frac{7}{6}\sqrt{3}\pi$

$\overrightarrow{OY}=2\overrightarrow{OM}$이므로 점 Y의 자취의 길이는

$\frac{7}{6}\sqrt{3}\pi\times 2=\frac{7}{3}\sqrt{3}\pi$

원 C_2에서도 마찬가지이므로 구하는 길이는

$\frac{7}{3}\sqrt{3}\pi\times 2=\frac{14}{3}\sqrt{3}\pi$

따라서, $p=3$, $q=14$이므로 $p+q=17$이다.

23) [정답] ②

[해설]

$\vec{p}=(x,\ y)$, $\vec{q}=(x',\ y')$이라 하고

A(2, 4), B(2, 8), C(1, 0), P$(x,\ y)$, Q$(x',\ y')$이라 하자.

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

이므로 점 P는 선분 AB을 지름으로 하는 원 위를 움직인다. 즉, 점 P는 선분 AB의 중점인 점 M(2, 6)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 위에 있다.

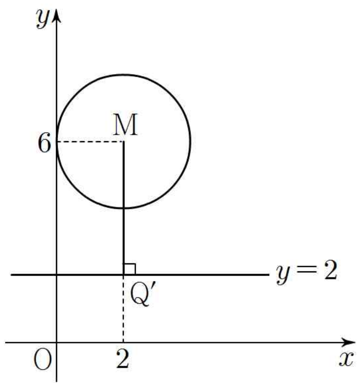
한편,

$\vec{q}=\frac{1}{2}\vec{a}+t\vec{c}=\frac{1}{2}(2,\ 4)+t(1,\ 0)=(1+t,\ 2)$

이므로 점 Q는 직선 $y=2$ 위에 있다.

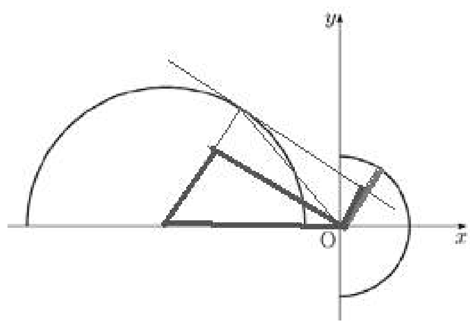
이때 $|\vec{p}-\vec{q}|$의 값은 두 점 P, Q 사이의 거리이므로 점 M에서 직선 $y=2$에 내린 수선의 발을 Q$'$이라 할 때 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값은

$\overline{MQ'}-2=4-2=2$



24) [정답] ⑤

[해설]



그림과 같이 $\overrightarrow{OP}$위로 $\overrightarrow{OQ}$의 정사영의 길이가 1이다.

따라서 직선 OP의 기울기는 $\tan\theta\frac{4}{3}$이고,

$a+b=2\cos\theta+2\sin\theta\frac{6}{5}+\frac{8}{5}=\frac{14}{5}$

25) [정답] ①

[해설]

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=0$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{PC}$가 이루는 각의 크기는 90°이다.

$\frac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{PC}|}=3$에서 $|\overrightarrow{PC}|=t(t>0)$이라 하면 $|\overrightarrow{PA}|=3t$

두 벡터 $\overrightarrow{PB}$와 $\overrightarrow{PC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = |\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|$이므로

$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta = 135°$에서

$|\overrightarrow{PB}| = 2\sqrt{2}\,|\overrightarrow{PC}|$이므로 $|\overrightarrow{PB}| = 2\sqrt{2}t$

$\angle APB = \angle BPC = 135°$, $\angle CPA = 90°$이므로

세 삼각형 ABP, BCP, CAP의 넓이를 각각

S_1, S_2, S_3이라 하면

$S_1 : S_2 : S_3 = 3t^2 : t^2 : \dfrac{3}{2}t^2 = 6 : 2 : 3$

직선 AP와 변 BC의 교점이 D이므로

$\overline{AD} : \overline{DP} = (S_1 + S_2 + S_2) : S_2 = 11 : 2$

따라서 $\overrightarrow{AD} = \dfrac{11}{2}\overrightarrow{PD}$이므로 $k = \dfrac{11}{2}$

26) [정답] 12

[해설]

조건 (가)에서

$$2\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$$

이므로 $\overrightarrow{BP} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

따라서 점 P는 선분 AB를 $3:1$으로 외분하는 점이고,

$$\overline{AP} = \frac{3}{2}\overline{AB} = 3$$

한편, $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 4$, $\angle CBA = \dfrac{\pi}{3}$이므로

$$\angle BAC = \frac{\pi}{2},\ \overline{AC} = 2\sqrt{3}$$

따라서 점 P에서 직선 AC에 내린 수선의 발이 A이다.

점 Q에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}\\ &= |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AH}|\\ &= 2\sqrt{3} \times |\overrightarrow{AH}| = 6\end{aligned}$$

$\therefore\ \overline{AH} = \sqrt{3}$

따라서 점 H는 선분 AC의 중점이므로 점 Q는 선분 AC의 수직이등분선인 직선 DH 위에 있다.

이때 삼각형 ABQ에서

$$\angle PBQ = \angle BAQ + \angle BQA$$

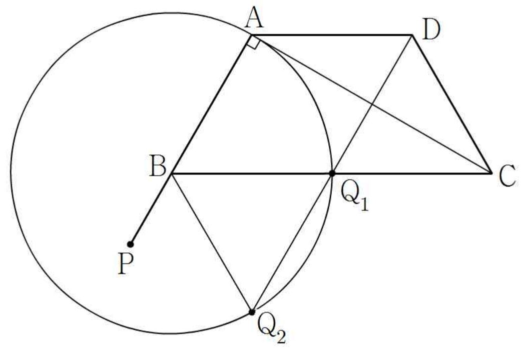
이므로 $2 \times \angle BQA = \angle PBQ$를 만족시키려면

$$\angle BAQ = \angle BQA$$

즉, $\overline{AB} = \overline{BQ}$이어야 한다.

따라서 점 Q는 점 B를 중심으로 하고 반지름이 2인 원과 직선 DH의 교점이므로 그림과 같이 점 Q_1 또는 점 Q_2가 가능하다.

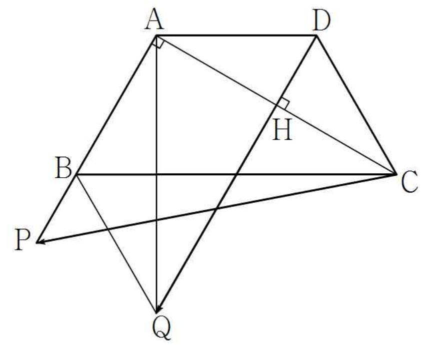
점 Q_1은 조건 (다)에서 $\angle PBQ < \dfrac{\pi}{2}$라는 조건에 어긋나므로 점 Q_2가 조건을 만족하는 점이다.



이때 직각삼각형 AQD에서

$$\overline{AD} = 2,\ \overline{AQ} = 2\sqrt{3}$$

이므로 $\overline{DQ} = \sqrt{4+12} = 4$



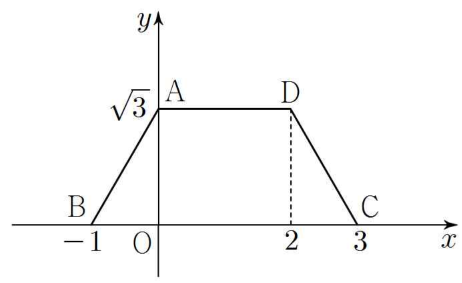
$$\begin{aligned}\therefore\ \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ} &= (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}) \cdot \overrightarrow{DQ}\\ &= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DQ}\\ &= 0 + |\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{DQ}|\\ &= 12\end{aligned}$$

[다른 풀이]

그림과 같이 네 점 A, B, C, D의 좌표가 각각

$$A(0, \sqrt{3}),\ B(-1, 0),\ C(3, 0),\ D(2, \sqrt{3})$$

이 되도록 좌표평면을 설정하자.



점 P의 좌표를 $P(a, b)$라 하면

$$\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BP})$$

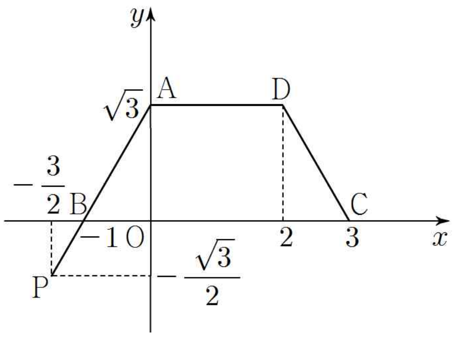
에서 $(3, -\sqrt{3}) = 2\{(2, 0) + (a+1, b)\}$

$3 = 2(a+3)$에서 $a = -\dfrac{3}{2}$

$-\sqrt{3} = 2b$에서 $b = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

즉, $P\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 그림과 같이 세 점 A, B, P는 한

직선 위에 있고 $\overline{\mathrm{BP}}=1$이다.



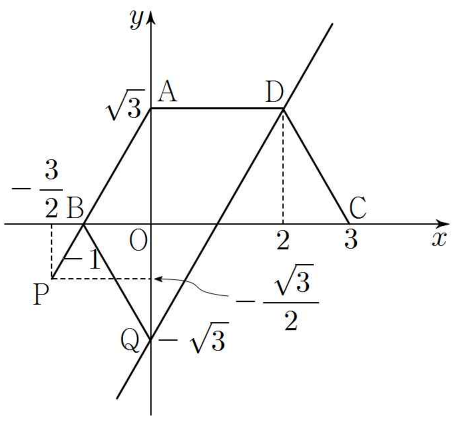
또, 점 Q의 좌표를 $\mathrm{Q}(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=6$에서

$$(3,\ -\sqrt{3})\cdot\left(x+\frac{3}{2},\ y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=6$$

$$y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$$

이므로 점 Q는 직선 $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$ 위에 있다.



이때 삼각형 ABQ에서

$$\angle\mathrm{PBQ}=\angle\mathrm{BAQ}+\angle\mathrm{BQA}$$

이므로 $2\times\angle\mathrm{BQA}=\angle\mathrm{PBQ}<\frac{\pi}{2}$를 만족시키려면

$$\angle\mathrm{BAQ}=\angle\mathrm{BQA}$$

즉, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BQ}}$이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(0,\ -\sqrt{3})$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=\left(-\frac{9}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(-2,\ -2\sqrt{3})$$

$$=9+3$$

$$=12$$

27) [정답] 48

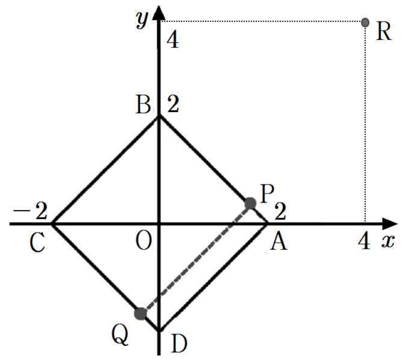
[해설]

(가)에서 $(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}})=0$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0 \text{ 또는 } \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$$

즉, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 또는 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

(ⅰ) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$일 때,



(나)조건에서 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geq 0$이므로 그림과 같이 점 P는 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$위에 있고 점 Q는 선분 $\overline{\mathrm{CD}}$ 위에 있어야 한다.

또, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 이루는 각이 예각이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geq 0$ (조건에 적합)

따라서 점 Q가 선분 $\overline{\mathrm{CD}}$위에 있으므로 점 Q를

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(t,\ -t-2)$ (단, $-2\leq t\leq 0$)로 두면

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(2,\ 0)\cdot(t,\ -t-2)$$

$$=2t\geq -2$$

즉. $t\geq -1$이므로 $-1\leq t\leq 0$ …… ㉠

이 때, (다)조건에서 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\leq 0$이고, 점 P, Q는

$y=-x$에 대칭이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(t,\ -t-2)$에서

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(t+2,\ -t)$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{RP}}=(t-2,\ -t-4)$, $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=(t-4,\ -t-6)$이다.

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=(t-2,\ -t-4)\cdot(t-4,\ -t-6)$$

$$=2t^2+4t+32$$

$$=2(t+1)^2+30$$

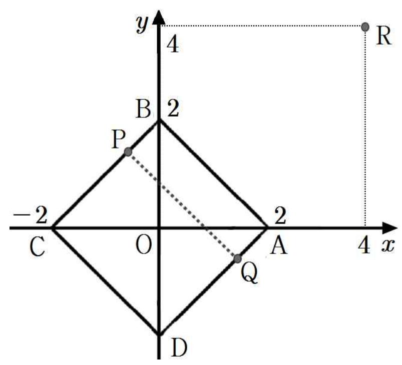
㉠에서 $-1\leq t\leq 0$이므로 $t=0$일 때, 즉 점

$\mathrm{P}(2,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ -2)$일 때, 최댓값 $M=32$을 가지고,

$t=-1$일 때, 즉 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$, $\mathrm{Q}(-1,\ -1)$일 때, 최솟값

$m=30$을 가진다.

(ⅱ) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AD}}$일 때,



(ⅰ)과 동일한 방법으로 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geq 0$이므로 점

P는 선분 $\overline{\mathrm{BC}}$위에 있고 점 Q는 선분 $\overline{\mathrm{AD}}$ 위에 있어야 한다.

또, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 이루는 각이 예각이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geq 0$ (조건에 적합)

점 P가 선분 $\overline{\mathrm{BC}}$ 위에 있으므로 점 P는 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(t,\ t+2)$

(단, $-2 \le t \le 0$)로 두면

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} = (2,\ 0) \cdot (t,\ t+2) = 2t \ge -2$$

즉, $t \ge -1$이므로 $-1 \le t \le 0$ …… ㉡

이 때, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} \ge 0$이고, 점 P, Q는 $y=x$에 대칭이므로

$\overrightarrow{OP} = (t,\ t+2)$에서 $\overrightarrow{OQ} = (t,\ t+2)$

따라서 $\overrightarrow{RP} = (t-4,\ t-2)$, $\overrightarrow{RQ} = (t-2,\ t-4)$이다.

$$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} = (t-4,\ t-2) \cdot (t-2,\ t-4) = 2(t-3)^2 - 2$$

그런데, ㉡에서 $-1 \le t \le 0$이므로 $t=0$일 때, 즉 점 P$(0,\ 2)$, Q$(2,\ 0)$일 때, 최솟값 $m=16$을 가지고,
$t=-1$일 때, 즉 점 P$(-1,\ 1)$, Q$(1,\ -1)$일 때, 최댓값 $M=32$을 가진다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 최댓값 $M=32$, 최솟값 $m=16$이므로

$\therefore\ M+m=48$

28) [정답] 45

[해설]

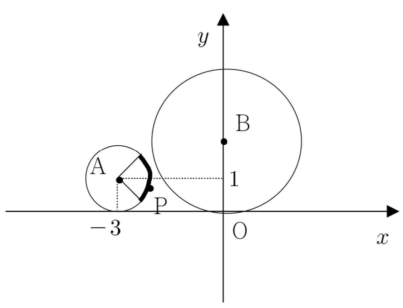
$|\overrightarrow{AP}|=1$이므로 점 P는 중심이 A$(-3,\ 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.

또, $|\overrightarrow{BQ}|=2$이므로 점 Q는 중심이 B$(0,\ 2)$이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이다.

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OC} \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}$에서 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{OC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{OC}|\cos\theta \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

즉, $\cos\theta \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $-\dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$

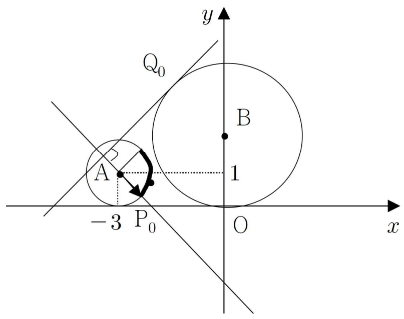
그러므로 점 P를 나타내면 그림과 같다.



또, 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$가 이루는 각의 크기를 θ'이라 하면

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = |\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|\cos\theta' = |\overrightarrow{AQ}|\cos\theta'$$

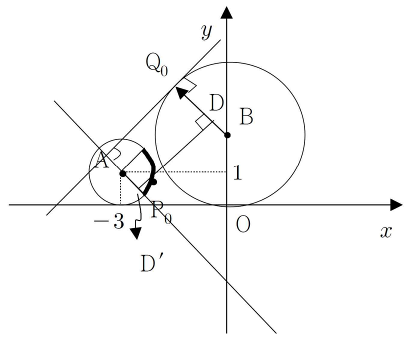
그러므로 이 값이 최소이기 위해서는 점 P는 A를 지나고 직선의 기울기가 -1인 직선 위의 점이어야 하고, 점 Q는 이 직선과 수직이면서 원 $x^2+(y-2)^2=4$에 접하는 점 중 제 2사분면의 점이어야 한다.



한편, $\overrightarrow{BX} \cdot \overrightarrow{BQ_0} \ge 1$에서 두 벡터 $\overrightarrow{BX}$, $\overrightarrow{BQ_0}$가 이루는 각의 크기를 θ''이라 하면 $|\overrightarrow{BX}||\overrightarrow{BQ_0}|\cos\theta'' \ge 1$

즉, $2|\overrightarrow{BX}|\cos\theta'' \ge 1$이므로 $|\overrightarrow{BX}|\cos\theta'' \ge \dfrac{1}{2}$

그러므로 선분 BQ_0위의 점 D를 $\overline{BD} = \dfrac{1}{2}$이 되도록 잡은 후, 점 D에서 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선에 내린 수선의 발을 D′이라 하면 점 X는 선분 AD′ 위의 점이다.



따라서 $|\overrightarrow{Q_0X}|$의 최댓값은 X가 D′일 때 가지므로 $|\overrightarrow{Q_0X}|^2$의 최댓값은

$$\overline{Q_0D'}^2 = \overline{Q_0D}^2 + \overline{DD'}^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (2\sqrt{2})^2 = \frac{9}{4} + 8 = \frac{41}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=41$이므로 $p+q=4+41=45$

29) [정답] 7

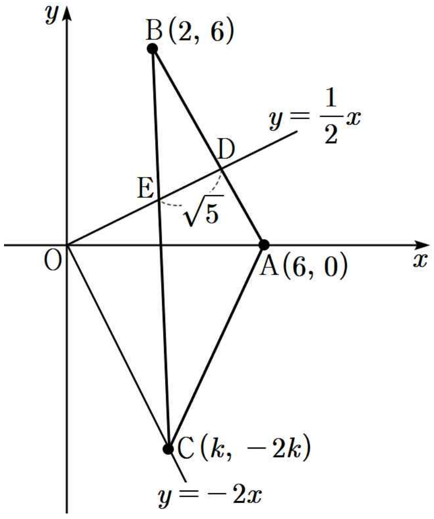
[해설]

점 P$(x,\ y)$라 하면 조건 (가)에서

$5(4,\ -6) \cdot (x,\ y) - (2,\ 6) \cdot (x-6,\ y) = (6,\ 0) \cdot (2,\ 6)$

$20x - 30y - 2x + 12 - 6y = 12$

$\therefore\ y = \dfrac{1}{2}x$



위의 그림과 같이 직선 AB와 $y=\frac{1}{2}x$의 교점을 D라 하자.

직선 AB의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}(x-6)=-\frac{3}{2}x+9$

직선 $y=\frac{1}{2}x$와 연립하면 $x=\frac{9}{2}$, $y=\frac{9}{4}$이므로

$D\left(\frac{9}{2},\ \frac{9}{4}\right)$이다.

직선 BC와 직선 $y=\frac{1}{2}x$의 교점을 E라 하면 점 P의 자취는 선분 DE와 같다.

점 P의 자취의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 $\overline{DE}=\sqrt{5}$이고, 두 점 D, E를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 $E\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{4}\right)$이다.

세 점 B, E, C가 일직선 위에 있으므로

$$\frac{-2k-6}{k-2}=\frac{-\frac{19}{4}}{\frac{1}{2}},\ k=\frac{10}{3}$$

$\therefore C\left(\frac{10}{3},\ -\frac{20}{3}\right)$

점 $P\left(a,\ \frac{a}{2}\right)$라 하면 $\frac{5}{2}\le a\le\frac{9}{2}$이고

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CP}=(6,\ 0)\cdot\left(a-\frac{10}{3},\ \frac{a}{2}+\frac{20}{3}\right)$$
$$=6a-20$$

따라서 $a=\frac{9}{2}$일 때, $6a-20$의 최댓값은 7이므로

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CP}$의 최댓값은 7이다.

30) [정답] 108

[해설]

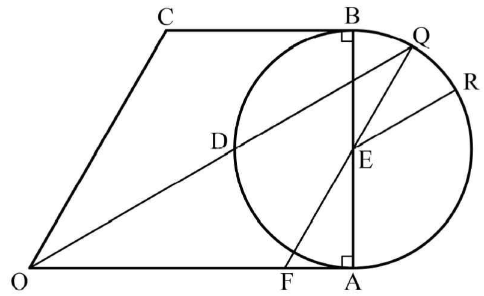
선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 E라 하자.

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EP})$$
$$=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{EP}$$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OE}$의 값은 일정하므로 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{EP}$의 값이 최대일 때, $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대이다.

두 벡터 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{EP}$의 방향이 같을 때, $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{EP}$의 값이 최대이다.

두 벡터 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{EP}$의 방향이 같을 때의 점 P가 Q이다.



선분 QE가 선분 OA와 만나는 점을 F라 하자.

$\angle EFA=\frac{\pi}{3}$, $\overline{AE}=2$이므로

$$\overline{FE}=\frac{4\sqrt{3}}{3},\ \overline{FA}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$\overline{OF}=\overline{OA}-\overline{FA}=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$
$$\overline{FQ}=\overline{FE}+\overline{EQ}=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$\overline{OF}=\overline{FQ}$이므로 $\angle OQF=\frac{\pi}{6}$

그러므로 $\overline{DQ}=2\sqrt{3}$

$$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{DQ}\cdot(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ER})$$
$$=\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{ER}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

두 벡터 $\overrightarrow{DQ}$, $\overrightarrow{AE}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$

$$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AE}=2\sqrt{3}\times2\times\cos\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$$

두 벡터 $\overrightarrow{DQ}$, $\overrightarrow{ER}$의 방향이 같을 때, $\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{ER}$의 값이 최대이므로

$$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{ER}\le2\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}$$

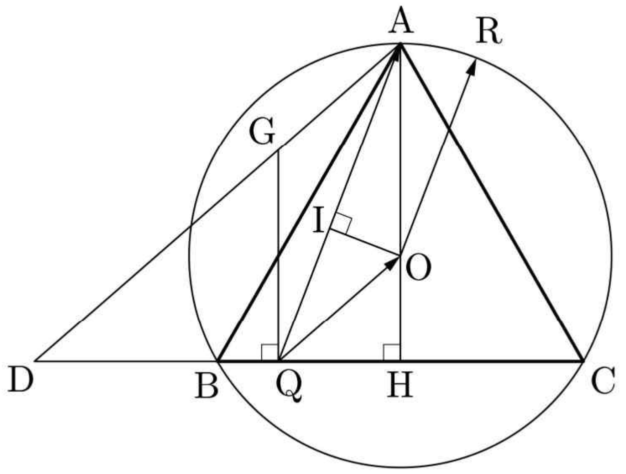
㉠에 의하여

$$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{ER}$$
$$\le2\sqrt{3}+4\sqrt{3}$$
$$=6\sqrt{3}$$

따라서 $M=6\sqrt{3}$이므로 $M^2=108$

31) [정답] 15

[해설]



$\overrightarrow{OD}=\dfrac{3\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}}{3-1}$ 이므로 점 D는 선분 CB를 3:1로 외분하는 점이다.

선분 DA를 2:1로 내분하는 점을 G라 하면

$|2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}|=3|\overrightarrow{PG}|$이므로 선분 PG의 길이가 최소일 때 $|2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}|$가 최소이다.

그러므로 점 Q는 점 G에서 선분 CD에 내린 수선의 발이다.

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{DH}=6\overline{QH}=\dfrac{1}{3}\overline{DH}=2,\ \overline{AH}=3\sqrt{3}$ 이므로

$\overline{QA}=\sqrt{2^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{31}$

$\overline{OA}=\dfrac{2}{3}\times 3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

정삼각형은 무게중심과 외심이 같으므로 점 R는 삼각형 ABC의 외접원 위의 점이다.

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{QA}\cdot(\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OR})$

$\quad=(\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QO})+(\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{OR})$

두 벡터 $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QO}$가 이루는 각의 크기를 $\theta_1(0\le\theta_1\le\pi)$라 하자.

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QO}=|\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QO}|\cos\theta_1$

점 O에서 선분 QA에 내린 수선의 발을 I라 하자.

두 삼각형 AIO, AHQ가 서로 닮음이므로

$\overline{AI}:\overline{AH}=\overline{OA}:\overline{QA}$

$\overline{AI}:3\sqrt{3}=2\sqrt{3}:\sqrt{31}$

$\overline{AI}=\dfrac{18}{\sqrt{31}}=\dfrac{18\sqrt{31}}{31}$

$\overline{QI}=\overline{QA}-\overline{AI}=\sqrt{31}-\dfrac{18\sqrt{31}}{31}=\dfrac{13\sqrt{31}}{31}$

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QO}=|\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QO}|\cos\theta_1$

$\quad=|\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QI}|$

$\quad=\sqrt{31}\times\dfrac{13\sqrt{31}}{31}=13$

두 벡터 $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{OR}$가 이루는 각의 크기를 $\theta_2(0\le\theta_2\le\pi)$라 하자.

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{OR}=|\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{OR}|\cos\theta_2$

$\quad=\sqrt{31}\times 2\sqrt{3}\times\cos\theta_2$

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{OR}$의 값은 두 벡터 $\overrightarrow{QA}$와 $\overrightarrow{OR}$가 방향이 같을 때 최대이다.

그러므로 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{OR}$의 최댓값은

$\sqrt{31}\times 2\sqrt{3}\times\cos 0=2\sqrt{93}\,\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QR}$

$=(\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QO})+(\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{OR})$

$\le 13+2\sqrt{93}$

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QR}$의 최댓값은 $13+2\sqrt{93}$

$p=13,\ q=2$

따라서 $p+q=15$

32) [정답] ⑤

[해설]

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$에서 $\angle COB=90^\circ$, $\angle AOC=30^\circ$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OC}|\times\cos 30^\circ=2\sqrt{3}\times|\overrightarrow{OC}|$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=24$에서 $|\overrightarrow{OC}|=4\sqrt{3}$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})$

$\quad=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}-|\overrightarrow{OP}|^2$

$\quad=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}-16$ …… ㉠

$\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$0^\circ\le\theta\le 90^\circ$이고

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CQ})$

$\quad=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{CQ}$

$\quad=16\sqrt{3}\cos\theta+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{CQ}$

$\theta=0^\circ$이고 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{CQ}$의 방향이 같을 때,

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 값이 최대이므로

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\le 16\sqrt{3}+4$ …… ㉡

$\theta=90^\circ$이고 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{CQ}$의 방향이 반대일 때,

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 값이 최소이므로

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\ge -4$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$-4-16\le\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}\le 16\sqrt{3}+4-16$

$M=16\sqrt{3}-12,\ m=-20$

따라서 $M+m=16\sqrt{3}-32$

33) [정답] ⑤

[해설]

직선 $\dfrac{x+1}{2}=3-y$의 방향벡터는 $\vec{u}=(2,\ -1)$

직선 $x-2=\frac{1-y}{2}$의 방향벡터는 $\vec{v}=(1,\ -2)$

$$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

$$=\frac{|2\times1+(-1)\times(-2)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{4}{5}$$

34) [정답] ②

[해설]
두 직선
$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{3},\ x-1=\frac{2-y}{3}$
즉,
$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{3},\ x-1=\frac{y-2}{-3}$
의 방향벡터를 각각 $\vec{d_1},\ \vec{d_2}$라 하면
$\vec{d_1}=(4,3)$
$\vec{d_2}=(1,\ -3)$
따라서

$$\cos\theta=\frac{|\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}|}{|\vec{d_1}||\vec{d_2}|}$$

$$=\frac{|4\times1+3\times(-3)|}{\sqrt{4^2+3^2}\sqrt{1^2+(-3)^2}}$$

$$=\frac{5}{5\sqrt{10}}$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

35) [정답] ⑤

[해설]
점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $\frac{a-5}{2}=b-5$ …… ㉠

$\overrightarrow{AP}=(a-2,\ b-6)$

직선 l의 방향벡터는 $\vec{u}=(2,\ 1)$
두 벡터 $\overrightarrow{AP}$와 $\vec{u}$는 서로 수직이므로 $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{u}=0$
즉, $2(a-2)+(b-6)=0$

$b=-2a+10$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=3,\ b=4$
따라서 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

36) [정답] ①

[해설]
$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AB}|$의 양변을 제곱하면

$$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2$$

즉, $|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{AB}|^2$ …… ㉠

두 점 A(1, 2), B(−3, 5)에 대하여 구하고자 하는 점 P를 P(x, y)라 하고 ㉠에 대입하면

$$(x^2+y^2)+(1^2+2^2)-2(x\times1+2\times y)$$

$$=\{1-(-3)\}^2+(2-5)^2,$$

$$x^2+y^2-2x-4y-20=0,$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2=25$$

따라서 점 P는 (1, 2)를 원의 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원이다.

따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는 원 둘레의 길이이므로

$$2\pi\cdot5=10\pi$$

37) [정답] ⑤

[해설]
$\overrightarrow{OP}=(x,y)$라 하자.
$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x+2,\ y)$
$\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OB}=(x-6,\ y-6)$
$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OB})=0$에서
$(x+2,\ y)\cdot(x-6,\ y-6)=0$
$(x+2)(x-6)+y(y-6)=0$
$x^2-4x-12+y^2-6y=0$
$(x-2)^2+(y-3)^2=25$
점 P가 나타내는 도형은 중심이 $(2,3)$이고
반지름의 길이가 5인 원이다.
따라서 구하는 도형의 길이는 10π

38) [정답] ③

[해설]
점 P의 좌표를 (x,y)라 하자.
그러면 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x-3,\ y)$
$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})=(x-3)^2+y^2=5$
즉 점 P가 나타내는 도형은 중심이 $(3,0)$이고 반지름이 $\sqrt{5}$인 원이다.
이 도형과 직선이 접하므로

점 $(3,\ 0)$에서 직선 $x-2y+2k=0$에 이르는 거리가 반지름의 길이인 $\sqrt{5}$와 같다.

$\frac{|3+2k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

$\Rightarrow |3+2k|=5$

$\Rightarrow 3+2k=5$ 또는 $3+2k=-5$

$\Rightarrow k=1$ 또는 $k=-4$

$\therefore\ k=1(\because k$는 양수)