1~4. 동생과 손잡고 풀어보세요.

5.

$$\int_0^1 e^{x+4}dx = \int_0^1 e^4 \times e^x\, dx = \left[e^4 \times e^x\right]_0^1 = e^5 - e^4$$

6. 역변환이 존재하므로 $f^{-1}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

$\therefore 2a = 4,\ b = 1$

7.

합성하면 $f(x) = \sqrt{11+a^2}\, sin\,(x+\theta)$

최댓값: $\sqrt{11+a^2} = 6 \quad \therefore a = 5$

8.

a_n은 공비가 3인 등비수열이다.

$$a_n = a_1 \times 3^{n-1} \rightarrow S_n = \frac{a_1(3^n-1)}{3-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{2}\times\frac{3^n-1}{3^n} = 5$$

$\therefore a_1 = 10$

9.

서로 다른 연필 5자루를 서로 다른 학생에게 나누어 준다.

연필 a를 줄 수 있는 경우의 수: 학생 4명중 한명에게 준다.
$\rightarrow$4가지.
연필 b를 줄 수 있는 경우의 수: 학생 4명중 한명에게 준다.
$\rightarrow$4가지.
연필 c를 줄 수 있는 경우의 수: 학생 4명중 한명에게 준다.
$\rightarrow$4가지.
연필 d를 줄 수 있는 경우의 수: 학생 4명중 한명에게 준다.
$\rightarrow$4가지.
연필 e를 줄 수 있는 경우의 수: 학생 4명중 한명에게 준다.
$\rightarrow$4가지.
$\therefore 4^5$가지.

10. 점 P를 지나고 $y = 2nx$에 수직인 직선의 방정식

$$\rightarrow y = -\frac{1}{2n}(x-n) + 2n^2$$

점 Q는 $y = -\dfrac{1}{2n}(x-n)+2n^2$의 x절편이다.

$Q(0,\ 4n^3+n)$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+n}{n^3} = 4$

11.

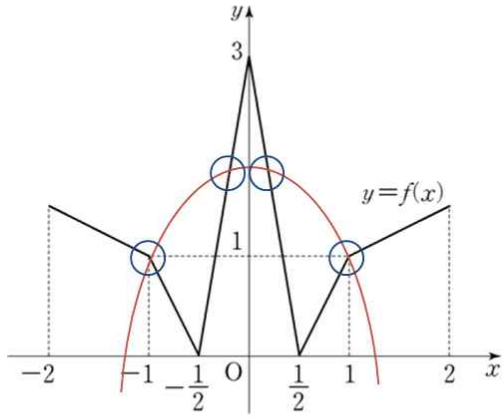
$$\frac{2}{f(x)-1} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$$

$$\rightarrow 2(1-x)(1+x) = (f(x)-1)(1-x) + (f(x)-1)(1+x)$$

$$= 2(f(x)-1)$$

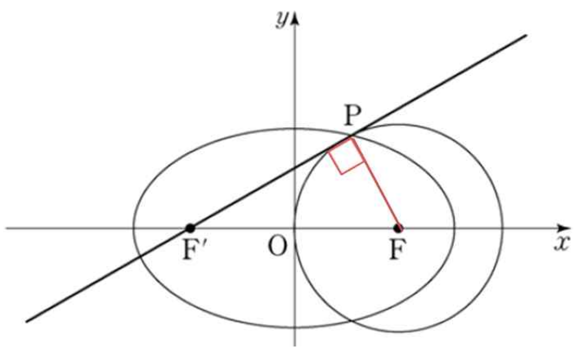
(단, $x \neq 1,\ x \neq -1,\ f(x) \neq 1$이다.)

$\therefore (1-x)(1+x)+1 = f(x)$의 근을 보면



4개이다. 이 중 $x = 1, x = -1$이 무연근이므로 2개이다.

12.



점 F에서 점 P로 이으면 삼각형 PFF′은 직각삼각형이 된다.
(원의 중심에서 원의 접선까지 이으면 수직이다.)

중심이 c인 원 이므로 $\overline{PF} = c$, $\overline{FF'} = 2c$이다.

타원의 정의를 이용하여 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 4$이므로

$\overline{PF'} = 4 + c$임을 알 수 있다.

피타고라스의 정리를 이용하여

$c^2 + (4-c)^2 = (2c)^2$

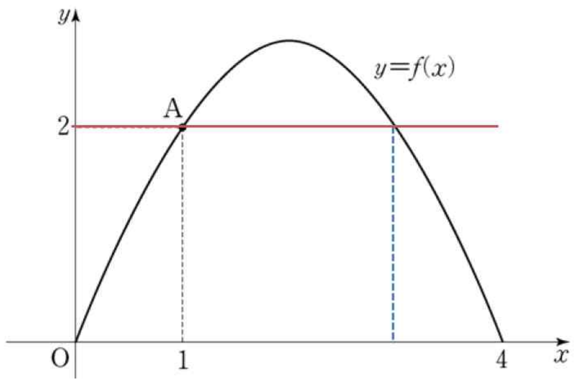
$2c^2 + 8c - 16 = c^2 + 4c - 8$

근의 공식을 이용하면 $c = 2\sqrt{2} - 2$

13~14 세트형

13.

$(1,\ 2)$를 지나고 x축에 평행하므로 $g(x)=2$

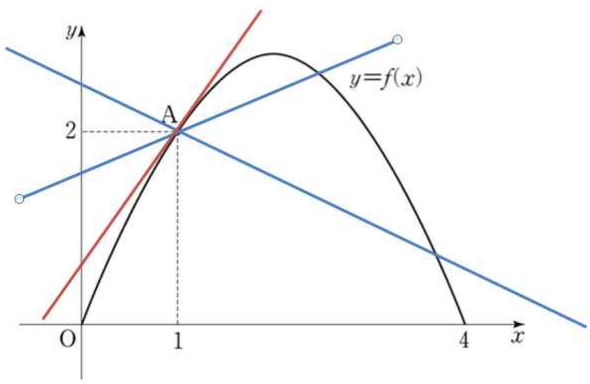


$\sin\frac{\pi}{4}x$가 위의 구간에서 $x=2$에 대칭이므로

$f(x)$와 $g(x)$의 교점은 $x=1,\ x=3$인 것을 알 수있다.
둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_1^3 f(x)\,dx-4=\left[-\frac{8\sqrt{2}}{\pi}cos\frac{\pi}{4}x\right]_1^3-4=\frac{16}{\pi}-4$$

14. $g(x)$는 $(1,\ 2)$를 지나는 일차함수이다.
그림을 보면 $f(x)\le g(x)$를 만족하는 직선은 접선이 되어야 한다.



그러므로 $g(x)=f'(1)(x-1)+2=\frac{\pi}{2}(x-1)+2$

$\therefore g(3)=\pi+2$

15.

먼저 첫째항을 구해보자 삼각형 $A_1B_1C_1$이 정삼각형이다 여기서 원의 중심을 O라고 하면 $\overline{OA_1}=2$이다. 그리고 그림에서 θ는 $\frac{2}{3}\pi$임을 알 수 있다. 따라서 정삼각형의 한변의 길이는 $2\sqrt{3}$임을 쉽게 할 수 있다. 이제 S_1을 구해보자. 선분A_1C_1의 중심을 M이라고 하면 O가 삼각형의 무게 중심이므로 $\overline{OM}=1$이 된다. 따라서 사각형의 높이는 반지름 길이에서 선분 OM_1의 길이를 빼면 되므로 1이 된다. 따라서 우리가 구하고자 하는 넓이는 사각형에서 부채꼴에서 삼각형을 빼면 된다. 사각형의 넓이는 $2\sqrt{3}$이고 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{2}{3}\pi$이 되고, 삼각형의 넓이는

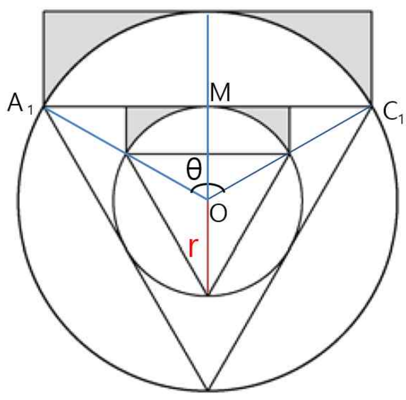
$\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$S_1=2\sqrt{3}-\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$이다.

이제 공비를 구해보자 안쪽의 원의 반지름을 r이라 하면 r은 선분 OM이랑 같으므로 $r=1$이다 따라서 넓이비

$2^2:1^2$이므로 $\frac{1}{4}$가 공비가 된다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi}{\frac{3}{4}}=4\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi\text{이다.}$$



16. $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되어야한다. $g(x)$가 연속이고, $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 $x=1$에서 연속인지를 판단해야한다. 따라서

$\lim_{x\to 1}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(1)$임이 성립하면 된다.

$\lim_{x\to 1+0}(g\circ f)(x)=\lim_{t\to 1-0}g(t)=2+2^{-1}$

$\lim_{x\to 1-0}(g\circ f)(x)=\lim_{t\to a}g(t)=g(a)=2^{a}+2^{-a}$

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(1)=2+2^{-1}$

에서 $2^{a}+2^{-a}=2+2^{-1}$이다 따라서 만족하는 $a=1,-1$이다.

17. $S_{n+1}+1=2^{n}(S_{n}+1)$에서 양변 $\log_2$를 하는 것이므로

$\log_2(S_{n+1}+1)=n+\log_2(S_{n}+1)$이 되고

$b_n=\log_2(S_n+1)$이므로 위식에 넣어서 정리하면

$b_{n+1}=n+b_n$이 되므로 $\boxed{(가)}=n$이된다.

따라서 $f(n)=n$

문제를 따라가면 $S_n=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}-1\ (n\geq 1)$이므로

우리가 구하고자하는 것은 $a_n=S_n-S_{n-1}$이다.

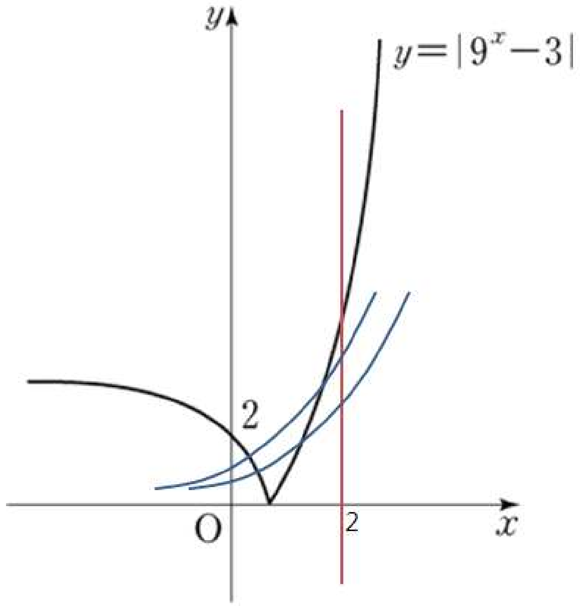
즉, $a_n=\left(S^{\frac{n^2-n+1}{2}}-1\right)-\left(S^{\frac{(n-1)(n-2)+1}{2}}-1\right)$이된다.

따라서 $\boxed{(나)}=\dfrac{(n-1)(n-2)+1}{2}$이다.

$g(n)=\dfrac{(n-1)(n-2)+1}{2}$이므로,

$f(12)=12,\ g(5)=\dfrac{4\times 3+2}{2}=\dfrac{14}{2}=7$이다.

18.



$f(x)=2^{x+k}$, $g(x)=|9^{x}-3|$ 라 하자. $f(x)$의 대략적인 그림을 그려보면 위와 같다.

$g(x)$ 는 $(0,2)$, $(2,78)$을 지난다.

$x_1<0$ 을 만족하려면 $f(0)>2$ … ① 와

$0<x_2<2$를 만족하려면 $f(2)<78$ … ② 을 각각 만족해야한다.

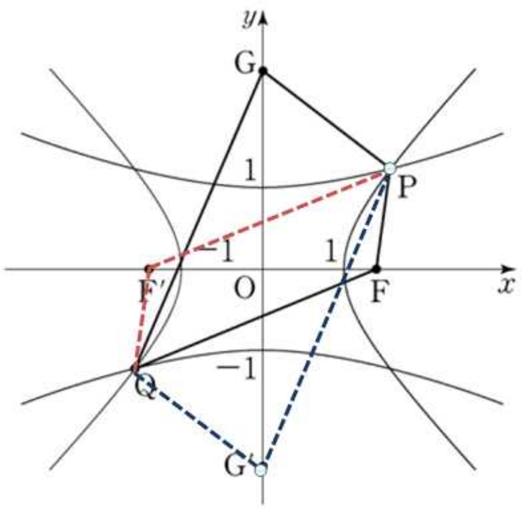
①을 식으로 표현하면 $2^{k}>2$, $\therefore\ k>1$

②를 식으로 표현하면 $2^{2+k}<78$, $k=1,2,3,4$

따라서 ①, ②를 만족하는 k값은 $2,3,4$이다.

$2+3+4=9$

19.



쌍곡선의 정의를 이용하기 위하여 먼저

보조선 $\overline{\mathrm{PF}'}$ 를 긋는다.

P 와 Q , F 와 F ′가 각각 원점 대칭이고

$\overline{\mathrm{PF}'}//\overline{\mathrm{QF}}, \overline{\mathrm{F}'\mathrm{Q}}//\overline{\mathrm{PF}}$ $\overline{\mathrm{QF}'}$이므로

사각형 PF ′QF 는 평행사변형이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PF}'} = \overline{\mathrm{QF}} = a$, $\overline{\mathrm{PF}} = a-2$ 로 놓을 수있다.

$\overline{\mathrm{PF}} \times \overline{\mathrm{QF}} = 4$ 이므로

$(a-2)a = 4$, 근의공식을 이용하면

$a = 1+\sqrt{5}\,(\because a>0)$

같은 원리로 보조선 $\overline{\mathrm{G}'\mathrm{Q}}$ 와 $\overline{\mathrm{G}'\mathrm{P}}$ 를 그어주면

사각형 GQG ′P 는 평행사변형이다.

$\overline{\mathrm{PG}} = \overline{\mathrm{GQ}} = b$, $\overline{\mathrm{PG}} = b-2$ 라 하면

$\overline{\mathrm{PG}} \times \overline{\mathrm{QG}} = 8$ 이므로

$b(b-2) = 8$, $\therefore b=4$

따라서 사각형 PGQF의 둘레의 길이는

$2b+2a-4 = 6+2\sqrt{5}$

20.

a_4와 a_5를 구하면 되므로, $n=4$와 $n=5$일때만 구하면 된다.

1) $n=4$인 경우

$1 \le t < 100$에서 두 가지 경우로 나누어서 생각해보면

i) $1 \le t < 10$인 경우

$\log t = f(t)$이고 $\log t^4 = 4f(t)$이다. 따라서

$$f(t^4)=\begin{cases} 4f(t) & \left(0 \le f(t) < \frac{1}{4}\right) \\ 4f(t)-1 & \left(\frac{1}{4} \le f(t) < \frac{2}{4}\right) \\ 4f(t)-2 & \left(\frac{2}{4} \le f(t) < \frac{3}{4}\right) \\ 4f(t)-3 & \left(\frac{3}{4} \le f(t) < 1\right) \end{cases}$$ 로 나누면

$$\begin{cases} 4f(t)+2f(t)=1 & \left(0 \le f(t) < \frac{1}{4}\right) \\ 4f(t)-1+2f(t)=1 & \left(\frac{1}{4} \le f(t) < \frac{2}{4}\right) \\ 4f(t)-2+2f(t)=1 & \left(\frac{2}{4} \le f(t) < \frac{3}{4}\right) \\ 4f(t)-3+2f(t)=1 & \left(\frac{3}{4} \le f(t) < 1\right) \end{cases}$$ 에서

$$\begin{cases} f(t)=\frac{1}{6} & \left(0 \le f(t) < \frac{1}{4}\right) \\ f(t)=\frac{1}{3} & \left(\frac{1}{4} \le f(t) < \frac{2}{4}\right) \\ f(t)=\frac{1}{2} & \left(\frac{2}{4} \le f(t) < \frac{3}{4}\right) \\ f(t)=\frac{2}{3} & \left(\frac{3}{4} \le f(t) < 1\right) \end{cases}$$ 임을 알 수 있다.

여기서 마지막은 범위에 들어가지 않으므로 만족하지 않는다.

따라서 만족하는 t의 값은 3개다.

ii) $10 \le t < 100$인 경우

경우는 지표가 1인 경우만 다르고 위 경우 와 같다.

따라서 $a_4 = 6$이다.

2) $n=5$인 경우

$1 \le t < 100$에서 두 가지 경우로 나누어서 생각해보면

i) $1 \le t < 10$인 경우

$\log t = f(t)$이고 $\log t^5 = 5f(t)$이다. 따라서

$$f(t^5)=\begin{cases} 5f(t) & \left(0 \le f(t) < \frac{1}{5}\right) \\ 5f(t)-1 & \left(\frac{1}{5} \le f(t) < \frac{2}{5}\right) \\ 5f(t)-2 & \left(\frac{2}{5} \le f(t) < \frac{3}{5}\right) \\ 5f(t)-3 & \left(\frac{3}{5} \le f(t) < \frac{4}{5}\right) \\ 5f(t)-4 & \left(\frac{4}{5} \le f(t) < 1\right) \end{cases}$$ 로 나누면

$$\begin{cases} 5f(t)+2f(t)=1 & \left(0 \le f(t) < \frac{1}{5}\right) \\ 5f(t)-1+2f(t)=1 & \left(\frac{1}{5} \le f(t) < \frac{2}{5}\right) \\ 5f(t)-2+2f(t)=1 & \left(\frac{2}{5} \le f(t) < \frac{3}{5}\right) \\ 5f(t)-3+2f(t)=1 & \left(\frac{3}{5} \le f(t) < \frac{4}{5}\right) \\ 5f(t)-4+2f(t)=1 & \left(\frac{4}{5} \le f(t) < 1\right) \end{cases}$$ 에서

$$\begin{cases} f(t)=\frac{1}{7} & \left(0 \le f(t) < \frac{1}{5}\right) \\ f(t)=\frac{2}{7} & \left(\frac{1}{5} \le f(t) < \frac{2}{5}\right) \\ f(t)=\frac{3}{7} & \left(\frac{2}{5} \le f(t) < \frac{3}{5}\right) \\ f(t)=\frac{4}{7} & \left(\frac{3}{5} \le f(t) < \frac{4}{5}\right) \\ f(t)=\frac{5}{7} & \left(\frac{4}{5} \le f(t) < 1\right) \end{cases}$$ 임을 알 수 있다.

여기서 마지막은 두 경우는 만족하지 않는다.

따라서 만족하는 t의 값은 3개다.

ii) $10 \le t < 100$인 경우

경우는 지표가 1인 경우만 다르고 위 경우 와 같다.

따라서 $a_5 = 6$이다.

21.

$f(x)$가 역함수를 가지므로 $f(x)$가 단조증가 또는 단조감소인데, $f(x)$는 단조증가이므로 $f'(x) \ge 0$이다.

따라서 $f'(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)+a$이므로

$e^{x+1}(x^2+nx+1)+a \ge 0$에서

$e^{x+1}(x^2+nx+1) \ge -a$ 를 관찰하자.

$h(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)$의 그래프를 그려야한다.

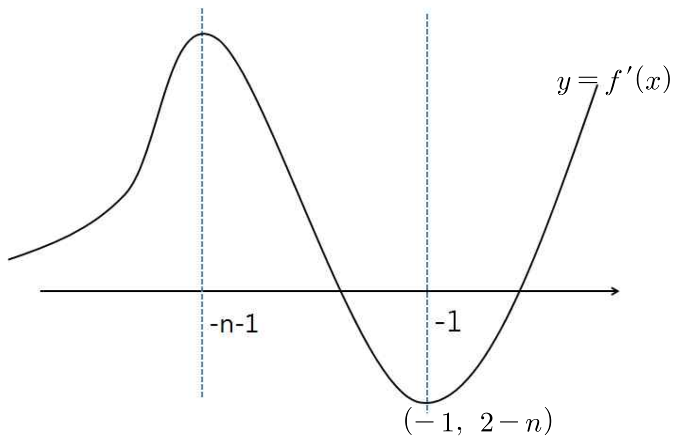
$\lim_{x\to\infty} h(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} h(x)=0$이고

$h'(x)=e^{x+1}\{x^2+(n+1)x+n+2\}=e^{x+1}(x+1)(x+n+1)$

이다.

$n \ge 2$이므로 $x=-1$에서 극소 $x=-n-1$에서 극대값을 가진다.

따라서 아래와 같은 그림이 나온다.



$h(x)$가 $x=-1$에서 최솟값을 가지므로

$f'(-1) \ge 0$가 $a+2-n \ge 0$이므로 $g(n)=n-2$이다.

따라서 $1 \le n-2 \le 8$이다 따라서 $n=3,4,\cdots,10$이다

따라서 합은 52

22.

무리방정식을 양 변을 제곱하면 $7x+1=(x-1)^2$이다. 이 식을 $7x+1=x^2-2x+1$이고 이식을 정리하면 $x^2-9x=0$이고 $x=0,9$가 나온다. 여기서 $x=0$은 무연근이므로 $x=9$가 근이다.

23.

$\{a_n\}$이 등차수열이다. 여기서 공차를 d라고 두면
$a_n=2+(n-1)d$임을 알 수 있다.
$a_7=2+6d$이고 $a_{11}=2+10d$이므로 $4+16d=20$ 이다
따라서 $d=1$임을 알 수 있다.
$a_{10}=2+9=11$이다.

24.

포물선의 접선공식 $y=mx+\dfrac{m}{p}$을 이용하면
$m=\dfrac{1}{2}$이고 $n=5$이므로 y절편은 10이다.

25.

매개변수 t로 $x=t^2+1$을 미분하면 $\dfrac{dx}{dt}=2t$임을 알 수 있고, $\dfrac{dy}{dt}=t^2+10$이다. 따라서 $\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{t^2+10}{2t}$이다 따라서
$t=1$를 대입하면 $\dfrac{12}{2}=6$이다.

26.

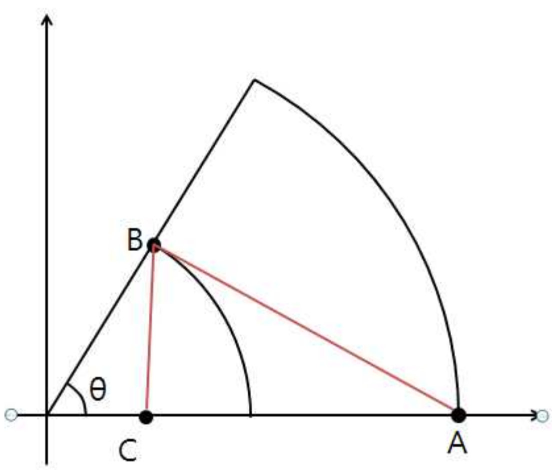
$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ay \\ 2x-y \end{pmatrix}$을 정리하면
$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에서
$\begin{pmatrix} 1 & -1-a \\ -3 & 4a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이므로 $x=0,\ y=0$이외의 해를 가지므로 역행렬을 갖지 않는다.
따라서 $4a+1-(-1-a)\times-3$이므로 $a=2$이다.

27.

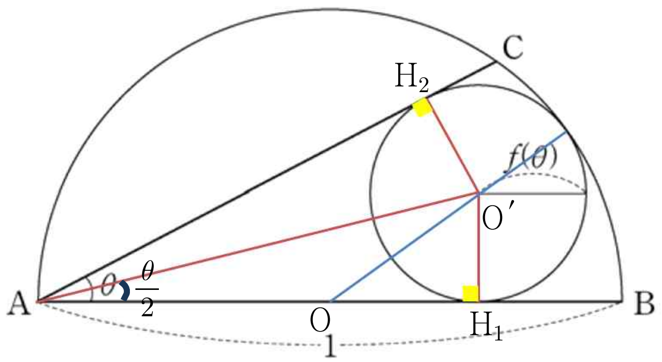
(가) 조건에 만족하는 모든 순서쌍의 개수는 ${}_4H_6$이다 즉 ${}_9C_7=84$이다.
(나) 조건에 만족하기 위해선 (가)조건에서 $x=u$만족하는 경우의 수를 모두 제거해주면 된다.
1) $x=u=0$인 경우
$y+z=6$이므로 따라서 ${}_2H_6={}_7C_6=7$
2) $x=u=1$인 경우
$y+z=4$이므로 따라서 ${}_2H_4={}_5C_4=5$
3) $x=u=2$인 경우
$y+z=2$이므로 따라서 ${}_2H_2={}_3C_2=3$
4) $x=u=3$인 경우
$y+z=0$이므로 1가지이다.
따라서 $84-(7+5+3+1)=68$

28.

f의 일차변환은 θ만큼 회전변환시킨것이고 g의 일차변환은 $\dfrac{1}{2}$배 닮은 변환이다. 따라서 $f\circ g$에 의하여 이동한 점은 B이고 $\overline{OB}=2$이다. 그리고 C점은 B를 $g\circ f^{-1}$의하여 이동한 점이고, $\overline{OC}=1$이다.
이 점을 좌표평면에 표시를 하면 아래 그림과 같다.
여기서 삼각형 ABC의 넓이가 1이므로
삼각형 OBA의 넓이에서 삼각형 OBC의 넓이를 뺀것과 같다.
삼각형 OBA의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times4\times2\times\sin\theta$이고
삼각형 OBC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times1\times2\times\sin\theta$이다.
따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $3\sin\theta$가 되고 이 값은 1이다.
따라서 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$이다.



29. 문제의 상황에서 그려야할 보조선을 그려보자.
선분 AB와 선분 AC에 내린 수선의 발을 H_1, H_2라 하자.
그리고 큰 원에 접하므로 중심을 이은 선을 파란색으로 표시하면 아래 그림과 같다.



여기서 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{f(\theta)}{\overline{AH_1}}$이므로, $\overline{AH_1}=\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}$이다. 따라서

$\overline{OH_1}=\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{2}$임을 알 수 있고 $\overline{OO'}=\frac{1}{2}-f(\theta)$임을

쉽게 할 수 있다. 삼각형 $OO'H_1$의 삼각형에서 피타코라스

정리를 쓰면 $\overline{OO'}^2=\overline{OH_1}^2+\overline{O'H_2}^2$이다.

따라서

$$\frac{1}{4}-f(\theta)+\{f(\theta)\}^2=\{f(\theta)\}^2+\frac{\{f(\theta)\}^2}{\tan^2\frac{\theta}{2}}-\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{4}$$

이를 정리하면 $f(\theta)=\tan\frac{\theta}{2}-\tan^2\frac{\theta}{2}$

따라서 $\lim\limits_{\theta\to+0}\frac{\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}=\lim\limits_{\theta\to+0}\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}=\frac{1}{4}$이다.

따라서 $\alpha=\frac{1}{4}$

30.

(가) $f(0)=1$이고 $f(8) \le 100$이다.

(나) $0 \le k \le 7$인 각각의 정수 k에 대하여

$f(k+t)=f(k)$ $(0<t\le 1)$

또는

$f(k+t)=2^t \times f(k)$ $(0<t\le 1)$이다.

(다) 열린 구간 $(0,8)$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

solution-------------------------------

(나) 조건이 뜻하는 의미를 파악하자.

k가 정수라고 했으므로 $0\sim7$까지 넣어보도록 한다.

1) $k=0$

$f(0+t)=f(0)$ $(0<t\le 1)$

또는

$f(0+t)=2^t \times f(0)$ $(0<t\le 1)$이다.

2) $k=1$

$f(1+t)=f(1)$ $(0<t\le 1)$

또는

$f(1+t)=2^t \times f(1)$ $(0<t\le 1)$이다.

⋮

이로부터 $f(k+t)=f(k)$는 상수함수임을 알 수 있다.

또 $f(k+t)=2^t \times f(k)$는 $f(t)=2^{t-n}$(단, n은 음이 아닌 정수)임을 알 수 있다.

최댓값을 구하는 것이 목적이므로 모든 x좌표가 정수인 점에서

$f(k+t)=2^t \times f(k)$ $(0<t\le 1)$을 선택하면

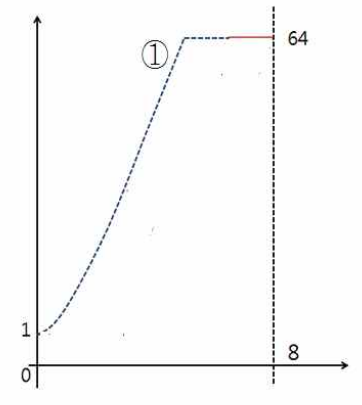
$f(t)=2^t$이 된다.

하지만 (가) 조건에 의해서 $2^6=64$을 넘어갈 수 없다.

그래서 $k=6,\ 7$에서

$f(k+t)=f(k)$ $(0<t\le 1)$를 선택하면

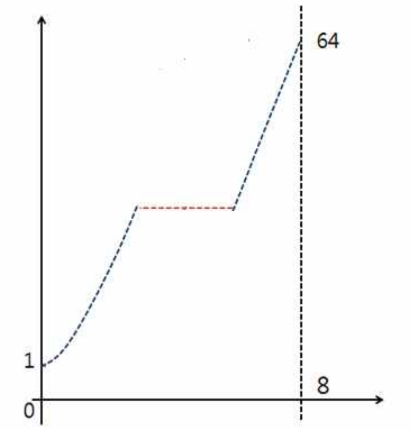
아래의 ①그래프와 같이 나온다.



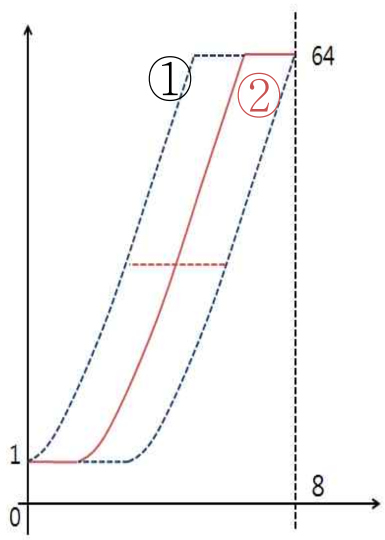
(다) 조건

이 때, ①의 그래프는 미분불가능점이 1개 이므로 $f(x)$가 될 수 없다.

그래서 될 수 있는 그래프의 개형을 보면 아래 그래프처럼 나올 수 있다. 이 경우 정적분 값이 최대가 되지 않는다.



즉, 최종적으로 ②과 같이 나올 때, $\int_0^8 f(x)\,dx$가 최대가 된다.



그러므로

$$\int_0^8 f(x)\,dx = 1 + \int_1^7 2^{x-1}\,dx + 64 = 65 + \frac{63}{\ln 2}$$

$\therefore\ p+q=128$