



03 수1

03 지수함수

01 지수함수의 그래프

02 지수함수의 그래프2 (평행이동과 대칭이동)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 5

1. 함수 $y=4^x-1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=2^{2x-3}+3$ 의 그래프가 일치할 때, ab 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4
- ④ 5 ⑤ 6

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 26

2. 지수함수 $y=5^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 함수

$y=\frac{1}{9}\times 5^{x-1}+2$ 의 그래프와 일치한다. 5^a+b 의 값을 구하시오.

(단, a, b 는 상수이다.)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 3

3. 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 그래프가 점 $(-1, 2)$ 를 지날 때, 상수 m 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
- ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 8

4. 함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프는 점 $(7, 5)$ 를 지나고, 점근선의 방정식이 $y=2$ 이다. $m+n$ 의 값은?
(단, m, n 은 상수이다.)
- ① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

03 수1

03 지수함수

- 01 지수함수의 그래프
05 지수함수의 그래프의 해석1 (기본)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 8

5. $a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 직선 $y=-x$ 가 곡선 $y=a^x$ 과 만나는 점의 좌표를 $(p, -p)$, 곡선 $y=a^{2x}$ 과 만나는 점의 좌표를 $(q, -q)$ 라 할 때, $\log_a pq = -8$ 이다. $p+2q$ 의 값은?
- ① 0 ② -2 ③ -4
④ -6 ⑤ -8

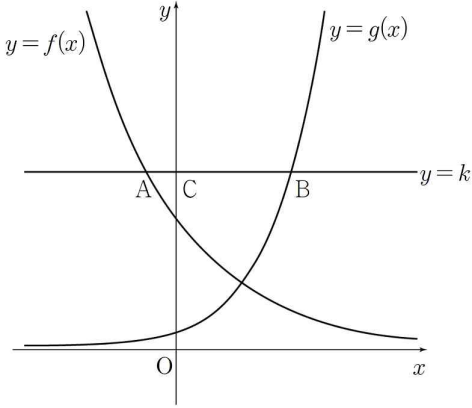
[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 24

6. 함수 $f(x)=2^{x+p}+q$ 의 그래프의 점근선이 직선 $y=-4$ 이고 $f(0)=0$ 일 때, $f(4)$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 상수이다.)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 27

7. 그림과같이 두 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$, $g(x)=4^{x-1}$ 의

그래프와 직선 $y=k(k>2)$ 가 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 $C(0, k)$ 에 대하여 $\overline{AC} : \overline{CB}=1 : 5$ 일 때, k^3 의 값을 구하시오.



[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 13

8. 두함수 $f(x)=2^x+1$, $g(x)=2^{x+1}$ 의 그래프가 점 P에서 만난다. 서로 다른 두 실수 a, b 에 대하여 두 점 $A(a, f(a))$, $B(b, g(b))$ 의 중점이 P일 때, 선분 AB의 길이는?

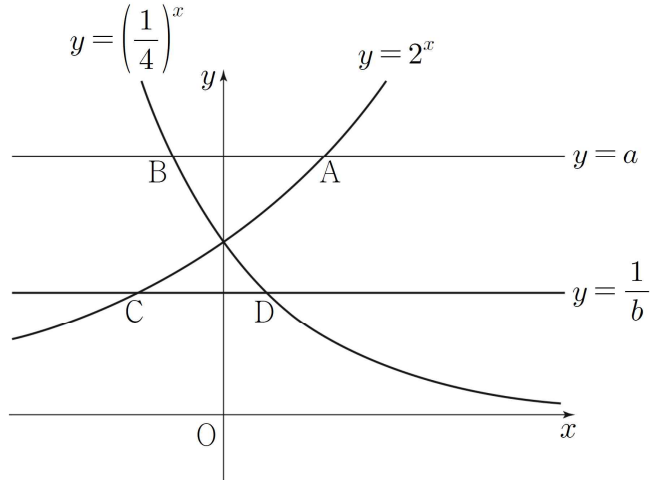
- ① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4
- ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 20

9. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, b 에 대하여 직선

$y=a$ 가 두 곡선 $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 과 만나는 점을 각각

A, B라 하고, 직선 $y=\frac{1}{b}$ 이 두 곡선 $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

- ㄱ. $a=b$ 이면 $\overline{AB}=\overline{CD}$ 이다.
- ㄴ. 직선 AC의 기울기를 m_1 , 직선 BD의 기울기를 m_2 라 하면 $2m_1+m_2=0$ 이다.
- ㄷ. 직선 AC와 직선 BD가 서로 수직이고 직선 AD의 기울기가 $2\sqrt{2}$ 이면 사각형 ABCD는 마름모이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 9

10. 두 상수 a, b 에 대하여 함수 $y=3^x+a$ 의 그래프가 점 $(2, b)$ 를 지나고 점근선이 직선 $y=5$ 일 때, $a+b$ 의 값은?
 ① 15 ② 16 ③ 17
 ④ 18 ⑤ 19

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 14

11. 함수 $y=3^x$ 의 그래프 위의 x 좌표가 양수인 점 A와 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x-6$ 의 그래프 위의 점 B에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표가 $(0, 2)$ 일 때, 점 A의 y 좌표는?
 ① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5
 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

03 수1

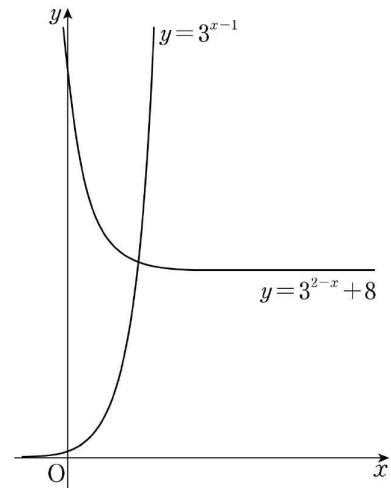
03 지수함수

- 01 지수함수의 그래프
 06 지수함수의 그래프의 해석2 (길이와 넓이)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 13

12. 실수 t 에 대하여 직선 $x=t$ 가 곡선 $y=3^{2-x}+8$ 과 만나는 점을 A, x 축과 만나는 점을 B라 하자.
 직선 $x=t+1$ 이 x 축과 만나는 점을 C, 곡선 $y=3^{x-1}$ 과 만나는 점을 D라 하자.

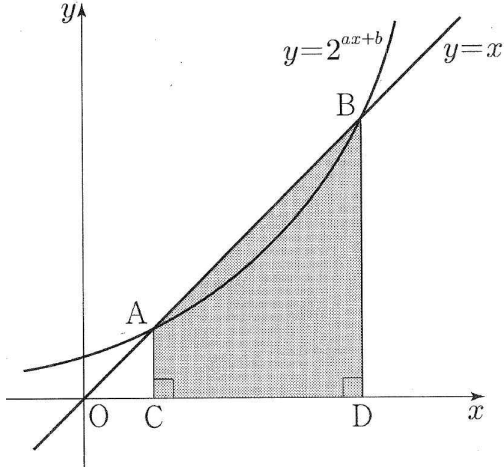
사각형 ABCD가 직사각형일 때, 이 사각형의 넓이는?



- ① 9 ② 10 ③ 11
 ④ 12 ⑤ 13

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 13

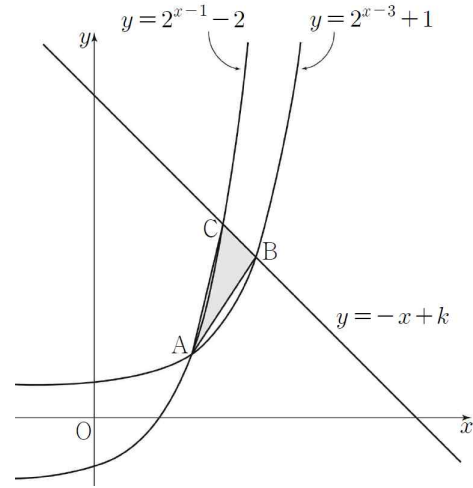
13. 곡선 $y=2^{ax+b}$ 과 직선 $y=x$ 가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}=6\sqrt{2}$ 이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)



- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 18

14. 그림과 같이 두 곡선 $y=2^{x-3}+1$ 과 $y=2^{x-1}-2$ 가 만나는 점을 A라 하자. 상수 k 에 대하여 직선 $y=-x+k$ 가 두 곡선 $y=2^{x-3}+1, y=2^{x-1}-2$ 와 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, 선분 BC의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다. 삼각형 ABC의 넓이는?
(단, 점 B의 x 좌표는 점 A의 x 좌표보다 크다.)



- ① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$
- ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 18

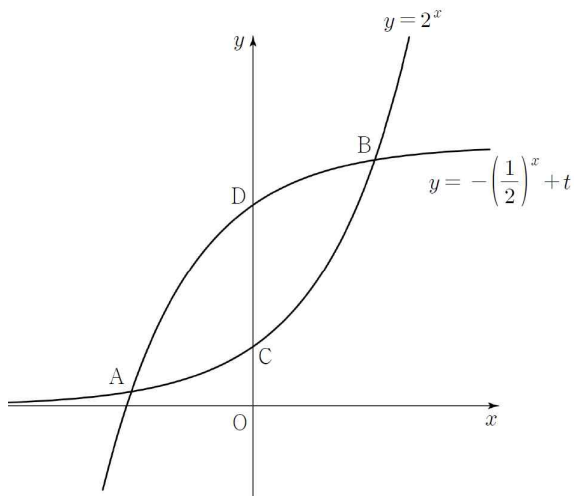
15. 그림과 같이 2보다 큰 실수 t 에 대하여 두 곡선

$y=2^x$ 과 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+t$ 가 만나는 점을 각각 A, B라 하고,

두 곡선 $y=2^x$, $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+t$ 가 y 축과 만나는 점을 각각

C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, O는 원점이다.)



<보 기>

- ㉠. $\overline{CD}=t-2$
- ㉡. $\overline{AC}=\overline{DB}$
- ㉢. 삼각형 ABD의 넓이는 삼각형 AOB의 넓이의 $\frac{t-2}{t}$ 배이다.

- ① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 18

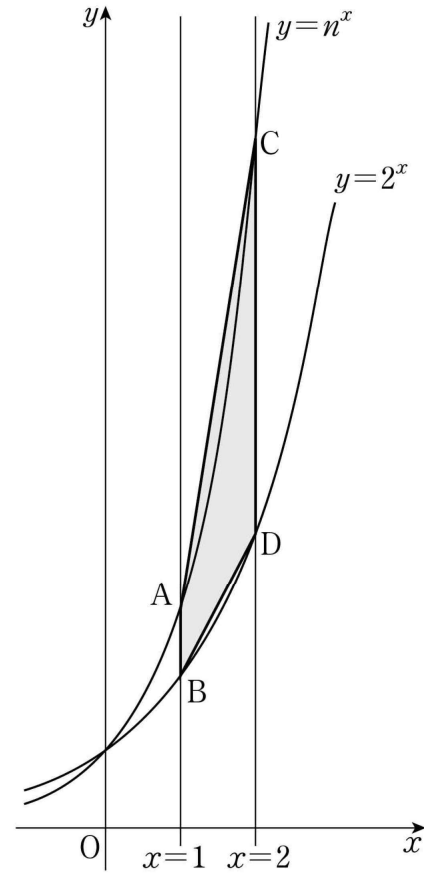
16. 그림과 같이 3 이상의 자연수 n 에 대하여 두 곡선

$y=n^x$, $y=2^x$ 이 직선 $x=1$ 과 만나는 점을 각각 A, B라

하고, 두 곡선 $y=n^x$, $y=2^x$ 이 직선 $x=2$ 와 만나는 점을

각각 C, D라 하자. 사다리꼴 ABDC의 넓이가 18 이하가

되도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오.



[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 9

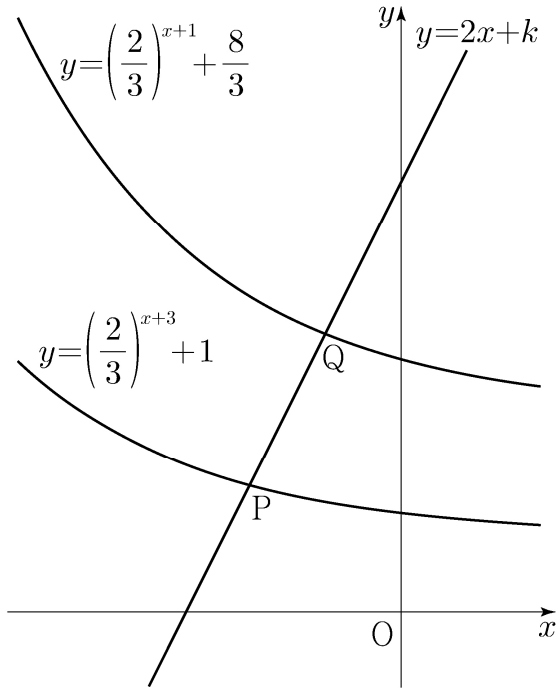
[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 6

17. 직선 $y=2x+k$ 가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1, y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=\sqrt{5}$ 일 때, 상수 k 의 값은?

- ① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$
- ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$



18. 곡선 $y=6^{-x}$ 위의 두 점 $A(a, 6^{-a})$,

$B(a+1, 6^{-a-1})$ 에 대하여 선분 AB는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선이다. 6^{-a} 의 값은?

- ① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ $\frac{8}{5}$
- ④ $\frac{9}{5}$ ⑤ 2

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 17

19. $0 < t < 1$ 인 실수 t 에 대하여 직선 $y = t$ 가

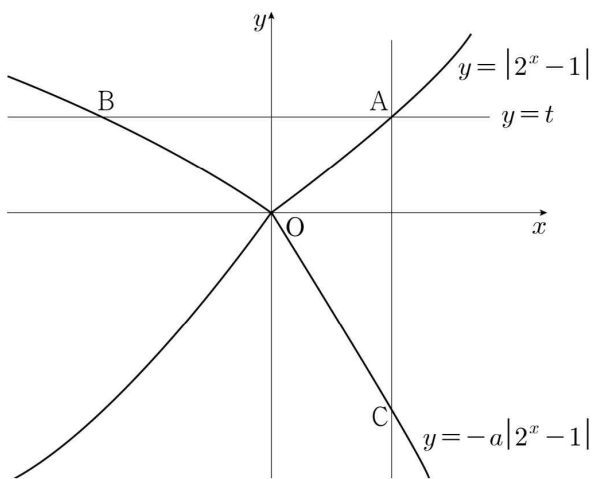
함수 $y = |2^x - 1|$ 의 그래프와 제 1사분면에서 만나는 점을 A, 제 2사분면에서 만나는 점을 B라 하자.

양수 a 에 대하여 점 A를 지나고 x 축에 수직인 직선이

함수 $y = -a|2^x - 1|$ 의 그래프와 만나는 점을 C라 하자.

$\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ 일 때, $a+t$ 의 값은?

- ① 2 ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$
- ④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$



[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 3

20. 직선 $x = a$ 와 세 함수

$$f(x) = 4^x, g(x) = 2^x, h(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$$

의 그래프가 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자.

$\overline{PQ} : \overline{QR} = 8 : 3$ 일 때, 상수 a 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
- ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

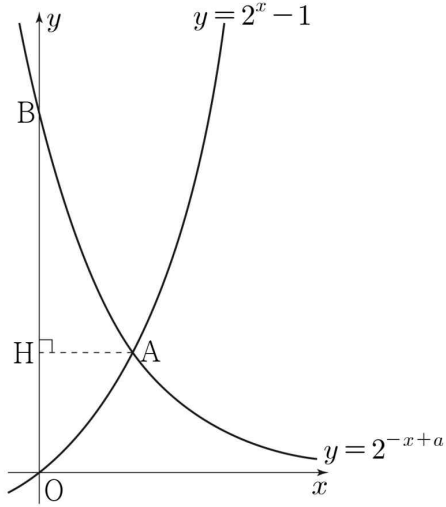
[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 9

21. 그림과 같이 두 곡선 $y=2^{-x+a}$, $y=2^x-1$ 이 만나는

점을 A, 곡선 $y=2^{-x+a}$ 이 y축과 만나는 점을 B라 하자.

점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때,

$\overline{OB}=3 \times \overline{OH}$ 이다. 상수 a의 값은? (단, O는 원점이다.)



- ① 2 ② $\log_2 5$ ③ $\log_2 6$
- ④ $\log_2 7$ ⑤ 3

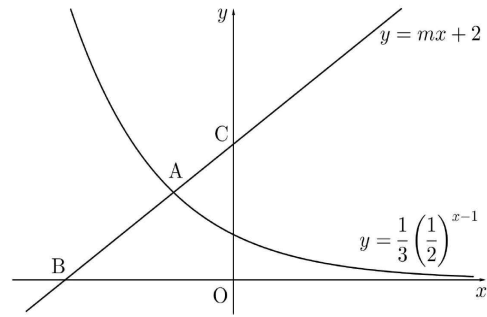
[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 7

22. 그림과 같이 직선 $y=mx+2$ ($m > 0$)이 곡선

$y = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ 과 만나는 점을 A, 직선 $y=mx+2$ 가 x축,

y축과 만나는 점을 각각 B, C라 하자. $\overline{AB} : \overline{AC} = 2 : 1$ 일

때, 상수 m의 값은?



- ① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{2}{3}$
- ④ $\frac{17}{24}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

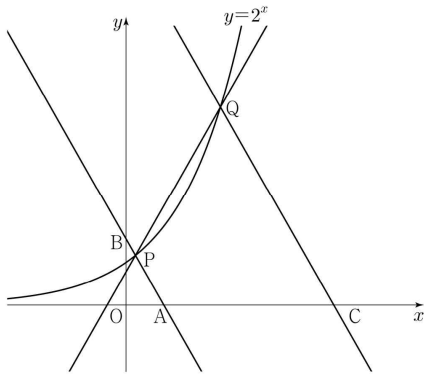
[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 21

23. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $P(a, 2^a)$,

$Q(b, 2^b)$ 이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m 이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$ 인 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$ 인 직선이 x 축과 만나는 점을 C라 하자.

$$\overline{AB}=4\overline{PB}, \quad \overline{CQ}=3\overline{AB}$$

일 때, $90 \times (a+b)$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < a < b$)

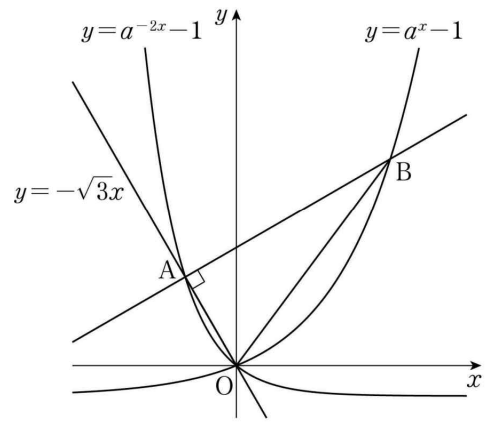


[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 21

24. 그림과 같이 $a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 두 곡선

$$y = a^{-2x} - 1, \quad y = a^x - 1$$

이 있다. 곡선 $y = a^{-2x} - 1$ 과 직선 $y = -\sqrt{3}x$ 가 서로 다른 두 점 O, A에서 만난다. 점 A를 지나고 직선 OA에 수직인 직선이 곡선 $y = a^x - 1$ 과 제 1사분면에서 만나는 점을 B라 하자. $\overline{OA} : \overline{OB} = \sqrt{3} : \sqrt{19}$ 일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)



03 수1

03 지수함수

02 지수함수의 최대와 최소

01 Mml (기본그래프)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 7

25. $-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x) = 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ 의 최댓값은?

- ① 11 ② 13 ③ 15
- ④ 17 ⑤ 19

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 9

26. $-1 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x) = 2^{|x|}$ 의 최댓값과

최솟값의 합은?

- ① 5 ② 7 ③ 9
- ④ 11 ⑤ 13

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 3

27. 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 1$ 의

최댓값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6
- ④ 8 ⑤ 10

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 23

28. $-4 \leq x \leq -2$ 에서 정의된 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$ 의

최댓값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 8

29. $-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x) = a \times 2^{2-x} + b$ 의 최댓값이5, 최솟값이 -2 일 때, $f(0)$ 의 값은?(단, $a > 0$ 이고, a 와 b 는 상수이다.)① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 6

31. $-3 \leq x \leq -1$ 에서 함수 $f(x) = 2^{-x} + 5$ 의 최솟값은?

① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 9

30. 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-a} + 1$ 의최댓값이 5일 때, 함수 $f(x)$ 의 최솟값은?(단, a 는 상수이다.)① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

03 수1

03 지수함수

02 지수함수의 최대와 최소

02 Mm2 (지수가 이차식)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 27

32. 두 함수

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}, g(x) = (x-1)(x-3)$$

에 대하여 합성함수 $h(x) = (f \circ g)(x)$ 라 하자. 함수 $h(x)$ 가 $0 \leq x \leq 5$ 에서 최솟값 $\frac{1}{4}$, 최댓값 M 을 갖는다. M 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.)

03 수1

03 지수함수

02 지수함수의 최대와 최소

03 Mm3 (치환)

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 12

33. $a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 함수 $f(x) = a^{2x} + 4a^x - 2$ 가

구간 $[-1, 1]$ 에서 최댓값 10을 갖는다. 구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ 1

03 수1

03 지수함수

03 지수방정식과 부등식

01 지수방정식1 (기본)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 2

34. 방정식 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x} = 64$ 를 만족시키는 실수 x 의 값은?

- ① -3 ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$
- ④ 3 ⑤ 9

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 11

35. 방정식 $8^x = 18$ 을 만족시키는 x 의 값이 $\frac{1}{3} + k \log_2 3$ 일

때, 상수 k 의 값은?

- ① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$
- ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 11

36. 방정식 $2^{x-6} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}$ 의 모든 해의 합은?

- ① $-\frac{9}{2}$ ② $-\frac{7}{2}$ ③ $-\frac{5}{2}$
- ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

03 수1

03 지수함수

03 지수방정식과 부등식

02 지수방정식2 (치환)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 13

37. 방정식 $4^x - 2^{x+3} + 15 = 0$ 의 두 실근을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라

할 때, $2^\alpha \times \beta$ 의 값은?

- ① $2\log_2 3$ ② $3\log_2 3$ ③ $3\log_2 5$
- ④ $4\log_2 5$ ⑤ $5\log_2 5$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 23

38. 방정식 $4^x - 15 \times 2^{x+1} - 64 = 0$ 을 만족시키는 실수 x 의

값을 구하시오.

03 수1

03 지수함수

03 지수방정식과 부등식

06 지수부등식1 (기본)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 4

39. 부등식 $2^{x-4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 을 만족시키는 모든 자연수 x 의

값의 합은?

- ① 6 ② 7 ③ 8
- ④ 9 ⑤ 10

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 5

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 7

40. 부등식 $\left(\frac{1}{9}\right)^x < 3^{21-4x}$ 을 만족시키는 자연수 x 의

개수는?

- ① 6 ② 7 ③ 8
- ④ 9 ⑤ 10

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 5

41. 부등식 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-7} \geq 9$ 를 만족시키는 모든 자연수 x 의

개수는?

- ① 4 ② 5 ③ 6
- ④ 7 ⑤ 8

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 5

42. 부등식 $5^{2x-7} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$ 을 만족시키는 자연수 x 의

개수는?

- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 19

43. 부등식 $(\sqrt{2}-1)^m \geq (3-2\sqrt{2})^{5-n}$ 을 만족시키는

자연수 m, n 의 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수는?

- ① 17 ② 18 ③ 19
- ④ 20 ⑤ 21

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 24

44. 부등식 $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \leq 5^{7-2x}$ 을 만족시키는 모든 자연수

x 의 개수를 구하시오.

03 수1

03 지수함수

03 지수방정식과 부등식

07 지수부등식2 (치환)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 12

45. 부등식 $4^x - 10 \times 2^x + 16 \leq 0$ 을 만족시키는 모든

자연수 x 의 값의 합은?

- ① 3 ② 4 ③ 5
- ④ 6 ⑤ 7

03 수1

03 지수함수

03 지수방정식과 부등식

09 지수부등식4 (해의 조건)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 28

46. x 에 대한 부등식

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x - (3n+16) \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 48n \leq 0$$

을 만족시키는 정수 x 의 개수가 2가 되도록 하는 모든 자연수 n 의 개수를 구하시오.

03 수1

03 지수함수

04 지수함수의 활용

03 활용3 (지수방정식의 실근 조건, 그래프로 해석)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 13

47. $a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 좌표평면에 두 곡선

$$y = a^x, y = |a^{-x-1} - 1|$$

이 있다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

- ㄱ. 곡선 $y = |a^{-x-1} - 1|$ 은 점 $(-1, 0)$ 을 지난다.
- ㄴ. $a = 4$ 이면 두 곡선의 교점의 개수는 2이다.
- ㄷ. $a > 4$ 이면 두 곡선의 모든 교점의 x 좌표의 합은 -2 보다 크다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 수1

03 지수함수

04 지수함수의 활용

05 활용5 (그래프를 이용한 대소 비교)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 18

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 21

48. 두 곡선 $y=2^x$ 과 $y=-2x^2+2$ 가 만나는 두 점을 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 라 하자. $x_1 < x_2$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 수1

03 지수함수

04 지수함수의 활용

06 활용6 (추론과 해석)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 13

49. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & (x < 3) \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{x+a} - \left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} + 8 & (x \geq 3) \end{cases}$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y 좌표가 정수인 점의 개수가 23일 때, 정수 a 의 값은?

- ① -7 ② -6 ③ -5
- ④ -4 ⑤ -3

[수학1] [3지수함수] 교사평경 최근 3개년(빠른 정답)

년도별경향

2022.12.27

- 1. [정답] ⑤
- 2. [정답] 47
- 3. [정답] ③
- 4. [정답] ②
- 5. [정답] ⑤

- 6. [정답] 60
- 7. [정답] 16
- 8. [정답] ①
- 9. [정답] ⑤
- 10. [정답] ⑤

- 11. [정답] ③
- 12. [정답] ①
- 13. [정답] ④
- 14. [정답] ③
- 15. [정답] ⑤

- 16. [정답] 18
- 17. [정답] ④
- 18. [정답] ①
- 19. [정답] ②
- 20. [정답] ③

- 21. [정답] ③
- 22. [정답] ③
- 23. [정답] 220
- 24. [정답] 8
- 25. [정답] ①

- 26. [정답] ③
- 27. [정답] ⑤
- 28. [정답] 82
- 29. [정답] ①
- 30. [정답] ②

- 31. [정답] ②
- 32. [정답] 128
- 33. [정답] ①
- 34. [정답] ④

- 35. [정답] ⑤

- 36. [정답] ⑤
- 37. [정답] ③
- 38. [정답] 5
- 39. [정답] ①
- 40. [정답] ⑤

- 41. [정답] ②
- 42. [정답] ③
- 43. [정답] ④
- 44. [정답] 6
- 45. [정답] ④

- 46. [정답] 12
- 47. [정답] ②
- 48. [정답] ⑤
- 49. [정답] ③

[수학1] [3지수함수] 교사평경 최근 3개년(해설)

년도별경향

2022.12.27

1) [정답] ⑤

[해설]

함수 $y=4^x-1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프는

$$y=4^{x-a}-1+b$$

따라서 $y=2^{2x-2a}-1+b=2^{2x-3}+3$ 이므로

$$a=\frac{3}{2}, b=4$$

$$\therefore ab=6$$

2) [정답] 47

[해설]

지수함수 $y=5^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는 $y=5^{x-a}+b$ 이다.

$$5^{-a}=\frac{1}{9}\times 5^{-1}, b=2\text{이다.}$$

$$5^a=45\text{이고 } b=2$$

$$\text{따라서 } 5^a+b=47$$

3) [정답] ③

[해설]

$$y=2^x+m, m=y-2^x=2-2^{-1}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

4) [정답] ②

[해설]

함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면 함수 $y=3^{x-m}+n$ 의 그래프와 일치하고, 점근선의 방정식이 $y=2$ 이므로 $n=2$

점 $(7, 5)$ 를 지나므로 $5=3^{7-m}+2$

$$3^{7-m}=3, m=6$$

따라서 $m+n=6+2=8$

5) [정답] ⑤

[해설]

$$a^p=-p, a^{2q}=-q\text{이므로}$$

$$a^p\times a^{2q}=(-p)\times(-q), a^{p+2q}=pq$$

따라서 로그의 정의에 의해 $p+2q=\log_a pq=-8$

6) [정답] 60

[해설]

함수 $f(x)=2^{x+p}+q$ 의 그래프의 점근선이 직선 $y=q$ 이므로

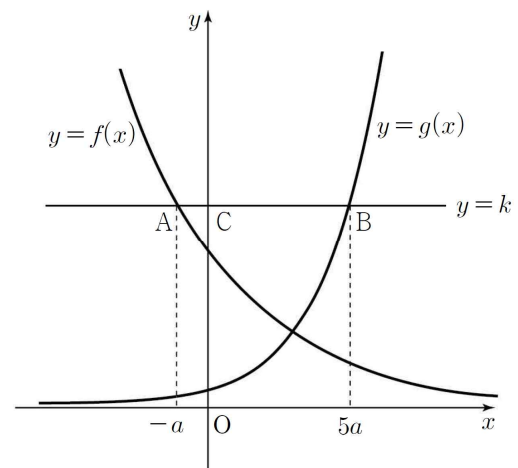
$$q=-4$$

$$f(0)=0\text{이므로 } 2^p-4=0, p=2$$

$$\text{따라서 } f(4)=2^6-4=60$$

7) [정답] 16

[해설]



양수 a 에 대하여 점 A의 x 좌표를 $-a$ 라 하면 점 B의 x 좌표는 $5a$ 이다.

$$\text{따라서 } f(-a)=g(5a)\text{이므로 } \left(\frac{1}{2}\right)^{-a-1}=4^{5a-1}$$

$$2^{a+1}=2^{10a-2}\text{이므로 } a+1=10a-2, a=\frac{1}{3}$$

$$\text{점 } (5a, k)\text{를 } y=g(x)\text{에 대입하면 } k=4^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore k^3 = \left(\frac{2}{4^3}\right)^3 = 4^2 = 16$$

8) [정답] ①

[해설]

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 점 P에서 만나므로

$$2^x + 1 = 2^{x+1} \text{에서 } 2^x = 1$$

$x=0$ 이므로 교점 P의 좌표는 P(0, 2)

서로 다른 두 점 A, B의 중점이 P이므로

점 A(a, $2^a + 1$), B(b, 2^{b+1})에서

$$\frac{a+b}{2} = 0, \quad \frac{2^a + 1 + 2^{b+1}}{2} = 2$$

$$\frac{2^a + 1 + 2^{-a+1}}{2} = 2, \quad 4^a - 3 \times 2^a + 2 = 0$$

$$(2^a - 1)(2^a - 2) = 0$$

$$2^a = 1 \text{ 또는 } 2^a = 2$$

$$a = 0 \text{ 또는 } a = 1$$

$a=0$ 이면 $b=0$ 이므로 모순이다.

그러므로 $a=1$, $b=-1$

$$A(1, 3), B(-1, 1)$$

따라서 $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$

9) [정답] ⑤

[해설]

네 점 A, B, C, D의 좌표는 각각 A($\log_2 a$, a),

B($\log_{\frac{1}{4}} a$, a), C($\log_2 \frac{1}{b}$, $\frac{1}{b}$), D($\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{b}$, $\frac{1}{b}$)이다.

ㄱ. $a=b$ 이면

$$\overline{AB} = \log_2 a - \log_{\frac{1}{4}} a = \frac{3}{2} \log_2 a$$

$$\overline{CD} = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{a} - \log_2 \frac{1}{a} = \frac{3}{2} \log_2 a$$

이므로 $\overline{AB} = \overline{CD}$ (참)

$$\therefore m_1 = \frac{a - \frac{1}{b}}{\log_2 a - \log_2 \frac{1}{b}} = \frac{a - \frac{1}{b}}{\log_2 ab} \text{이므로}$$

$$m_2 = \frac{a - \frac{1}{b}}{\log_{\frac{1}{4}} a - \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{b}} = \frac{a - \frac{1}{b}}{\log_{\frac{1}{4}} ab}$$

$$= -2 \times \frac{a - \frac{1}{b}}{\log_2 ab}$$

$$= -2m_1$$

그러므로 $2m_1 + m_2 = 0$ (참)

ㄷ. 직선 AC의 기울기를 m ($m > 0$)이라 하면

직선 BD의 기울기는 $-2m$ 이고,

직선 AC와 직선 BD가 서로 수직이므로

$$m \times (-2m) = -1, \quad m^2 = \frac{1}{2} \text{에서 } m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{a - \frac{1}{b}}{\log_2 ab} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{이므로}$$

$$a - \frac{1}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2} \log_2 ab \quad \dots \text{㉠}$$

직선 AD의 기울기는

$$\frac{a - \frac{1}{b}}{\log_2 a - \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{b}} = \frac{a - \frac{1}{b}}{\log_2 a - \frac{1}{2} \log_2 b} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{이므로 } a - \frac{1}{b} = \sqrt{2} \log_2 \frac{a^2}{b} \quad \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에 의해

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \log_2 ab = \sqrt{2} \log_2 \frac{a^2}{b}$$

$$\log_2 ab = \log_2 \frac{a^4}{b^2}$$

$$a^3 = b^3 \text{에서 } a = b \text{이므로 } \overline{AB} = \overline{CD}$$

사각형 ABCD는 평행사변형이고

두 대각선 AC, BD가 서로 수직이므로

사각형 ABCD는 마름모이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

10) [정답] ⑤

[해설]

함수 $y=3^x+a$ 의 그래프가 점 (2, b)를 지나므로

$$b = 3^2 + a \text{이다.}$$

함수 $y=3^x+a$ 의 그래프의 점근선이 $y=a$ 이므로 $a=5$ 이고,

$$b = 9 + 5 = 14 \text{이다.}$$

따라서 $a+b=19$

11) [정답] ③

[해설]

점 A의 좌표를 (x_1, y_1) , 점 B의 좌표를 (x_2, y_2) 라 할 때 선분 AB의 중점이 $(0, 2)$ 이므로 $\frac{x_1+x_2}{2}=0$ 이고 $\frac{y_1+y_2}{2}=2$ 이다.

즉 $x_1+x_2=0$ 이고 $y_1+y_2=4$ 이다.

$x_2=-x_1$ 이므로 $3^{x_1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-x_1}-6=4$ 이다.

따라서 $2 \times 3^{x_1}=10$ 이고 점 A의 y 좌표 y_1 은 $y_1=3^{x_1}=5$

12) [정답] ①

[해설]

점 A의 좌표는 $(t, 3^{2-t}+8)$, 점 B의 좌표는 $(t, 0)$,

점 C의 좌표는 $(t+1, 0)$, 점 D의 좌표는 $(t+1, 3^t)$

사각형 ABCD가 직사각형이므로 점 A의 y 좌표와 점 D의 y 좌표가 같아야 한다.

즉, $3^{2-t}+8=3^t$

$$(3^t)^2 - 8 \times 3^t - 9 = 0, (3^t + 1)(3^t - 9) = 0$$

그런데 $3^t > 0$ 이므로 $3^t = 9$ 에서 $t = 2$

그러므로 직사각형 ABCD의 가로 길이는 1이고,

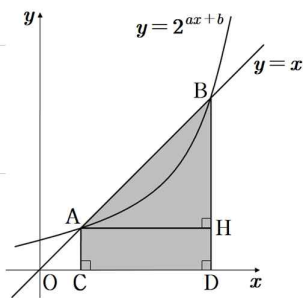
세로 길이는 $3^2 = 9$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는 9

13) [정답] ④

[해설]

점 A에서 선분 BD에 수선의 발 H를 내리면 $\triangle ABH$ 는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AH} = \overline{BH} = 6$



점 C의 x 좌표를 m 이라 하면 점 A, H, B, D의 좌표는 각각

$$A(m, m), H(m+6, m), B(m+6, m+6),$$

$$D(m+6, 0)$$

따라서 사각형 ACDB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (\overline{AC} + \overline{BD}) \times \overline{CD}$$

$$= \frac{1}{2} \times \{m + (m+6)\} \times 6$$

$$= 6(m+3)$$

따라서 $6(m+3) = 30$ 에서 $m = 2$

즉, 두 점 A, B의 좌표는 $A(2, 2)$, $B(8, 8)$ 이다.

이때 두 점 A, B가 곡선 $y = 2^{ax+b}$ 위의 점이므로

$$2^{2a+b} = 2, 2^{8a+b} = 8$$

$$\text{즉, } 2a+b=1, 8a+b=3$$

$$\text{두 식을 연립하면 } 6a=2 \quad \therefore a=\frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } b=\frac{1}{3}$$

$$\therefore a+b=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

14) [정답] ③

[해설]

점 A는 두 곡선 $y = 2^{x-3} + 1$ 과 $y = 2^{x-1} - 2$ 가 만나는 점이므로

$$2^{x-3} + 1 = 2^{x-1} - 2, 3 \times 2^{x-3} = 3 \text{에서 } x = 3$$

그러므로 점 A의 좌표는 $A(3, 2)$

점 B의 x 좌표를 a 라 하면

$$\text{점 B의 좌표는 } B(a, 2^{a-3} + 1)$$

두 점 B, C는 기울기가 -1 인 직선 위의 점이고

$$\overline{BC} = \sqrt{2} \text{이므로 점 C의 좌표는 } C(a-1, 2^{a-3} + 2)$$

점 C는 곡선 $y = 2^{x-1} - 2$ 위의 점이므로

$$2^{a-3} + 2 = 2^{a-2} - 2, 2^{a-3} = 4 \text{에서 } a = 5$$

점 $B(5, 5)$ 는 직선 $y = -x + k$ 위의 점이므로 $k = 10$

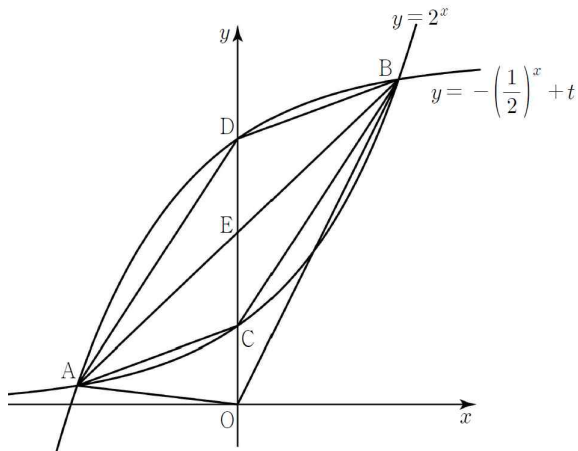
점 $A(3, 2)$ 와 직선 $y = -x + 10$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+2-10|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2}$

15) [정답] ⑤

[해설]



점 A, B의 x좌표를 각각 $\alpha, \beta(\alpha < 0 < \beta)$ 라 하면
 α, β 는 방정식 $(2^x)^2 - t \times 2^x + 1 = 0$ 의 두 근이므로

$$2^\alpha + 2^\beta = t, \quad 2^\alpha \times 2^\beta = 1$$

따라서 $\alpha + \beta = 0, \beta = -\alpha$

네 점 $A(\alpha, 2^\alpha), B(\beta, 2^\beta), C(0, 1), D(0, t-1)$ 에 대하여

ㄱ. $\overline{CD} = t - 2$ (참)

ㄴ. $\overline{AC} = \sqrt{(-\alpha)^2 + (-2^\alpha + 1)^2}$
 $= \sqrt{\beta^2 + (2^\beta - t + 1)^2} = \overline{BD}$ (참)

ㄷ. $\overline{AD} = \sqrt{\alpha^2 + (2^\alpha - t + 1)^2}$
 $= \sqrt{(-\beta)^2 + (-2^\beta + 1)^2} = \overline{CB}$

$\overline{AC} = \overline{DB}, \overline{AD} = \overline{CB}$ 이므로 사각형 ACBD는 평행사변형이고
 두 대각선의 교점을 E라 하면

$\overline{CE} = \overline{DE}$ 이므로 점 E의 좌표는 $(0, \frac{t}{2})$

($\triangle ABD$ 의 넓이)
 $= (\triangle AED$ 의 넓이) + ($\triangle BDE$ 의 넓이)
 $= \frac{1}{2} \times (-\alpha) \times \overline{DE} + \frac{1}{2} \times \beta \times \overline{DE}$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{t-2}{2} \right) (-\alpha + \beta)$
 $= \frac{(t-2)(-\alpha + \beta)}{4} = \frac{\beta(t-2)}{2}$

($\triangle AOB$ 의 넓이)
 $= (\triangle OEA$ 의 넓이) + ($\triangle OBE$ 의 넓이)
 $= \frac{1}{2} \times (-\alpha) \times \overline{OE} + \frac{1}{2} \times \beta \times \overline{OE}$

$$= \frac{t(-\alpha + \beta)}{4} = \frac{\beta t}{2}$$

따라서 삼각형 ABD의 넓이는 삼각형 AOB의 넓이의 $\frac{t-2}{2}$ 배이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

16) [정답] 18

[해설]

$A(1, n), B(1, 2), C(2, n^2), D(2, 4)$ 이므로
 $\overline{AB} = n - 2, \overline{CD} = n^2 - 4$

사다리꼴 ABCD의 넓이는 18 이하이므로

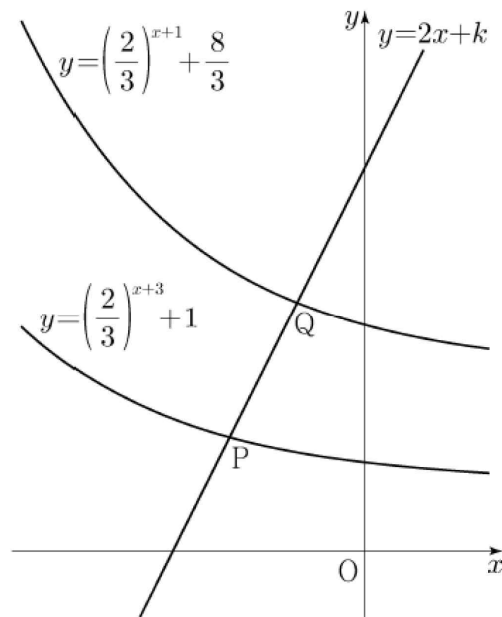
$$\frac{1}{2} \times (n - 2 + n^2 - 4) \times 1 = \frac{1}{2} (n^2 + n - 6) \leq 18, \quad -7 \leq n \leq 6$$

그러므로 3이상의 자연수 n의 값은 3, 4, 5, 6

따라서 조건을 만족시키는 n의 값의 합은 18

17) [정답] ④

[해설]



두 점 P, Q의 x좌표를 각각 $p, q(p < q)$ 라 하면

두 점 P, Q는 직선 $y = 2x + k$ 위의 점이므로

$P(p, 2p + k), Q(q, 2q + k)$ 로 놓을 수 있다.

이때, $\overline{PQ} = \sqrt{5}$, 즉 $\overline{PQ}^2 = 5$ 이므로 $(q - p)^2 + (2q - 2p)^2 = 5$
 $(q - p)^2 = 1$

$q - p > 0$ 이므로 $q - p = 1$

즉, $q = p + 1$ 이다.

한편, 점 P는 함수 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} + 1$ 의 그래프 위의 점이므로

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3} + 1 = 2p + k \quad \dots \textcircled{7}$$

점 Q는 함수 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} + \frac{8}{3}$ 의 그래프 위의 점이므로

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2} + \frac{8}{3} = 2p + k + 2 \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡에서

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2} + \frac{8}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3} + 3$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2} = 1$$

$$p+2=0, \text{ 즉 } p=-2$$

$p=-2$ 를 ㉠에 대입하면

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2+3} + 1 = 2 \times (-2) + k$$

$$\text{따라서 } k = \frac{17}{3}$$

18) [정답] ①

[해설]

정사각형의 한 변의 길이가 1이므로

$$6^{-a} - 6^{-a-1} = 1, 6^{-a} - \frac{6^{-a}}{6} = 1, \left(1 - \frac{1}{6}\right) \times 6^{-a} = 1$$

$$\text{따라서 } 6^{-a} = \frac{6}{5}$$

19) [정답] ②

[해설]

함수 $y = |2^x - 1|$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 제1사분면에서 만나는 점이 A이므로 점 A의 x 좌표는 $2^x - 1 = t$ 에서 $x = \log_2(1+t)$ 이다.

한편, 함수 $y = |2^x - 1|$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 제2사분면에서 만나는 점이 B이므로 점 B의 x 좌표는 $1 - 2^x = t$ 에서 $x = \log_2(1-t)$ 이다.

$$\overline{AB} = 1 \text{이므로 } \log_2(1+t) - \log_2(1-t) = 1 \text{에서}$$

$$\log_2(1+t) = 1 + \log_2(1-t)$$

$$\log_2(1+t) = \log_2 2 + \log_2(1-t), 1+t = 2(1-t)$$

$$3t = 1 \text{이다. 따라서 } t = \frac{1}{3} \text{이고}$$

$$\text{점 A의 좌표는 } \left(\log_2 \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{이다.}$$

점 C의 x 좌표는 점 A의 x 좌표와 같고

점 C는 함수 $y = -a|2^x - 1|$ 의 그래프 위의 점이므로

$$\text{점 C의 좌표는 } \left(\log_2 \frac{4}{3}, -\frac{a}{3}\right) \text{이다.}$$

한편, $\overline{AC} = 1$ 이므로 $\frac{1}{3} - \left(-\frac{a}{3}\right) = 1$ 에서 $a = 2$ 이다.

$$\text{따라서 } a+t = \frac{7}{3}$$

20) [정답] ③

[해설]

직선 $x=a$ 와 세 함수

$$f(x) = 4^x, g(x) = 2^x, h(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$$

의 그래프가 만나는 점이 각각 P, Q, R이므로

$$P(a, 4^a), Q(a, 2^a), R\left(a, -\left(\frac{1}{2}\right)^{a-1}\right)$$

$$\text{따라서 } \overline{PQ} = 4^a - 2^a, \overline{QR} = 2^a + \left(\frac{1}{2}\right)^{a-1} \text{이다.}$$

$$\overline{PQ} : \overline{QR} = 8 : 3 \text{에서 } 8\overline{QR} = 3\overline{PQ} \text{이므로}$$

$$8\left\{2^a + \left(\frac{1}{2}\right)^{a-1}\right\} = 3(4^a - 2^a)$$

$$2^a = t \text{라 하면}$$

$$8\left(t + \frac{2}{t}\right) = 3(t^2 - t), 3t^3 - 11t^2 - 16 = 0,$$

$$(t-4)(3t^2 + t + 4) = 0$$

$$\therefore t = 4$$

$$\text{즉, } t = 4 = 2^a \text{이므로 } a = 2 \text{이다.}$$

21) [정답] ③

[해설]

점 B의 좌표가 $B(0, 2^a)$ 이므로 $\overline{OB} = 2^a$

$$\overline{OB} = 3 \times \overline{OH} \text{에서 } \overline{OH} = \frac{2^a}{3}$$

$$\text{점 A의 } x \text{좌표를 } k \text{라 하면 } A\left(k, \frac{2^a}{3}\right)$$

점 A는 곡선 $y = 2^{-x+a}$ 위의 점이므로

$$2^{-k+a} = \frac{2^a}{3} \text{에서 } 2^{-k} = \frac{1}{3}, 2^k = 3$$

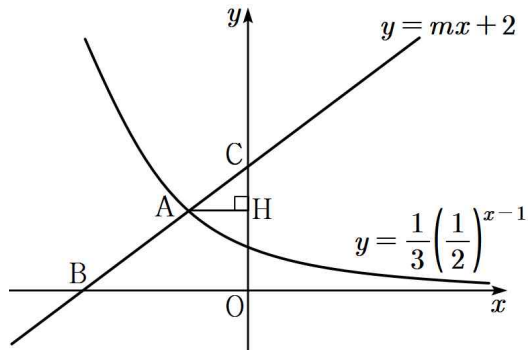
또한 점 A는 곡선 $y = 2^x - 1$ 위의 점이므로

$$\frac{2^a}{3} = 2^k - 1 = 3 - 1 = 2 \text{에서 } 2^a = 6$$

$$\text{따라서 } a = \log_2 6$$

22) [정답] ③

[해설]



점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\triangle CBO \sim \triangle CAH$$

이므로 $\overline{AB} : \overline{AC} = 2 : 1$ 에서 $\overline{CH} : \overline{HO} = 1 : 2$

따라서 $H(0, \frac{4}{3})$ 이다.

점 A의 y좌표가 $\frac{4}{3}$ 이므로 곡선 $y = \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{x-1}$ 에 대입하면

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{x-1}, \quad (\frac{1}{2})^{x-1} = 4$$

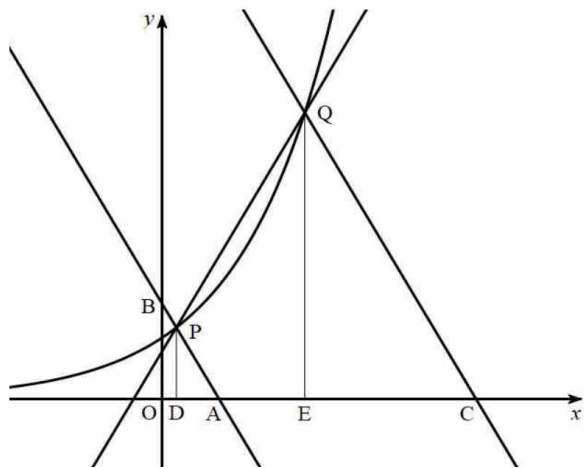
따라서 $x = -1$ 이므로 $A(-1, \frac{4}{3})$ 이다.

점 $A(-1, \frac{4}{3})$ 는 직선 $y = mx + 2$ 위의 점이므로 대입하면

$$\frac{4}{3} = -m + 2 \quad \therefore m = \frac{2}{3}$$

23) [정답] 220

[해설]



위 그림과 같이 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자.

$\overline{PB} = k$ 라 하면

$$\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{PB} = 4\overline{PB} - \overline{PB} = 3\overline{PB} = 3k$$

이고,

$$\overline{CQ} = 3\overline{AB} = 3 \times \overline{PB} = 12\overline{PB} = 12k$$

이므로 $\overline{AP} : \overline{CQ} = 3k : 12k = 1 : 4$

이때 $\triangle PDA$ 와 $\triangle QEC$ 는 닮음이므로

$$\overline{PD} : \overline{QE} = \overline{AP} : \overline{CQ} = 1 : 4$$

즉, $2^a : 2^b = 1 : 4$ 이므로 $2^b = 4 \times 2^a = 2^{a+2}$ 에서

$$b = a + 2$$

즉,

$$m = \frac{2^b - 2^a}{b - a} = \frac{2^{a+2} - 2^a}{(a+2) - a} = \frac{3 \times 2^a}{2} = 3 \times 2^{a-1}$$

이므로 직선 AB의 방정식은

$$y - 2^a = -3 \times 2^{a-1}(x - a) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에 $y = 0$ 을 대입하면

$$-2^a = -3 \times 2^{a-1}(x - a)$$

$$x = a + \frac{2}{3}$$

즉, 점 A의 x좌표가 $a + \frac{2}{3}$ 이다.

이때 원점 O에 대하여 $\triangle APD$ 와 $\triangle ABO$ 는 닮음이므로

$$AO : \overline{DO} = AB : PB = 4 : 1$$

$$a + \frac{2}{3} : a = 4 : 1$$

$$a = \frac{2}{9}$$

$$b = a + 2 = \frac{2}{9} + 2 = \frac{20}{9}$$

따라서

$$90 \times (a + b) = 90 \times (\frac{2}{9} + \frac{20}{9}) = 90 \times \frac{22}{9} = 220$$

24) [정답] 8

[해설]

$$\overline{OA} : \overline{OB} = \sqrt{3} : \sqrt{19} \text{이므로 } \overline{OA} = \sqrt{3}k (k > 0)$$

이라 하면 $\overline{OB} = \sqrt{19}k$ 이고 $\overline{AB} = 4k$ 이다.

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 라

하자. 직선 OA와 x축이 이루는 예각의 크기가

60° 이므로

$$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}k, \quad y_1 = \frac{3}{2}k$$

$$\text{따라서 } A(-\frac{\sqrt{3}}{2}k, \frac{3}{2}k)$$

직선 AB의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 직선 AB와

x축이 이루는 예각의 크기가 30° 이다.

$$x_2 - x_1 = 4k \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}k \text{에서}$$

$$x_2 = x_1 + 2\sqrt{3}k = \frac{3\sqrt{3}}{2}k$$

$$y_2 - y_1 = 4k \sin 30^\circ = 2k \text{에서}$$

$$y_2 = y_1 + 2k = \frac{7}{2}k$$

따라서 $B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}k, \frac{7}{2}k\right)$

점 A는 곡선 $y = a^{-2x} - 1$ 위의 점이므로

$$\frac{3}{2}k = a^{\sqrt{3}k} - 1 \text{에서 } a^{\sqrt{3}k} = \frac{3k+2}{2} \dots\dots \textcircled{㉠}$$

점 B는 곡선 $y = a^x - 1$ 위의 점이므로

$$\frac{7}{2}k = a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}k} - 1 \text{에서 } a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}k} = \frac{7k+2}{2} \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\left(\frac{3k+2}{2}\right)^3 = \left(\frac{7k+2}{2}\right)^2$$

$$27k^3 - 44k^2 - 20k = 0, k(k-2)(27k+10) = 0$$

$k > 0$ 이므로 $k = 2$

따라서 $\overline{AB} = 4k = 8$

25) [정답] ①

[해설]

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x) = 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ 은 x 의 값이

증가하면 $f(x)$ 의 값이 감소하므로 $x = -1$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$$f(-1) = 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 2 + 9 = 11 \text{이므로 최댓값은 } 11 \text{이다.}$$

26) [정답] ③

[해설]

$f(x) = 2^{|x|}$ 이고, $-1 \leq x \leq 3$ 이므로 지수함수의 그래프에서

$x = 0$ 일 때, 최솟값 $2^0 = 1$

$x = 3$ 일 때, 최댓값 $2^3 = 8$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 9

27) [정답] ⑤

[해설]

$0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로 함수 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 1$ 은

x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값은 감소한다.

따라서 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + 1 = 10$$

28) [정답] 82

[해설]

$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$ 이라 하자.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f(-4) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} + 1 = 82$$

29) [정답] ①

[해설]

함수 $f(x) = a \times 2^{2-x} + b = 4a \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + b$ 는 $a > 0$ 이고 밑이

1보다 작으므로, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 일 때 최댓값 5를 갖고, $x = 2$ 일 때 최솟값 -2 를 갖는다.

$$f(-1) = a \times 2^3 + b = 8a + b = 5,$$

$$f(2) = a \times 2^0 + b = a + b = -2$$

이므로 $a = 1, b = -3$ 이다.

따라서 $f(0) = 4a + b = 4 - 3 = 1$

30) [정답] ②

[해설]

닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 함수 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-a} + 1$ 은 x 의 값이

증가하면 y 의 값은 감소한다.

그러므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 최댓값 5를 갖는다.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-a} + 1 = 5 \text{에서 } 2^{a-1} = 2^2, a = 3$$

함수 $f(x)$ 는 $x = 3$ 에서 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은

$$f(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-3} + 1 = 2$$

31) [정답] ②

[해설]

함수 $f(x) = 2^{-x} + 5 = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 5$ 의 밑이 1보다 작으므로 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값이 감소한다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최솟값을 가지고 최솟값은 $f(-1) = 2^1 + 5 = 7$

32) [정답] 128

[해설]

$0 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $g(x) = (x-1)(x-3)$ 은

$x = 5$ 일 때, 최댓값 8,

$x = 2$ 일 때, 최솟값 -1 을 갖는다.

함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}$ 의 그래프는

x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소하므로 함수 $h(x)$ 는

$x = 5$ 일 때, 최솟값 $\frac{1}{4}$,

$x = 2$ 일 때, 최댓값 M 을 갖는다.

$$h(5) = f(8) = \left(\frac{1}{2}\right)^{8-a} = \frac{1}{4}$$

$$2^{a-8} = 2^{-2}, a = 6$$

$$h(2) = f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1-6} = 128$$

따라서 $M = 128$

33) [정답] ①

[해설]

$a^x = t$ 라 하면 $\frac{1}{a} \leq t \leq a$ 이고

$$f(x) = t^2 + 4t - 2 = (t+2)^2 - 6$$

$t = a$ 일 때 최댓값 $a^2 + 4a - 2 = 10$ 이므로 $a = 2$

$$\text{최솟값은 } t = \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \text{일 때 } \frac{1}{4} + 2 - 2 = \frac{1}{4}$$

34) [정답] ④

[해설]

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-x} = 64, (4^{-1})^{-x} = 4^3, 4^x = 4^3 \text{이므로 } x = 3$$

35) [정답] ⑤

[해설]

방정식 $8^x = 18$ 에서

$$x = \log_8 18 = \log_2 (2 \times 3^2)$$

$$= \frac{1}{3} \log(2 \times 3^2)$$

$$= \frac{1}{3} (1 + 2 \log_2 3)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \log_2 3$$

$$\therefore k = \frac{2}{3}$$

36) [정답] ⑤

[해설]

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} = 2^{-2x^2} \text{이므로 } 2^{x-6} = 2^{-2x^2} \text{에서 } x-6 = -2x^2 \text{이다.}$$

$$2x^2 + x - 6 = 0, (x+2)(2x-3) = 0 \text{에서}$$

$$x = -2 \text{ 또는 } \frac{3}{2}$$

따라서 모든 해의 합은 $-\frac{1}{2}$

37) [정답] ③

[해설]

$$(2^x)^2 - 8 \times 2^x + 15 = 0 \text{에서}$$

$$2^x = t \text{로 놓으면 } t > 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식은 $t^2 - 8t + 15 = 0$ 이다.

$$(t-3)(t-5) = 0 \text{에서 } t = 3 \text{ 또는 } t = 5 \text{이다.} \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에 의하여 $2^x = 3$ 또는 $2^x = 5$ 이다.

$\alpha < \beta$ 이므로 $2^\alpha = 3$ 이고 $2^\beta = 5$ 이다.

따라서 $\beta = \log_2 5$ 이므로 $2^\alpha \times \beta = 3 \log_2 5$

38) [정답] 5

[해설]

$$(2^x)^2 - 30 \times 2^x - 64 = 0$$

$$(2^x + 2)(2^x - 32) = 0, 2^x = -2 \text{ 또는 } 2^x = 32$$

$2^x > 0$ 이므로 $2^x = 32$

따라서 $x = 5$

39) [정답] ①

[해설]

$$2^{x-4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}, 2^{x-4} \leq 2^{-x+2} \text{에서 밑 } 2 \text{가 } 1 \text{보다 크므로}$$

$$x-4 \leq -x+2, x \leq 3$$

따라서 모든 자연수 x 의 값의 합은 $1+2+3=6$

40) [정답] ⑤

[해설]

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x < 3^{21-4x}, 3^{-2x} < 3^{21-4x}$$

밑이 1보다 크므로 지수를 비교하면 $-2x < 21-4x$

$$\therefore x < \frac{21}{2}$$

따라서 만족하는 자연수 x 는 1, 2, 3, ..., 10이므로 개수는 10개

41) [정답] ②

[해설]

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-7} \geq 9, \left(\frac{1}{3}\right)^{x-7} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \text{에서}$$

밑 $\frac{1}{3}$ 이 1보다 작으므로 $x-7 \leq -2, x \leq 5$

따라서 모든 자연수 x 의 개수는 5

42) [정답] ③

[해설]

$$\text{양변의 밑을 } 5 \text{로 같게 하면 } 5^{2x-7} \leq 5^{-x+2}$$

$$2x-7 \leq -x+2 \text{에서 } x \leq 3$$

주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x 는 1, 2, 3

따라서 자연수 x 의 개수는 3

43) [정답] ④

[해설]

$$p = \sqrt{2}-1 \text{이라 하면 } p^2 = 3-2\sqrt{2} \text{이고}$$

$$(p^2)^{5-n} = p^{10-2n} \text{이므로 } p^m \geq p^{10-2n} \text{이다.}$$

$0 < p < 1$ 이므로 $m \leq 10-2n$ 이다.

(i) $n=1$ 일 때, $1 \leq m \leq 8$

(ii) $n=2$ 일 때, $1 \leq m \leq 6$

(iii) $n=3$ 일 때, $1 \leq m \leq 4$

(iv) $n=4$ 일 때, $1 \leq m \leq 2$

(v) $n \geq 5$ 일 때, 부등식을 만족시키는 자연수 m 은

존재하지 않는다.

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 m, n 의 모든 순서쌍

(m, n) 의 개수는 $8+6+4+2=20$

44) [정답] 6

[해설]

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \leq 5^{7-2x} \text{에서 } 5^{1-x} \leq 5^{7-2x} \text{이므로}$$

$1-x \leq 7-2x$, 즉 $x \leq 6$ 이다.

따라서 모든 자연수 x 의 개수는 6이다.

45) [정답] ④

[해설]

$$2^x = t \text{로 놓으면 } t > 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

주어진 부등식은 $t^2 - 10t + 16 \leq 0$ 이다.

$$(t-2)(t-8) \leq 0 \text{에서 } 2 \leq t \leq 8 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에 의하여 $2 \leq t \leq 8$ 이고 $2^x = t$ 이므로

$$2 \leq 2^x \leq 8$$

즉 $1 \leq x \leq 3$ 이다.

따라서 모든 자연수 x 의 값의 합은 6이다.

46) [정답] 12

[해설]

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x - (3n+16) \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 48n \leq 0$$

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3n \right\} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^x - 16 \right\} \leq 0$$

(i) $3n \leq 16$ 일 때,

$3n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 16$ 을 만족시키는 정수 x 의 개수가 2가 되도록

하려면 $2^2 < 3n \leq 2^3, n=2$

(ii) $3n > 16$ 일 때,

$16 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 3n$ 을 만족시키는 정수 x 의 개수가 2가 되도록

하려면 $2^5 \leq 3n < 2^6$, $n = 11, 12, \dots, 21$

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 의 개수는 12

47) [정답] ②

[해설]

ㄱ. $x = -1$ 을 대입하면 $|a^0 - 1| = 0$ (참)

ㄴ. $x < -1$ 인 곳에서는 교점이 반드시 생긴다.

$x > 0$ 인 곳에서 교점을 조사해 보면,

$$a^x = 1 - a^{x-1}, a^x + a^{-x-1} = 1$$

이때 산술 기하 평균에서 $a^x + a^{-x-1} \geq 2\sqrt{a^{-1}}$ 이므로 $a = 4$ 일 때 등호 성립조건에 부합한다.

따라서 $4^x = 4^{-x-1}$ 즉, $x = -\frac{1}{2}$ 에서 접한다.

그러므로 두 점에서 만난다. (참)

ㄷ. $x < -1$ 에서의 교점은 -2 보다 크고 -1 보다 작다.

$x > -1$ 에서의 교점은 $a^x = 1 - a^{x-1}$ 을 풀어보면

$$t = 1 - \frac{1}{at} \quad (\because a^x = t \text{로 치환}) \text{ 즉, } at^2 - at + 1 = 0$$

이때 $a^\alpha \times a^\beta = \frac{1}{a} = a^{-1}$ 이므로 두 근의 합은 -1 이다.

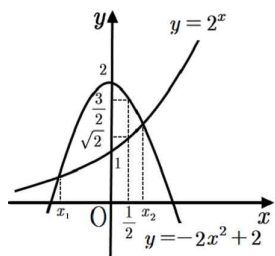
따라서 모든 교점의 합은 -3 과 -2 사이이다.(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

48) [정답] ⑤

[해설]

곡선 $y = 2^x$ 과 $y = -2x^2 + 2$ 가 만나는 두 점이 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) (단, $x_1 < x_2$)이므로 그래프를 그리면 다음과 같다.



ㄱ. 위의 그래프에서 $\frac{1}{2} < x_2$ (참)

ㄴ. 두 점 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 의 기울기를 구하면 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

그런데 위의 그래프에서 $(0, 1)$, $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 를 지나는

기울기가 1이므로 두 기울기를 비교해보면 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 1$

$$\therefore y_2 - y_1 < x_2 - x_1 \quad (\because x_1 < x_2) \quad (\text{참})$$

ㄷ. 위의 그래프에서 $-1 < x_1 < 0$, $\frac{1}{2} < x_2 < 1$ 이므로

$$\text{따라서 } -\frac{1}{2} < x_1 + x_2 < 1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

그런데, 곡선 $y = -2x^2 + 2$ 이 y 축 대칭함수이므로

$$|x_1| > |x_2|, \text{ 즉, } x_1 + x_2 < 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } -\frac{1}{2} < x_1 + x_2 < 0$$

식을 정리하면 $2^{-\frac{1}{2}} < 2^{x_1+x_2} < 2^1$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} < 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} < 2$$

$$\therefore \frac{2}{\sqrt{2}} < y_1 \cdot y_2 < 2 \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

49) [정답] ③

[해설]

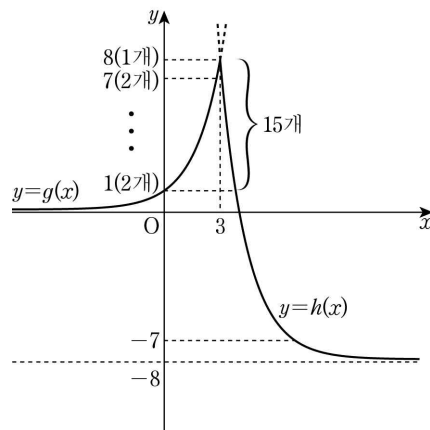
$$g(x) = 2^x, h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+a} - \left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} + 8 \text{ 이라 하면}$$

곡선 $y = g(x)$ 의 점근선의 방정식은 $y = 0$ 이고,

곡선 $y = h(x)$ 의 점근선의 방정식은

$$y = -\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} + 8 \text{ 이다.}$$

그러므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



곡선 $y = f(x)$ 위의 점 중에서 y 좌표가 정수인 점의 개수가 23이므로 $y \leq 0$ 에서 y 좌표가 정수인 점의 개수는 8이다.

$$\text{곡선 } y = h(x) \text{의 점근선이 } y = -\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} + 8 \text{이므로}$$

$-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} + 8$ 은 -8 이상 -7 미만이어야 한다.

즉, $-8 \leq -\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} + 8 < -7,$

$15 < \left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} \leq 16, 4 < 15 < 4^{-3-a} \leq 4^2,$

$1 < -3-a \leq 2, -5 \leq a < -4$

따라서 구하는 정수 a 의 값은 -5