

[수학1] [9등비수열] 교사평경 최근



3개년

교사평
경3

09

03 수1

09 등비수열

01 등비수열의 일반항

01 일반항1 (관계식)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 3

1. 첫째항이 2이고 공비가 5인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

a_2 의 값은?

- ① 5 ② 10 ③ 15
- ④ 20 ⑤ 25

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 3

2. 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_4=24$ 일 때, a_3 의

값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8
- ④ 9 ⑤ 10

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 22

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_2=6$, $a_5=48$ 이다. a_6 의 값을

구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 2

4. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = 3, a_3 = 6$ 일 때, $\frac{a_2}{a_1}$ 의

값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 3

5. 첫째항이 1이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = a_2 + 6$ 일 때, a_4 의 값은?

- ① 18 ② 21 ③ 24
- ④ 27 ⑤ 30

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 2

6. 첫째항이 $\frac{1}{8}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\frac{a_3}{a_2} = 2$ 일 때,

a_5 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
- ④ 2 ⑤ 4

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 7

7. 모든 항이 양수이고 공비가 서로 같은 두 등비수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n b_n = \frac{(a_{n+1})^2 + 4(b_{n+1})^2}{5}$$

를 만족시킬 때, 공비의 최댓값은?

- ① $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 1

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 9

8. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$a_3 = 4a_1 + 3a_2$ 일 때, $\frac{a_6}{a_4}$ 의 값은?

- ① 10 ② 12 ③ 14
- ④ 16 ⑤ 18

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 19

9. 첫째항이 $\frac{1}{4}$ 이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3 + a_5 = \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_5}$$

일 때, a_{10} 의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 18

10. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2 = 36, a_7 = \frac{1}{3}a_5$$

일 때, a_6 의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 3

11. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 2, a_2a_4 = 36$ 일 때, $\frac{a_7}{a_3}$ 의

값은?

- ① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3
- ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 2

12. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3 = 1, \frac{a_4 + a_5}{a_2 + a_3} = 4$$

일 때, a_9 의 값은?

- ① 8 ② 16 ③ 32
- ④ 64 ⑤ 128

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 4

13. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = 1$, $a_5 = 2(a_3)^2$ 일 때, a_6 의

값은?

- ① 8 ② 10 ③ 12
- ④ 14 ⑤ 16

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 4

14. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 6$,

$a_6 = 3a_4$ 일 때, a_9 의 값은?

- ① 153 ② 156 ③ 159
- ④ 162 ⑤ 165

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 5

15. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = \frac{1}{4}, a_2 + a_3 = \frac{3}{2}$$

일 때, $a_6 + a_7$ 의 값은?

- ① 16 ② 20 ③ 24
- ④ 28 ⑤ 32

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 3

16. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2 = 4, \frac{(a_3)^2}{a_1 \times a_7} = 2$$

일 때, a_4 의 값은?

- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
- ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 3

17. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 a_3 = 4, a_3 a_5 = 64$$

일 때, a_6 의 값은?

- ① 16 ② $16\sqrt{2}$ ③ 32
- ④ $32\sqrt{2}$ ⑤ 64

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월

18. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_2 + a_4 = 30, a_4 + a_6 = \frac{15}{2}$$

를 만족시킬 때, a_1 의 값은?

- ① 48 ② 56 ③ 64
- ④ 72 ⑤ 80

03 수1

09 등비수열

01 등비수열의 일반항

04 일반항4 (등차수열과 등비수열)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 11

19. 등차수열 $\{a_n\}$, 등비수열 $\{b_n\}$ 에 대하여

$a_1 = b_1 = 3$ 이고

$$b_3 = -a_2, a_2 + b_2 = a_3 + b_3$$

일 때, a_3 의 값은?

- ① -9 ② -3 ③ 0
- ④ 3 ⑤ 9

03 수1

09 등비수열

01 등비수열의 일반항

05 중항1 (등비중항)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 3

20. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 = 2$ 일 때, $a_4 \times a_6$ 의 값은?

- ① 4 ② 8 ③ 12
- ④ 16 ⑤ 20

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 13

21. 공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_3 \times a_5 \times a_7 = 125$

(나) $\frac{a_4 + a_8}{a_6} = \frac{13}{6}$

a_9 의 값은?

- ① 10 ② $\frac{45}{4}$ ③ $\frac{25}{2}$
- ④ $\frac{55}{4}$ ⑤ 15

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 23

22. 세 수 $\frac{a}{3}$, $4\sqrt{2}$, $6a$ 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 4

23. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$a_4 \times a_6 = 64$ 일 때, a_5 의 값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8
- ④ 9 ⑤ 10

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 2

24. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1$ 일 때, a_5 의

값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6
- ④ 8 ⑤ 10

03 수1

09 등비수열

01 등비수열의 일반항

06 중항2 (등차중항과 등비중항)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 21

25. 공차가 d 이고 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 \leq d$

(나) 어떤 자연수 $k(k \geq 3)$ 에 대하여 세 항

a_2, a_k, a_{3k-1} 이 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$90 \leq a_{16} \leq 100$ 일 때, a_{20} 의 값을 구하시오.

03 수1

09 등비수열

02 등비수열의 합

01 합1 (합 구하기)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 25

26. 함수 $f(x) = (1 + x^4 + x^8 + x^{12})(1 + x + x^2 + x^3)$ 일 때,

$\frac{f(2)}{\{f(1)-1\}\{f(1)+1\}}$ 의 값을 구하시오.

03 수1

09 등비수열

02 등비수열의 합

02 합2 (합으로 표현된 관계식)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 25

27. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$a_1 = 1, \frac{S_6}{S_3} = 2a_4 - 7$$

일 때, a_7 의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 8

28. 첫째항이 a ($a > 0$)이고, 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$2a = S_2 + S_3, r^2 = 64a^2$$

일 때, a_5 의 값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6
- ④ 8 ⑤ 10

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 14

29. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$a_1 = 3, \frac{S_6}{S_5 - S_2} = \frac{a_2}{2}$$

일 때, a_4 의 값은?

- ① 6 ② 9 ③ 12
- ④ 15 ⑤ 18

03 수1

09 등비수열

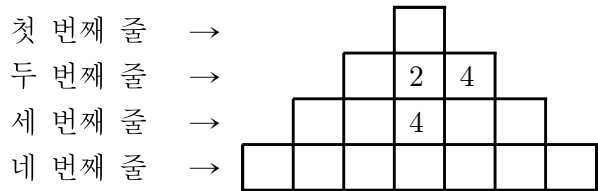
02 등비수열의 합

05 합5 (합의 활용)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 10

30. 그림은 16개의 칸 중 3개의 칸에 다음 규칙을 만족시키도록 수를 써 넣은 것이다.

- (가) 가로로 인접한 두 칸에서 오른쪽 칸의 수는 왼쪽 칸의 수의 2배이다.
- (나) 세로로 인접한 두 칸에서 아래쪽 칸의 수는 위쪽 칸의 수의 2배이다.



이 규칙을 만족시키도록 나머지 칸에 수를 써 넣을 때, 네 번째 줄에 있는 모든 수의 합은?

- ① 119
- ② 127
- ③ 135
- ④ 143
- ⑤ 151

03 수1

09 등비수열

02 등비수열의 합

07 수열의 합과 일반항 사이의 관계2 (응용)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 27

31. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을

S_n 이라 하자. 모든 자연수 n 에 대하여

$$S_{n+3} - S_n = 13 \times 3^{n-1}$$

일 때, a_4 의 값을 구하시오.

03 수1

09 등비수열

03 등비수열의 추론과 활용

06 활용4 (상용로그)

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 6

32. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = 2a_4, a_3^{\log_3 3} = 27$$

일 때, 집합 $\left\{n \mid \log_4 a_n - \log_2 \frac{1}{a_n} \text{은 자연수}\right\}$ 의 모든 원소의

개수는?

- ① 4 ② 5 ③ 6
- ④ 7 ⑤ 8

[수학1] [9등비수열] 교사평경 최근
3개년(빠른 정답)

년도별경향

2022.12.27

1. [정답] ②
2. [정답] ③
3. [정답] **96**
4. [정답] ②
5. [정답] ④

6. [정답] ④
7. [정답] ③
8. [정답] ④
9. [정답] 16
10. [정답] 4

11. [정답] ⑤
12. [정답] ④
13. [정답] ⑤
14. [정답] ④
15. [정답] ③

16. [정답] ④
17. [정답] ③
18. [정답] ①
19. [정답] ①
20. [정답] ①

21. [정답] ②
22. [정답] 4
23. [정답] ③
24. [정답] ②
25. [정답] **117**

26. [정답] **257**
27. [정답] 64
28. [정답] ②
29. [정답] ①
30. [정답] ②

31. [정답] 9
32. [정답] ②

[수학1] [9등비수열] 교사평경 최근 3개년(해설)

년도별경향 2022.12.27

1) [정답] ②

[해설]

$$a_2 = 2 \times 5 = 10$$

2) [정답] ③

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비가 3, $a_4 = 24$ 이므로 $a_4 = 3a_3$ 에서

$$a_3 = 8$$

3) [정답] 96

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 $a_5 = a_2 \times r^3$ 이므로

$$r^3 = 8$$

$$r = 2$$

따라서 $a_6 = a_5 \times 2 = 96$

4) [정답] ②

[해설]

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 = ar = 3, a_3 = ar^2 = 6$$

$$\text{따라서 } \frac{a_2}{a_1} = r = 2$$

5) [정답] ④

[해설]

첫째항이 1이고 공비가 양수인 등비수열이므로 $a_n = r^{n-1}$

$$a_3 = a_2 + 6$$

$$r^2 - r - 6 = 0, (r-3)(r+2) = 0$$

$$r = 3 (\because r > 0)$$

$$\text{따라서 } a_4 = 3^3 = 27$$

6) [정답] ④

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면 $\frac{a_3}{a_2} = r$ 에서 $r = 2$

즉, 초항이 $\frac{1}{8}$ 이고, 공비가 2인 등비수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{1}{8} \times 2^{n-1}$$

$$\text{따라서 } n = 5 \text{을 대입하면 } a_5 = \frac{1}{8} \times 2^4 = 2$$

7) [정답] ③

[해설]

모든 항이 양수이고 공비가 서로 같은 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 일반항을 각각 $a_n = ar^{n-1}$, $b_n = br^{n-1}$ 라고 하고

$$a_n b_n = \frac{(a_{n+1})^2 + 4(b_{n+1})^2}{5} \text{에 대입하면}$$

$$abr^{2n-2} = \frac{a^2 r^{2n} + 4b^2 r^{2n}}{5}$$

$$\div r^{2n} \text{을 하면 } abr^{-2} = \frac{a^2 + 4b^2}{5}$$

$$r^2 = \frac{5ab}{a^2 + 4b^2} = \frac{5}{\frac{a}{b} + \frac{4b}{a}}$$

그런데 $a > 0$, $b > 0$ 이므로 산술-기하평균에 의해

$$\frac{a}{b} + \frac{4b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{4b}{a}} = 4$$

따라서 $\frac{a}{b} + \frac{4b}{a}$ 의 최솟값이 4이므로 r^2 의 최댓값은 $\frac{5}{4}$ 이다.

따라서 구하는 r 의 최댓값은 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 이다.

8) [정답] ④

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 $a_3 = 4a_1 + 3a_2$ 이므로

$$a_1r^2 = 4a_1 + 3a_1r$$

$$a_1(r^2 - 3r - 4) = 0, \quad a_1(r - 4)(r + 1) = 0$$

모든 항이 양수이므로 $a_1 > 0, r > 0$

따라서 $r = 4$ 이므로 $\frac{a^6}{a^4} = r^2 = 16$

9) [정답] 16

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 $r(r > 0)$ 이라 하자.

$$a_3 + a_5 = \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_5} \text{에서}$$

$$a_3 + a_5 = \frac{a_3 + a_5}{a_3a_5}, \quad a_3a_5 = 1 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{4}r^2 \times \frac{1}{4}r^4 = 1, \quad r^6 = 16, \quad r^3 = 4$$

따라서 $a_{10} = \frac{1}{4}r^9 = \frac{1}{4}(r^3)^3 = 16$

10) [정답] 4

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 $r(r > 0)$ 이라 하면

$$a_2 = 36 \text{에서 } ar = 36$$

$$a_7 = \frac{1}{3}a_5 \text{에서 } ar^6 = \frac{1}{3}ar^4, \quad r^2 = \frac{1}{3}$$

따라서 $a_6 = ar^5 = ar \times (r^2)^2 = 36 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 4$

11) [정답] ⑤

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 $a_2a_4 = 36$ 에서

$$a_1 = 2 \text{이므로}$$

$$2r \times 2r^3 = 36$$

즉, $r^4 = 9$

따라서 $\frac{a_7}{a_3} = \frac{a_1r^6}{a_1r^2} = r^4 = 9$

12) [정답] ④

[해설]

등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$\frac{a_4 + a_5}{a_2 + a_3} = \frac{ar^3 + ar^4}{ar + ar^2} = r^2 = 4$$

$$a_9 = a_3 \times r^6 = a_3 \times (r^2)^3 = 1 \times 4^3 = 64$$

13) [정답] ⑤

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하자.

$$a_2 = 1 \text{이므로 } a \neq 0 \text{이고 } r \neq 0$$

$$a_5 = 2(a_3)^2 \text{에서 } ar^4 = 2a^2r^4 \text{이므로 } a = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}r = 1 \text{에서 } r = 2$$

따라서 $a_6 = \frac{1}{2} \times 2^5 = 16$

14) [정답] ④

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $\frac{a_6}{a_4} = r^2 = 3,$

$$a_3 = ar^2 = 6, \quad a = 2$$

따라서 $a_9 = ar^8 = a(r^2)^4 = 2 \times 3^4 = 162$

15) [정답] ③

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로

공비를 $r(r > 0)$ 라 하면

$$a_2 + a_3 = a_1r + a_1r^2 = \frac{1}{4}r + \frac{1}{4}r^2 = \frac{3}{2}$$

$$r^2 + r - 6 = 0, \quad (r + 3)(r - 2) = 0$$

$$r > 0 \text{이므로 } r = 2$$

따라서

$$a_6 + a_7 = a_1r^5 + a_1r^6$$

$$= \frac{1}{4} \times 2^5 + \frac{1}{4} \times 2^6$$

$$= 24$$

16) [정답] ④

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\frac{(a_3)^2}{a_1 \times a_7} = 2 \text{에서}$$

$$\frac{(ar^2)^2}{a \times (ar^6)} = 2, \frac{1}{r^2} = 2 \quad \therefore r^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a_4 = a_2 r^2 = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

17) [정답] ③

[해설]

$$a_1 a_3 = (a_2)^2 = 4, a_3 a_5 = (a_4)^2 = 64 \text{에서}$$

$a_2 = 2, a_4 = 8$ 이고 등비수열 $\{a_n\}$ 의

공비는 2이므로 $a_6 = 8 \times 2^2 = 32$

18) [정답] ①

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 $r(r > 0)$ 라 하자.

$$a_2 + a_4 = 30 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a_4 + a_6 = \frac{15}{2} \text{에서} \quad r^2(a_2 + a_4) = \frac{15}{2} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$r^2 \times 30 = \frac{15}{2}, \quad r^2 = \frac{1}{4}$$

$$r > 0 \text{이므로} \quad r = \frac{1}{2}$$

$$\text{㉠에서} \quad a_1 r + a_1 r^3 = 30$$

$r = \frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$a_1 \times \frac{1}{2} + a_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 30$$

$$a_1 \times \frac{5}{8} = 30$$

$$\therefore a_1 = 30 \times \frac{8}{5} = 48$$

19) [정답] ①

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d , 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_n = 3 + (n-1)d, b_n = 3r^{n-1}$$

$b_3 = -a_2$ 를 $a_2 + b_2 = a_3 + b_3$ 에 대입하면

$$a_2 + b_2 = a_3 - a_2 = d$$

그러므로 $3 + d + 3r = d, 3r = -3$ 에서

$$r = -1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$b_3 = -a_2 \text{에서} \quad 3r^2 = -(3+d) \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉡에 ㉠을 대입하면 $3 \times (-1)^2 = -3 - d$ 에서 $d = -6$

따라서 $a_3 = 3 + 2 \times (-6) = -9$

20) [정답] ①

[해설]

a_5 는 a_4 와 a_6 의 등비중항이므로

$$a_4 \times a_6 = (a_5)^2 = 2^2 = 4$$

21) [정답] ②

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하자.

$$\text{조건 (가)에서} \quad ar^2 \times ar^4 \times ar^6 = 125$$

$$(ar^4)^3 = 5^3, \text{ 즉 } ar^4 = 5$$

$$\text{조건 (나)에서} \quad \frac{ar^3 + ar^7}{ar^5} = \frac{13}{6}, \quad \frac{1}{r^2} + r^2 = \frac{13}{6}$$

$$r^2 = X \text{로 치환하면} \quad X + \frac{1}{X} = \frac{13}{6} \text{에서}$$

$$6X^2 - 13X + 6 = 0, (2X-3)(3X-2) = 0$$

$$X = \frac{3}{2} \text{ 또는 } X = \frac{2}{3} \text{에서} \quad r^2 = \frac{3}{2} \text{ 또는 } r^2 = \frac{2}{3}$$

공비가 1보다 커야 하므로 $r^2 = \frac{3}{2}$

$$\text{따라서} \quad a_9 = ar^8 = ar^4 \times r^4 = 5 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}$$

22) [정답] 4

[해설]

$4\sqrt{2}$ 는 $\frac{a}{3}$ 와 $6a$ 의 등비중항이므로

$$\frac{a}{3} \times 6a = (4\sqrt{2})^2 \text{에서 } a^2 = 16$$

따라서 양수 a 의 값은 4

23) [정답] ③

[해설]

등비중항의 성질에 의하여 $a_4 \times a_6 = a_5^2 = 64$

수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 양수이므로 $a_5 = 8$

24) [정답] ②

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 $r = \frac{a_3}{a_2} = 2$ 이므로

$$a_5 = a_3 \times r^2 = 4$$

25) [정답] 117

[해설]

$a_1 = a$ 라 하면 조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned} \{a + (k-1)d\}^2 &= (a+d)\{a + (3k-2)d\} \\ d\{k^2 - 5k + 3\} &= a(k+1) \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

모든 항이 자연수이므로 조건 (가)에서 $0 < a \leq d$

$$\begin{aligned} a(k+1) &\leq d(k+1), \quad k^2 - 5k + 3 \leq k+1 \\ k^2 - 6k + 2 &\leq 0 \\ \therefore 3 - \sqrt{7} &\leq k \leq 3 + \sqrt{7} \end{aligned}$$

$k \geq 3$ 이므로 자연수 $k=3, 4, 5$

①에서 $k^2 - 5k + 3 > 0$ 이므로 $k=5, d=2a$

$$90 \leq a_{16} \leq 10, \quad a_{16} = a + 15d = 31a$$

이므로 $a=3, d=6$

따라서 $a_{20} = a + 19d = 117$

26) [정답] 257

[해설]

(i) $x \neq 1$ 일 때

$$f(x) = (1+x^4+x^8+x^{12})(1+x+x^2+x^3)$$

$$= \frac{(x^4)^4 - 1}{x^4 - 1} \times \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{x^{16} - 1}{x - 1}$$

(ii) $x=1$ 일 때 $f(1) = 4 \times 4 = 16$

따라서

$$\begin{aligned} \frac{f(2)}{\{f(1)-1\}\{f(1)+1\}} &= \frac{2^{16}-1}{(16-1)(16+1)} \\ &= \frac{(2^8-1)(2^8+1)}{(2^4-1)(2^4+1)} \\ &= 2^8 + 1 \\ &= 257 \end{aligned}$$

27) [정답] 64

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하자.

(i) $r=1$ 이면 $a_n = 1$ 이므로

$S_3 = 3 \times 1 = 3, S_6 = 6 \times 1 = 6$ 에서

$$\frac{S_6}{S_3} = 2$$

$$2a_4 - 7 = 2 \times 1 - 7 = -5$$

$$\text{따라서 } \frac{S_6}{S_3} \neq 2a_4 - 7$$

(ii) $r \neq 1$ 이면 $a_n = 1 \times r^{n-1} = r^{n-1}$

이때

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{\frac{r^6-1}{r-1}}{\frac{r^3-1}{r-1}} = \frac{r^6-1}{r^3-1} = \frac{(r^3+1)(r^3-1)}{r^3-1}$$

$$= r^3 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또

$$2a_4 - 7 = 2r^3 - 7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①과 ②이 같아야 하므로

$$r^3 + 1 = 2r^3 - 7$$

$$r^3 = 8$$

r 가 실수이므로 $r=2$

(i), (ii)에서 $a_n = 2^{n-1}$ 이므로

$$a_7 = 2^6 = 64$$

28) [정답] ②

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = ar^{n-1}$,

$$2a = S_2 + S_3 \text{이므로 } 2a = (a+ar) + (a+ar+ar^2)$$

$$ar(2+r)=0$$

$r^2=64a^2(a>0)$ 에 의하여 $r \neq 0$ 이므로 $r=-2, a=\frac{1}{4}$

따라서 $a_5=\frac{1}{4} \times (-2)^4=4$

29) [정답] ①

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 $r(r>0)$ 이라 하자.

$r=1$ 이면

$$\frac{S_6}{S_5-S_2}=\frac{3 \times 6}{3 \times 5-3 \times 2}=2, \frac{a_2}{2}=\frac{3}{2} \text{에서}$$

$\frac{S_6}{S_5-S_2}=\frac{a_2}{2}$ 가 성립하지 않으므로 $r \neq 1$

$$\begin{aligned} \frac{S_6}{S_5-S_2} &= \frac{\frac{3(r^6-1)}{r-1}}{\frac{3(r^5-1)}{r-1}-\frac{3(r^2-1)}{r-1}} \\ &= \frac{r^6-1}{r^5-r^2} \\ &= \frac{(r^3+1)(r^3-1)}{r^2(r^3-1)} \\ &= \frac{r^3+1}{r^2} \end{aligned}$$

$\frac{a_2}{2}=\frac{3r}{2}$ 이므로

$$\frac{r^3+1}{r^2}=\frac{3r}{2} \text{에서 } 2(r^3+1)=3r^3, r^3=2$$

따라서 $a_4=ar^3=3 \times 2=6$

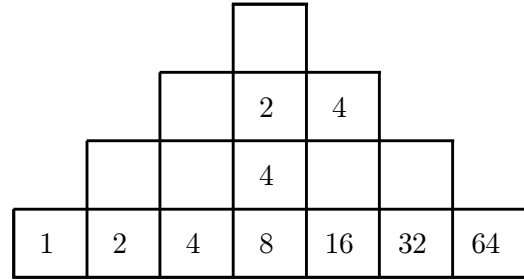
30) [정답] ②

[해설]

문제에서 제시된 세 번째 줄의 4와 인접한 아래쪽 칸의 수는 주어진 규칙에 의해 4의 2배인 8이다.

규칙으로부터 네 번째 줄의 8과 인접한 왼쪽 칸의 수는 그 수를 2배하여 8이 되어야 하므로 4이다.

이와 같은 방식으로 네 번째 줄에 있는 수를 모두 구하여 왼쪽부터 차례대로 나열하면 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64이다.



그러므로 네 번째 줄에 있는 모든 수의 합은 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제 7항까지의 합이다.

$$\text{따라서 구하는 값은 } \frac{1 \times (2^7-1)}{2-1}=127$$

31) [정답] 9

[해설]

$S_{n+3}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$ 이므로 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=13 \times 3^{n-1} \dots\dots \textcircled{㉠}$$

㉠에 $n=1$ 을 대입하면

$$a_2+a_3+a_4=13$$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_1r+a_1r^2+a_1r^3=13$$

$$a_1r(1+r+r^2)=13 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

또 ㉠에 $n=2$ 를 대입하면

$$a_3+a_4+a_5=13 \times 3=39$$

$$a_1r^2+a_1r^3+a_1r^4=39$$

$$a_1r^2(1+r+r^2)=39 \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉢} \div \textcircled{㉡} \text{에서 } \frac{a_1r^2(1+r+r^2)}{a_1r(1+r+r^2)}=\frac{39}{13}$$

즉, $r=3$

$r=3$ 을 ㉡에 대입하면

$$a_1 \times 3 \times (1+3+9)=13 \text{에서 } a_1=\frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } a_4=a_1 \times r^3=\frac{1}{3} \times 3^3=9$$

32) [정답] ②

[해설]

$$a_1=2a_4 \text{에서 } a=2ar^3 \text{이므로 } r^3=\frac{1}{2}$$

$$a_3^{\log_2 3}=27 \text{에서 } a_3=8 \text{이므로 } a_3=ar^2 \text{에서 } a\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=2^3 \text{이므로}$$

$$\therefore a = 2^{\frac{11}{3}}$$

따라서 $a = 2^{\frac{11}{3}}$, $a_2 = 2^{\frac{10}{3}}$, $a_3 = 2^{\frac{9}{3}}$, ...

주어진 집합의 조건에 의해서

$$\begin{aligned} \log_4 a_n - \log_2 \frac{1}{a_n} &= \log_4 a_n + \log_4 a_n^2 \\ &= \log_4 a_n^3 \\ &= \frac{3}{2} \log_2 a_n \end{aligned}$$

따라서 $\log_4 a_n - \log_2 \frac{1}{a_n}$ 가 자연수가 되려면 $a_n = 2^{\frac{\text{짝수}}{3}}$ 이어야 한다.

즉, $a_2 = 2^{\frac{10}{3}}$, $a_4 = 2^{\frac{8}{3}}$, ..., $a_{10} = 2^{\frac{2}{3}}$ 이므로 원소의 개수는 5개이다.