[수학1] [7삼각함수의 활용] 교사평경 최근 3개년

03 수1 07 삼각함수의 활용

01 사인법칙과 코사인법칙

01 사인법칙1 (기본)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 9

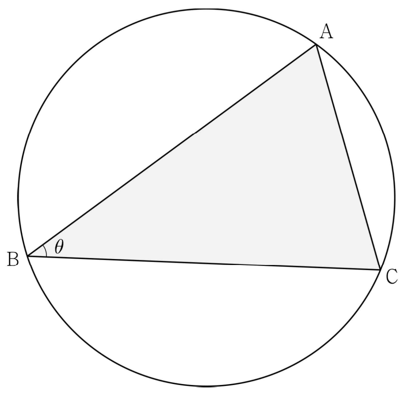
1. $\overline{AB}=8$이고 $\angle A=45^\circ$, $\angle B=15^\circ$인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 길이는?

① $2\sqrt{6}$ ② $\frac{7\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{8\sqrt{6}}{3}$

④ $3\sqrt{6}$ ⑤ $\frac{10\sqrt{6}}{3}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 13

2. 그림과 같이 반지름의 길이가 4인 원에 내접하고 변 AC의 길이가 5인 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC=\theta$라 할 때, $\sin\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$)



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 23

3. 반지름의 길이가 15인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $\sin B=\frac{7}{10}$일 때, 선분 AC의 길이를 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 5

4. 반지름의 길이가 15인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서

$\sin B = \frac{7}{10}$일 때, 선분 AC의 길이는?

① 15 ② 18 ③ 21

④ 24 ⑤ 27

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 2

5. 삼각형 ABC에서 선분 BC의 길이가 3이고

$$4\cos^2 A - 5\sin A + 2 = 0$$

일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$

④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

03 수1 07 삼각함수의 활용

01 사인법칙과 코사인법칙

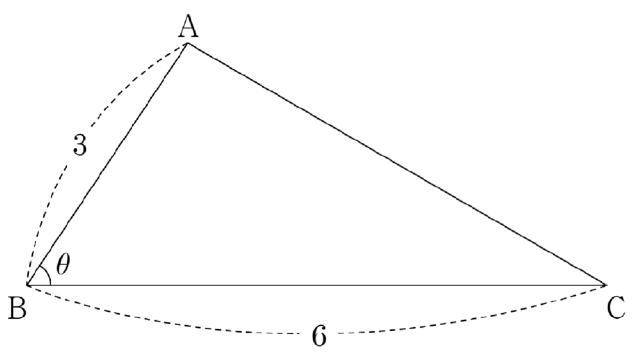
03 코사인법칙1 (기본)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 9

6. $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=6$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC=\theta$에 대하여 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{14}}{9}$일 때, 선분 AC의 길이는? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$

④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$



03 수1 07 삼각함수의 활용

01 사인법칙과 코사인법칙

04 코사인법칙2 (코사인법칙의 변형)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 10

7. 삼각형ABC에서 $\frac{2}{\sin A}=\frac{3}{\sin B}=\frac{4}{\sin C}$일 때, $\cos C$의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0

④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 14

8. 삼각형 ABC에서 $\angle A=\frac{2\pi}{3}$이고 $\overline{AB}=6$이다. $\overline{AC}$와 $\overline{BC}$의 합이 24일 때, cosB의 값은?

① $\frac{19}{28}$ ② $\frac{5}{7}$ ③ $\frac{21}{28}$
④ $\frac{11}{14}$ ⑤ $\frac{23}{28}$

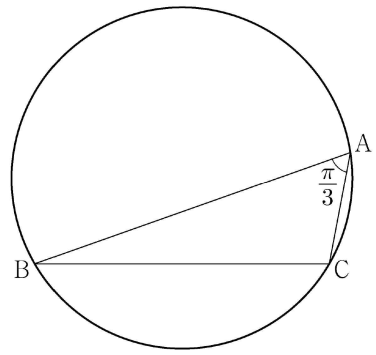
03 수1 07 삼각함수의 활용

01 사인법칙과 코사인법칙

05 사인법칙과 코사인법칙의 동시 적용

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 10

9. $\angle A=\frac{\pi}{3}$이고 $\overline{AB} : \overline{AC}=3 : 1$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 선분 AC의 길이는?

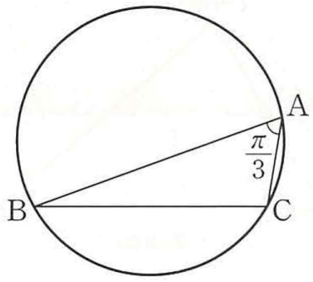


① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{22}$
④ $\sqrt{23}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 28

10. $\angle A = \frac{\pi}{3}$이고 $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 1$인 삼각형 ABC가 있다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 선분 AC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오.



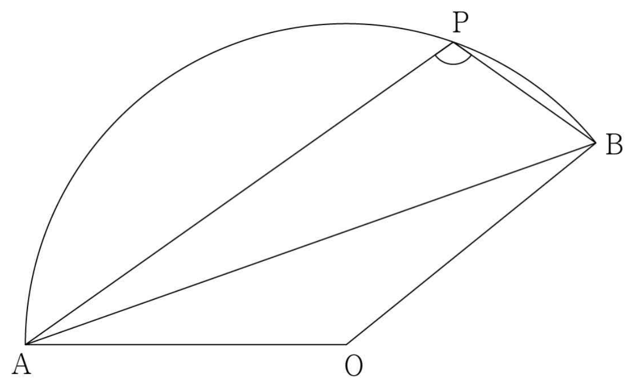
[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 20

11. $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 1 : 2 : \sqrt{2}$인 삼각형 ABC가 있다.

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 28π일 때, 선분 CA의 길이를 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 14

12. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 6인 부채꼴 OAB가 있다. $\overline{AB} = 8\sqrt{2}$이고 부채꼴 OAB의 호 AB 위의 한 점 P에 대하여 $\angle BPA > 90°$, $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$일 때, 선분 BP의 길이는?



① $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ② $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ ③ $\sqrt{6}$

④ $\frac{7\sqrt{6}}{6}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

03 수1 07 삼각함수의 활용

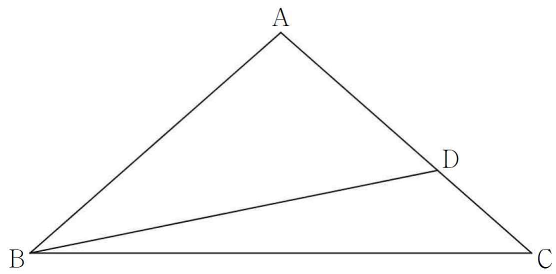
02 사인법칙과 코사인법칙의 활용

02 활용2 (사인법칙의 활용)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 19

13. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 선분 AC를 $5:3$으로 내분하는 점을 D라 하자.

$2\sin(\angle ABD)=5\sin(\angle DBC)$일 때, $\frac{\sin C}{\sin A}$의 값은?

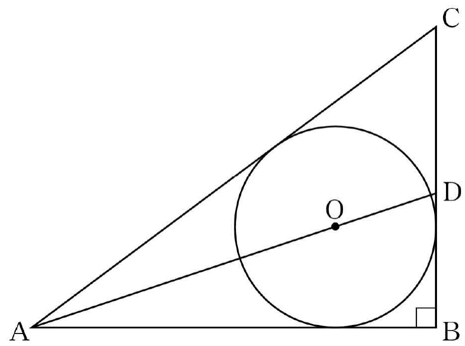


① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{7}{11}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{9}{13}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 17

14. 그림과 같이 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC에 내접하고 반지름의 길이가 3인 원의 중심을 O라 하자. 직선 AO가 선분 BC와 만나는 점을 D라 할 때, $\overline{DB}=4$이다. 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는?



① $\frac{125}{2}\pi$ ② 63π ③ $\frac{127}{2}\pi$

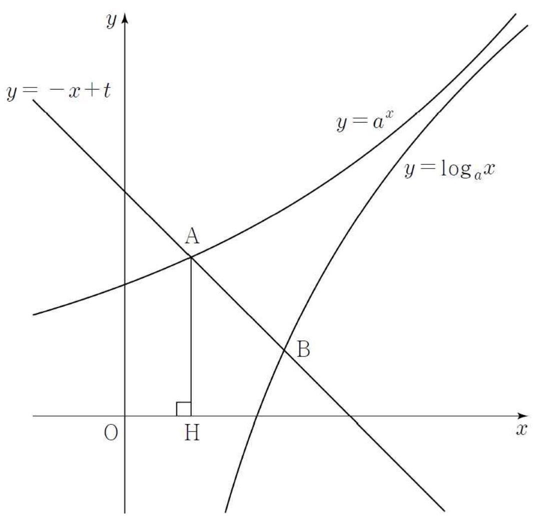
④ 64π ⑤ $\frac{129}{2}\pi$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 29

15. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, t에 대하여 직선 $y=-x+t$가 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 세 점 A, B, H는 다음 조건을 만족시킨다.

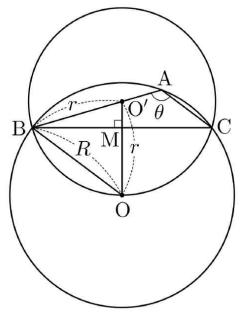
> (가) $\overline{\mathrm{OH}} : \overline{\mathrm{AB}} = 1 : 2$
>
> (나) 삼각형 AOB의 외접원의 반지름의 길이는 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

$200(t-a)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 21

16. $\angle\mathrm{BAC}=\theta\left(\dfrac{2}{3}\pi \le \theta < \dfrac{3}{4}\right)$인 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 세 점 B, O, C를 지나는 원의 중심을 O′이라 하자. 다음은 점 O′이 선분 AB위에 있을 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$의 값을 θ에 대한 식으로 나타내는 과정이다.

> 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여
>
> $$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}=2\mathrm{R}$$
>
> 
>
>
> 세 점 B, O, C를 지나는 원의 반지름의 길이를 r라 하자.
> 선분 O′O는 선분 BC를 수직이등분하므로 이 두 선분의 교점을 M이라 하면
>
> $$\overline{\mathrm{O'M}}=\mathrm{r}-\overline{\mathrm{OM}}=\mathrm{r}-|\mathrm{R}\cos\theta|$$
>
> 직각삼각형 O′BM에서 $R=\boxed{\text{(가)}}\times r$이므로
>
> $$\sin(\angle\mathrm{O'BM})=\boxed{\text{(나)}}$$
>
> 따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
>
> $$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\boxed{\text{(다)}}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$, $h(\theta)$라 하자. $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$, $\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$인 α, β에 대하여 $f(\alpha)+g(\beta)+\left\{h\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)\right\}^2=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

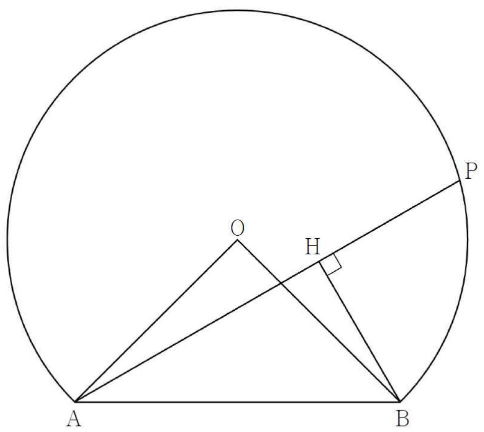
03 수1 07 삼각함수의 활용

02 사인법칙과 코사인법칙의 활용

03 활용3 (코사인법칙의 활용)

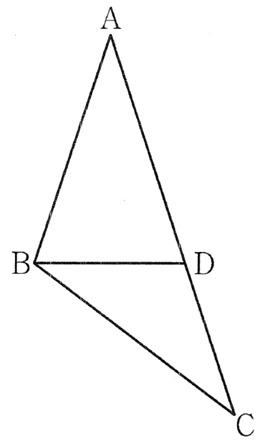
[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 27

17. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{3}{2}\pi$인 부채꼴 OBA가 있다. 호 BA 위에 점 P를 $\angle \mathrm{BAP}=\frac{\pi}{6}$가 되도록 잡고, 점 B에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{OH}}^2$의 값은 $m+n\sqrt{3}$이다. m^2+n^2의 값을 구하시오.
(단, m, n은 유리수이다.)



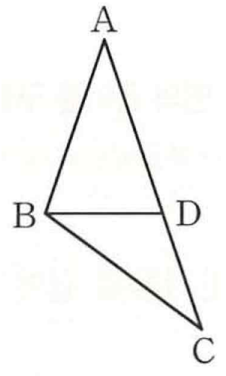
[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 25

18. $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AC}}=10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}$가 되도록 잡는다. $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{15}$일 때, 선분 BC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오.



[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 12

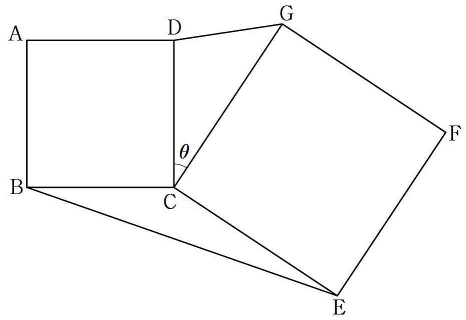
19. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{AB}=\overline{AD}$가 되도록 잡는다. $\overline{BD}=\sqrt{15}$일 때, 선분 BC의 길이는?



① $\sqrt{37}$ ② $\sqrt{38}$ ③ $\sqrt{39}$
④ $2\sqrt{10}$ ⑤ $\sqrt{41}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 15

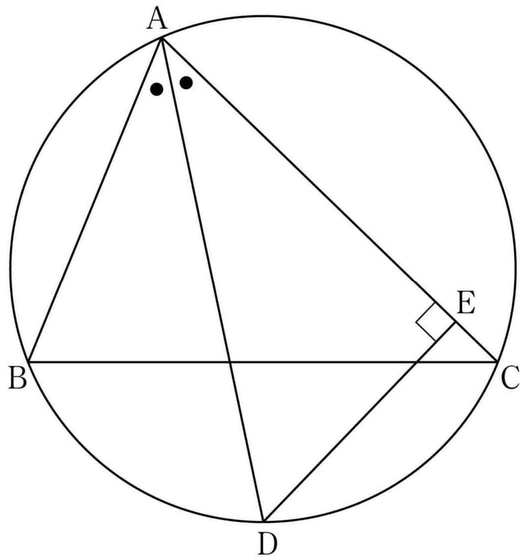
20. 그림과 같이 평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD와 한 변의 길이가 4인 정사각형 CEFG가 있다.
$\angle DCG=\theta\,(0<\theta<\pi)$라 할 때, $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$이다.
$\overline{DG}\times\overline{BE}$의 값은?



① 15 ② 17 ③ 19
④ 21 ⑤ 23

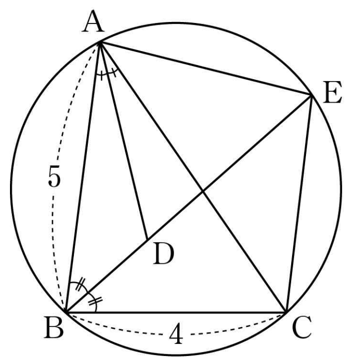
[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 21

21. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$인 예각삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 D, 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하자. 선분 AE의 길이를 k라 할 때, $12k$의 값을 구하시오.



[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 15

22. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC$의 이등분선과 $\angle CAB$의 이등분선이 만나는 점을 D, 선분 BD의 연장선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 E라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $\overline{AC}=6$

ㄴ. $\overline{EA}=\overline{EC}$

ㄷ. $\overline{ED}=\frac{31}{8}$

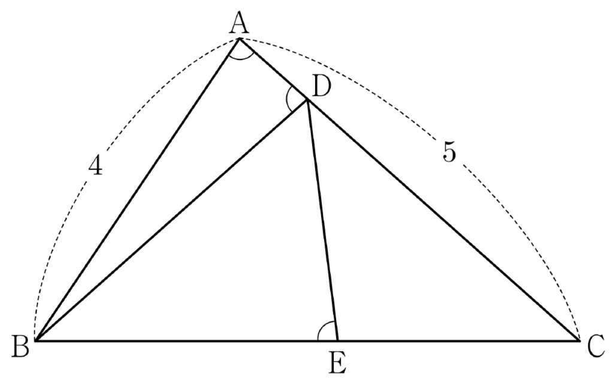
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 12

23. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$\angle BAC=\angle BDA=\angle BED$

일 때, 선분 DE의 길이는?

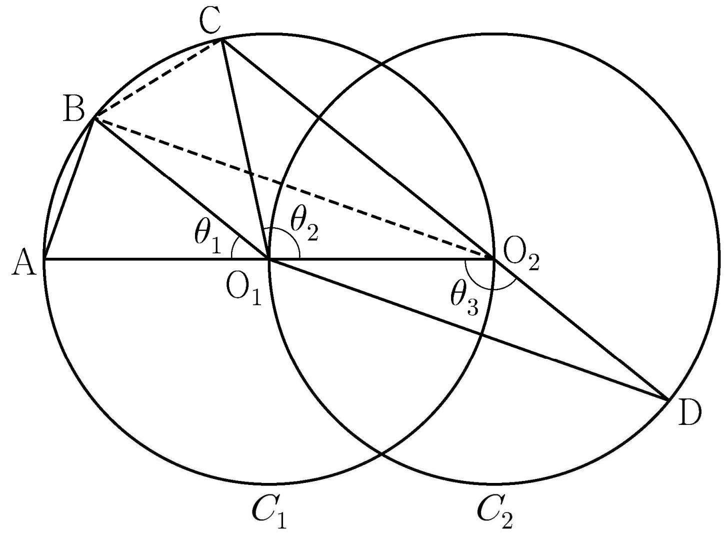


① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$

④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 15

24. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다. 이때 $\angle BO_1A=\theta_1$, $\angle O_2O_1C=\theta_2$, $\angle O_1O_2D=\theta_3$이라 하자.



다음은 $\overline{AB}:\overline{O_1D}=1:2\sqrt{2}$이고 $\theta_3=\theta_1+\theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$이므로 $\theta_3=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로 $\angle CO_1B=\theta_1$이다.
> 이때 $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.
> $\overline{AB}=k$라 할 때
> $\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2}=\boxed{(가)}$이고,
> $\angle BO_2A=\frac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\frac{\theta_1}{2}=\boxed{(나)}$이다.
> 삼각형 O_2BC에서
> $\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\frac{\theta_1}{2}$이므로
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C}=\boxed{(다)}$이다.
> $\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로
> $\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\frac{\boxed{(가)}}{2}+\boxed{(다)}\right)$이다.

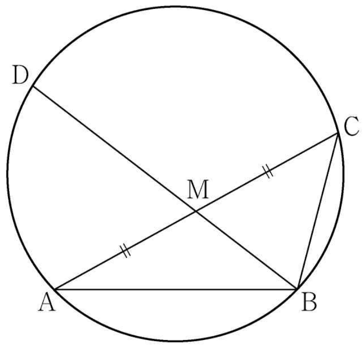
위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은?

① $\frac{169}{27}$ ② $\frac{56}{9}$ ③ $\frac{167}{27}$

④ $\frac{166}{27}$ ⑤ $\frac{55}{9}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 10

25. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는?



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$
④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

03 수1 07 삼각함수의 활용

02 사인법칙과 코사인법칙의 활용

04 활용4 (사인법칙과 코사인법칙의 활용)

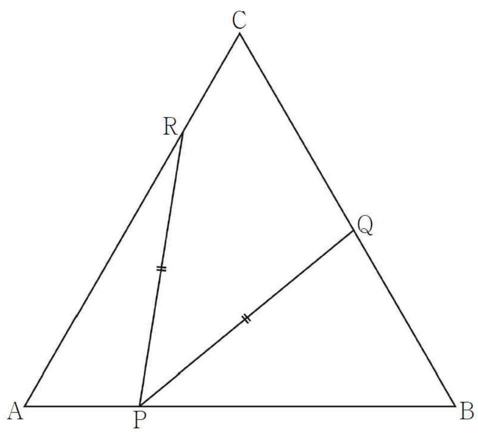
[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 21

26. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다.
선분 AB위의 점 P, 선분 BC위의 점 Q, 선분 CA위의 점 R에 대하여 세 점 P, Q, R가

$$\overline{AP}+\overline{BQ}+\overline{CR}=1,\ \overline{PQ}=\overline{PR}$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, 세 점 P, Q, R는 각각 점 A, 점 B, 점 C가 아니다.)



<보 기>

ㄱ. $3\overline{AP}+2\overline{BQ}=2$

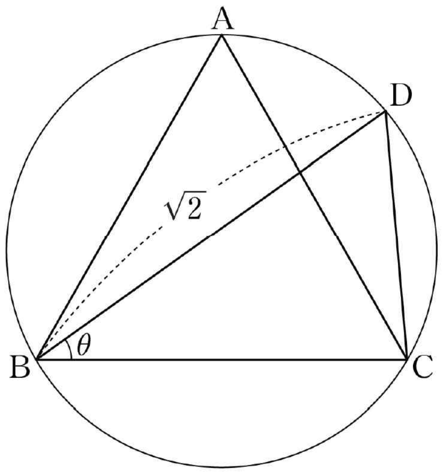
ㄴ. $\overline{QR}=\sqrt{3}\times\overline{AP}$

ㄷ. 삼각형 PBQ의 외접원의 넓이가 삼각형 CRQ의 외접원의 넓이의 2배일 때, $\overline{AP}=\frac{\sqrt{21}-3}{6}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 19

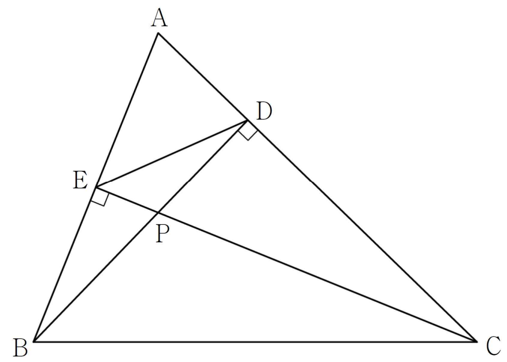
27. 정삼각형 ABC가 반지름의 길이가 r인 원에 내접하고 있다. 선분 AC와 선분 BD가 만나고 $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{2}$가 되도록 원 위에서 점 D를 잡는다. $\angle\mathrm{DBC}=\theta$라 할 때, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다. 반지름의 길이 r의 값은?



① $\frac{6-\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{6-\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$
④ $\frac{6-\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\frac{6-\sqrt{2}}{5}$

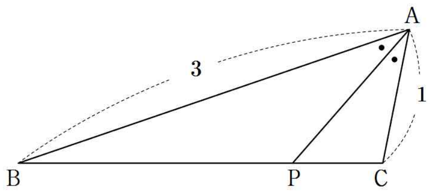
[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 29

28. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{AC}}=4$인 예각삼각형 ABC가 있다. 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D, 점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 E라 하고, 두 선분 BD, CE의 교점을 P라 하자. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이와 삼각형 ADE의 외접원의 넓이의 차가 4π일 때, 삼각형 PDE의 외접원의 넓이는 $a\pi$이다. $55a$의 값을 구하시오.
(단, a는 상수이다.)



[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 15

29. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=1$이고 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle BAC$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 APC의 외접원의 넓이는?



① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{5}{16}\pi$ ③ $\frac{3}{8}\pi$

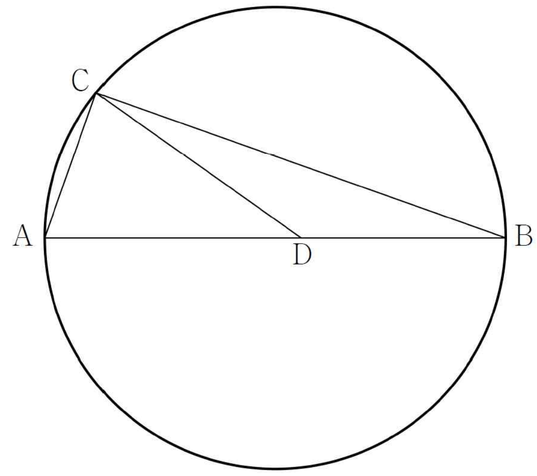
④ $\frac{7}{16}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 20

30. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 C에 대하여

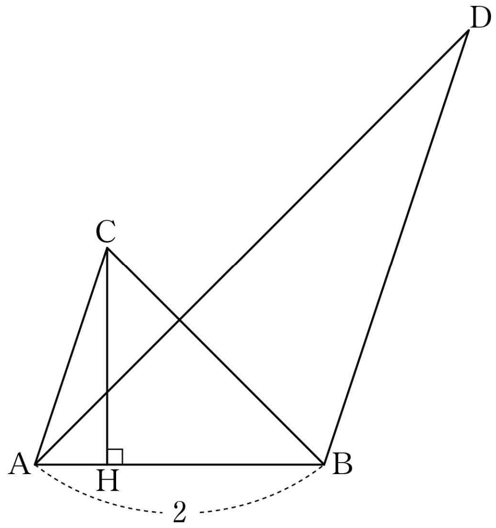
$$\overline{BC}=12\sqrt{2},\ \cos(\angle CAB)=\frac{1}{3}$$

이다. 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점을 D라 할 때, 삼각형 CAD의 외접원의 넓이는 S이다. $\frac{S}{\pi}$의 값을 구하시오.



[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 21

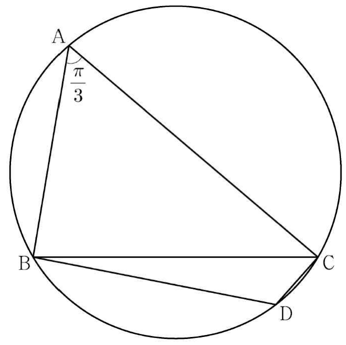
31. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC} /\!/ \overline{BD}$, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$인 두 삼각형 ABC, ABD가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다.



두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle CAB)=51$이다. $\overline{AC}^2$의 값을 구하시오. (단, $\angle CAB<\frac{\pi}{2}$)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 12

32. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD}+\overline{CD}$의 값은?



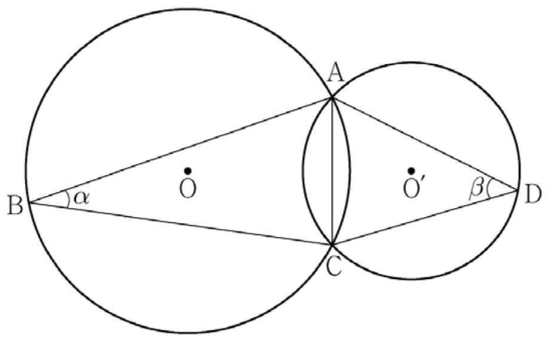
① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$
④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 21

33. 그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD의 외심을 각각 O, O′이라 하고 $\angle ABC=\alpha$, $\angle ADC=\beta$라 할 때,

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{2},\ \cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3},\ \overline{OO'}=1$$

이 성립한다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

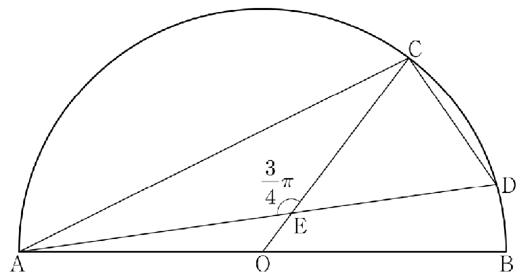


[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 13

34. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{CE}=4,\quad \overline{ED}=3\sqrt{2},\quad \angle CEA=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{AC}\times\overline{CD}$의 값은?



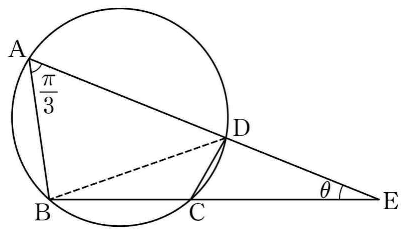
① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 15

35. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=2,\quad \overline{\mathrm{AD}}=3,\quad \angle\mathrm{BAD}=\frac{\pi}{3}$$

이다. 두 직선 AD, BC의 교점을 E라 하자.



다음은 $\angle\mathrm{AEB}=\theta$일 때, $\sin\theta$의 값을 구하는 과정이다.

> 삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하면
>
> $\overline{\mathrm{CD}}=\boxed{(가)}$
>
> 이다. 삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서
>
> $\angle\mathrm{AEB}$는 공통, $\angle\mathrm{EAB}=\angle\mathrm{ECD}$
>
> 이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다.
>
> 이를 이용하면
>
> $\overline{\mathrm{ED}}=\boxed{(나)}$
>
> 이다. 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면
>
> $\sin\theta=\boxed{(다)}$
>
> 이다.

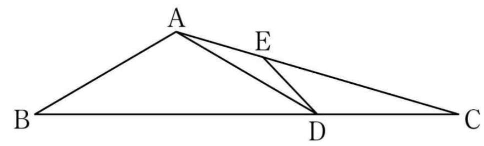
위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $(p+q)\times r$의 값은?

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ ③ $\frac{9\sqrt{3}}{14}$

④ $\frac{5\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{3}}{14}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 13

36. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=3\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{13}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위에 점 B가 아닌 점 D를 $\overline{\mathrm{AD}}=2$가 되도록 잡고, 선분 AC 위에 양 끝점 A, C가 아닌 점 E를 사각형 ABDE가 원에 내접하도록 잡는다.



다음은 선분 DE의 길이를 구하는 과정이다.

> 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
>
> $\cos(\angle\mathrm{ABC})=\boxed{(가)}$
>
> 이다. 삼각형 ABD에서 $\sin(\angle\mathrm{ABD})=\sqrt{1-\left(\boxed{가}\right)^2}$
>
> 이므로 사인법칙에 의하여 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이는 $\boxed{(나)}$ 이다.
>
> 삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여
>
> $$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle\mathrm{CAD})}=\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin(\angle\mathrm{ACD})}$$
>
> 이므로 $\sin(\angle\mathrm{CAD})=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AD}}}\times\sin(\angle\mathrm{ACD})$이다.
>
> 삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여
>
> $\overline{\mathrm{DE}}=\boxed{(다)}$
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p\times q\times r$의 값은?

① $\frac{6\sqrt{13}}{13}$ ② $\frac{7\sqrt{13}}{13}$ ③ $\frac{8\sqrt{13}}{13}$

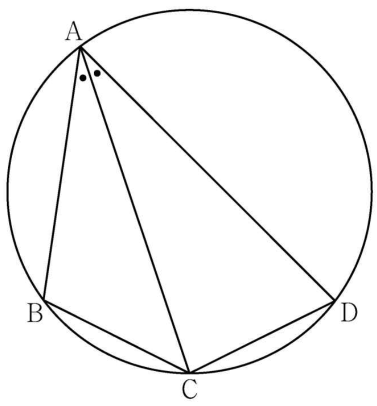
④ $\frac{9\sqrt{13}}{13}$ ⑤ $\frac{10\sqrt{13}}{13}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월

37. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$\overline{\mathrm{AB}}=5,\ \overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{5},\ \overline{\mathrm{AD}}=7,\ \angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는?

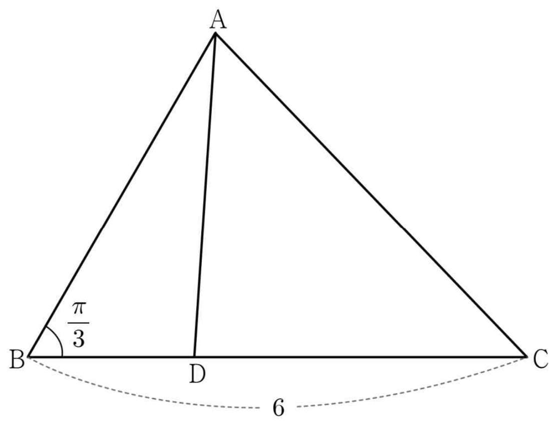


① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$
④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 28

38. $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{BC}}=6$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위에 점 B와 점 C가 아닌 점 D를 잡고, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 r_1, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 r_2라 하자. $\frac{r_2}{r_1}=\frac{\sqrt{13}}{3}$일 때, 선분 AB의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



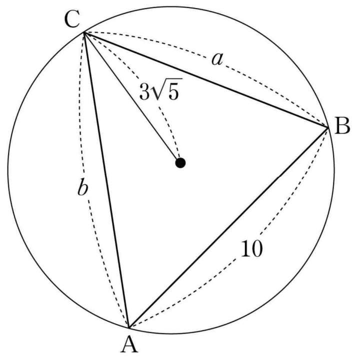
03 수1 07 삼각함수의 활용

02 사인법칙과 코사인법칙의 활용

05 활용5 (식의 모양-연결공식)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 19

39. 길이가10, a, b인 세 선분 AB, BC, CA를 각 변으로 하는 예각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 지나는 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$이고 $\dfrac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\dfrac{4}{3}$일 때, ab의 값은?



① 140 ② 150 ③ 160
④ 170 ⑤ 180

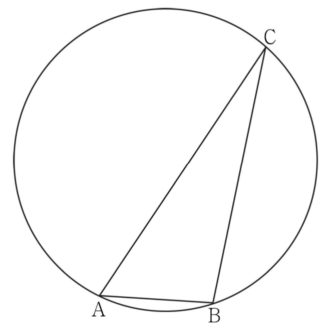
03 수1 07 삼각함수의 활용

02 사인법칙과 코사인법칙의 활용

06 활용6 (Mm)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 19

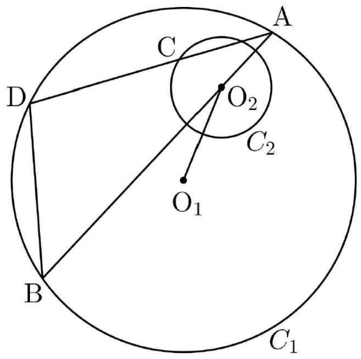
40. 그림과 같이 원 C에 내접하고 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 원 C의 넓이가 $\dfrac{49}{3}\pi$일 때, 원 C위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은?
(단, 점 P는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.)



① $\dfrac{32}{3}\sqrt{3}$ ② $\dfrac{34}{3}\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$
④ $\dfrac{38}{3}\sqrt{3}$ ⑤ $\dfrac{40}{3}\sqrt{3}$

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 13

41. 그림과 같이 중심이 O_1이고 반지름의 길이가 r $(r>3)$인 원 C_1과 중심이 O_2이고 반지름의 길이가 1인 원 C_2에 대하여 $\overline{O_1O_2}=2$이다. 원 C_1 위를 움직이는 점 A에 대하여 직선 AO_2가 원 C_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 원 C_2 위를 움직이는 점 C에 대하여 직선 AC가 원 C_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하자.



다음은 $\overline{BD}$가 최대가 되도록 네 점 A, B, C, D를 정할 때, $\overline{O_1C}^2$을 r에 대한 식으로 나타내는 과정이다.

> 삼각형 ADB에서 사인법칙에 의하여
>
> $\dfrac{\overline{BD}}{\sin A}=$ (가)
>
> 이므로 $\overline{BD}$가 최대이려면 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접해야 한다.
>
> 이때 직각삼각형 ACO_2에서 $\sin A=\dfrac{1}{\overline{AO_2}}$ 이므로
>
> $\overline{BD}=\dfrac{1}{\overline{AO_2}}\times$ (가)
>
> 이다.
>
> 그러므로 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접하고 $\overline{AO_2}$가 최소일 때 $\overline{BD}$는 최대이다.
>
> $\overline{AO_2}$의 최솟값은
>
> (나)
>
> 이므로 $\overline{BD}$가 최대일 때,
>
> $\overline{O_1C}^2=$ (다)
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(r)$, $g(r)$, $h(r)$라 할 때, $f(4)\times g(5)\times h(6)$의 값은?

① 216 ② 192 ③ 168
④ 144 ⑤ 120

03 수1 07 삼각함수의 활용
03 삼각형의 넓이
02 넓이2 (끼인각 공식 조건)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 7

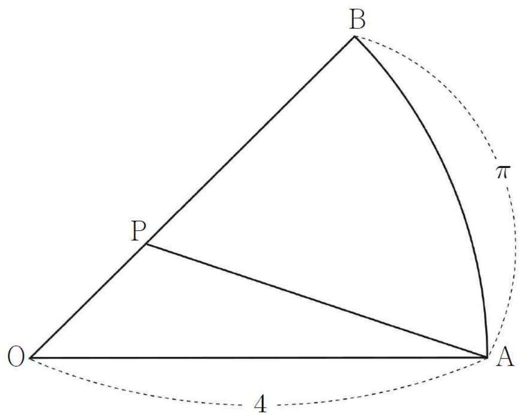
42. $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=\sqrt{7}$인 예각삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{6}$이다. $\angle A=\theta$일 때, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$ ② $\dfrac{2}{7}$ ③ $\dfrac{\sqrt{5}}{7}$
④ $\dfrac{\sqrt{6}}{7}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 14

43. 그림과 같이 반지름의 길이가 4, 호의 길이가 π인 부채꼴 OAB가 있다. 부채꼴 OAB의 넓이를 S, 선분 OB 위의 점 P에 대하여 삼각형 OAP의 넓이를 T라 하자. $\frac{S}{T}=\pi$일 때, 선분 OP의 길이는?

(단, 점 P는 점 O가 아니다.)



① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2}$
④ $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

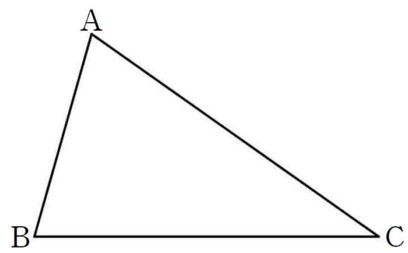
[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 9

44. $\overline{AB}=\overline{AC}=2$인 삼각형 ABC에서 $\angle BAC=\theta(0<\theta<\pi)$라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 1보다 크도록 하는 모든 θ의 값의 범위가 $\alpha<\theta<\beta$일 때, $2\alpha+\beta$의 값은?

① $\frac{7}{6}\pi$ ② $\frac{4}{3}\pi$ ③ $\frac{3}{2}\pi$
④ $\frac{5}{3}\pi$ ⑤ $\frac{11}{6}\pi$

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 1

45. 넓이가 $5\sqrt{2}$인 예각삼각형 ABC에 대하여 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=5$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는?



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{7\sqrt{3}}{4}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

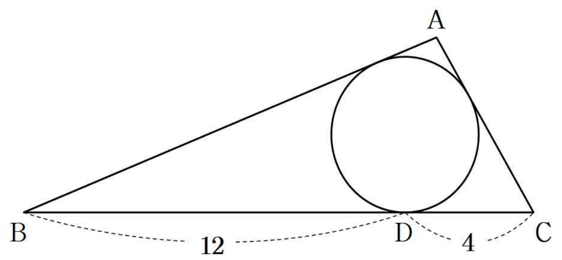
03 수1 07 삼각함수의 활용

03 삼각형의 넓이

04 넓이4 (내접원과 외접원)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 18

46. 반지름의 길이가 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$인 원이 삼각형 ABC에 내접하고 있다. 원이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하고 $\overline{\mathrm{BD}}=12$, $\overline{\mathrm{DC}}=4$일 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이는?



① $\frac{71}{2}$ ② 36 ③ $\frac{73}{2}$

④ 37 ⑤ $\frac{75}{2}$

03 수1 07 삼각함수의 활용

03 삼각형의 넓이

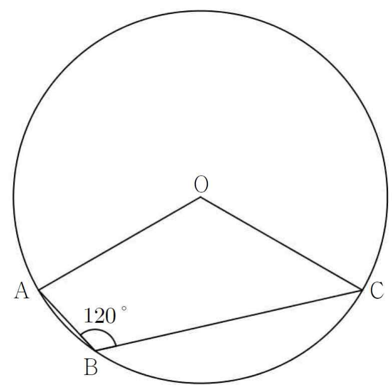
06 넓이6 (각 표시)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 15

47. 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심이 O인 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여

$$\angle \mathrm{ABC}=120°,\ \overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{15}$$

일 때, 사각형 OABC의 넓이는?

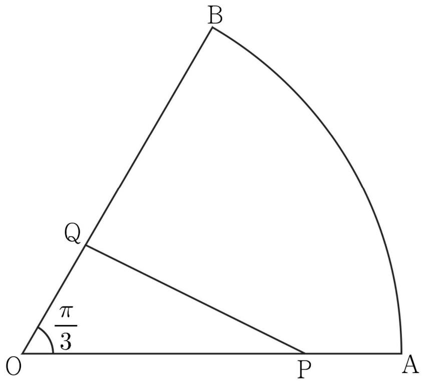


① $5\sqrt{3}$ ② $\frac{11\sqrt{3}}{2}$ ③ $6\sqrt{3}$

④ $\frac{13\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 10

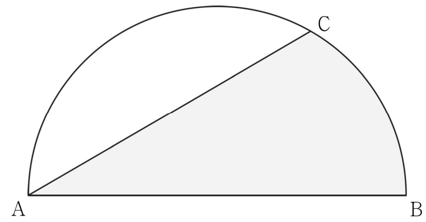
48. 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB에서 선분 OA를 3 : 1로 내분하는 점을 P, 선분 OB를 1 : 2로 내분하는 점을 Q라 하자. 삼각형 OPQ의 넓이가 $4\sqrt{3}$일 때, 호 AB의 길이는?



① $\frac{5}{3}\pi$ ② 2π ③ $\frac{7}{3}\pi$
④ $\frac{8}{3}\pi$ ⑤ 3π

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 17

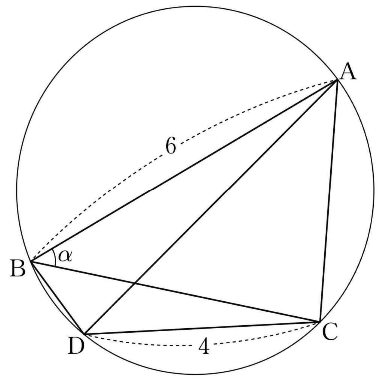
49. 그림과 같이 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB위에 점 C가 있다. 호 CB의 길이가 2π일 때, 두 선분 AB, AC와 호 CB로 둘러싸인 부분의 넓이는?



① $5\pi+9\sqrt{3}$ ② $5\pi+10\sqrt{3}$
③ $6\pi+9\sqrt{3}$ ④ $6\pi+10\sqrt{3}$
⑤ $7\pi+9\sqrt{3}$

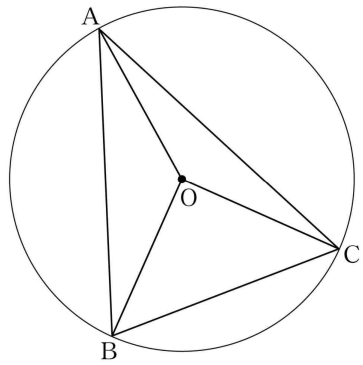
[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 29

50. 그림과 같이 예각삼각형 ABC가 한 원에 내접하고 있다. $\overline{AB}=6$이고, $\angle ABC=\alpha$라 할 때 $\cos\alpha=\frac{3}{4}$이다. 점 A를 지나지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{CD}=4$이다. 두 삼각형 ABD, CBD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1 : S_2 = 9 : 5$이다. 삼각형 ADC의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오.



[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 19

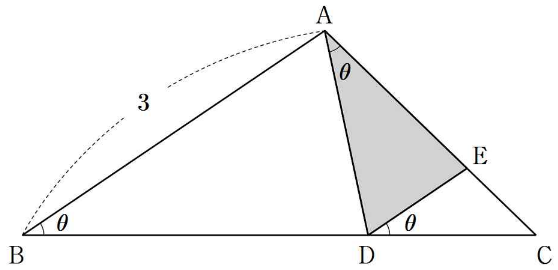
51. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC에 대하여 두 삼각형 OAB, OCA의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $3S_1 = 4S_2$이고 $\overline{BC}=2\sqrt{5}$일 때, 선분 AB의 길이는?



① $2\sqrt{7}$ ② $\sqrt{30}$ ③ $4\sqrt{2}$
④ $\sqrt{34}$ ⑤ 6

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 17

52. $0<\theta<\frac{\pi}{4}$인 임의의 실수 θ에 대하여 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\angle\mathrm{ABC}=\theta$, $\angle\mathrm{CAB}=3\theta$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위에 점 D를 $\angle\mathrm{DAC}=\theta$가 되도록 잡고, 선분 AC 위에 점 E를 $\angle\mathrm{EDC}=\theta$가 되도록 잡는다. 다음은 삼각형 ADE의 넓이 $S(\theta)$를 구하는 과정이다.



$\angle\mathrm{ABC}=\theta$, $\angle\mathrm{DAB}=2\theta$이므로 $\angle\mathrm{BDA}=\pi-3\theta$이다.

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin\theta}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\boxed{(가)}}$$

이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\frac{3\sin\theta}{\boxed{(가)}}$이다.

또한 $\angle\mathrm{ADE}=2\theta$이므로

$$\overline{\mathrm{DE}}=\boxed{(나)}\times\overline{\mathrm{AD}}^2$$

이다. 따라서 삼각형 ADE의 넓이 $S(\theta)$는

$$S(\theta)=\frac{9}{2}\times\left(\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}\right)^3\times\boxed{(다)}$$

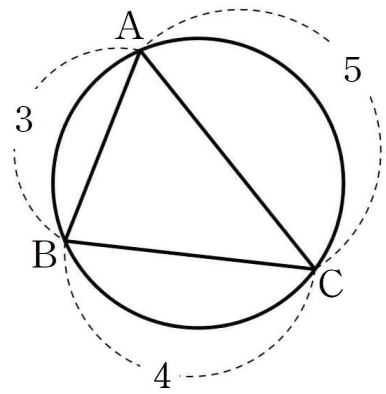
이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $p\times f\left(\frac{\pi}{6}\right)\times g\left(\frac{\pi}{12}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 11

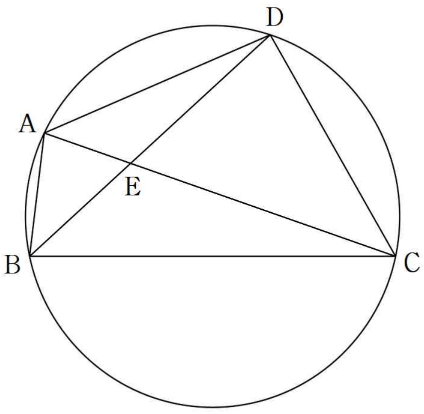
53. 그림과 같이 원에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. 호 AB, 호 BC, 호 CA의 길이가 각각 3, 4, 5이고 삼각형 ABC의 넓이가 S일 때, $\frac{\pi^2 S}{9}$의 값은?



① $2-\sqrt{3}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $1+\sqrt{3}$
④ $2+\sqrt{3}$ ⑤ $3+\sqrt{3}$

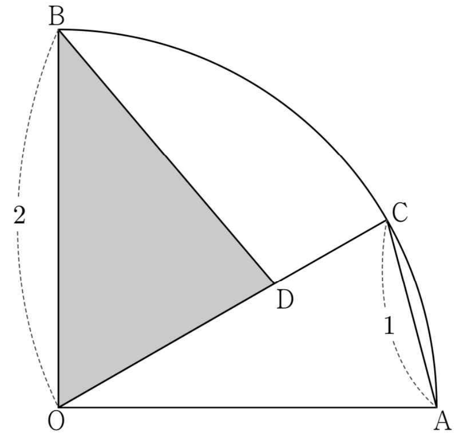
[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 29

54. $\overline{DA}=2\overline{AB}$, $\angle DAB=\frac{2}{3}\pi$이고 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 사각형 ABCD가 있다. 두 대각선 AC, BD의 교점을 E라 할 때, 점 E는 선분 BD를 3 : 4로 내분한다. 사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 16

55. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위에 점 C를 $\overline{AC}=1$이 되도록 잡는다. 선분 OC 위의 점 O가 아닌 점 D에 대하여 삼각형 BOD의 넓이가 $\frac{7}{6}$일 때, 선분 OD의 길이는?



① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{31}{24}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{11}{8}$ ⑤ $\frac{17}{12}$

03 수1 07 삼각함수의 활용

03 삼각형의 넓이

07 넓이7 (넓이관계식)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 29

56. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

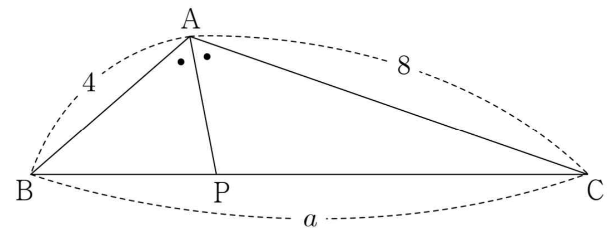
(가) $\cos A = -\frac{1}{4}$

(나) $\sin B + \sin C = \frac{9}{8}$

삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{15}$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 20

57. 그림과 같이 양수 a에 대하여 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=8$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle BAC$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 P라 하자. $a(\sin B+\sin C)=6\sqrt{3}$일 때, 선분 AP의 길이는? (단, $\angle BAC > 90^\circ$)

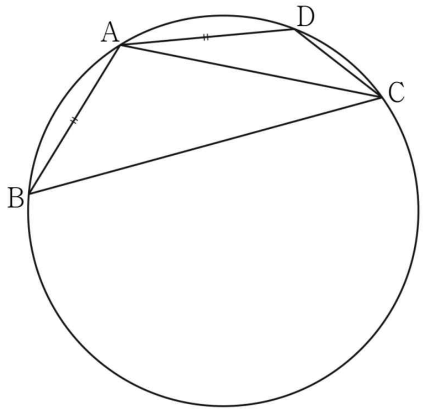


① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3
④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 15

58. 그림과 같이 반지름의 길이가 $R(5<R<5\sqrt{5})$인 원에 내접하는 사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

> ◦ $\overline{AB}=\overline{AD}$이고 $\overline{AC}=10$이다.
> ◦ 사각형 ABCD의 넓이는 40이다.



다음은 선분 BD의 길이와 R의 비를 구하는 과정이다.

> $\overline{AB}=\overline{AD}=k$라 할 때
> 두 삼각형 ABC, ACD에서 각각 코사인법칙에 의하여
> $\cos(\angle ACB)=\dfrac{1}{20}\left(\overline{BC}+\dfrac{\boxed{(가)}}{\overline{BC}}\right)$,
> $\cos(\angle DCA)=\dfrac{1}{20}\left(\overline{CD}+\dfrac{\boxed{(가)}}{\overline{CD}}\right)$
> 이다.
> 이때 두 호 AB, AD에 대한 원주각의 크기가 같으므로
> $\cos(\angle ACB)=\cos(\angle DCA)$이다.
> 사각형 ABCD의 넓이는
> 두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합과 같으므로
> $\dfrac{1}{2}k^2\sin(\angle BAD)+\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin(\pi-\angle BAD)=40$
> 에서 $\sin(\angle BAD)=\boxed{(나)}$이다.
> 따라서 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
> $\overline{BD}:R=\boxed{(다)}:1$이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $\dfrac{f(10p)}{q}$의 값은?

① $\dfrac{25}{2}$ ② 15 ③ $\dfrac{35}{2}$
④ 20 ⑤ $\dfrac{45}{2}$

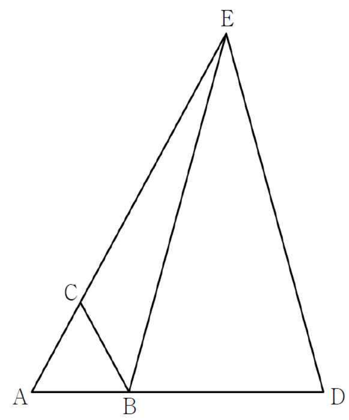
03 수1 07 삼각함수의 활용

03 삼각형의 넓이

08 넓이8 (포함과 배제)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 16

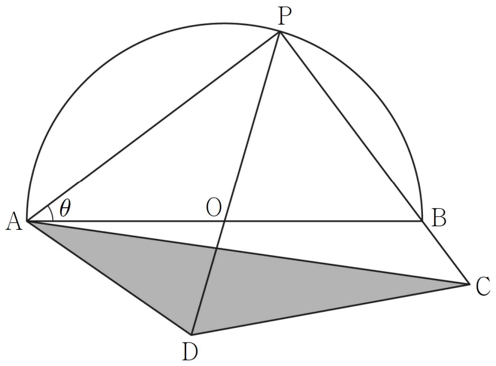
59. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC에서 선분 AB의 연장선과 선분 AC의 연장선 위에 $\overline{AD}=\overline{CE}$가 되도록 두 점 D, E를 잡는다. $\overline{DE}=\sqrt{13}$일 때, 삼각형 BDE의 넓이는?



① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{14}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 19

60. 중심이 O이고 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 점 P가 있다. 그림과 같이 선분 PB의 연장선 위에 $\overline{PA}=\overline{PC}$인 점 C를 잡고, 선분 PO의 연장선 위에 $\overline{PA}=\overline{PD}$인 점 D를 잡는다. $\angle PAB=\theta$에 대하여 $4\sin\theta=3\cos\theta$일 때, 삼각형 ADC의 넓이는?



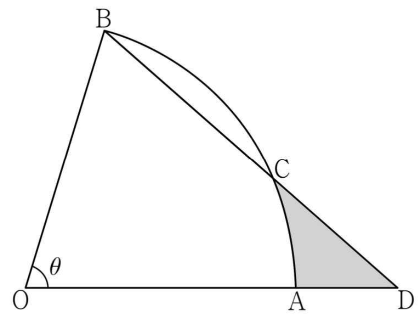
① $\frac{63}{5}$ ② $\frac{127}{10}$ ③ $\frac{64}{5}$

④ $\frac{129}{10}$ ⑤ 13

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 19

61. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB의 삼등분점 중
점 A에 가까운 점을 C라 하고, 직선 OA와 직선 BC가 만나는 점을 D라 하자. 다음은 두 선분 AD, CD와 호 AC로 둘러싸인 부분의 넓이 $S(\theta)$를 구하는 과정이다.

(단, $0<\theta<\frac{3}{4}\pi$)



> 점 C가 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점이므로
> $\angle BOC=\boxed{(가)}$
> 이다. 또한, 삼각형 BOC에서
> $\angle OBC=\angle OCB=\frac{1}{2}\left(\pi-\boxed{(가)}\right)$
> 이다. 한편, 삼각형 BOD에서 사인법칙에 의하여
> $\overline{OD}=\dfrac{\cos\frac{\theta}{3}}{\boxed{(나)}}$
> 이다. $S(\theta)$는 삼각형 COD의 넓이에서 부채꼴 OAC의 넓이를 뺀 값이므로
> $S(\theta)=\frac{1}{2}\times\dfrac{\cos\frac{\theta}{3}}{\boxed{(나)}}\times\sin\frac{\theta}{3}-\boxed{(다)}$
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$, $h(\theta)$라 할 때, $\dfrac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)\times g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h\left(\frac{\pi}{8}\right)}$의 값은?

① $8\sqrt{3}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{2}$ ③ $9\sqrt{3}$

④ $\frac{19\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $10\sqrt{3}$

03 수1 07 삼각함수의 활용

03 삼각형의 넓이

09 넓이9 (Mm)

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 20

62. $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=7$, $\overline{AC}=6$인 삼각형 ABC가 있다. 두 선분 AB, AC위에 삼각형 ADE의 외접원이 선분 BC에 접하도록 점 D, E를 각각 잡을 때, 선분 DE의 길이의 최솟값은?

① $\frac{64}{15}$ ② $\frac{81}{20}$ ③ 4

④ $\frac{121}{30}$ ⑤ $\frac{144}{35}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 14

63. 길이가 14인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C를 $\overline{BC}=6$이 되도록 잡는다. 점 D가 호 AC 위의 점일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 D는 점 A와 점 C가 아닌 점이다.)

<보 기>

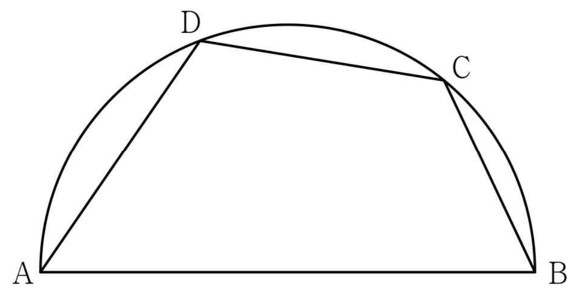
ㄱ. $\sin(\angle CBA)=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

ㄴ. $\overline{CD}=7$일 때, $\overline{AD}=-3+2\sqrt{30}$

ㄷ. 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $20\sqrt{10}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



[수학1] [7삼각함수의 활용] 교사평경 최근 3개년(빠른 정답)

년도별경향 2022.12.27

1. [정답] ③
2. [정답] ④
3. [정답] **21**
4. [정답] ③
5. [정답] ②

6. [정답] ④
7. [정답] ②
8. [정답] ④
9. [정답] ②
10. [정답] 21

11. [정답] **7**
12. [정답] ⑤
13. [정답] ③
14. [정답] ①
15. [정답] **50**

16. [정답] **27**
17. [정답] **20**

18. [정답] **41**
19. [정답] ⑤
20. [정답] ①

21. [정답] 84
22. [정답] ②
23. [정답] ③
24. [정답] ②
25. [정답] ③

26. [정답] ④
27. [정답] ①
28. [정답] **36**
29. [정답] ④
30. [정답] **27**

31. [정답] 15
32. [정답] ②
33. [정답] **26**
34. [정답] ⑤
35. [정답] ④

36. [정답] ①
37. [정답] ①
38. [정답] 11
39. [정답] ②
40. [정답] ①

41. [정답] ④
42. [정답] ⑤
43. [정답] ③
44. [정답] ①
45. [정답] ①

46. [정답] ②
47. [정답] ⑤
48. [정답] ④
49. [정답] ③
50. [정답] **63**

51. [정답] ③
52. [정답] ②
53. [정답] ⑤
54. [정답] **13**
55. [정답] ③

56. [정답] 71
57. [정답] ②
58. [정답] ⑤
59. [정답] ④
60. [정답] ③

61. [정답] ①
62. [정답] ⑤
63. [정답] ⑤

[수학1] [7삼각함수의 활용] 교사평경 최근 3개년(해설)

년도별경향 2022.12.27

1) [정답] ③

[해설]
삼각형 ABC에서 $\angle A=45^\circ$, $\angle B=15^\circ$이므로
$\angle C=180^\circ-45^\circ-15^\circ=120^\circ$
이때 사인법칙에 의하여
$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle C)}=\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle A)}$
이므로
$\frac{8}{\sin 120^\circ}=\frac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ}$
따라서
$\overline{BC}=\frac{8}{\sin 120^\circ}\times\sin 45^\circ=\frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{8\sqrt{6}}{3}$

2) [정답] ④

[해설]

사인법칙에 의해 $\frac{5}{\sin\theta}=2\times4$, $\sin\theta=\frac{5}{8}$

3) [정답] **21**

[해설]

반지름의 길이 $R=15$인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서

$\sin B=\frac{7}{10}$이므로 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2\times R$에 대입하면

$\overline{AC}=2\times15\times\frac{7}{10}=21$

4) [정답] ③

[해설]

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 15이므로

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2\times15$

따라서

$\overline{AC}=2\times15\times\sin B$

$=2\times15\times\frac{7}{10}$

$=21$

5) [정답] ②

[해설]
$4\cos^2 A-5\sin A+2=0$에서 $-4\sin^2 A-5\sin A+6=0$

$\therefore \sin A=\frac{3}{4}$ 또는 $-\frac{1}{2}$

선분 BC의 길이가 3에서 $\overline{BC}=2\times R\times\frac{3}{4}=3$ ($\because \sin A>0$)

$\therefore R=2$

6) [정답] ④

[해설]
$\sin\theta=\frac{2\sqrt{14}}{9}$이므로

$\cos^2\theta=1-\left(\frac{2\sqrt{14}}{9}\right)^2=1-\frac{56}{81}=\frac{25}{81}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta=\frac{5}{9}$

코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=3^2+6^2-2\times3\times6\times\frac{5}{9}=25$

따라서 선분 AC의 길이는 5

7) [정답] ②

[해설]

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라 하면

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$이므로

$a:b:c=2:3:4$

$a=2k$, $b=3k$, $c=4k(k>0)$이라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{4k^2+9k^2-16k^2}{12k^2}=-\frac{1}{4}$

8) [정답] ④

[해설]

$\angle A=\frac{2\pi}{3}$, $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}+\overline{BC}=24$이므로 $\overline{AC}=x$라 하면

$\overline{BC}=24-x$

코사인법칙에 의해서

$$(24-x)^2=6^2+x^2-2\cdot 6\cdot x\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$$

즉, $x^2-48x+576=x^2+6x+36$이므로 $54x=540$

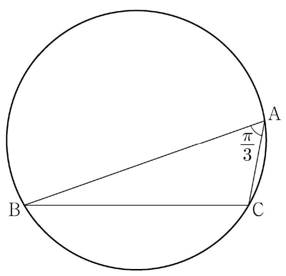
$\therefore\ x=10$

$\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=10$, $\overline{BC}=14$이므로 코사인법칙에 의해

$$\cos B=\frac{6^2+14^2-10^2}{2\cdot 6\cdot 14}=\frac{11}{14}$$

9) [정답] ②

[해설]



원의 반지름이 7이고, 위의 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\times 7$$

$\therefore \overline{BC}=7\sqrt{3}$

$\overline{AB}$: $\overline{AC}=3$: 1이므로 $\overline{AB}=3x$, $\overline{AC}=x$라 하면 삼각형 ABC에서 제이코사인법칙에 의하여

$$(7\sqrt{3})^2=(3x)^2+x^2-2\times 3x\times x\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$7x^2=147$, $x^2=21$

$\therefore x=\sqrt{21}\ (\because x>0)$

따라서 선분 AC의 길이는 $\overline{AC}=\sqrt{21}$

10) [정답] 21

[해설]

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로
사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\times 7$, $\overline{BC}=\sin\frac{\pi}{3}\times 2\times 7=7\sqrt{3}$ …… ㉠

한편, $\overline{AB}$: $\overline{AC}=3$: 1이므로

$\overline{AC}=k\ (k>0)$에서 $\overline{AB}=3k$이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=9k^2+k^2-2\times 3k\times k\times\frac{1}{2}$

$=7k^2$

따라서 $\overline{BC}=\sqrt{7}k$ …… ㉡

㉠과 ㉡에서

$7\sqrt{3}=\sqrt{7}k$

$k=\sqrt{21}$

이므로 $k^2=21$

11) [정답] 7

[해설]

$\overline{AB}$: $\overline{BC}$: $\overline{CA}=1$: 2 : $\sqrt{2}$에서

삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 길이를

각각 k, $2k$, $\sqrt{2}k(k>0)$이라 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$2k^2=k^2+4k^2-4k^2\cos(\angle ABC)$

$4k^2\cos(\angle ABC)=3k^2$

$\cos(\angle ABC)=\frac{3}{4}$이므로

$\sin(\angle ABC)=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 28π이므로

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{7}$이다.

따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{CA}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=4\sqrt{7}$이므로 선분 CA의 길이는 7이다.

12) [정답] ⑤

[해설]

삼각형 APB의 외접원의 반지름의 길이 R는 부채꼴 OAB의 반지름의 길이와 같으므로 $R=6$

$\angle BPA=\theta\left(\theta>\frac{\pi}{2}\right)$라 할 때,

삼각형 APB에서 사인법칙에 의하여

$\sin\theta=\frac{8\sqrt{2}}{2\times6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos^2\theta=1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

$\theta>\frac{\pi}{2}$일 때, $\cos\theta<0$이므로 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$

$\overline{BP}=k$라 하면, $\overline{AP}:\overline{BP}=3:1$이므로 $\overline{AP}=3k$

삼각형 APB에서 코사인법칙에 의하여

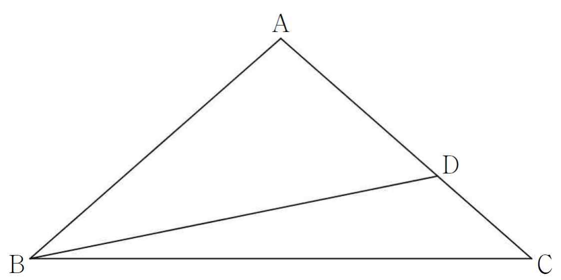
$(3k)^2+k^2-2\times3k\times k\times\left(-\frac{1}{3}\right)=(8\sqrt{2})^2$

$9k^2+k^2+2k^2=128,\ k^2=\frac{32}{3}$

따라서 선분 BP의 길이는 $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

13) [정답] ③

[해설]



삼각형 BDC에서 사인법칙에 의하여

$$\sin C=\frac{\overline{BD}\times\sin(\angle DBC)}{\overline{DC}}$$

마찬가지로 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{\overline{BD}\times\sin(\angle ABD)}{\overline{AD}}$$

조건에서 $\overline{AD}:\overline{DC}=5:3$이고

$$2\sin(\angle ABD)=5\sin(\angle DBC)$$

즉, $\sin(\angle ABD):\sin(\angle DBC)=5:2$이므로

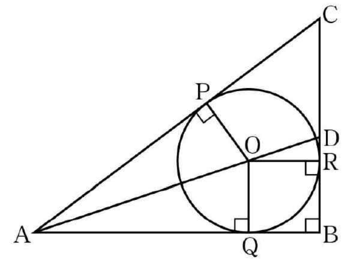
$$\therefore\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{\overline{BD}\times\sin(\angle DBC)}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}\times\sin(\angle ABD)}$$

$$=\frac{\overline{AD}\times\sin(\angle DBC)}{\overline{DC}\times\sin(\angle ABD)}$$

$$=\frac{5}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{3}$$

14) [정답] ①

[해설]



삼각형 ABC에 내접하는 원이 세 선분 CA, AB, BC와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자.

$\overline{OQ}=\overline{OR}=3$이므로 $\overline{DR}=\overline{DB}-\overline{RB}=1$

$\overline{DO}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$이므로

$$\sin(\angle DOR)=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

삼각형 DOR와 삼각형 OAQ는 닮음비가 1 : 3이므로

$$\overline{AQ}=3\times\overline{OR}=9$$

이때 점 O가 삼각형 ABC의 내심이므로

$$\overline{PA}=\overline{AQ}=9,\ \angle CAD=\angle DAB$$

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC},\ 12:(9+\overline{CP})=4:(\overline{CR}-1)$$

$$9+\overline{CP}=3(\overline{CR}-1)$$

이때 $\overline{CP}=\overline{CR}$이므로 $\overline{CR}=6$, 즉 $\overline{CD}=5$

직선 OR와 직선 AB가 평행하므로

$$\angle DAB=\angle DOR$$

즉 $\angle CAD=\angle DOR$

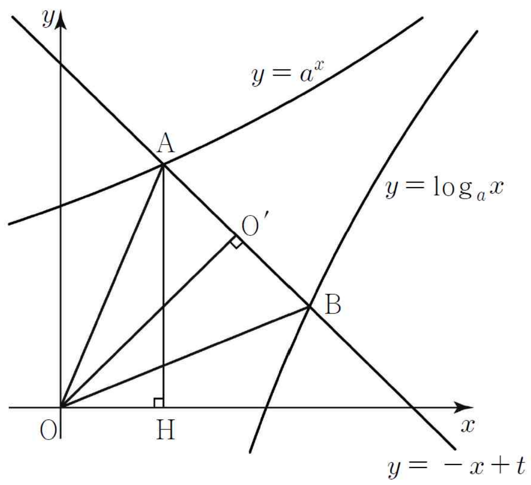
삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$2R=\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=5\sqrt{10}$$

$R=\frac{5\sqrt{10}}{2}$이므로 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는 $\frac{125}{2}\pi$이다.

15) [정답] **50**

[해설]



점 A의 좌표를 $(p,\ q)(q>p)$라 하면

$q=a^p,\ p+q=t$ ...... ㉠

함수 $y=\log_a x$는 함수 $y=a^x$의 역함수이므로

점 B의 좌표는 $(q,\ p)$

$\overline{AB}=\sqrt{2(q-p)^2}=\sqrt{2}(q-p)$

조건 (가)에 의하여

$2\overline{OH}=\overline{AB},\ 2p=\sqrt{2}(q-p),$

$q=(1+\sqrt{2})p$ ...... ㉡

원점 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 O′이라 하면 조건 (가)에 의하여 $\overline{OH}=\overline{BO'}$이고

$\overline{OA}=\overline{OB},\ \angle OHA=\angle BO'O=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\triangle AOH\equiv\triangle OBO'$ ...... ㉢

$\angle AOB=\theta$라 하면

$\angle AOH=\angle O'OH+\angle AOO'$

$=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}$

$\angle OBO'=\dfrac{\pi}{2}-\angle BOO'$

$=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$

㉢에 의하여 $\angle AOH=\angle OBO'$이므로

$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2},\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$

사인법칙에 의하여

$\overline{AB}=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sin\dfrac{\pi}{4}=1=2p$

$p=\dfrac{1}{2}$

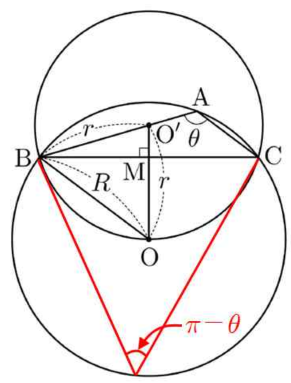
㉡에 의하여 $q=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

㉠에 의하여 $t=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ a=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $200(t-a)=50$

16) [정답] **27**

[해설]



□BACQ는 원 위에 내접하는 사각형이므로

$\angle BQC=\pi-\theta$

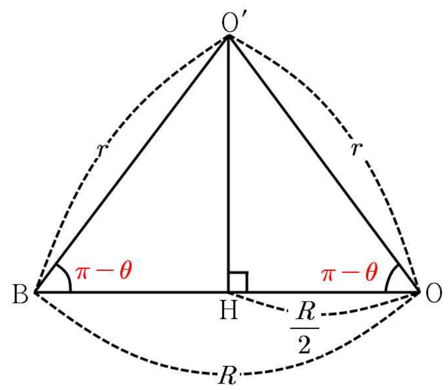
$\angle BQC$는 $\overset{\frown}{BC}$의 원주각이고 $\angle BOC$는 $\overset{\frown}{BC}$의 중심각이므로

$\angle BOC=2\pi-2\theta$

$\triangle BOM\equiv\triangle COM$이므로 $\angle O'OB=\pi-\theta$이고

$\angle BO'O=2\theta-\pi$이다.

(i)



$\triangle O'BO$는 이등변삼각형이므로

$\angle O'BO=\angle O'OB=\pi-\theta$

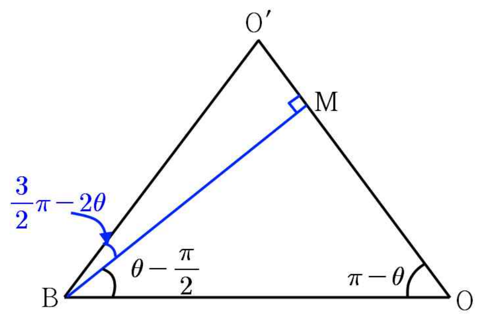
점 O′에서 $\overline{BO}$에 수선을 긋고, 수선의 발을 H라고 하면 $\triangle O'OH$에서

$\cos(\pi-\theta)=\dfrac{\frac{R}{2}}{r},\ -\cos\theta=\dfrac{\frac{R}{2}}{r},\ \dfrac{R}{2}=-r\cos\theta$

$\therefore R=-2\cos\theta r$

따라서 (가)는 $-2\cos\theta$ ...... ㉠

(ii)



△BO′M에서

$$\angle O'BM+\angle BMO'+\angle MO'B=\pi$$

$$\angle O'BM+\frac{\pi}{2}+2\theta-\pi=\pi$$

$$\angle O'BM=\frac{3}{2}\pi-2\theta$$

△O′BM에서

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-2\theta\right)=-\cos2\theta$$

따라서 (나)는 $-\cos2\theta$ …… ㉡

(iii) △ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle O'BM)},\quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\sin\theta}{1-2\cos^2\theta}$$

따라서 (다)는 $\frac{\sin\theta}{1-2\cos^2\theta}$ …… ㉢

즉, ㉠, ㉡, ㉢에서

$$f(\theta)=-2\cos\theta,\ g(\theta)=-\cos2\theta,\ h(\theta)=\frac{\sin\theta}{1-2\cos^2\theta}$$

그런데, $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\frac{\sqrt{10}}{5}$이므로

$$f(\alpha)+g(\beta)+\left\{h\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right\}^2$$

$$=\frac{6}{5}+1-2\times\frac{2}{5}+3$$

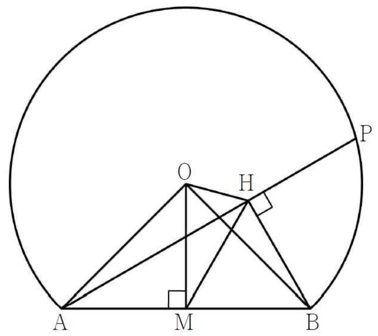
$$=\frac{22}{5}$$

따라서 $\frac{q}{p}=\frac{22}{5}$에서 $p=5$, $q=22$이므로

$$p+q=2+5=27$$

17) [정답] **20**

[해설]



점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하면 삼각형 OAB는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AM}=\overline{BM}$

삼각형 OAM에서 $\overline{OA}=2$, $\angle OAM=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\overline{AM}=\overline{OM}=\overline{BM}=\sqrt{2}$$

삼각형 ABH에서 $\angle BAH=\frac{\pi}{6}$이므로 $\overline{BH}=\sqrt{2}$

삼각형 BHM에서 $\overline{BM}=\overline{BH}=\sqrt{2}$, $\angle ABH=\frac{\pi}{3}$이므로

삼각형 BHM은 정삼각형

따라서 $\overline{HM}=\sqrt{2}$, $\angle BMH=\frac{\pi}{3}$

삼각형 OMH에서 $\angle OMH=\frac{\pi}{6}$, $\overline{OM}=\overline{HM}=\sqrt{2}$이므로

코사인법칙에 의하여

$$\overline{OH}^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\cos\frac{\pi}{6}$$

$$=4-2\sqrt{3}$$

$$m=4,\ n=-2$$

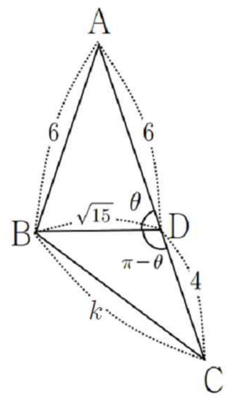
따라서 $m^2+n^2=20$

18) [정답] **41**

[해설]

$\overline{AC}=10$, $\overline{AB}=\overline{AD}=6$이므로 $\overline{DC}=4$이다.

$\overline{BC}=k$, $\angle ABD=\theta$라 하면 $\angle BDC=\pi-\theta$이고 다음 그림과 같다.



삼각형 ABD에서 코사인법칙을 쓰면

$$6^2=6^2+\sqrt{15}^2-2\cdot 6\cdot \sqrt{15}\cdot \cos\theta$$

$$36=51-12\sqrt{15}\cos\theta \quad \cdots\cdots ㉠$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙을 쓰면

$$k^2=4^2+\sqrt{15^2}-2\cdot 4\cdot \sqrt{15}\cdot \cos(\pi-\theta)$$

$$k^2=31+8\sqrt{15}\cos\theta \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하면 $3k^2+72=93+102$

$$\therefore k^2=41$$

19) [정답] ⑤

[해설]

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 대하여

$$\cos A=\frac{6^2+6^2-(\sqrt{15})^2}{2\times6\times6}=\frac{57}{72}=\frac{19}{24}$$

이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 대하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\cos A$

$=6^2+10^2-2\times6\times10\times\frac{19}{24}$

$=36+100-95$

$=41$

따라서 $\overline{BC}=\sqrt{41}$

20) [정답] ①

[해설]

$\angle DCG=\theta\ (0<\theta<\pi)$, $\angle BCE=\pi-\theta$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{11}}{6}$ 이므로 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=\frac{25}{36}$

코사인법칙에 의하여

$$\overline{DG}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos\theta$$
$$=25-24\cos\theta$$

$$\overline{BE}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos(\pi-\theta)$$
$$=25-24\cos(\pi-\theta)$$
$$=25+24\cos\theta$$

따라서

$$\overline{DG}\times\overline{BE}=\sqrt{25^2-24^2\times\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{25^2-24^2\times\frac{25}{36}}$$
$$=5\sqrt{25-16}$$
$$=15$$

21) [정답] 84

[해설]
호 BD와 호 DC에 대한 원주각의 크기가 같으므로
$\angle CBD=\angle CAD=\angle DAB=\angle DBC$이다. 즉, $\overline{BD}=\overline{DC}$
$\overline{BD}=\overline{DC}=a$, $\overline{AD}=b$, $\angle CAD=\theta$라 하면 $\angle DAB=\theta$이고
$\overline{BD}^2=\overline{DC}^2$이므로 삼각형 DAB와 삼각형 CAD에 각각 코사인법칙을 적용하면
$6^2+b^2-2\times6\times b\times\cos\theta=b^2+8^2-2\times b\times8\times\cos\theta$,
$4b\cos\theta=28$이므로 직각삼각형 ADE에서 $k=b\cos\theta=7$
따라서 $12k=84$

22) [정답] ②

[해설]

$\angle ABC=\theta$라 하자.

ㄱ. 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용하면
$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos\theta$
이므로 $\overline{AC}^2=5^2+4^2-2\times5\times4\times\frac{1}{8}=36$
그러므로 $\overline{AC}=6$ (참)

ㄴ. 호 EA에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로
$\angle ACE=\angle ABE$
호 CE에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로
$\angle EAC=\angle EBC$
한편, $\angle ABE=\angle EBC$이므로 $\angle ACE=\angle EAC$
그러므로 삼각형 EAC는 $\overline{EA}=\overline{EC}$인 이등변삼각형이다.
(참)

ㄷ. 삼각형 ABD에서 $\angle ADE=\angle DAB+\angle ABD$

한편, $\angle\mathrm{DAB}=\angle\mathrm{CAD}$, $\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{EBC}$

그러므로 $\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{CAD}+\angle\mathrm{EBC}$

$=\angle\mathrm{CAD}+\angle\mathrm{EAC}$

$=\angle\mathrm{EAD}$

즉, 삼각형 EAD는 $\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{ED}}$인 이등변삼각형이다.
삼각형 EAC에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{EA}}^2+\overline{\mathrm{EC}}^2-2\times\overline{\mathrm{EA}}\times\overline{\mathrm{EC}}\times\cos(\pi-\theta)$이고

ㄴ에서 $\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{EC}}$이므로

$36=2\times\overline{\mathrm{EA}}^2-2\times\overline{\mathrm{EA}}^2\times\left(-\frac{1}{8}\right)$, $\overline{\mathrm{EA}}=4$

그러므로 $\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{ED}}$에서 $\overline{\mathrm{ED}}=4$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

23) [정답] ③

[해설]

$\triangle$ABC에서 코사인법칙을 적용하면

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CA}}\times\cos(\angle\mathrm{BAC})$$
$$=4^2+5^2-2\times4\times5\times\frac{1}{8}$$
$$=1$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=6$

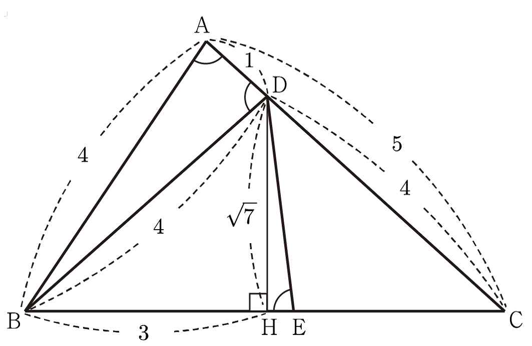
$\triangle$ABD는 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=4$

$\triangle$ABD에서 코사인법칙을 적용하면

$$\overline{\mathrm{DB}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\cos(\angle\mathrm{BAC})$$

$$4^2=4^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-2\times4\times\overline{\mathrm{AD}}\times\frac{1}{8}$$

따라서 $\overline{\mathrm{AD}}=1$, $\overline{\mathrm{CD}}=4$



위의 그림에서 $\triangle$BCD는 이등변 삼각형이므로 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{BH}}=3$

따라서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{7}$

$\cos(\angle\mathrm{BAC})=\cos(\angle\mathrm{DEH})=\frac{1}{8}$이므로

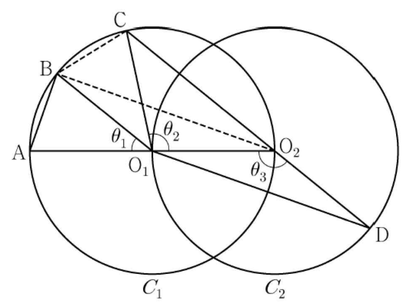
$$\sin(\angle\mathrm{DEH})=\sqrt{1-\cos^2(\angle\mathrm{DEH})}$$
$$=\sqrt{1-\frac{1}{64}}$$
$$=\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

그런데, $\sin(\angle\mathrm{DEH})=\frac{\overline{\mathrm{DH}}}{\overline{\mathrm{DE}}}=\frac{\sqrt{7}}{\overline{\mathrm{DE}}}$이므로 $\frac{\sqrt{7}}{\overline{\mathrm{DE}}}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DE}}=\frac{8}{3}$

24) [정답] ②

[해설]



$\angle\mathrm{CO_2O_1}+\angle\mathrm{O_1O_2D}=\pi$이므로 $\theta_3=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta_2}{2}$이고

$\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로 $\angle\mathrm{CO_1B}=\theta_1$이다.

이때, $\angle\mathrm{O_2O_1B}=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로

삼각형 $\mathrm{O_1O_2B}$와 삼각형 $\mathrm{O_2O_1D}$는 합동이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=k$라 할 때,

$\overline{\mathrm{BO_2}}=\overline{\mathrm{O_1D}}=2\sqrt{2}k$이므로

$\overline{\mathrm{AO_2}}=\sqrt{k^2+(2\sqrt{2}k)^2}=\boxed{3k}$이고,

$\angle\mathrm{BO_2A}=\frac{\theta_1}{2}$이므로

$\cos\frac{\theta_1}{2}=\frac{2\sqrt{2}k}{3k}=\boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$이다.

삼각형 $\mathrm{O_2BC}$에서

$\overline{\mathrm{BC}}=k$, $\overline{\mathrm{BO_2}}=2\sqrt{2}k$, $\angle\mathrm{CO_2B}=\frac{\theta_1}{2}$이므로 삼각형 $\mathrm{BO_2C}$에서

$\overline{\mathrm{O_2C}}=x$ $(0<x<3k)$라 하면

코사인법칙에 의하여

$$k^2=x^2+(2\sqrt{2}k)^2-2\times x\times2\sqrt{2}k\times\cos\frac{\theta_1}{2}$$

$$k^2=x^2+(2\sqrt{2}k)^2-2\times x\times2\sqrt{2}k\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$3x^2-16kx+21k^2=0$$
$$(3x-7k)(x-3k)=0$$

$0<x<3k$이므로

$x=\frac{7}{3}k$

즉, $\overline{O_2C}=\boxed{\frac{7}{3}k}$이다.

$\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로

$\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\frac{\boxed{3k}}{2}+\boxed{\frac{7}{3}k}\right)$이다.

이상에서

$f(k)=3k,\ g(k)=\frac{7}{3}k,\ p=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

이므로

$f(p)\times g(p)$

$=\left(3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\left(\frac{7}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$=\frac{56}{9}$

25) [정답] ③

[해설]

$\angle BAC=\theta$, $\overline{AC}=a$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

즉,

$2^2=3^2+a^2-2\times3\times a\times\frac{7}{8}$

$a^2-\frac{21}{4}a+5=0$

$4a^2-21a+20=0$

$(4a-5)(a-4)=0$

따라서 조건에서 $a>3$이므로 $a=4$

$\overline{AM}=\overline{CM}=\frac{a}{2}=2$

같은 방법으로 삼각형 ABM에서 코사인 법칙에 의하여

$\overline{MB}^2=\overline{AB}^2+\overline{AM}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AM}\times\cos\theta$

$=3^2+2^2-2\times3\times2\times\frac{7}{8}$

$=\frac{5}{2}$

이므로

$\overline{MB}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

이때 두 삼각형 ABM, DCM은 서로 닮은 도형이므로

$\overline{MA}\times\overline{MC}=\overline{MB}\times\overline{MD}$

에서

$2\times2=\frac{\sqrt{10}}{2}\times\overline{MD}$

따라서

$\overline{MD}=\frac{8}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

26) [정답] ④

[해설]

$\overline{AP}=a,\ \overline{BQ}=b$라 하면 $\overline{CR}=1-a-b$이고

$\overline{BP}=1-a,\ \overline{AR}=a+b$이다.

ㄱ. 삼각형 APR에서 코사인법칙에 의해

$\overline{PR}^2=a^2+(a+b)^2-2\times a\times(a+b)\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=a^2+ab+b^2$

삼각형 PBQ에서 코사인법칙에 의해

$\overline{PQ}^2=b^2+(1-a)^2-2\times b\times(1-a)\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=a^2+ab-2a+b^2-b+1$ …… ㉠

$\overline{PR}^2=\overline{PQ}^2$이므로

$a^2+ab+b^2=a^2+ab-2a+b^2-b+1$에서

$2a+b=1$ …… ㉡

그러므로 $2\overline{AP}+\overline{BQ}=1$에서 $4\overline{AP}+\overline{BQ}=2$

$\overline{AP}>0$이므로 $3\overline{AP}+2\overline{BQ}<2$ (거짓)

ㄴ. ㉡에서 $b=1-2a$이므로

$\overline{CQ}=1-b=1-(1-2a)=2a$

$\overline{CR}=1-a-(1-2a)=2$

삼각형 CRQ에서 $\overline{CQ}:\overline{CR}=2:1$이고

$\angle RCQ=\frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 CRQ는 $\angle QRC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

그러므로 $\overline{QR}=\sqrt{\overline{CQ}^2-\overline{CR}^2}=\sqrt{3}a$ (참)

ㄷ. 두 삼각형 PBQ, CRQ의 외접원의 반지름의 길이를 각각 $R_1,\ R_2$라 하면 삼각형 PBQ에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{PQ}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R_1$

삼각형 CRQ에서 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{QR}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R_2$

삼각형 PBQ의 외접원의 넓이가 삼각형 CRQ의 외접원의 넓이의 2배이므로 $R_1=\sqrt{2}\times R_2$

$$\frac{\overline{PQ}}{2\sin\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}\times\frac{\overline{QR}}{2\sin\frac{\pi}{3}}$$ 에서 $\overline{PQ}^2=2\times\overline{QR}^2$

㉠, ㉡에 의해 $\overline{PQ}^2=3a^2-3a+1$이고 $\overline{QR}^2=3a^2$이므로

$3a^2-3a+1=6a^2$, $3a^2+3a-1=0$

$$a=\frac{-3\pm\sqrt{9+12}}{6}$$

$a>0$이므로 $a=\dfrac{\sqrt{21}-2}{6}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

27) [정답] ①

[해설]

주어진 원이 삼각형 BCD의 외접원이고 반지름의 길이가 r이므로 사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}=2r\sin\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}r,\ \overline{BC}=2r\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}r$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{3}r)^2$$
$$=(\sqrt{2})^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2-2\times\sqrt{2}\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)\times\cos\frac{\pi}{3}$$

이 식을 정리하면 $5r^2+2\sqrt{6}r-6=0$

그러므로 $r=\dfrac{-\sqrt{6}\pm 6}{5}$

따라서 $r>0$이므로 $r=\dfrac{6-\sqrt{6}}{5}$

28) [정답] **36**

[해설]

$\angle BAC=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면 삼각형 ABC에서

코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos\theta=25-24\cos\theta$$
$$\overline{BC}=\sqrt{25-24\cos\theta}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R_1이라 하면

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2R_1,\ R_1=\frac{\sqrt{25-24\cos\theta}}{2\sin\theta}$$

직각삼각형 ABD에서 $\overline{AD}=\overline{AB}\cos\theta=3\cos\theta$

직각삼각형 ACE에서 $\overline{AE}=\overline{AC}\cos\theta=4\cos\theta$

삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{DE}^2=(3\cos\theta)^2+(4\cos\theta)^2-2\times3\cos\theta\times4\cos\theta\times\cos\theta$$
$$=25\cos^2\theta-24\cos^3\theta$$
$$=\cos^2\theta(25-24\cos\theta)$$
$$\overline{DE}=\cos\theta\sqrt{25-24\cos\theta}$$

삼각형 ADE의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하면

사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{DE}}{\sin\theta}=2R_2$, $R_2=\dfrac{\cos\theta\sqrt{25-24\cos\theta}}{2\sin\theta}$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이와 삼각형 ADE의 외접원의 넓이의 차가 4π이므로

$$4\pi=\pi R_1^2-\pi R_2^2$$
$$=\pi\times\frac{(1-\cos^2\theta)(25-24\cos\theta)}{4\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\pi(25-24\cos\theta)}{4}$$

$$\cos\theta=\frac{3}{8},\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{55}}{8}$$

사각형 AEPD에서 $\angle AEP=\angle ADP=\dfrac{\pi}{2}$

이므로 네 점 A, E, P, D는 선분 AP를 지름으로 하는 한 원 위에 있고 삼각형 PDE의 외접원은 삼각형 ADE의 외접원과 일치한다.

삼각형 PDE의 외접원의 넓이는 πR_2^2

$$R_2=\frac{\frac{3}{8}\times\sqrt{25-24\times\frac{3}{8}}}{2\times\frac{\sqrt{55}}{8}}=\frac{6}{\sqrt{55}}$$

$$\pi R_2^2=\pi\left(\frac{6}{\sqrt{55}}\right)^2=\frac{36}{55}\pi$$

따라서 $a=\dfrac{36}{55}$, $55a=36$

[참고]

두 삼각형 ABC, ADE는 서로 닮음이고, 닮음비가 $1:\cos\theta$이므로

$$\overline{DE}=\overline{BC}\times\cos\theta,\ R_2=R_1\times\cos\theta$$

29) [정답] ④

[해설]

선분 AP가 $\angle BAC$의 이등분선이고 $\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$이므로 $\overline{BP}:\overline{PC}=3:1$이다.

$\overline{PC}=k$라 하면 $\overline{BP}=3k$이다.

삼각형 BAC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3^2+1^2-(4k)^2}{2\times3\times1}$에서 $k>0$이므로 $k=\frac{\sqrt{7}}{4}$이다.

삼각형 APC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\frac{k}{\sin\frac{\pi}{6}}=2R$이므로 $R=\frac{\sqrt{7}}{4}$이다.

따라서 삼각형 APC의 외접원의 넓이는 $\frac{7}{16}\pi$

30) [정답] **27**

[해설]

선분 AB는 삼각형 ABC의 외접원의 지름이므로 삼각형 ABC는 직각삼각형이다.

$\angle BCA=\frac{\pi}{2}$, $\angle CAB=\alpha$라 하면 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$이고,

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{8}{9}$이므로 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overline{BC}=\overline{AB}\times\sin\alpha$이므로 $\overline{AB}=18$이고, $\overline{AC}=6$

점 D는 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점이므로

$\overline{AD}=10$

삼각형 CAD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DC}^2=6^2+10^2-2\times6\times10\times\cos\alpha=96$

$\therefore \overline{DC}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$

삼각형 CAD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{DC}}{\sin\alpha}=2R$에서 $R=3\sqrt{3}$

삼각형 CAD의 외접원의 넓이 S는 $S=27\pi$이므로 $\frac{S}{\pi}=27$

31) [정답] 15

[해설]

$\overline{AC}=k$라 하면 $\overline{BD}=2k$이고

$\overline{AH}:\overline{HB}=1:3$이므로 $\overline{AH}=\frac{1}{2}$

$\angle CAB=\theta$라 할 때, 두 삼각형 ABC, ABD에서 사인법칙을 이용하면

$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2r$, $\frac{\overline{AD}}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{\overline{AD}}{\sin\theta}=2R$

즉, $\overline{BC}=2r\sin\theta$, $\overline{AD}=2R\sin\theta$

$4(R^2-r^2)\times\sin^2\theta=(2R\sin\theta)^2-(2r\sin\theta)^2$이므로

두 식을 $(2R\sin\theta)^2-(2r\sin\theta)^2=51$에 대입하면

$\overline{AD}^2-\overline{BC}^2=51$ …… ㉠

삼각형 AHC에서 $\cos\theta=\frac{\overline{AH}}{\overline{CA}}=\frac{1}{2k}$이므로

두 삼각형 ABC, ABD에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

$=4+k^2-2\times2\times k\times\cos\theta=k^2+2$ …… ㉡

$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BD}\times\cos(\pi-\theta)$

$=4+4k^2+2\times2\times2k\times\cos\theta=4k^2+8$ …… ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 $\overline{AD}^2-\overline{BC}^2=3k^2+6=51$

즉, $k^2=15$

따라서 $\overline{AC}^2=15$

32) [정답] ②

[해설]

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$이므로

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)}=4\sqrt{7}$

즉, $\overline{BC}=\sin\frac{\pi}{3}\times4\sqrt{7}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4\sqrt{7}=2\sqrt{21}$

또, 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이도 $2\sqrt{7}$이므로

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)}=4\sqrt{7}$

즉, $\overline{BD}=\sin(\angle BCD)\times4\sqrt{7}=\frac{2\sqrt{7}}{7}\times4\sqrt{7}=8$

한편, $\angle BDC=\pi-\angle BAC=\frac{2}{3}\pi$이므로 $\overline{CD}=x$라 하면

삼각형 BCD에서 코사인 법칙에 의하여

$(2\sqrt{21})^2=x^2+8^2-2\times x\times8\times\cos\frac{2}{3}\pi$

$x^2+8x-20=0$, $(x-2)(x+10)=0$

$x>0$이므로 $x=2$

즉, $\overline{CD}=2$

따라서 $\overline{BD}+\overline{CD}=8+2=10$

33) [정답] **26**

[해설]

$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{2}$이므로 사인법칙에 의하여 두 원의 반지름의 길이의 비는 3 : 2이다.

각각의 반지름의 길이를 $3r$, $2r$라 하면 삼각형 AOO′에서 코사인법칙에서

$1=9r^2+4r^2-12r^2\cos(\pi-(\alpha+\beta))=17r^2$

$r^2=\frac{1}{17}$,

$\therefore S=9r^2\pi=\frac{9}{17}\pi,\ p+q=26$

34) [정답] ⑤

[해설]

$\angle\mathrm{CED}=\frac{\pi}{4}$이므로 $\triangle\mathrm{ECD}$에서 코사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{CD}}^2=4^2+(3\sqrt{2})^2-2\times4\times3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=10$

에서 $\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{10}\cdots\cdots$㉠

반지름을 R라 하면 $\overline{\mathrm{OD}}=R$, $\overline{\mathrm{OE}}=R-4$이므로 삼각형 ODE에서 코사인법칙에 의해

$R^2=(R-4)^2+(3\sqrt{2})^2-2\times3\sqrt{2}\times(r-4)\cos\frac{3}{4}\pi$

$\therefore\ \ R=5$

$\angle\mathrm{CAD}=\theta$라 하면 삼각형 ACD에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\theta}=2\mathrm{R}$에서 $\frac{\sqrt{10}}{\sin\theta}=10$ $\quad\therefore\ \sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$

따라서 삼각형 ACE에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin\theta}$에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\frac{4}{\frac{\sqrt{10}}{10}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=4\sqrt{5}\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}=20\sqrt{2}$

[다른 풀이]

$\angle\mathrm{CED}=\frac{\pi}{4}$이므로 $\triangle\mathrm{ECD}$에서 코사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{CD}}^2=4^2+(3\sqrt{2})^2-2\times4\times3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=10$

에서 $\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{10}$

$\angle\mathrm{OCD}=\alpha$라 하면 $\triangle\mathrm{ECD}$에서 코사인법칙에 의해

$\cos\alpha=\frac{4^2+(\sqrt{10})^2-(3\sqrt{2})^2}{2\times4\times10}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\overline{\mathrm{OC}}=R$이라 하면 $\triangle\mathrm{OCD}$에서 코사인법칙에 의해

$R^2=R^2+(\sqrt{10})^2-2R\times\sqrt{10}\times\frac{1}{\sqrt{10}}$에서 $R=5$

$\angle\mathrm{CAD}=\beta$라 하면 $\triangle\mathrm{ACD}$에서 사인법칙에 의해

$\frac{\sqrt{10}}{\sin\beta}=2R$에서 $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\triangle\mathrm{AED}$에서 사인법칙에 의해

$\frac{4}{\sin\beta}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\frac{3}{4}\pi}$에서 $\overline{\mathrm{AC}}=4\sqrt{5}$

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}=4\sqrt{5}\times\sqrt{10}=20\sqrt{2}$

35) [정답] ④

[해설]

삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하여 선분 CD의 길이를 구하자.

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}^2=3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos\frac{\pi}{3}=7$

이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{7}$이다.

$\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{BCD}=\pi$이므로 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$2^2+\overline{\mathrm{CD}}^2-2\times2\times\overline{\mathrm{CD}}\times\cos\frac{2\pi}{3}=7$

이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=\boxed{1}$이다.

삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서 $\angle\mathrm{AEB}$는 공통이고 $\angle\mathrm{EAB}=\angle\mathrm{ECD}$이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다. 따라서 $\frac{\overline{\mathrm{EA}}}{\overline{\mathrm{EC}}}=\frac{\overline{\mathrm{EB}}}{\overline{\mathrm{ED}}}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{CD}}}$이다. 즉,

$\frac{3+\overline{\mathrm{ED}}}{\overline{\mathrm{EC}}}=\frac{2+\overline{\mathrm{EC}}}{\overline{\mathrm{ED}}}=\frac{2}{1}$

에서 $\overline{\mathrm{ED}}=\boxed{\frac{7}{3}}$이다.

$\angle\mathrm{DCE}=\pi-\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{BAD}=\frac{\pi}{3}$

이므로 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면

$\frac{\frac{7}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\sin\theta}$

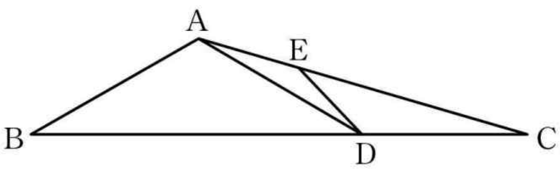
에서 $\sin\theta=\boxed{\frac{3\sqrt{3}}{14}}$이다.

$p=1,\ q=\frac{7}{3},\ r=\frac{3\sqrt{3}}{14}$이므로

$(p+q)\times r=\left(1+\frac{7}{3}\right)\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{5\sqrt{3}}{7}$

36) [정답] ①

[해설]



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle ABC)=\dfrac{2^2+(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{13})^2}{2\times2\times3\sqrt{3}}=\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$이다.

삼각형 ABD에서 $\sin(\angle ABD)=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$

이므로 사인법칙에 의하여 삼각형 ABD의 외접원의

반지름의 길이는 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)}=\boxed{2}$이다.

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}$

이므로

$$\sin(\angle CAD)=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}\times\sin(\angle ACD)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{13}}{13}=\frac{\sqrt{39}}{26}$$

이다. 삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여

$\overline{DE}=2\times2\times\sin(\angle CAD)=\boxed{\dfrac{2\sqrt{39}}{13}}$

이다.

따라서 $p=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $q=2$, $r=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$이므로

$p\times q\times r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times2\times\dfrac{2\sqrt{39}}{13}=\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

37) [정답] ①

[해설]

$\angle BAC=\angle CAD=\theta$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta$$
$$=25+45-2\times5\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$$
$$=70-30\sqrt{5}\cos\theta \quad\cdots\cdots ㉠$$

또 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{AC}\times\cos\theta$$
$$=49+45-2\times7\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$$
$$=94-42\sqrt{5}\cos\theta \quad\cdots\cdots ㉡$$

이때 $\angle BAC=\angle CAD$이므로 $\overline{BC}=\overline{CD}$

즉, ㉠=㉡에서

$$70-30\sqrt{5}\cos\theta=94-42\sqrt{5}\cos\theta$$
$$\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad\cdots\cdots ㉢$$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$\overline{BC}^2=70-30\sqrt{5}\cos\theta$$
$$=70-30\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$=10$$
$$\therefore\ \overline{BC}=\sqrt{10}$$

㉢에서

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{1}{5}$$

이므로 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2R,\quad \frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=2R$$
$$\therefore\ R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

38) [정답] 11

[해설]

삼각형 ABD에서 $\angle ADB=\theta$라 하자.

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta}=2r_1$

이고, 삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin(\pi-\theta)}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin\theta}=2r_2$

이다. $\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$이므로

$t>0$인 실수 t에 대하여 $\overline{AB}=3t$, $\overline{AC}=\sqrt{13}t$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$13t^2=9t^2+36-2\times3t\times6\times\cos\dfrac{\pi}{3}$,

$2t^2+9t-18=0$이므로 $t=\dfrac{3}{2}$ 또는 $t=-6$이다. 따라서

$t=\dfrac{3}{2}$이고 $\overline{AB}=3t=\dfrac{9}{2}$이므로 $p=2$, $q=9$이다. 그러므로

$p+q=11$

39) [정답] ②

[해설]

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$이므로

사인법칙에 의해 $\dfrac{10}{\sin C}=2\times3\sqrt{5}$, $\sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

삼각형 ABC는 예각삼각형이므로

$$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{2}{3}$$

$\dfrac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\dfrac{4}{3}$에서 $\dfrac{a^2+b^2-\frac{2}{3}ab}{ab}=\dfrac{4}{3}$

$3a^2+3b^2-2ab=4ab$, $3(a-b)^2=0$이므로 $a=b$

코사인법칙에 의해

$$\begin{aligned}10^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\\&=a^2+a^2-2a^2\times\frac{2}{3}\\&=\frac{2}{3}a^2\end{aligned}$$

$100=\dfrac{2}{3}a^2$, $a^2=150$

따라서 $ab=a^2=150$

40) [정답] ①

[해설]

원 C의 반지름의 길이를 R라 하면 원 C의 넓이가 $\dfrac{49}{3}\pi$이므로

$$R^2\pi=\frac{49}{3}\pi,\ R=\frac{7}{3}\sqrt{3}$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R,\ \overline{BC}=2\times\frac{7}{3}\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7$$

삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=a$라 하면 코사인법칙에 의해

$$7^2=a^2+3^2-2\times a\times3\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$$a^2-3a-40=0,\ (a-8)(a+5)=0$$

$a>0$이므로 $a=8$

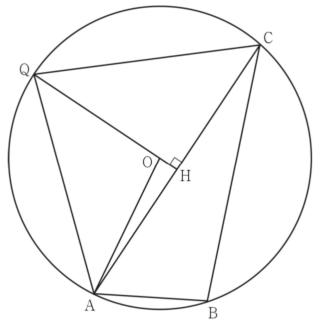
$\overline{AC}=8$이고 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$$\cos(\angle CBA)=\frac{3^2+7^2-8^2}{2\times3\times7}=-\frac{1}{7}$$

이므로 $\dfrac{\pi}{2}<\angle CBA<\pi$가 되어 삼각형 ABC는 둔각삼각형이다.

삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점을 Q라 하면 점 Q는 선분 AC의 수직이등분선과 원 C의 두 교점 중 직선 AC로부터 멀리 떨어져 있는 점이다.

그림과 같이 점 Q에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 원 C의 중심 O는 선분 QH 위에 있다.



직각삼각형 AHO에서

$$\overline{OH}=\sqrt{\left(\frac{7}{3}\sqrt{3}\right)^2-4^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\overline{QH}=\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$이므로 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times8\times\frac{8}{3}\sqrt{3}=\frac{32}{3}\sqrt{3}$$

41) [정답] ④

[해설]

삼각형 ADB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin A}=\boxed{2r}$$

이므로 $\overline{BD}$가 최대이려면 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접해야 한다.

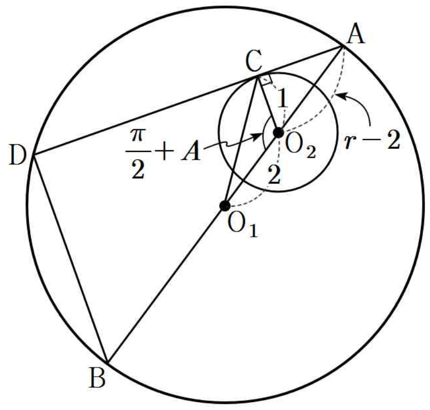
이때 직각삼각형 ACO_2에서 $\sin A=\dfrac{1}{\overline{AO_2}}$이므로

$$\overline{BD}=\frac{1}{\overline{AO_2}}\times\boxed{2r}$$

이다.

그러므로 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접하고 $\overline{AO_2}$가 최소일 때 $\overline{BD}$는 최대이다. $\overline{AO_2}$가 최소일 때는 두 원의 중심 O_1, O_2와 점 A가 일직선 위에 있을 때이므로 $\overline{AO_2}$의 최솟값은

$$\overline{AO_1}-\overline{O_1O_2}=\boxed{r-2}$$



$\overline{AO_2}$가 최소일 때, $\sin A=\frac{1}{r-2}$이므로 삼각형 CO_1O_2에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{O_1C}^2=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cos\left(\frac{\pi}{2}+A\right)$

$=5+4\sin A$

$=\boxed{5+\frac{4}{r-2}}$

이상에서 $f(r)=2r$, $g(r)=r-2$, $h(r)=5+\frac{4}{r-2}$이므로

$f(4)\times g(5)\times h(6)=8\times3\times6=144$

42) [정답] ⑤

[해설]

삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{6}$이므로

$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{7}\times\sin\theta=\sqrt{6}$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{42}}{7}$

∠A는 예각이므로 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

따라서 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta=\sqrt{1-\frac{6}{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$

43) [정답] ③

[해설]

부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 θ라 하면 $\pi=4\theta$에서 $\theta=\frac{\pi}{4}$

$S=\frac{1}{2}\times4\times\pi=2\pi$

$T=\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times4\times\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\times\overline{OP}$

$\frac{S}{T}=\pi$이므로 $\overline{OP}=\sqrt{2}$

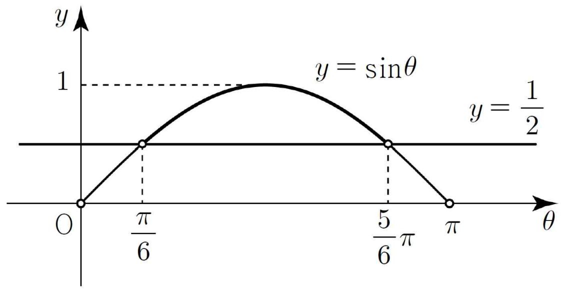
44) [정답] ①

[해설]

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times\sin\theta=2\sin\beta$

삼각형 ABC의 넓이가 1 보다 크므로 $\sin\theta>\frac{1}{2}$

곡선 $y=\sin\theta\,(0<\theta<\pi)$와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 개형은 다음과 같다.



$0<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>\frac{1}{2}$의 해는 $\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$

$\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$

따라서 $2\alpha+\beta=2\times\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\frac{7}{6}\pi$

45) [정답] ①

[해설]

삼각형 ABC의 넓이가 $5\sqrt{2}$이므로

$S=\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin A=5\sqrt{2}$

$\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{1}{3}$

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=5$이므로 코사인법칙을 이용하면

$\overline{BC}^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos A$

$=9+25-10=24$

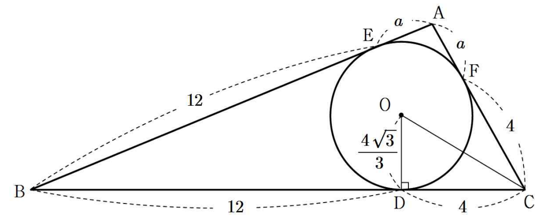
$\therefore\ \overline{BC}=2\sqrt{6}$

사인법칙에서 $\frac{\overline{BC}}{\sin A}=2R$에서 $2R=\frac{2\sqrt{6}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

$\therefore\ R=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

46) [정답] ②

[해설]



그림과 같이 원의 중심을 O라 하고, 원과 두 선분 AB, AC가 만나는 저을 각각 E, F라 하자.

$\tan(\angle OCD)=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\angle OCD=\frac{\pi}{6}$, $\angle ACB=\frac{\pi}{3}$이다.

$\overline{AE}=a$라 하면 $\overline{AF}=a$이고

(삼각형 ABC의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times16\times(a+4)\times\sin\frac{\pi}{3}$

$=4\sqrt{3}(a+4)$

(삼각형 OAB의 넓이)+(삼각형 OBC의 넓이)

+(삼각형 OCA의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\{(a+12)+16+(a+4)\}$

$=\frac{4\sqrt{3}}{3}(a+16)$

이다.

그러므로 $4\sqrt{3}(a+4)=\frac{4\sqrt{3}}{3}(a+16)$에서 $a=2$이다.

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$2\times(12+4+2)=36$

[다른 풀이]

삼각형 BCA에서 코사인법칙에 의하여

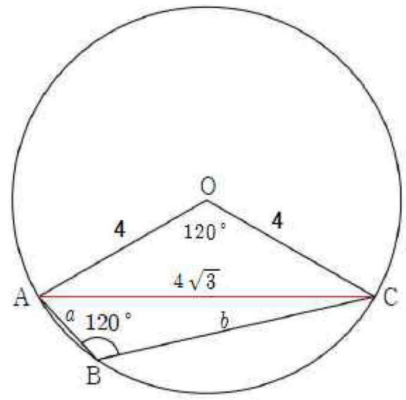
$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{16^2+(a+4)^2-(a+12)^2}{2\times16\times(1+4)}$$

이므로 $a=2$이다.

47) [정답] ⑤

[해설]

$\angle ABC=120°$, $\overline{AB}+\overline{BC}=2\sqrt{15}$이므로 $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$라 하면 $a+b=2\sqrt{15}$ …… ㉠



위의 그림안의 삼각형 ABC에서 사인법칙을 이용하면

$\overline{AC}=8\times\sin120°=4\sqrt{3}$ …… ㉡

또 코사인법칙을 이용하면

$\overline{AC}^2=a^2+b^2-2ab\cos120°$

$=a^2+b^2+ab$

$=(a+b)^2-ab$

㉠, ㉡을 대입하면

$ab=(2\sqrt{15})^2-(4\sqrt{3})^2=12$ …… ㉢

사각형 OABC의 넓이를 S라 하면

$S=$(△ABC의 넓이)+(△OAB의 넓이)

$=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin120°+\frac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot\sin120°$

$=\frac{1}{2}(4\times4+ab)\sin120°$

$=7\sqrt{3}$ (∵ ㉢)

48) [정답] ④

[해설]

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{OP}=\frac{3}{4}r$, $\overline{OQ}=\frac{1}{3}r$

삼각형 OPQ의 넓이가 $4\sqrt{3}$이므로

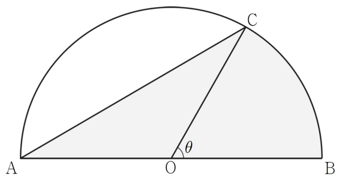
$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}r\times\frac{1}{3}r\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{16}r^2=4\sqrt{3}$, $r=8$

따라서 호 AB의 길이는 $8\times\frac{\pi}{3}=\frac{8}{3}\pi$

49) [정답] ③

[해설]

반원의 중심을 O라 하고 부채꼴 OBC의 중심각의 크기를 θ라 하자.



반원의 반지름의 길이가 6이고 호 CB의 길이가 2π이므로

$2\pi=6\theta$에서 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

부채꼴 OBC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times6^2\times\dfrac{\pi}{3}=6\pi$

$\angle COA=\dfrac{2\pi}{3}$이므로 삼각형 CAO의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times6^2\times\sin\frac{2\pi}{3}=9\sqrt{3}$$

따라서 구하는 넓이는 $6\pi+9\sqrt{3}$

50) [정답] **63**

[해설]

$\angle BAD$와 $\angle BCD$는 같은 호에 대한 원주각이므로 그 크기가 같다.

$\angle BAD=\angle BCD=\theta$, $\overline{AD}=a$, $\overline{CB}=b$라 하면

삼각형 ABD의 넓이 S_1은

$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times6\times a\times\sin\theta=3a\sin\theta$$

삼각형 CBD의 넓이 S_2는

$$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{CB}\times\overline{CD}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times b\times4\times\sin\theta=2b\sin\theta$$

$S_1:S_2=9:5$이므로 $3a:2b=9:5$

$a:b=6:5$이므로 $a=6k$, $b=5k(k>0)$라고 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{AC}^2=6^2+(5k)^2-2\times6\times5k\times\cos\alpha \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\angle ABC$와 $\angle ADC$는 같은 호에 대한 원주각이므로

$$\angle ABC=\angle ADC=\alpha$$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=(6k)^2+4^2-2\times6k\times4\times\cos\alpha \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하면

$$11k^2+9k-20=0,\ (11k+20)(k-1)=0$$

$k>0$이므로 $k=1$이고 $a=6k=6$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

삼각형 ADC의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\sin\alpha=\frac{1}{2}\times6\times4\times\frac{\sqrt{7}}{4}=3\sqrt{7}$$

따라서 $S^2=(3\sqrt{7})^2=63$

51) [정답] ③

[해설]

$\overline{BC}=2\sqrt{5}$, $\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{10}$이므로 삼각형 OBC는

직각이등변삼각형이고 $\angle BOC=\dfrac{\pi}{2}$이다.

$\angle AOB=\alpha$, $\angle AOC=\beta$라 하면 두 삼각형 OAB, OCA의 넓이 S_1, S_2는 각각

$$S_1=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\alpha=5\sin\alpha$$

$$S_2=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\beta=5\sin\beta$$

주어진 조건에서 $3S_1=4S_2$이므로

$$\sin\alpha=\frac{4}{3}\sin\beta$$

$\alpha+\beta+\dfrac{\pi}{2}=2\pi$이므로 $\beta=\dfrac{3\pi}{2}-\alpha$

$$\sin\alpha=\frac{4}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\frac{4}{3}\cos\alpha \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$에서 $\dfrac{16}{9}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$$\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$$

$\sin\alpha>0$이므로 ㉠에서 $\cos\alpha<0$

따라서 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$

코사인법칙에 의하여 구하는 선분 AB의 길이는

$$\overline{AB}=\sqrt{(\overline{OA})^2+(\overline{OB})^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\alpha}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2(\sqrt{10})^2\times\left(-\frac{3}{5}\right)}$$
$$=4\sqrt{2}$$

52) [정답] ②

[해설]

$\angle ABC=\theta$, $\angle DAB=2\theta$이므로 $\angle BDA=\pi-3\theta$이다.

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AB}}{\boxed{\sin(\pi-3\theta)}}$$

이므로 $\overline{AD}=\dfrac{3\sin\theta}{\boxed{\sin(\pi-3\theta)}}$이다.

또한 $\angle EAD=\theta$이고 $\angle ADE=2\theta$이므로 $\angle DEA=\pi-3\theta$이다.

삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{DE}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AD}}{\sin(\pi-3\theta)}\times\overline{AD}=\boxed{\frac{1}{3}}\times\overline{AD}^2$$

이다. 따라서 삼각형 ADE의 넓이 $S(\theta)$는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{DE}\times\sin(\angle ADE)$$

$$=\frac{1}{6}\times\left\{\frac{3\sin\theta}{\sin(\pi-3\theta)}\right\}^3\times\sin2\theta$$

$$=\frac{9}{2}\times\left(\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}\right)^3\times\boxed{\sin2\theta}$$

이다.

$f(\theta)=\sin(\pi-3\theta)$, $g(\theta)=\sin2\theta$, $p=\dfrac{1}{3}$이므로

$$p\times f\left(\frac{\pi}{6}\right)\times g\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{3}\times\sin\frac{\pi}{2}\times\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{6}$$

53) [정답] ⑤

[해설]

원의 중심을 O라 하면 $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=3:4:5$이므로

$$\angle A:\angle B:\angle C=4:5:3$$

그런데, $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$이므로

$$\angle A=\frac{4}{12}\times180^\circ=60^\circ$$

$$\angle C=\frac{3}{12}\times180^\circ=45^\circ$$

삼각형 ABC의 외접원의 둘레의 길이가 12이므로 외접원의 반지름 R은 $2\pi R=12$

$$\therefore R=\frac{6}{\pi}$$

즉, 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{BC}}{\sin60^\circ}=\frac{\overline{AB}}{\sin45^\circ}=\frac{12}{\pi}\text{이므로}$$

$$\overline{BC}=\frac{6\sqrt{3}}{\pi},\ \overline{AB}=\frac{6\sqrt{2}}{\pi}$$

$\overline{AC}=x$라 하면 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A$$

즉, $\dfrac{108}{\pi^2}=\dfrac{72}{\pi^2}+x^2-2\cdot\dfrac{6\sqrt{2}}{\pi}\cdot x\cdot\cos60^\circ$에서

$$x^2-\frac{6\sqrt{2}}{\pi}x-\frac{36}{\pi^2}=0$$

$$\therefore x=\frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\pi}$$

따라서 $\overline{AC}=\dfrac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\pi}$이므로

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{6\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\pi}\cdot\sin60^\circ$$

$$=\frac{27+9\sqrt{3}}{\pi^2}$$

따라서 $\dfrac{\pi^2 S}{9}=3+\sqrt{3}$

54) [정답] **13**

[해설]

$\overline{AB}=a$라 하면 $\overline{DA}=2a$이다.

삼각형 DAB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=a^2+(2a)^2-2\times a\times2a\times\cos\dfrac{2}{3}\pi=7a^2$이므로

$\overline{BD}=\sqrt{7}a$이다.

$\overline{BE}:\overline{ED}=3:4$이므로

(삼각형 ABC의 넓이) : (삼각형 ADC의 넓이)

$=3:4$

$\angle ABC=\theta$라 할 때,

(삼각형 ABC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\overline{BA}\times\overline{BC}\times\sin\theta$

(삼각형 ADC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\overline{DA}\times\overline{DC}\times\sin(\pi-\theta)$

이고

(삼각형 ABC의 넓이) : (삼각형 ADC의 넓이)

$=\overline{BA}\times\overline{BC}:\overline{DA}\times\overline{DC}=3:4$

이므로 $\overline{BC}=\frac{3}{2}\overline{DC}$이다.

$\overline{DC}=k$라 하면 $\overline{BC}=\frac{3k}{2}$이고 $\overline{BD}=\sqrt{7}a$, $\angle BCD=\frac{\pi}{3}$이므로

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\left(\frac{3k}{2}\right)^2+k^2-(\sqrt{7}a)^2}{2\times\frac{3k}{2}\times k}$이므로 $k=2a$이고 $\overline{BC}=3a$,

$\overline{DC}=2a$이다.

삼각형 DAB의 외접원의 반지름의 길이가 1이고 사인법칙에 의하여 $\frac{\sqrt{7}a}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2$이므로 $a=\frac{\sqrt{21}}{7}$이다.

(삼각형 ABD의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{7}\times\frac{2\sqrt{21}}{7}\times\sin\frac{2}{3}\pi$

$=\frac{3\sqrt{3}}{14}$

(삼각형 BCD의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{21}}{7}\times\frac{2\sqrt{21}}{7}\times\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{9\sqrt{3}}{14}$

이므로 사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{14}+\frac{9\sqrt{3}}{14}=\frac{6\sqrt{3}}{7}$이다.

따라서 $p+q=13$

55) [정답] ③

[해설]

$\angle COA=\theta$라 하면 삼각형 COA에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{2^2+2^2-1^2}{2\times2\times2}=\frac{7}{8}$이다.

삼각형 BOD에서 $\angle BOD=\frac{\pi}{2}-\theta$이고

삼각형 BOD의 넓이가 $\frac{7}{6}$이므로

$\overline{OD}=x$라 놓으면

$\frac{1}{2}\times2\times x\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{7}{6}$이다.

한편, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta=\frac{7}{8}$이므로

$\frac{7}{8}x=\frac{7}{6}$, 즉 $x=\frac{4}{3}$이다. 따라서 $\overline{OD}=\frac{4}{3}$

56) [정답] 71

[해설]

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라 하고

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하자.

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$

조건 (가)에 의해

$\sin A=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$이므로

$a=\frac{\sqrt{15}}{2}R$ …… ㉠

조건 (나)에 의해

$b+c=2R(\sin B+\sin C)=2R\times\frac{9}{8}=\frac{9}{4}R$ …… ㉡

삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{15}$이므로

$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{15}$에서 $bc=8$ …… ㉢

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=b^2+c^2+\frac{1}{2}bc$

$=(b+c)^2-\frac{3}{2}bc$

㉠, ㉡, ㉢에 의해

$\left(\frac{\sqrt{15}}{2}R\right)^2=\left(\frac{9}{4}R\right)^2-\frac{3}{2}\times8$에서 $R^2=\frac{64}{7}$이므로

삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\frac{64}{7}\pi$

따라서 $p=7$, $q=64$이며 $p+q=71$

57) [정답] ②

[해설]

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin(\angle BAC)=\sin A=\frac{a}{2R}$

$\sin B=\frac{8}{2R}$, $\sin C=\frac{4}{2R}$

$a(\sin B+\sin C)=a\left(\frac{8}{2R}+\frac{4}{2R}\right)=\frac{6a}{R}=6\sqrt{3}$

$\frac{a}{R}=\sqrt{3}$, $\sin A=\frac{a}{2R}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\angle BAC>90^\circ$이므로 $\angle BAC=\frac{2}{3}\pi$

선분 AP가 $\angle BAC$를 이등분하므로

$\angle PAB=\angle PAC=\frac{\pi}{3}$, $\overline{BP}:\overline{PC}=4:8=1:2$

삼각형 ABP의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{3}$배

$\frac{1}{2}\times 4\times\overline{AP}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 4\times 8\times\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

따라서 선분 AP의 길이는 $\frac{8}{3}$

58) [정답] ⑤

[해설]

$\overline{AB}=\overline{AD}=k$라 할 때

두 삼각형 ABC, ACD에서 각각 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ACB)=\frac{10^2+\overline{BC}^2-k^2}{2\times 10\times\overline{BC}}=\frac{1}{20}\left(\overline{BC}+\frac{\boxed{100-k^2}}{\overline{BC}}\right)$$

$$\cos(\angle DCA)=\frac{10^2+\overline{CD}^2-k^2}{2\times 10\times\overline{CD}}=\frac{1}{20}\left(\overline{CD}+\frac{\boxed{100-k^2}}{\overline{CD}}\right)$$

이다.

이때 두 호 AB, AD에 대한 원주각의 크기가 같으므로 $\cos(\angle ACB)=\cos(\angle DCA)$이다.

$\frac{1}{20}\left(\overline{BC}+\frac{100-k^2}{\overline{BC}}\right)=\frac{1}{20}\left(\overline{CD}+\frac{100-k^2}{\overline{CD}}\right)$

$\overline{BC}-\overline{CD}=(100-k^2)\times\left(\frac{1}{\overline{CD}}-\frac{1}{\overline{BC}}\right)$

$\overline{BC}-\overline{CD}=(100-k^2)\times\frac{\overline{BC}-\overline{CD}}{\overline{BC}\times\overline{CD}}$

$\overline{AC}=10<2R$이므로 $\overline{BC}\neq\overline{CD}$

그러므로 $\overline{BC}\times\overline{CD}=100-k^2$

사각형 ABCD의 넓이는

두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합과 같으므로

$\frac{1}{2}k^2\sin(\angle BAD)+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin(\pi-\angle BAD)$

$=\frac{1}{2}\{k^2+(100-k^2)\}\sin(\angle BAD)$

$=50\sin(\angle BAD)=40$

에서 $\sin(\angle BAD)=\boxed{\frac{4}{5}}$이다.

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BAD)}=2R$에서 $\overline{BD}=\frac{8}{5}R$이므로

$\overline{BD}:R=\boxed{\frac{8}{5}}:1$

따라서 $f(k)=100-k^2$, $p=\frac{4}{5}$, $q=\frac{8}{5}$이므로

$\frac{f(10p)}{q}=(100-8^2)\times\frac{5}{8}=\frac{45}{2}$

59) [정답] ④

[해설]

$\overline{AD}=\overline{CE}=a(a>0)$이라 하면 삼각형 ADE에서

코사인법칙에 의하여 $(\sqrt{13})^2=a^2+(a+1)^2-2a(a+1)\cos\frac{\pi}{3}$

$a^2+a-12=0$, $(a+4)(a-3)=0$

$\therefore a=3$

($\triangle$ADE의 넓이)$=\frac{1}{2}\times 4\times 3\times\sin\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$

($\triangle$ABE의 넓이)$=\frac{1}{2}\times 4\times 1\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

따라서

($\triangle$BDE의 넓이)

=($\triangle$ADE의 넓이)−($\triangle$ABE의 넓이)$=2\sqrt{3}$

60) [정답] ③

[해설]

$\overline{OA}=\overline{OP}$이므로 $\angle OAP=\angle OPA=\theta$

$\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle CPD=\frac{\pi}{2}-\theta$

$4\sin\theta=3\cos\theta$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta+\frac{16}{9}\sin^2\theta=1$, $\sin^2\theta=\frac{9}{25}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$

$\overline{AB}=10$, $\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{PA}=10\cos\theta=8$, $\overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PD}=8$

(삼각형 ADC의 넓이)

=(삼각형 PAD의 넓이)+(삼각형 PDC의 넓이)

−(삼각형 PAC의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times 8\times 8\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times 8\times 8\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\frac{1}{2}\times 8\times 8$

$=32\sin\theta+32\cos\theta-32$

$=32\times\frac{3}{5}+32\times\frac{4}{5}-32$

$=\dfrac{64}{5}$

61) [정답] ①

[해설]

점 C가 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점이므로

$\angle\mathrm{BOC}=\boxed{\dfrac{2}{3}\theta}$

이다. 또한, 삼각형 BOC에서

$\angle\mathrm{OBC}=\angle\mathrm{OCB}=\dfrac{1}{2}\left(\pi-\boxed{\dfrac{2}{3}\theta}\right)$

이다. 한편, 삼각형 BOD에서

$\angle\mathrm{BDO}=\pi-\theta-\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{3}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\theta}{3}$

이다. 따라서 삼각형 BOD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{OD}}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{3}\right)}=\dfrac{\overline{\mathrm{OB}}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\theta}{3}\right)}$

$\overline{\mathrm{OD}}=\dfrac{\cos\dfrac{\theta}{3}}{\boxed{\cos\dfrac{2}{3}\theta}}$이다.

한편, 부채꼴 OAC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times1^2\times\dfrac{\theta}{3}=\dfrac{\theta}{6}$이다.

$S(\theta)$는 삼각형 COD의 넓이에서 부채꼴 OAC의 넓이를 뺀 값이므로

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{\cos\dfrac{\theta}{3}}{\boxed{\cos\dfrac{2}{3}\theta}}\times\sin\dfrac{\theta}{3}-\boxed{\dfrac{\theta}{6}}$이다.

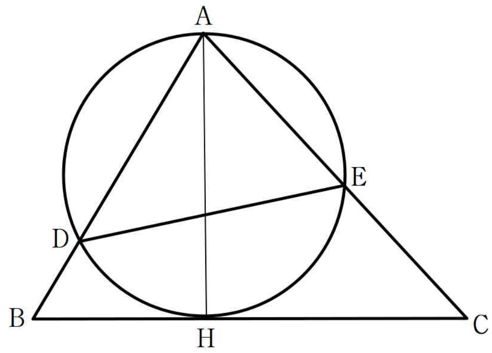
따라서 $f(\theta)=\dfrac{2}{3}\theta,\ g(\theta)=\cos\dfrac{2}{3}\theta,\ h(\theta)=\dfrac{\theta}{6}$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3},\ g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ h\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\pi}{48}$이다.

그러므로 $\dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\times g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{h\left(\dfrac{\pi}{8}\right)}=8\sqrt{3}$

62) [정답] ⑤

[해설]



선분 DE가 최소가 될 때는 그림과 같이 수선 AH가 원의 지름일 때이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 적용하면

$$\cos A=\frac{25+36-49}{2\times5\times6}=\frac{1}{5}$$

따라서 $\sin A=\dfrac{\sqrt{24}}{5}$ $(\because \sin A>0)$

또, 삼각형의 넓이를 비교하면

$$\frac{1}{2}\times5\times6\times\sin A=\frac{1}{2}\times7\times\overline{\mathrm{AH}}$$

이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{6\sqrt{24}}{7}$

즉, 원은 지름이 $\overline{\mathrm{AH}}$이고, 삼각형 ADE의 외접원이므로

사인법칙 $\dfrac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin A}=2R$에서

$$\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{AH}}\times\sin A=\frac{6\sqrt{24}}{7}\times\frac{\sqrt{24}}{5}=\frac{144}{35}$$

63) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $\angle\mathrm{BCA}=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\cos(\angle\mathrm{CBA})=\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\dfrac{3}{7}$

$\sin(\angle\mathrm{CBA})=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{7}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$ (참)

ㄴ. $\angle\mathrm{CBA}=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\angle\mathrm{ADC}=\pi-\theta$

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\sin\theta=14\times\dfrac{2\sqrt{10}}{7}=4\sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{AD}}=k(k>0)$이라 하면

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{10})^2=k^2+7^2-2\times k\times7\times\cos(\pi-\theta)$

$\qquad=k^2+49+14k\cos\theta$

$=k^2+6k+49$

$k^2+6k-111=0$이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=-3+\sqrt{9+111}=-3+2\sqrt{30}$

ㄷ. 삼각형 ACD의 넓이가 최대일 때 사각형 ABCD의 넓이가 최대이므로 점 D는 선분 AC의 수직이등분선이 호 AC와 만나는 점이다. 그러므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CD}}$

$\overline{\mathrm{AD}}=x(x>0)$이라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여 $(4\sqrt{10})^2=x^2+x^2-2\times x\times x\times\cos(\pi-\theta)$

$=2x^2+2x^2\times\dfrac{3}{7}=\dfrac{20}{7}x^2$

$x^2=56$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{14}$

사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin(\pi-\theta)+\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}$

$=\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{14})^2\times\dfrac{2\sqrt{10}}{7}+\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{10}\times6$

$=8\sqrt{10}+12\sqrt{10}=20\sqrt{10}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ