[수학1] [6삼각함수의 그래프] 교사평경 최근 3개년

03 수1 06 삼각함수의 그래프

01 삼각함수의 그래프

01 그래프1 (주기)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 2

1. 함수 $y=\tan\frac{x}{4}$의 주기는?

① π ② 2π ③ 3π
④ 4π ⑤ 5π

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 15

2. 두 함수

$$f(x)=\cos(ax)+1,\ g(x)=|\sin 3x|$$

의 주기가 서로 같을 때, 양수 a의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 6

3. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\sin\left(ax+\frac{\pi}{6}\right)$의 주기가 4π일 때, $f(\pi)$의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ 1

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 3

4. 함수 $y=\cos\frac{x}{3}$의 주기는?

① 2π ② 3π ③ 4π
④ 5π ⑤ 6π

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 3

5. 함수 $y=\tan\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)$의 주기는?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

03 수1 06 삼각함수의 그래프

01 삼각함수의 그래프

02 그래프2 (삼각함수의 그래프)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 25

6. 함수 $y=k\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+10$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ 14\right)$을 지날 때, 상수 k의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 28

7. $0<a<\frac{4}{7}$인 실수 a와 유리수 b에 대하여 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a},\ \frac{2\pi}{a}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=2\sin(ax)+b$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}\pi,\ 0\right)$을 지날 때, $30(a+b)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 25

8. 함수 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+k$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{6},\ 2\right)$를 지날 때, 상수 k의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 25

9. 함수 $y=3\sin(x+\pi)+k$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{2}\right)$를 지날 때, 상수 k의 값을 구하시오.

03 수1 06 삼각함수의 그래프

01 삼각함수의 그래프

04 그래프4 (표준형 그래프에서 Mm)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 23

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 22

10. 함수 $f(x)=5\sin\left(\frac{\pi}{2}x+1\right)+3$의 주기를 p, 최댓값을 M이라 할 때, $p+M$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 22

11. 함수 $f(x)=5\sin x+1$의 최댓값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 4

12. 함수 $f(x)=4\cos x+3$의 최댓값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 5

13. 두양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\cos bx+3$이 있다. 함수 $f(x)$는 주기가 4π이고 최솟값이 -1일 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$
④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 11

14. 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=4\cos\frac{\pi}{a}x+b$의 주기가 4이고 최솟값이 -1일 때, $a+b$의 값은? (단, $a>0$)

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 7

15. 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=-\sin 2x$가 $x=a$에서 최댓값을 갖고 $x=b$에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는?

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$
④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월

16. 함수

$$f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$$

가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $a\times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{3}$

④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

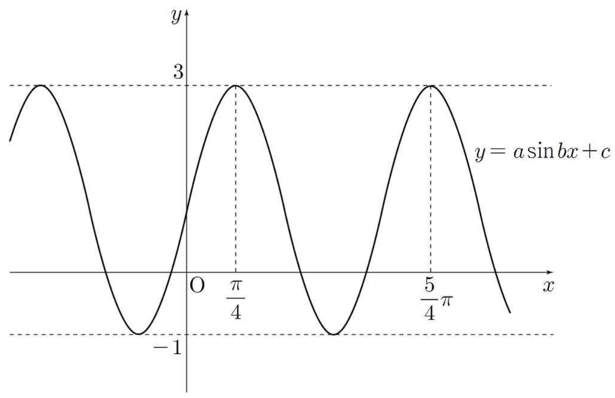
03 수1 06 삼각함수의 그래프

01 삼각함수의 그래프

05 그래프5 (그래프 조건)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 10

17. 세상수 a, b, c에 대하여 함수 $y=a\sin bx+c$의 그래프가 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은? (단, $a>0$, $b>0$)

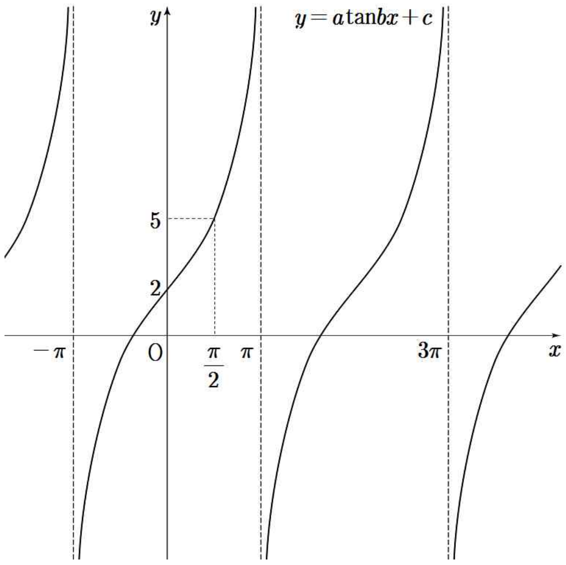


① 4 ② 5 ③ 6

④ 7 ⑤ 8

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 10

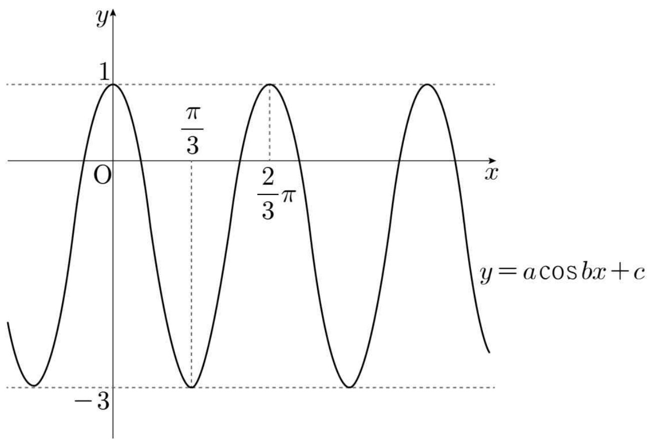
18. 세 양수 a, b, c에 대하여 함수 $y=a\tan bx+c$의 그래프가 그림과 같을 때, $a\times b\times c$의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 10

19. 세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $y=a\cos bx+c$의 그래프가 그림과 같을 때, $a\times b\times c$의 값은? (단, $a>0$, $b>0$)



① -10 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2

03 수1 06 삼각함수의 그래프

02 삼각함수의 그래프 활용

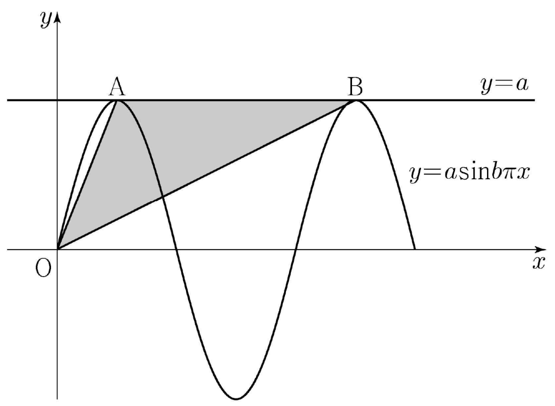
01 활용1 (대칭성과 길이 또는 넓이)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 10

20. 두 양수 a, b에 대하여 곡선

$y=a\sin b\pi x\left(0\leq x\leq \frac{3}{b}\right)$이 직선 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자.

삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

03 수1 06 삼각함수의 그래프

02 삼각함수의 그래프 활용

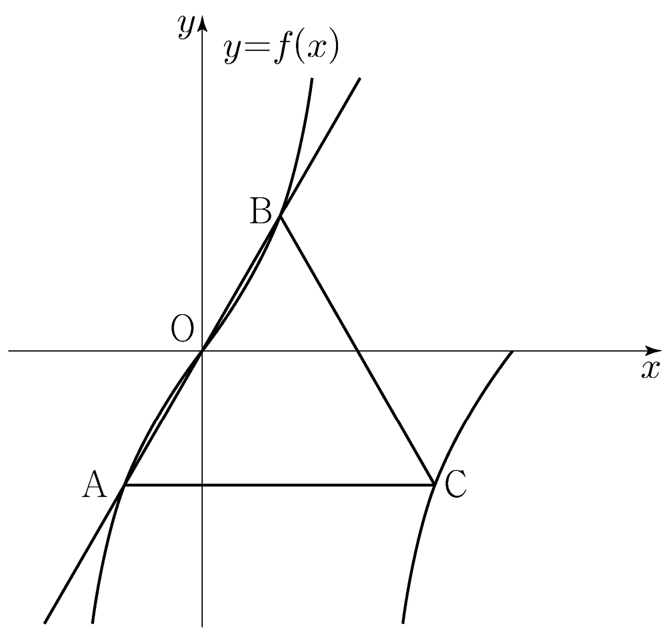
02 활용2 (그래프의 활용)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 11

21. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{a}{2}<x\leq a,\ x\neq\frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x)=\tan\frac{\pi x}{a}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 18

22. 자연수 n에 대하여 $-\frac{\pi}{2n}<x<\frac{\pi}{2n}$에서 정의된 함수 $f(x)=3\sin 2nx$가 있다. 원점 O를 지나고 기울기가 양수인 직선과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점 O, A, B에서 만날 때, 점 $\mathrm{C}\left(\frac{\pi}{2n},\ 0\right)$에 대하여 넓이가 $\frac{\pi}{12}$인 삼각형 ABC가 존재하도록 하는 n의 최댓값은?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

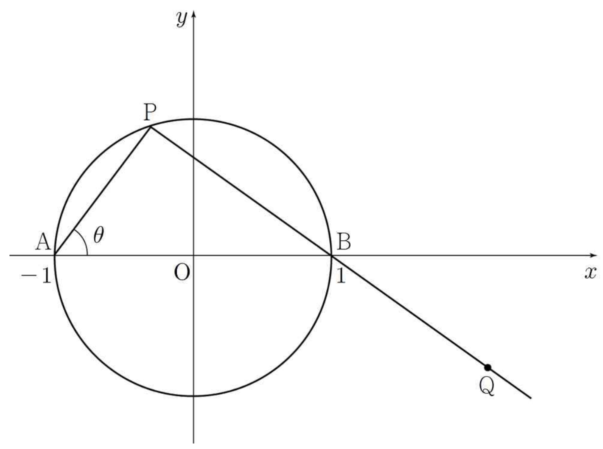
03 수1 06 삼각함수의 그래프

02 삼각함수의 그래프 활용

03 활용3 (치환을 이용한 Mm)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 19

23. 그림과 같이 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(1,\ 0)$과 원 $x^2+y^2=1$이 있다. 원 위의 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{PAB}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 할 때, 반직선 PB 위에 $\overline{\mathrm{PQ}}=3$인 점 Q를 정한다. 점 Q의 x좌표가 최대가 될 때, $\sin^2\theta$의 값은?



① $\frac{7}{16}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{9}{16}$
④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 7

24. 함수 $f(x)=\cos^2 x-4\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+3$의 최댓값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

03 수1 06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

01 삼각방정식1 (일차식꼴)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 4

25. $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$일 때, 방정식 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해는?

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ $\frac{3}{4}\pi$

④ $\frac{5}{6}\pi$ ⑤ π

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 10

26. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $|\sin 2x| = \frac{1}{2}$의 모든 실근의 합은?

① 4π ② 6π ③ 8π
④ 10π ⑤ 12π

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 4

27. $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$일 때, 방정식 $\cos x = -\frac{1}{2}$의 해는?

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ $\frac{3}{4}\pi$
④ $\frac{5}{6}\pi$ ⑤ π

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 4

28. $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$일 때, 방정식 $\tan x = 1$의 해는?

① $\frac{2}{3}\pi$ ② $\frac{3}{4}\pi$ ③ $\frac{5}{6}\pi$
④ $\frac{5}{4}\pi$ ⑤ $\frac{4}{3}\pi$

03 수1 06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

02 삼각방정식2 (이차식꼴)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 10

29. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $\cos^2 3x - \sin 3x + 1 = 0$의 모든 실근의 합은?

① $\frac{3}{2}\pi$ ② $\frac{7}{4}\pi$ ③ 2π

④ $\frac{9}{4}\pi$ ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 16

30. $0 \le x \le 4\pi$일 때, 방정식

$$4\sin^2 x - 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3 = 0$$

의 모든 해의 합은?

① 5π ② 6π ③ 7π

④ 8π ⑤ 9π

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 11

31. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $\sin x = \sqrt{3}(1 + \cos x)$의 모든 해의 합은?

① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ π

④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{3}\pi$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 11

32. $0<x<2\pi$일 때, 방정식 $2\cos^2 x-\sin(\pi+x)-2=0$의 모든 해의 합은?

① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π

④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 7

33. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은?

① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0

④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

03 수1 06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

03 삼각방정식3 (교점)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 7

34. $0\le x<2\pi$일 때, 두 함수 $y=\sin x$와 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$의 그래프가 만나는 모든 점의 x좌표의 합은?

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$

④ 2π ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 8

35. 함수 $y = 6\sin\dfrac{\pi}{12}x\,(0 \le x \le 12)$ 의 그래프와 직선 $y = 3$ 이 만나는 두 점을 각각 A, B 라 할 때, 선분 AB 의 길이는?

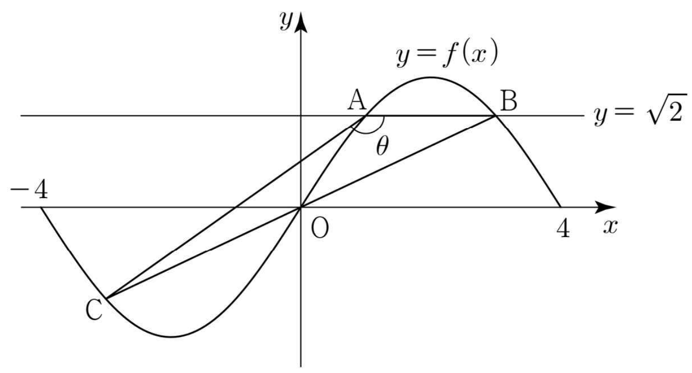
① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 16

36. 집합 $\{x \mid -4 \le x \le 4\}$에서 정의된 함수

$$f(x) = 2\sin\frac{\pi x}{4}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y = f(x)$의 그래프가 직선 $y = \sqrt{2}$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하고, 두 점 B, O를 지나는 직선이 함수 $y = f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 B와 O가 아닌 점을 C라 하자.
$\angle \mathrm{BAC} = \theta$라 할 때, $\sin\theta$의 값은? (단, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크고, O는 원점이다.)



① $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\dfrac{7\sqrt{3}}{18}$ ③ $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$
④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

03 수1 06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

04 삼각방정식4 (대칭성과 실근)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 14

37. $0 \le x < \pi$일 때, x에 대한 방정식

$$\sin nx = \frac{1}{5} \quad (n\text{은 자연수})$$

의 모든 해의 합을 $f(n)$이라 하자. $f(2)+f(5)$의 값은?

① $\frac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{2}\pi$

④ 3π ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 17

38. 상수 $k(0<k<1)$에 대하여 $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $\sin x = k$의 두 근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하자. $\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{5}{7}$일 때, k의 값은?

① $\frac{2\sqrt{6}}{7}$ ② $\frac{\sqrt{26}}{7}$ ③ $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

④ $\frac{\sqrt{30}}{7}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 17

39. $0 \le x < 8$일 때, 방정식 $\sin\frac{\pi x}{2}=\frac{3}{4}$의 모든 해의 합을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 10

40. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식

$$3\cos^2 x + 5\sin x - 1 = 0$$

의 모든 해의 합은?

① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π

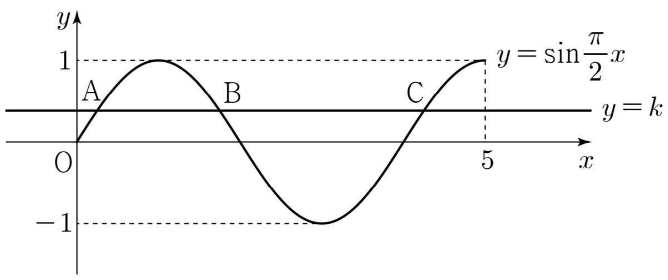
④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 10

41. 곡선 $y = \sin\frac{\pi}{2}x(0 \le x \le 5)$가 직선 $y = k(0 < k < 1)$과 만나는 서로 다른 세 점을 y축에서 가까운 순서대로 A, B, C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표의 합이 $\frac{25}{4}$일 때, 선분 AB의 길이는?

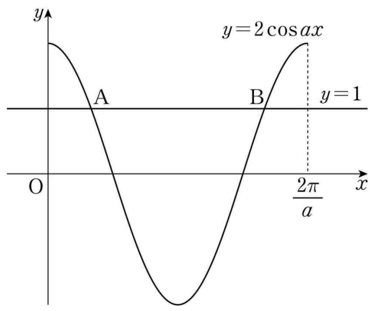
① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$



[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 8

42. 그림과 같이 양의 상수 a에 대하여 곡선 $y = 2\cos ax\left(0 \le x \le \frac{2\pi}{a}\right)$와 직선 $y = 1$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\text{AB}} = \frac{8}{3}$일 때, a의 값은?



① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{2}$

④ $\frac{7\pi}{12}$ ⑤ $\frac{2\pi}{3}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 9

43. 닫힌구간 $[0,\ 12]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{6},\quad g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_1, α_2라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 β_1, β_2라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$의 값은? (단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.)

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 21

44. 자연수 $k(1<k<12)$에 대하여 $0\le x\le 12$에서 정의된 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin\pi x & (0\le x<k)\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x-k}-1 & (k\le x\le 12)\end{cases}$$

라 하자. 실수 $a\left(0<a\le\frac{1}{2}\right)$에 대하여 방정식

$$f(x)+a=0$$

의 모든 실근의 합이 46일 때, $\frac{k}{a}$의 값은?

① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 12

45. 양수 a에 대하여 함수

$$f(x)=\left|4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2\right|\left(0\le x<\frac{4\pi}{a}\right)$$

의 그래프가 직선 $y=2$와 만나는 서로 다른 점의 개수는 n이다. 이 n개의 점의 x좌표의 합이 39일 때, $n\times a$의 값은?

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$

④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

03 수1 06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

05 삼각방정식5 (실근의 개수)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 7

46. $0\le x<2\pi$일 때, 두 곡선 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$와 $y=\sin4x$가 만나는 점의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 21

47. 자연수n에 대하여 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식

$|\sin nx|=\frac{2}{3}$의 서로 다른 실근의 개수를 a_n, 서로 다른 모든 실근의 합을 b_n이라 할 때, $a_5b_6=k\pi$이다. 자연수 k의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 26

48. $0 \le x \le 2\pi$에서 정의된 함수 $y = a\sin 3x + b$의 그래프가 두 직선 $y=9$, $y=2$와 만나는 점의 개수가 각각 3, 7이 되도록 하는 두 양수 a, b에 대하여 $a \times b$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 15

49. $0 \le x \le 2$에서 함수 $y = \tan \pi x$의 그래프와 직선 $y = -\frac{10}{3}x + n$이 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 자연수 n의 최댓값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 26

50. 함수 $y = \tan\left(nx - \frac{\pi}{2}\right)$의 그래프가 직선 $y = -x$와 만나는 점의 x좌표가 구간 $(-\pi,\ \pi)$에 속하는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $a_2 + a_3$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 21

51. 자연수 n에 대하여 $0 < x < \frac{n}{12}\pi$일 때, 방정식 $\sin^2(4x) - 1 = 0$의 실근의 개수를 $f(n)$이라 하자. $f(n) = 33$이 되도록 하는 모든 n의 값의 합은?

① 295　② 297　③ 299　④ 301　⑤ 303

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 30

52. 두 실수 $a(a\neq0)$, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=a\sin\frac{\pi}{6}(x-1)+b$$

라 하고, 양수 t에 대하여 $0<x<t$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 직선 $y=4$와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$f(0)=8$, $g(18)=5$일 때, $g(\alpha)=|a-b|$를 만족시키는 양수 α의 최댓값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 3

53. $0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin4x=\frac{1}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 19

54. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & (\cos x\ge\sin x)\\ \sin x & (\cos x<\sin x)\end{cases},\quad g(x)=\cos ax$$

($a>0$인 상수)

이다. 닫힌구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$에서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 개수가 3이 되도록 하는 a의 최솟값을 p라 하자. 닫힌구간 $\left[0,\ \frac{11}{12}\pi\right]$에서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=\cos px$의 교점의 개수를 q라 할 때, $p+q$의 값은?

① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 30

55. 두 자연수 a, b에 대하여 세 함수

$$f(x)=\cos\pi x,\ g(x)=\sin\pi x,\ h(x)=ax+b$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x \le 4$일 때, 방정식 $(f \circ h)(x)=(h \circ g)\left(\frac{3}{2}\right)$의 서로 다른 실근의 개수는 홀수이다.
>
> (나) $0 \le x \le 4$일 때, 방정식 $(f \circ h)(x)=(h \circ g)(t)$의 서로 다른 모든 실근의 합이 56이 되도록 하는 실수 t가 존재한다.

$\dfrac{a \times b}{\cos^2 \pi t}$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 11

56. 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \sin x & \left(0 \le x \le \dfrac{k}{6}\pi\right) \\ 2\sin\left(\dfrac{k}{6}\pi\right)-\sin x & \left(\dfrac{k}{6}\pi < x \le 2\pi\right) \end{cases}$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\dfrac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수를 a_k라 할 때, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 6

57. 두 정수 a, b에 대하여

$$a^2+b^2 \le 13,\ \cos\frac{(a-b)\pi}{2}=0$$

을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는?

① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 11

58. 자연수 k에 대하여 $0 \leq x < 2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$의 서로 다른 실근의 개수가 8이다. $0 \leq x < 2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$의 모든 해의 합은?

① 5π ② 6π ③ 7π
④ 8π ⑤ 9π

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 17

59. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x) = \sin(a\pi x) + 2b \, (0 \leq x \leq 1)$$

이 있다. 집합 $\{x \mid \log_2 f(x)$는 정수$\}$의 원소의 개수가 8이 되도록 하는 서로 다른 모든 a의 값의 합은?

① 12 ② 15 ③ 18
④ 21 ⑤ 24

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 18

60. 집합 $\{x \mid -\pi \leq x \leq \pi\}$에서 정의된 함수

$$f(x) = \left| \sin 2x + \frac{2}{3} \right|$$

가 있다. 양수 k에 대하여 함수 $y = f(x)$의 그래프가 두 직선 $y = 3k$, $y = k$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 각각 m, n이라 할 때, $|m-n| = 3$을 만족시킨다. $-\pi \leq x \leq \pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x) = k$의 모든 실근의 합은?

① $\frac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{2}\pi$
④ 3π ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 15

61. 함수

$$f(x)=\left|2a\cos\frac{b}{2}x-(a-2)(b-2)\right|$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 10 이하의 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는?

(가) 함수 $f(x)$는 주기가 π인 주기함수이다.
(나) $0 \le x \le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2a-1$의 교점의 개수는 4이다.

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

03 수1 06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

06 삼각부등식1 (일차식꼴)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 9

62. $0 < x \le 2\pi$일 때, 방정식 $\sin^2 x=\cos^2 x+\cos x$와 부등식 $\sin x > \cos x$를 동시에 만족시키는 모든 x의 값의 합은?

① $\frac{4}{3}\pi$ ② $\frac{5}{3}\pi$ ③ 2π
④ $\frac{7}{3}\pi$ ⑤ $\frac{8}{3}\pi$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 13

63. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 부등식 $3\sin x - 2 > 0$의 해가 $\alpha < x < \beta$이다. $\cos(\alpha+\beta)$의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

03 수1 06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

08 방부등식의 활용1 (이차함수의 활용)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 14

64. $0 \le \theta < 2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2 - (2\sin\theta)x - 3\cos^2\theta - 5\sin\theta + 5 = 0$$

이 실근을 갖도록 하는 θ의 최솟값과 최댓값을 각각 α, β라 하자. $4\beta - 2\alpha$의 값은?

① 3π ② 4π ③ 5π

④ 6π ⑤ 7π

03 수1 06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

09 방부등식의 활용2 (부등식의 성립조건)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 12

65. $0 \leq x < 2\pi$일 때, x에 대한 부등식

$$\sin^2 x - 4\sin x - 5k + 5 \geq 0$$

이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$

④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 26

66. $0 \leq x < 2\pi$에서 x에 대한 부등식

$$(2a+6)\cos x - a\sin^2 x + a + 12 < 0$$

의 해가 존재하도록 하는 자연수 a의 최솟값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 24

67. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$(a\sin^2 x - 4)\cos x + 4 \geq 0$$

을 만족시키는 실수 a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

03 수1 06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

11 방부등식의 활용4 (추론과 해석)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 21

68. 자연수k에 대하여 집합 A_k를

$$A_k=\left\{\sin\frac{2(m-1)}{k}\pi \,\middle|\, m\text{은 자연수}\right\}$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $A_3=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

ㄴ. 1이 집합 A_k의 원소가 되도록 하는 두 자리 자연수 k의 개수는 22이다.

ㄷ. $n(A_k)=11$을 만족시키는 모든 k의 값의 합은 33이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 21

69. 닫힌구간$[-2\pi,\ 2\pi]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\sin kx+2,\ \ g(x)=3\cos 12x$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는?

실수 a가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 y좌표이면

$$\{x\,|\,f(x)=a\}\subset\{x\,|\,g(x)=a\}$$

이다.

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 30

70. 두 실수 $a(0<a<2\pi)$와 k에 대하여 $0\le x\le 2\pi$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-\frac{1}{2} & (0\le x<a)\\ k\sin x-\frac{1}{2} & (a\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다.
>
> (나) 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 3이다.

방정식 $|f(x)|=\frac{1}{4}$의 모든 실근의 합을 S라 할 때, $20\left(\frac{a+S}{\pi}+k\right)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 15

71. $-1\le t\le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x\,|\,0\le x<4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $-1\le t<0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다.

ㄴ. $\{t\,|\,\beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\left\{t\,\middle|\,0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$이면 $t_1\times t_2=\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 30

72. 두 실수 a, b와 두 함수

$$f(x)=\sin x,\ g(x)=a\cos x+b$$

에 대하여 $0\le x\le 2\pi$에서 정의된 함수

$$h(x)=\frac{|f(x)-g(x)|+f(x)+g(x)}{2}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$의 최솟값은 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. (나) $0<c<\frac{\pi}{2}$인 어떤 실수 c에 대하여 $h(c)=h(c+\pi)=\frac{1}{2}$이다.

상수 $k\left(k>\frac{1}{2}\right)$에 대하여 방정식 $h(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가질 때, $a+20\left(\frac{k}{b}\right)^2$의 값을 구하시오.

[수학1] [6삼각함수의 그래프] 교사평경 최근 3개년 (빠른 정답)

년도별경향 2022.12.27

1. [정답] ④
2. [정답] ②
3. [정답] ④
4. [정답] ⑤
5. [정답] ③

6. [정답] 8
7. [정답] 40
8. [정답] 3
9. [정답] 4
10. [정답] 12

11. [정답] 6
12. [정답] ②
13. [정답] ①
14. [정답] ①
15. [정답] ④

16. [정답] ③
17. [정답] ②
18. [정답] ③
19. [정답] ③
20. [정답] ③

21. [정답] ③
22. [정답] ④
23. [정답] ③
24. [정답] ④
25. [정답] ④

26. [정답] ③
27. [정답] ②
28. [정답] ④
29. [정답] ⑤
30. [정답] ②

31. [정답] ⑤
32. [정답] ③
33. [정답] ①
34. [정답] ②
35. [정답] ③

36. [정답] ①
37. [정답] ⑤
38. [정답] ①
39. [정답] 12
40. [정답] ⑤

41. [정답] ③
42. [정답] ③
43. [정답] ③
44. [정답] ②
45. [정답] ④

46. [정답] ④
47. [정답] 480
48. [정답] 14
49. [정답] ⑤
50. [정답] 10

51. [정답] ②
52. [정답] 49
53. [정답] ④
54. [정답] ②
55. [정답] 686

56. [정답] ④
57. [정답] ③
58. [정답] ③
59. [정답] ①
60. [정답] ②

61. [정답] ⑤
62. [정답] ①
63. [정답] ①
64. [정답] ①
65. [정답] ①

66. [정답] 7
67. [정답] 14
68. [정답] ②
69. [정답] ②
70. [정답] 110

71. [정답] ②

72. [정답] 59

[수학1] [6삼각함수의 그래프] 교사평경 최근 3개년 (해설)

년도별경향 2022.12.27

1) [정답] ④

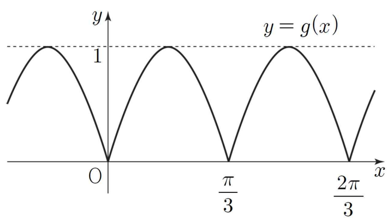
[해설]

함수 $y=\tan\frac{x}{4}$의 주기는 $\frac{\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|}=4\pi$

2) [정답] ②

[해설]

함수 $g(x)=|\sin3x|$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $g(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$

함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{|a|}$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 주기가 서로 같으므로 $\frac{2\pi}{|a|}=\frac{\pi}{3}$

a는 양수이므로 $a=6$

3) [정답] ④

[해설]

양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\sin\left(ax+\frac{\pi}{6}\right)$의 주기는

$\frac{2\pi}{a}$이므로 $\frac{2\pi}{a}=4\pi$에서 $a=\frac{1}{2}$

따라서 $f(\pi)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) [정답] ⑤

[해설]

함수 $y=\cos ax$의 주기는 $\frac{2\pi}{|a|}$이므로 함수 $y=\cos\frac{x}{3}$의 주기는

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$$

5) [정답] ③

[해설]

$\tan\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)=\tan\left(\pi x+\frac{\pi}{2}+\pi\right)=\tan\left\{\pi(x+1)+\frac{\pi}{2}\right\}$

따라서 $y=\tan\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)$의 주기는 1

6) [정답] 8

[해설]

함수 $y=k\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+10=k\cos x+10$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ 14\right)$를 지나므로 $14=k\cos\frac{\pi}{3}+10$이고

$14=\frac{1}{2}k+10$이다.

따라서 $k=8$

7) [정답] 40

[해설]

닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a},\ \frac{2\pi}{a}\right]$에서 $0<a<\frac{4}{7}$이므로 $-\frac{\pi}{a}<-\frac{7}{4}\pi$, $\frac{7\pi}{2}<\frac{2\pi}{a}$이다.

함수 $f(x)=2\sin(ax)+b$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}\pi,\ 0\right)$을 지나므로

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\frac{a}{2}\pi\right)+b=-2\sin\left(\frac{a}{2}\pi\right)+b=0$$

$$f\left(\frac{7\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{7a}{2}\pi\right)+b=0$$

따라서 $\sin\left(\frac{7a\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{a}{2}\pi\right)$

$0<a<\frac{4}{7}$에서 $0<\frac{a}{2}\pi<\frac{2}{7}\pi$, $0<\frac{7a}{2}\pi<2\pi$이므로

$\frac{7a\pi}{2}=2\pi-\frac{a}{2}\pi$ 또는 $\frac{7a\pi}{2}=\pi+\frac{a}{2}\pi$

따라서 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

(ⅰ) $a=\frac{1}{2}$일 때

$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+b$에서

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+b$$
$$=2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+b$$
$$=-\sqrt{2}+b=0$$

이므로 $b=\sqrt{2}$

이는 b는 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a=\frac{1}{3}$일 때

$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{3}x\right)+b$에서

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+b$$
$$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+b$$
$$=-1+b=0$$

이므로 $b=1$

이때 $f\left(\frac{7}{2}\pi\right)=0$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=\frac{1}{3}$, $b=1$이고

$$30(a+b)=30\times\left(\frac{1}{3}+1\right)=40$$

8) [정답] **3**

[해설]

함수 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+k$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{6},\ 2\right)$를 지나므로

$2=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)+k$이다.

따라서 $2=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+k$에서 $k=3$

9) [정답] 4

[해설]

함수 $y=3\sin(x+\pi)+k$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{2}\right)$를 지나므로

$\frac{5}{2}=3\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)+k=3\times\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)+k$이다. 따라서

$-\frac{3}{2}+k=\frac{5}{2}$, 즉 $k=4$

10) [정답] **12**

[해설]

함수 $f(x)=5\sin\left(\frac{\pi}{2}x+1\right)+3$에서 주기는 $p=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이고

최댓값은 $M=5+3=8$이므로 $p+M=12$

11) [정답] **6**

[해설]

$-1\le\sin x\le 1$에서 $-5\le 5\sin x\le 5$이므로

$$-5+1\le 5\sin x+1\le 5+1$$
$$\therefore -4\le 5\sin x+1\le 6$$

즉, $f(x)=5\sin x+1$의 최댓값은 6

12) [정답] ②

[해설]

$-1\le\cos x\le 1$이므로 $f(x)=4\cos x+3$에서

$$-1\le 4\cos x+3\le 7$$

즉, $-1\le f(x)\le 7$이므로 $f(x)$의 최댓값은 7이다.

13) [정답] ①

[해설]

함수 $f(x)$의 주기가 4π이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{b}=4\pi$에서 $b=\frac{1}{2}$

최솟값이 -1이므로 $-|a|+3=-1$에서 $a=4$

따라서 $a+b=\frac{9}{2}$

14) [정답] ①

[해설]

함수 $f(x)=4\cos\frac{\pi}{a}x+b$의 주기가 4이므로

$$\frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{a}\right|}=4$$

$a>0$이므로 $a=2$

함수 $f(x)$의 최솟값이 -1이므로

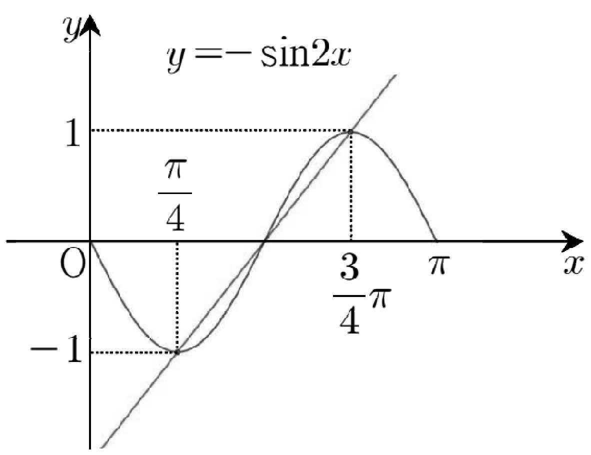
$-4+b=-1$에서 $b=3$

따라서 $a+b=5$

15) [정답] ④

[해설]

함수 $f(x)=-\sin2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$일 때 최솟값

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$$

을 갖고, $x=\frac{3}{4}\pi$일 때 최댓값

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\sin\frac{3}{2}\pi=1$$

을 갖는다.

따라서 $a=\frac{3\pi}{4}$, $b=\frac{\pi}{4}$이므로 두 점 $\left(\frac{3}{4}\pi, 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, -1\right)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{1-(-1)}{\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}$$

16) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)=a-\sqrt{3}\tan2x$의 그래프의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$에서 최댓값과 최솟값을 가지므로

$$-\frac{\pi}{6}<b<\frac{\pi}{4}$$

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$에서 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다.

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{\pi}{6}$에서 최댓값 7을 가지므로

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=a-\sqrt{3}\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=7$에서

$$a+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3}=7$$

$$a+3=7,\qquad a=4$$

함수 $f(x)$는 $x=b$에서 최솟값 3을 가지므로

$f(b)=4-\sqrt{3}\tan2b=3$에서

$$\tan2b=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

이때, $-\frac{\pi}{3}<2b<\frac{\pi}{2}$이므로

$$2b=\frac{\pi}{6},\qquad b=\frac{\pi}{12}$$

$$\therefore\ a\times b=4\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

17) [정답] ②

[해설]

주어진 삼각함수 $y=a\sin bx+c$ $(a>0,\ b>0)$의 최댓값이 3, 최솟값이 -1이므로

$$a+c=3,\ -a+c=1$$

$$\therefore a=2,\ c=1$$

한편, 주어진 그래프에서 삼각함수의 주기가 $\frac{5}{4}\pi-\frac{1}{4}\pi=\pi$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\pi$이고 $b=2$이다.

따라서 $a+b+c=5$

18) [정답] ③

[해설]

함수 $y=a\tan bx+c$의 주기가 2π이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=2\pi$에서 $b=\frac{1}{2}$이다.

함수 $y=a\tan\frac{x}{2}+c$의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=a\tan 0+c$에서 $c=2$이다.

함수 $y=a\tan\frac{x}{2}+2$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 5\right)$를 지나므로

$5=a\tan\frac{\pi}{4}+2$에서 $a=3$이다.

따라서 $a\times b\times c=3$

19) [정답] ③

[해설]
주어진 삼각함수 $y=a\cos bx+c(a>0, b>0)$의 최댓값이 $a+c$, 최솟값이 $-a+c$이므로 $a+c=1$, $-a+c=-3$에서 $a=2$, $c=-1$이다. 한편, 주어진 그래프에서 삼각함수의 주기가 $\frac{2}{3}\pi$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\frac{2}{3}\pi$, 즉 $b=3$이다. 따라서 $a\times b\times c=-6$

20) [정답] ③

[해설]
함수 $y=a\sin b\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$이므로 두 점 A, B의 좌표는 $A\left(\frac{1}{2b}, a\right)$, $B\left(\frac{5}{2b}, a\right)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이가 5이므로

$$\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{5}{2b}-\frac{1}{2b}\right)=5,\ \frac{a}{b}=5$$

$$a=5b \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$이므로

$$\frac{a}{\frac{1}{2b}}\times\frac{a}{\frac{5}{2b}}=2ab\times\frac{2ab}{5}$$

$$=\frac{4a^2b^2}{5}=\frac{5}{4}$$

$$a^2b^2=\frac{25}{16},\ ab=\frac{5}{4} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$$a+b=3$$

21) [정답] ③

[해설]

$\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a$이므로

함수 $f(x)$의 주기는 a이다.

직선 AB는 원점을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선이므로 양수 t에 대하여 $B(t, \sqrt{3}t)$로 놓으면 $A(-t, -\sqrt{3}t)$이고, $\overline{AB}=4t$이다.

이때, 함수 $f(x)$의 주기가 a이므로 $\overline{AC}=4t=a$이고, $C(-t+a, -\sqrt{3}t)$, 즉 $C(3t, -\sqrt{3}t)$이다.

점 C가 곡선 $y=\tan\frac{\pi x}{a}=\tan\frac{\pi x}{4t}$ 위의 점이므로

$$-\sqrt{3}t=\tan\frac{\pi\times 3t}{4t}$$

$$-\sqrt{3}t=\tan\frac{3\pi}{4}에서$$

$$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

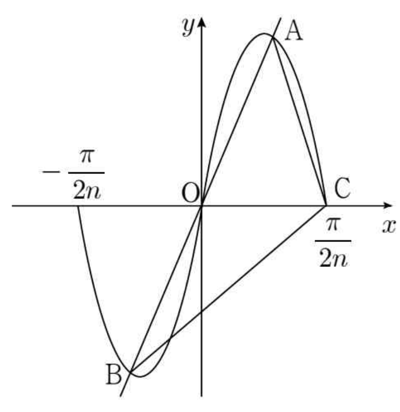
$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4t)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

22) [정답] ④

[해설]



함수 $y=3\sin 2nx$의 주기는 $\frac{2\pi}{2n}=\frac{\pi}{n}$이다.

원점을 지나고 기울기가 양수인 직선이 $-\frac{\pi}{2n}<x<\frac{\pi}{2n}$에서 함수 $y=3\sin 2nx$의 그래프와 만나는 원점이 아닌 두 점 A와 B는 원점에 대하여 대칭이다. 따라서 실수 $t\left(-\frac{\pi}{2n}<t<\frac{\pi}{2n}, t\neq 0\right)$에 대하여 점 A의 좌표를

$(t, 3\sin 2nt)$라 하면 점 B의 좌표는 $(-t, -3\sin 2nt)$이다.
삼각형 AOC의 넓이와 삼각형 BOC의 넓이가 같으므로
삼각형 ABC의 넓이는

$$2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2n}\times 3|\sin 2nt|=\frac{\pi}{12}$$

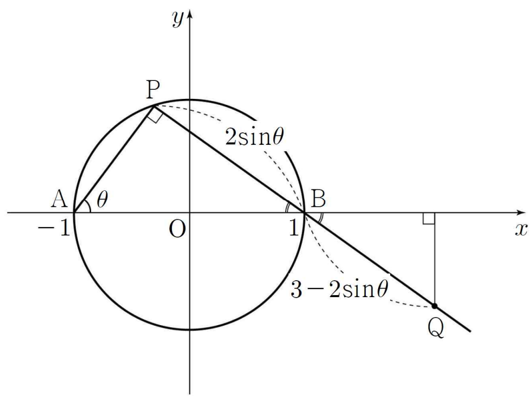
이고 $|\sin 2nt|=\frac{n}{18}$이다.

$0<|\sin 2nt|\le 1$이므로 $0<\frac{n}{18}\le 1$이다.

따라서 n의 최댓값은 18이다.

23) [정답] ③

[해설]



$\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle\mathrm{PBA}=\frac{\pi}{2}-\theta$이고, $\overline{\mathrm{BP}}=2\sin\theta$이므로

$$\overline{\mathrm{BQ}}=3-2\sin\theta$$

따라서 점 Q의 x좌표는

$$1+\overline{\mathrm{BQ}}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=1+(3-2\sin\theta)\sin\theta$$

$$=1+3\sin\theta-2\sin^2\theta$$

$$=-2\left(\sin\theta-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$$

이므로 $\sin\theta=\frac{3}{4}$일 때 최대이다.

그러므로 $\sin^2\theta=\frac{9}{16}$

24) [정답] ④

[해설]

$$f(x)=\cos^2 x-4\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+3$$

$=\cos^2 x+4\sin x+3$

$=-\sin^2 x+4\sin x+4$

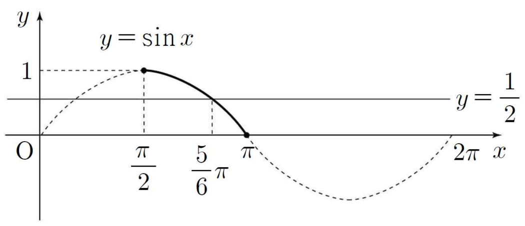
$\sin x=t(-1\le t\le 1)$로 치환하면

$$y=-t^2+4t+4$$

이차함수의 축의 방정식이 $t=2$이므로 $t=1$일 때 최댓값 $-1+4+4=7$이다.

25) [정답] ④

[해설]

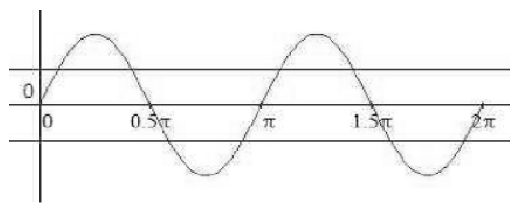


$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$일 때, 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$이 만나는 점의 x좌표는 $\frac{5}{6}\pi$이다.

따라서 방정식 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해는 $x=\frac{5}{6}\pi$이다.

26) [정답] ③

[해설]



$\sin 2x=\frac{1}{2}$ 또는 $-\frac{1}{2}$이고, 그림과 같이 8개인데, 서로 $x=\pi$에 대하여 대칭이다.
따라서 8개의 근의 합은 8π이다.

27) [정답] ②

[해설]

$x=\pi-\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

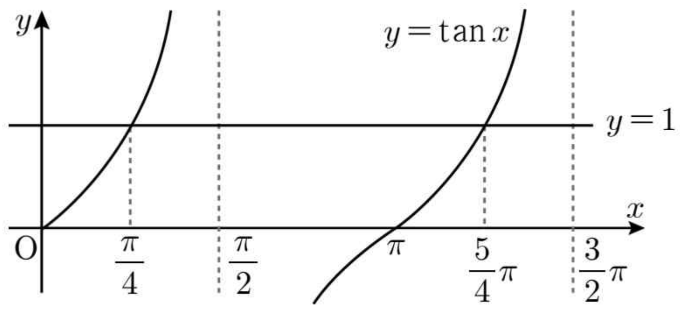
$\cos x=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-\frac{1}{2}$이므로 $\cos\theta=\frac{1}{2}$에서

$\theta=\frac{\pi}{3}$이다.

따라서 $x=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$

28) [정답] ④

[해설]



방정식 $\tan x=1$의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표와 같다. $\tan\dfrac{\pi}{4}=1$이고 함수 $y=\tan x$의 주기가 π이므로 구하는 해는 $x=\dfrac{5}{4}\pi$

29) [정답] ⑤

[해설]
$(1-\sin^2 3x)-\sin 3x+1=0$
$\sin^2 3x+\sin 3x-2=0$
$(\sin 3x+2)(\sin 3x-1)=0$
$\sin 3x=1,\ 3x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{9}{2}\pi$
$x=\dfrac{1}{6}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{9}{6}\pi$이므로 그 합은 $\dfrac{5}{2}\pi$

30) [정답] ②

[해설]

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$이므로

$4\sin^2 x-4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)-3$

$=4\sin^2 x+4\sin x-3$

$\sin x=t$라 하면 t의 범위는 $0\le x\le 4\pi$에 의하여

$-1\le t\le 1$

준 식은 $4t^2+4t-3$이므로

$(2t-1)(2t+3)=0$

$\therefore t=\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{2}$

$\therefore t=\dfrac{1}{2}\ (\because -1\le t\le 1)$

즉, $0\le x\le 4\pi$에서 $\sin x=\dfrac{1}{2}$를 만족하는 x의 값은

$x=\dfrac{\pi}{6},\ \pi-\dfrac{\pi}{6},\ 2\pi+\dfrac{\pi}{6},\ 3\pi-\dfrac{\pi}{6}$

따라서 모든 해의 합은 6π

31) [정답] ⑤

[해설]

$\sin x=\sqrt{3}(1+\cos x),\ \sin^2 x=1-\cos^2 x$이므로

$1-\cos^2 x=3(1+\cos x)^2,\ 2(1+\cos x)(2\cos x+1)=0$

(ⅰ) $\cos x=-1$일 때, $\sin x=0$이고 $x=\pi$

(ⅱ) $\cos x=-\dfrac{1}{2}$일 때, $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이고 $x=\dfrac{2}{3}\pi$

(ⅰ), (ⅱ)에서 방정식의 모든 해의 합은 $\dfrac{5}{3}\pi$이다.

32) [정답] ③

[해설]

$$\begin{aligned}2\cos^2 x-\sin(\pi+x)-2&=2(1-\sin^2 x)+\sin x-2\\&=-2\sin^2 x+\sin x\\&=-\sin x(2\sin x-1)=0\end{aligned}$$

$\sin x=0$또는 $\sin x=\dfrac{1}{2}$

$0<x<2\pi$이므로

$\sin x=0$에서 $x=\pi$

$\sin x=\dfrac{1}{2}$에서 $x=\dfrac{\pi}{6}$또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$

따라서 모든 해의 합은 2π이다.

33) [정답] ①

[해설]

$\tan\theta-\dfrac{6}{\tan\theta}=1$이므로

양변에 $\tan\theta$를 곱하면

$\tan^2\theta-6=\tan\theta$

$\tan^2\theta-\tan\theta-6=0$

$(\tan\theta+2)(\tan\theta-3)=0$

$\tan\theta=-2$ 또는 $\tan\theta=3$

이때, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\tan\theta=3$

이때,

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=3,$

$\sin\theta=3\cos\theta$

이므로

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$9\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$

$10\cos^2\theta=1$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$ 또는 $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

이때, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$ …… ㉠

이 값을 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$\sin^2\theta+\frac{1}{10}=1$

$\sin^2\theta=\frac{9}{10}$

$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$ 또는 $\sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

이때, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$ …… ㉡

따라서, ㉠과 ㉡에서

$$\begin{aligned}\sin\theta+\cos\theta&=\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\\&=-\frac{4}{\sqrt{10}}\\&=-\frac{2\sqrt{10}}{5}\end{aligned}$$

34) [정답] ②

[해설]

두 함수의 그래프가 만나는 점의 y좌표가 같으므로

$\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$이므로 $2\sin x=1$

즉, $\sin x=\frac{1}{2}$

그러므로 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 점의 x좌표의 합은 π

35) [정답] ③

[해설]

$6\sin\frac{\pi}{12}x=3$에서 $\sin\frac{\pi}{12}x=\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{12}x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

$x=2,\ 10,\ \therefore \overline{AB}=10-2=8$

36) [정답] ①

[해설]

방정식 $\sin\frac{\pi x}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-4\le x\le 4)$에서

$\frac{\pi x}{4}=\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{\pi x}{4}=\frac{3}{4}\pi$, $x=1$ 또는 $x=3$

점 A의 좌표는 $(1,\ \sqrt{2})$

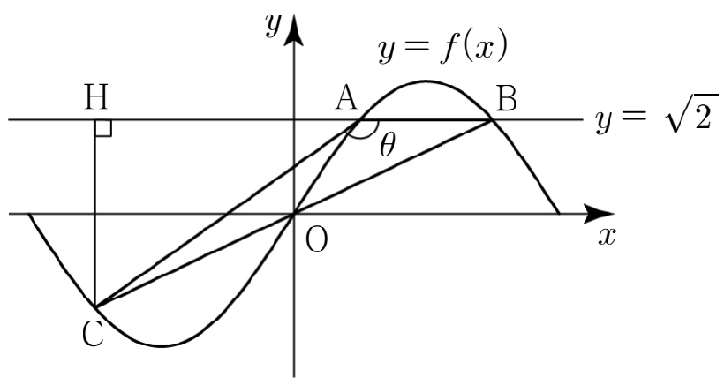
점 B의 좌표는 $(3,\ \sqrt{2})$

점 B와 점 C는 원점에 대하여 서로 대칭이므로

점 C의 좌표는 $(-3,\ -\sqrt{2})$

점 C에서 직선 $y=\sqrt{2}$에 내린 수선의 발을

H라 하면 점 H의 좌표는 $(-3,\ \sqrt{2})$



$\angle CAH=\pi-\theta$, $\sin\theta=\sin(\pi-\theta)$

$\overline{CH}=2\sqrt{2}$

$\overline{AC}=\sqrt{(-3-1)^2+(-\sqrt{2}-\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}$

이므로 직각삼각형 ACH에서

$\sin(\pi-\theta)=\frac{\overline{CH}}{\overline{AC}}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

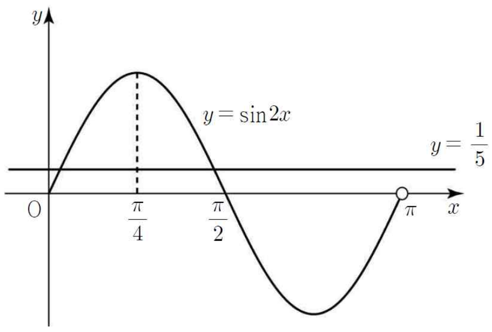
따라서 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

37) [정답] ⑤

[해설]

$y=\sin x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{n}$

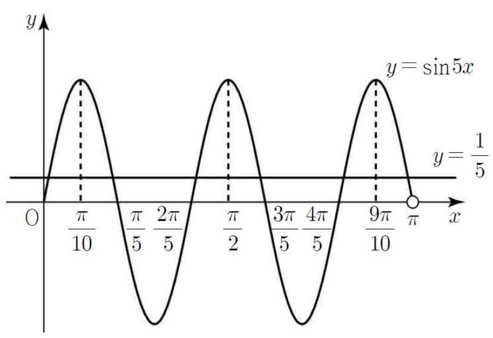
(i) $n=2$일 때, $y=2\sin 2x$의 주기는 π



$0\le x<\pi$에서 방정식 $\sin 2x=\dfrac{1}{5}$은 직선 $x=\dfrac{\pi}{4}$에 대하여 대칭인 해를 2개 가지므로

$f(2)=\dfrac{\pi}{4}\times 2=\dfrac{\pi}{2}$

(ii) $n=5$일 때, $y=\sin 5x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{5}$



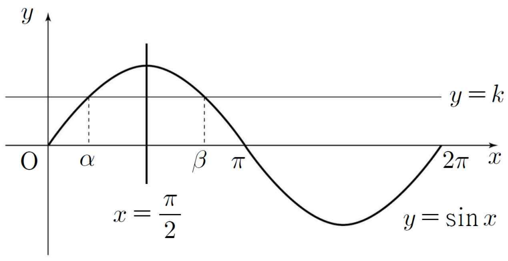
$0\le x<\pi$에서 방정식 $\sin 5x=\dfrac{1}{5}$은 세 직선 $x=\dfrac{\pi}{10}$, $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{9\pi}{10}$에 대하여 각각 대칭인 해를 2개씩 가지므로

$f(5)=\dfrac{\pi}{10}\times 2+\dfrac{\pi}{2}\times 2+\dfrac{9\pi}{10}\times 2=3\pi$

(i), (ii)에 의하여 $f(2)+f(5)=\dfrac{7}{2}\pi$

38) [정답] ①

[해설]



함수 $y=\sin x$의 그래프는 직선 $x=\dfrac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표 α, β에 대하여 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\pi}{2}$, 즉 $\alpha+\beta=\pi$이므로 $\beta=\pi-\alpha$이다.

$\dfrac{\beta-\alpha}{2}=\dfrac{(\pi-\alpha)-\alpha}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$이므로

$$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\frac{5}{7}$$

따라서 $k^2=\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\dfrac{5}{7}\right)^2=\dfrac{24}{49}$이므로

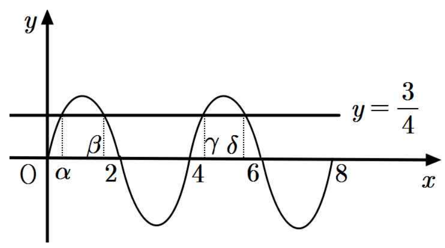
$$k=\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

39) [정답] 12

[해설]

$y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$는 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}$이므로 주기는 4이다.

$0\le x\le 8$일 때 $\sin\dfrac{\pi x}{2}=\dfrac{3}{4}$을 만족시키는 해는 아래 그래프와 같이 α, β, γ, δ라 하자.



(i) $y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$의 그래프와 $y=\dfrac{3}{4}$의 교점의 x좌표를 α, β라 하면 두 값의 평균은 1이므로 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1$에서 $\alpha+\beta=2$이다.

(ii) (i) $y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$의 그래프와 $y=\dfrac{3}{4}$의 교점의 x좌표를 γ, δ라 하면 두 값의 평균은 5이므로 $\dfrac{\gamma+\delta}{2}=5$에서 $\alpha+\beta=10$이다.

따라서 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2+10=12$

40) [정답] ⑤

[해설]

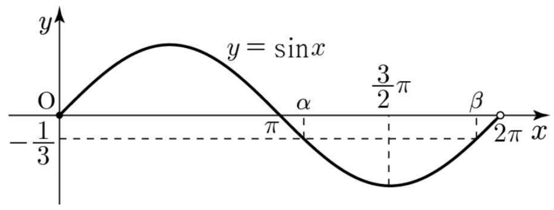
$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$이므로

$3(1-\sin^2 x) + 5\sin x - 1 = 0$,

$3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$,

$(3\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$

$-1 \le \sin x \le 1$이므로 $\sin x = -\frac{1}{3}$ …… ㉠



㉠을 만족시키는 x의 값을 $x = \alpha$, $\beta(\alpha < \beta)$라 하면

$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{3}{2}\pi$이므로 $\alpha + \beta = 3\pi$

따라서 모든 해의 합은 3π

41) [정답] ③

[해설]

세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 $x_1(0 < x_1 < 1)$, x_2, x_3이라 하면 삼각함수 $y = \sin\frac{\pi}{2}x$의 주기가 4이므로 $x_2 = 2 - x_1$, $x_3 = x_1 + 4$

$x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + (2 - x_1) + (x_1 + 4)$

$= x_1 + 6 = \frac{25}{4}$

$x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 2 - x_1 = \frac{7}{4}$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}} = x_2 - x_1 = \frac{3}{2}$

42) [정답] ③

[해설]

$0 \le x \le \frac{2\pi}{a}$에서 $0 \le ax \le 2\pi$이므로

$2\cos ax = 1$, 즉 $\cos ax = \frac{1}{2}$에서

$ax = \frac{\pi}{3}$ 또는 $ax = \frac{5\pi}{3}$, 즉 $x = \frac{\pi}{3a}$ 또는 $x = \frac{5\pi}{3a}$

두 점 A, B의 좌표가 각각 $\left(\frac{\pi}{3a}, 1\right)$, $\left(\frac{5\pi}{3a}, 1\right)$이고

$\overline{\mathrm{AB}} = \frac{8}{3}$이므로

$\frac{5\pi}{3a} - \frac{\pi}{3a} = \frac{4\pi}{3a} = \frac{8}{3}$

$a = \frac{4\pi}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{\pi}{2}$

43) [정답] ③

[해설]

$f(x) = \cos\frac{\pi x}{6}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$

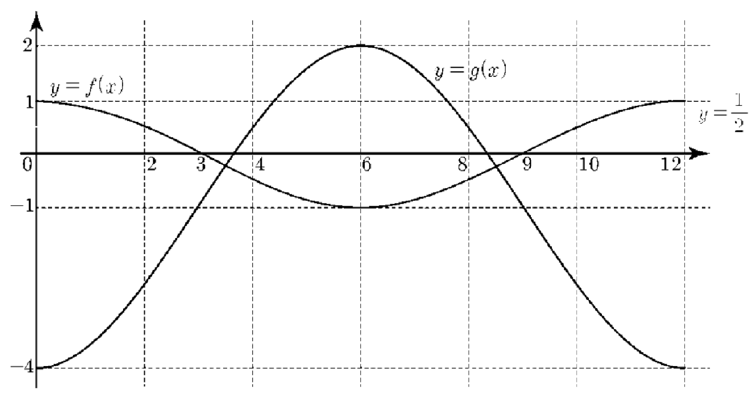
함수 $f(x)$는 $x = 6$에 대하여 대칭이므로 $\alpha_1 < \alpha_2$라 하면

$\alpha_2 = 12 - \alpha_1$

$|\alpha_1 - \alpha_2| = 8$에서 $|2\alpha_1 - 12| = 8$

$\alpha_1 = 2$ 또는 $\alpha_1 = 10$

$\alpha_1 < \alpha_2$이므로 $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 10$이다.



$f(2) = f(10) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$이므로 $k = \frac{1}{2}$이다.

곡선 $y = g(x)$와 직선 $y = \frac{1}{2}$가 만나는 두 점의 x좌표는

$-3\cos\frac{\pi x}{6} - 1 = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi x}{6} = -\frac{1}{2}$

$x = 4$ 또는 $x = 8$

$\therefore\ |\beta_1 - \beta_2| = 4$

44) [정답] ②

[해설]

$0 \le x < k$에서 $-\frac{1}{2} \le f(x) \le \frac{1}{2}$이고,

함수 $y = \frac{1}{2}\sin\pi x$의 주기는 2이다.

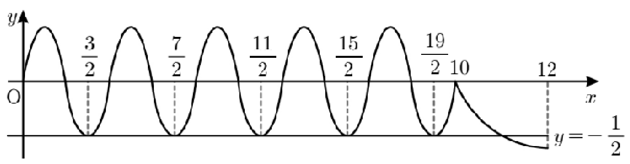
$f(k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-k} - 1 = 0$이므로

함수 $y = f(x)$의 그래프가 점 $(k, 0)$을 지난다.

방정식 $f(x) + a = 0$의 실근은 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = -a$의 교점의 x좌표와 같다.

$0 \le x \le 12$에서 방정식 $f(x)+a=0$의 실근의 최댓값이 12이므로 모든 실근의 합이 46이기 위하여 실근의 개수는 4 이상이어야 한다.

(i) $a=\frac{1}{2}$인 경우



$k=10$일 때 방정식 $f(x)+a=0$의 모든 실근의 합이 최대이다. $0 \le x < 10$에서 모든 실근의 합은

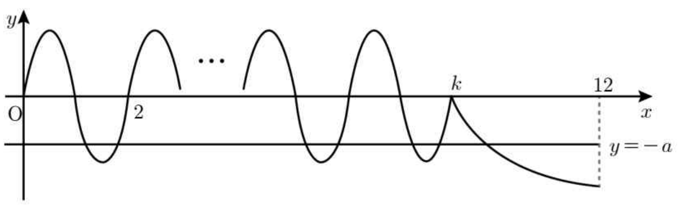
$\frac{3}{2}+\frac{7}{2}+\frac{11}{2}+\frac{15}{2}+\frac{19}{2}=\frac{55}{2}=27.5$이고

$f(12)=\left(\frac{2}{3}\right)^{12-10}-1=\frac{4}{9}-1=-\frac{5}{9}<-\frac{1}{2}$이므로

$10 \le x \le 12$에서 방정식 $f(x)+a=0$은 오직 하나의 실근을 갖고 그 값은 12보다 작다.

따라서 방정식 $f(x)+a=0$의 모든 실근의 합은 39.5보다 작으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $0<a<\frac{1}{2}$인 경우



$k \le x \le 12$에서 방정식 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-k}-1+a=0$의 실근의 개수는 최대 1이고 그 값은 12 이하이다.

$0 \le x \le 12$에서 방정식 $f(x)+a=0$의 모든 실근의 합이 46이기 위하여

$0 \le x < k$에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin\pi x+a=0$의 모든 실근의 합이 34 이상이어야 한다.

$0 \le x < 2$에서 함수 $y=\frac{1}{2}\sin\pi x$의 그래프와 직선 $y=-a$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α_1, α_2라 할 때, $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=\frac{3}{2}$,

즉 $\alpha_1+\alpha_2=3$이다.

또한, 함수 $y=\frac{1}{2}\sin\pi x$의 주기가 2이므로 $2 \le x < 4$에서

방정식 $\frac{1}{2}\sin\pi x+a=0$의

모든 실근의 합은 7,

$4 \le x < 6$에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin\pi x+a=0$의

모든 실근의 합은 11,

$6 \le x < 8$에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin\pi x+a=0$의

모든 실근의 합은 15,

$8 \le x < 10$에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin\pi x+a=0$의

모든 실근의 합은 19,

$10 \le x < 11$에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin\pi x+a=0$은 실근을 갖지 않는다.

따라서 다음 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

① $k \le 7$일 때

$0 \le x < k$에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin\pi x+a=0$의

모든 실근의 합이 34 미만이므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $k=8$ 또는 $k=9$일 때

$0 \le x < k$에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin\pi x+a=0$의

모든 실근의 합은 $3+7+11+15=36$이므로

$k \le x \le 12$에서 실근이 10이면 조건을 만족시킨다.

$k=8$이면 $f(10)+a=\left(\frac{2}{3}\right)^{10-8}-1+a=0$에서

$a=\frac{5}{9}$이므로 $0<a<\frac{1}{2}$에 모순이다.

$k=9$이면 $f(10)+a=\left(\frac{2}{3}\right)^{10-9}-1+a=0$에서

$a=\frac{1}{3}$이므로 $0<a<\frac{1}{2}$을 만족시킨다.

③ $k=10$ 또는 $k=11$일 때

$0 \le x < k$에서 모든 실근의 합은

$3+7+11+15+19=55>46$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii) 에 의하여 $a=\frac{1}{3}$, $k=9$이다.

따라서 $\frac{k}{a}=27$

45) [정답] ④

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2$와 만나는 점의 x좌표는

$0 \le x < \frac{4\pi}{a}$일 때 방정식 $\left|4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2\right|=2$ …… ㉠

의 실근과 같다.

$ax-\frac{\pi}{3}=t$라 하면 $-\frac{\pi}{3} \le t < \frac{11\pi}{3}$이고

$|4\sin t+2|=2$ …… ㉡

에서 $\sin t=0$ 또는 $\sin t=-1$

$-\frac{\pi}{3} \le t < \frac{11\pi}{3}$일 때, 방정식 ㉡의 실근은

$0,\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ 3\pi,\ \frac{7\pi}{2}$

의 6개이고 이 6개의 실근의 합은 11π이다.
따라서 $n=6$이고 방정식 ㉠의 6개의 실근의 합이 39이므로

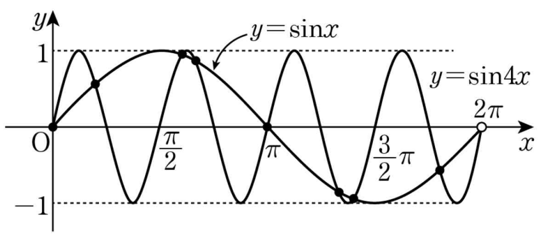
$39a-\frac{\pi}{3}\times 6=11\pi,\ a=\frac{\pi}{3}$

따라서 $n\times a=6\times\frac{\pi}{3}=2\pi$

46) [정답] ④

[해설]

함수 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 일치하고 함수 $y=\sin 4x$의 최댓값은 1, 최솟값은 -1, 주기는 $\frac{\pi}{2}$이므로 $0\le x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sin x$와 $y=\sin 4x$의 그래프는 다음 그림과 같다.

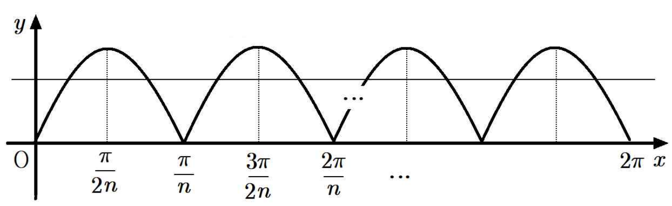


따라서 두 곡선이 만나는 점의 개수는 8

47) [정답] 480

[해설]

$y=|\sin nx|$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그래프에서 주기는 $\frac{\pi}{n}$이고, $0\le x\le 2\pi$까지 $2n$개의 그래프가 반복된다.

또, 한 주기 구간마다 2개의 실근을 갖고 각각의 근은 대칭성을 가지므로

제일 작은 근을 α라 하면

$\alpha,\ \frac{\pi}{n}-\alpha,\ \frac{\pi}{n}+\alpha,\ \frac{2\pi}{n}-\alpha\ \cdots,\ 2\pi-\alpha$

$\therefore a_n=4n,\ b_n=4n\pi$

$\therefore\ a_5 b_6=20\times 24\pi=480\pi$

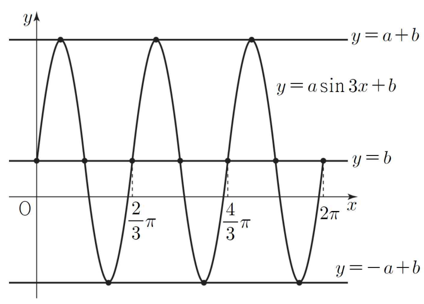
$\therefore k=480$

48) [정답] 14

[해설]

함수 $y=a\sin 3x+b$의 그래프의 주기가 $\frac{2}{3}\pi$이므로

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=a\sin 3x+b$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y=a\sin 3x+b$의 그래프가 직선 $y=k$와 만나는 점의 개수는 $k=-a+b$ 또는 $k=a+b$일 때, 3

$k=b$일 때, 7이므로 $b=2$이고, $-a+2=9$ 또는 $a+2=9$

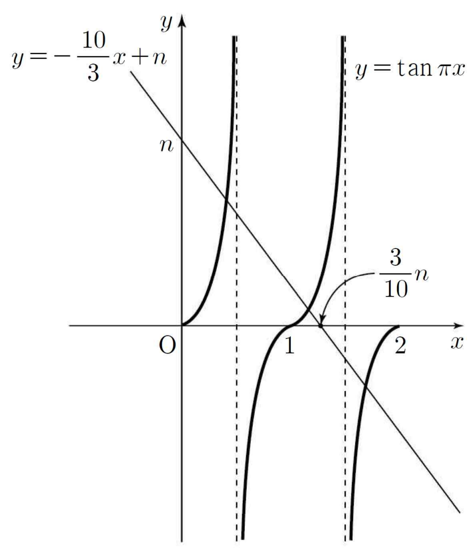
a가 양수이므로 $a=7$

따라서 $a\times b=7\times 2=14$

49) [정답] ⑤

[해설]

$y=\tan\pi x$의 주기는 $\frac{\pi}{\pi}=1$이다.



위의 그림과 같이 $0\le x\le 2$에서 함수 $y=\tan\pi x$의

그래프와 직선 $y=-\frac{10}{3}x+n$이 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 직선 $y=-\frac{10}{3}x+n$의 x절편 $\frac{3}{10}n$이 2보다 작거나 같아야 한다.

즉 $\frac{3}{10}n \le 2$이므로 $n \le \frac{20}{3}$이다.

따라서 자연수 n의 최댓값은 6이다.

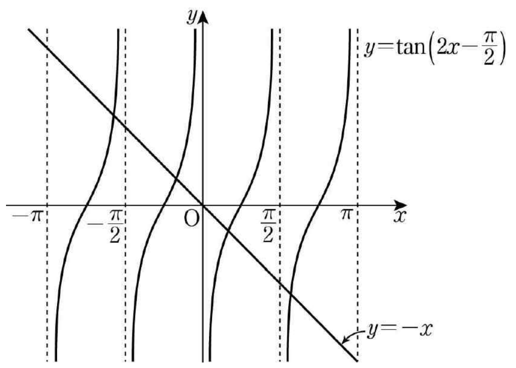
50) [정답] 10

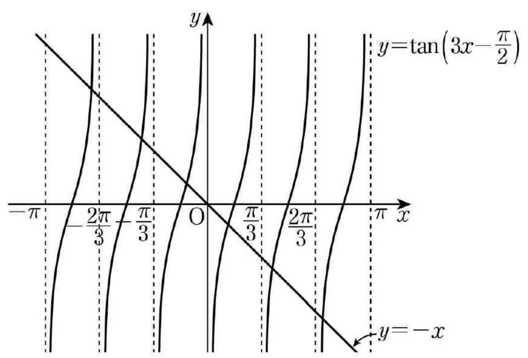
[해설]

$y=\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)=\tan n\left(x-\frac{\pi}{2n}\right)$의 주기는 $\frac{\pi}{n}$이고,

$y=\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\tan nx$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2n}$만큼 평행이동한 그래프이다.

아래 그림은 $n=2$, $n=3$일 때의 그래프이다.





그러므로 직선 $y=-x$와 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프의 교점의 개수는 $a_2=4$

$y=\tan\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프의 교점의 개수는 $a_3=6$

따라서 $a_2+a_3=4+6=10$

51) [정답] ②

[해설]

방정식 $\sin^2(4x)-1=0$에서 $\sin 4x=1$ 또는 $\sin 4x=-1$이다.

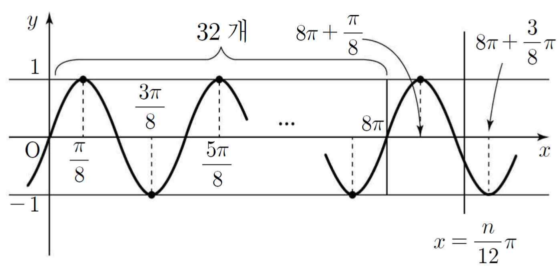
따라서 $0<x<\frac{n}{12}\pi$에서 함수 $y=\sin 4x$의 그래프가 직선 $y=1$ 또는 직선 $y=-1$과 만나는 점의 개수가 33이어야 한다.

함수 $y=\sin 4x$의 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$이다.

$0<x\le\frac{\pi}{4}$에서 함수 $y=\sin 4x$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나는 점의 개수가 1이고, $\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\sin 4x$의 그래프과 직선 $y=-1$이 만나는 점의 개수가 1이므로 $0<x\le\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\sin 4x$의 그래프가 직선 $y=1$ 또는 직선 $y=-1$과 만나는 점의 개수가 2이다.

따라서 $0<x\le\frac{\pi}{2}\times 16$에서 함수 $y=\sin 4x$의 그래프가 직선 $y=1$ 또는 직선 $y=-1$과 만나는 점의 개수는 $2\times 6=32$이다.

그러므로 $0<x<\frac{n}{12}\pi$에서 방정식 $\sin^2(4x)-1=0$의 실근의 개수가 33이기 위해 $8\pi<x<\frac{n}{12}\pi$에서 함수 $y=\sin 4x$의 그래프가 두 직선 $y=1$, $y=-1$과 만나는 점의 개수가 각각 1, 0이어야 한다.



따라서 $8\pi+\frac{\pi}{8}<\frac{n}{12}\pi\le 8\pi+\frac{3}{8}\pi$이고 $97.5<n\le 100.5$이다.

그러므로 구하는 자연수 n의 값은 98, 99, 100이고 합은 297이다.

52) [정답] 49

[해설]

함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{6}\right|}=12$이고,

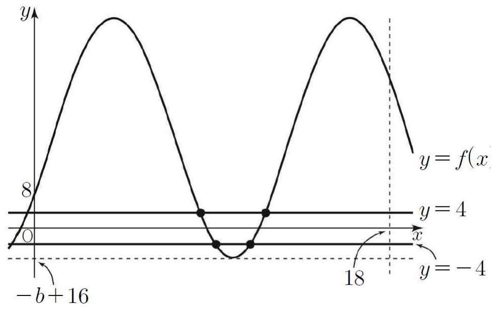
$f(0)=-\dfrac{1}{2}a+b=8$에서

$a=2b-16$

$g(t)$의 값은 $0<x<t$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 직선 $y=4$와 만나는 점의 개수이므로 $g(t)$의 값은 $0<x<t$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=4$와 만나는 점의 개수와 $0<x<t$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=-4$와 만나는 점의 개수의 합과 같다.

(i) $a>0$일 때

$b>8$이므로 $f(18)=2b-8>8$이고, 함수 $f(x)$의 주기는 12이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



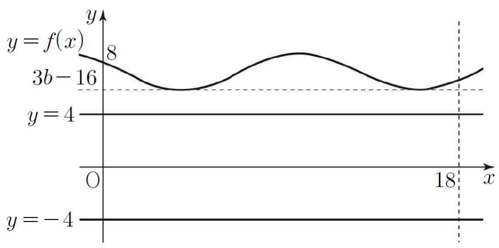
그러므로 함수 $f(x)$의 최솟값인 $-b+16$이 -4보다 작을 때 $g(18)$의 값은 최대이고 그 값은 4이다.

따라서 $a>0$일 때 $g(18)=5$를 만족시키는 두 실수 a, b가 존재하지 않는다.

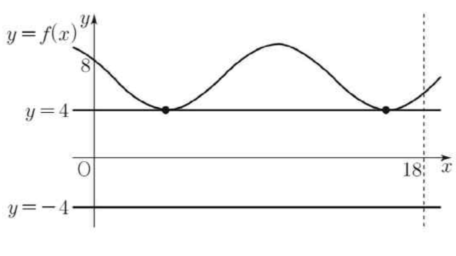
(ii) $a<0$일 때

$b<8$이고, 함수 $f(x)$의 최솟값인 $3b-16$의 범위에 따른 $g(18)$의 값은 다음과 같다.

(a) $4<3b-16<8$일 때 $g(18)=0$

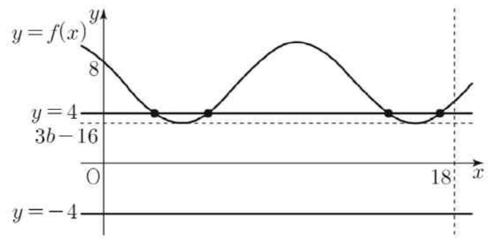


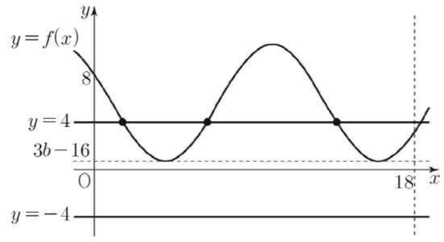
(b) $3b-16=4$일 때 $g(18)=2$



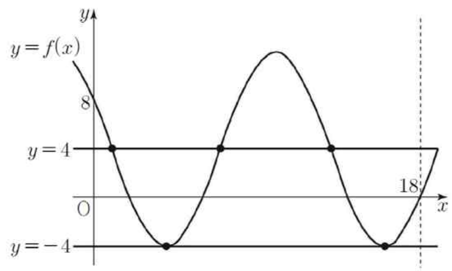
(c) $2<3b-16<4$일 때 $f(18)>4$이므로 $g(18)=4$

(d) $-4<3b-16\le 2$일 때 $0<f(18)\le 4$이므로 $g(18)=3$

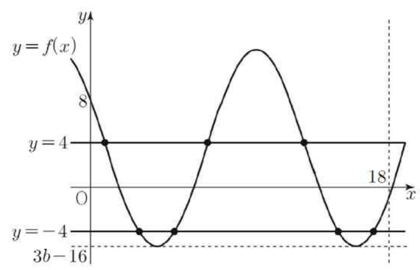




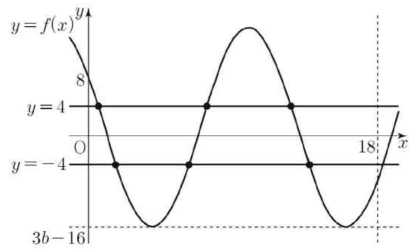
(e) $3b-16=-4$일 때 $f(18)=0$이므로 $g(18)=5$



(f) $-19<3b-16<-4$일 때 $-4<f(18)<0$이므로 $g(18)=7$

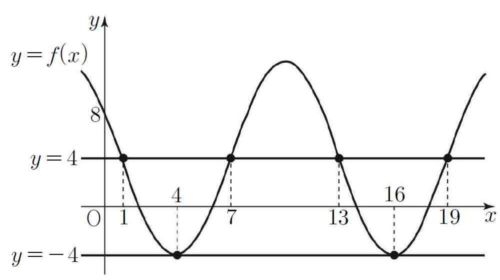


(g) $3b-16\le -10$일 때 $f(18)\le -4$이므로 $g(18)=6$



(i), (ii)에서 $3b-16=-4$, 즉 $a=-8$, $b=4$일 때 $g(18)=5$이다.

그러므로 $f(x)=-8\sin\dfrac{\pi}{6}(x-1)+4$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(1)=f(7)=f(13)=4$이고 $f(4)=-4$이므로 $7<p\le 13$인 실수 p에 대하여 $0<x<p$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 직선 $y=4$, $y=-4$와 만나는 점의 개수는 각각 2, 1이다.

그러므로 $g(\alpha)=|a-b|=12$, 즉 $0<x<\alpha$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=4$와 만나는 점의 개수와 $0<x<\alpha$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=-4$와 만나는 점의 개수의 합이 12가 되도록 하는 양수 α의 값의 범위는

$$7+12\times3<\alpha\le 13+12\times3$$

$$43<\alpha\le 49$$

따라서 양수 α의 최댓값은 49이다.

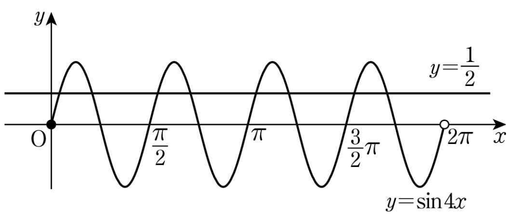
53) [정답] ④

[해설]

$y=\sin 4x$ 의 주기는 $\dfrac{2\pi}{|4|}=\dfrac{\pi}{2}$ 이다.

좌표평면에 직선 $y=\dfrac{1}{2}$ 과 $0\le x<2\pi$ 의 범위에서

함수 $y=\sin 4x$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.

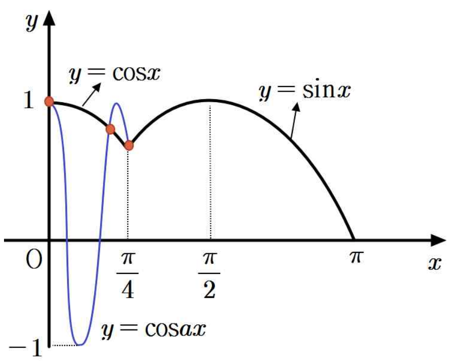


따라서 구하는 서로 다른 실근의 개수는 8

54) [정답] ②

[해설]

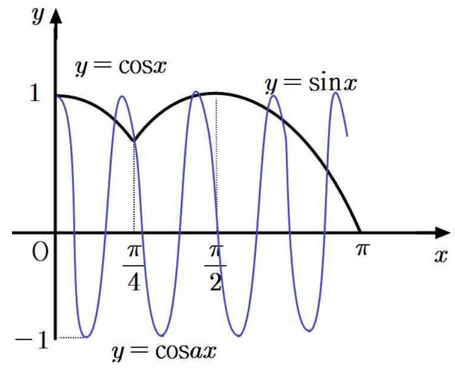
$g(x)=\cos ax$ 의 주기 $\dfrac{2\pi}{a}$, 한 개가 $x<\dfrac{\pi}{4}$의 범위에 있으면서 그래프는 $x=\dfrac{\pi}{4}$와 만나면 교점의 개수가 3이 된다.



따라서 $\dfrac{2\pi}{a}<\dfrac{\pi}{4}$을 만족하므로 $a>8$

즉, $\cos\dfrac{a}{4}\pi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$를 만족하는 a의 최솟값은 9

$\therefore\ p=9$



위의 그래프처럼 주기는 $\dfrac{2}{9}\pi$이며 닫힌구간 $\left[0,\ \dfrac{11}{12}\pi\right]$에는

네 개의 주기 $\dfrac{2}{9}\pi$, $\dfrac{4}{9}\pi$, $\dfrac{6}{9}\pi$, $\dfrac{8}{9}\pi$가 있다.

$x=0$에서 한 번 만나며, 세 주기 $\dfrac{2}{9}\pi$, $\dfrac{4}{9}\pi$, $\dfrac{6}{9}\pi$의 양쪽에서

각각 한 번씩 만나고 $\dfrac{8}{9}\pi$에서는 왼쪽에서 한번 만난다.

즉, 교점의 개수 q는 $q=8$

$\therefore\ p+q=17$

55) [정답] 686

[해설]

$$(f\circ h)(x)=\cos(a\pi x+b\pi)$$
$$=\begin{cases}\cos a\pi x & (b\text{는 짝수})\\ -\cos a\pi x & (b\text{는 홀수})\end{cases}$$

이고 $(h\circ g)(x)=a\sin\pi x+b$이다.

두 자연수 a, b에 대하여

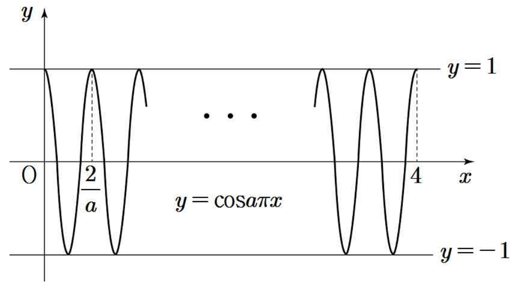
$$(h\circ g)\left(\frac{3}{2}\right)=a\sin\frac{3}{2}\pi+b=-a+b$$

는 정수이므로 조건 (가)의 방정식의 실근이 존재하기 위한 $-a+b$의 값은 -1 또는 0 또는 1이다.

함수 $(f\circ h)(x)=\begin{cases}\cos a\pi x & (b\text{는 짝수})\\ -\cos a\pi x & (b\text{는 홀수})\end{cases}$의 그래프는

주기가 $\dfrac{2}{a}$이므로

(ⅰ) b가 짝수인 경우



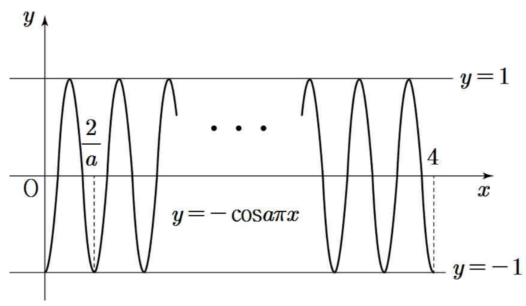
① $-a+b=1$일 때
두 함수 $y=(f\circ h)(x)=\cos a\pi x$와 $y=-a+b$의 그래프의 교점의 개수는 $2a+1$

② $-a+b=0$일 때
두 함수 $y=(f\circ h)(x)=\cos a\pi x$와 $y=-a+b$의 그래프의 교점의 개수는 $4a$

③ $-a+b=-1$일 때
두 함수 $y=(f\circ h)(x)=\cos a\pi x$와 $y=-a+b$의 그래프의 교점의 개수는 $2a$

따라서 두 함수 $y=(f\circ h)(x)=\cos a\pi x$와 $y=-a+b$의 그래프의 교점의 개수가 홀수이려면 $-a+b=1$이다.
$b=a+1$이므로 a는 홀수이다.

(ii) b가 홀수인 경우



① $-a+b=1$일 때
두 함수 $y=(f\circ h)(x)=\cos a\pi x$와 $y=-a+b$의 그래프의 교점의 개수는 $2a$

② $-a+b=0$일 때
두 함수 $y=(f\circ h)(x)=\cos a\pi x$와 $y=-a+b$의 그래프의 교점의 개수는 $4a$

③ $-a+b=-1$일 때
두 함수 $y=(f\circ h)(x)=\cos a\pi x$와 $y=-a+b$의 그래프의 교점의 개수는 $2a+1$

따라서 두 함수 $y=(f\circ h)(x)=\cos a\pi x$와 $y=-a+b$의 그래프의 교점의 개수가 홀수이려면 $-a+b=-1$이다.

$b=a-1$이므로 a는 짝수이다.

조건 (나)에서 방정식 $(f\circ h)(x)=(h\circ g)(t)$의 해는

(i) a가 홀수, b가 짝수인 경우
$b=a+1$이므로 (나)의 방정식은
$\cos a\pi x=a\sin\pi t+(a+1)=a(\sin\pi t+1)+1$
이고 $a(\sin\pi t+1)+1\geq 1$이므로 $\cos a\pi t=1$이다.
$0\leq x\leq 4$일 때, 서로 다른 실근의 개수는 $2a+1$이고 함수 $y=\cos a\pi x$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
따라서 $0\leq x\leq 4$일 때, 서로 다른 모든 실근의 합은 $(2a+1)\times 2=4a+2=56$이 되어 자연수 a는 존재하지 않는다.

(ii) a가 짝수, b가 홀수인 경우
$b=a-1$이므로 (나)의 방정식은
$-\cos a\pi x=a\sin\pi t+(a-1)=a(\sin\pi t+1)-1$
이고 $a(\sin\pi t+1)-1\geq -1$이므로 서로 다른 실근의 개수에
따라 다음과 같이 세 가지 경우로 나눌 수 있다.

① $a\sin\pi t+(a-1)=-1$인 경우
$0\leq x\leq 4$일 때, $-\cos a\pi x=-1$의 서로 다른 실근의 개수는 $2a+1$이고 함수 $y=-\cos a\pi x$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
따라서 $0\leq x\leq 4$일 때, 서로 다른 모든 실근의 합은 $(2a+1)\times 2=4a+2=56$이 되어 자연수 a는 존재하지 않는다.

② $-1<a\sin\pi t+(a-1)<1$인 경우
$0\leq x\leq 4$일 때, $-\cos a\pi x=a\sin\pi t+(a-1)$의 서로 다른 실근의 개수는 $4a$이고 함수 $y=-\cos a\pi x$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
따라서 $0\leq x\leq 4$일 때, 서로 다른 모든 실근의 합은 $4a\times 2=8a=56$이 되어 짝수 a는 존재하지 않는다.

③ $a\sin\pi t+(a-1)=1$인 경우
$0\leq x\leq 4$일 때, $-\cos a\pi x=1$의 서로 다른 실근의 개수는 $2a$이고 함수 $y=-\cos a\pi x$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
따라서 $0\leq x\leq 4$일 때, 서로 다른 모든 실근의 합은 $2a\times 2=4a=56$이다.
그러므로 $a=14$, $b=13$이다.

$(h\circ g)(t)=a\sin\pi t+b=14\sin\pi t+13=1$에서 방정식 $(f\circ h)(x)=(h\circ g)(t)$의 서로 다른 모든 실근의 합이 56이 되도록 하는 실수 t는 $\sin\pi t=-\dfrac{6}{7}$을 만족시키므로

$\cos^2\pi t=\dfrac{13}{49}$이다.

따라서 $\dfrac{a\times b}{\cos^2\pi t}=\dfrac{14\times 13}{\dfrac{13}{49}}=686$

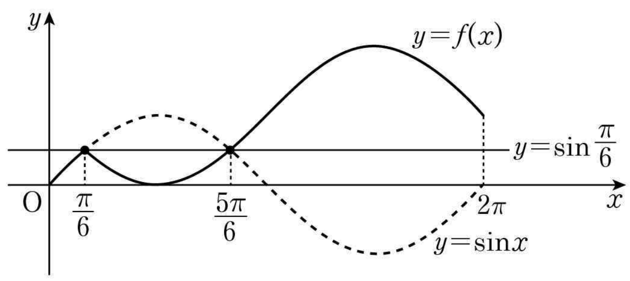
56) [정답] ④

[해설]

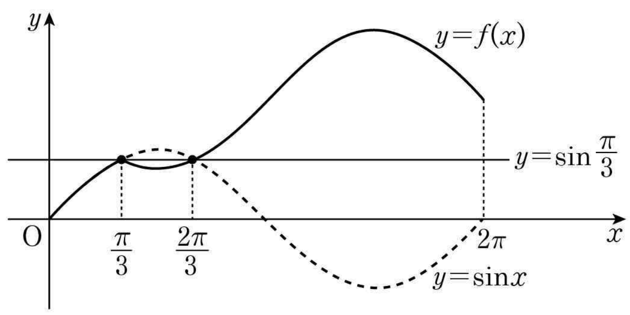
그림은 k값에 따른 두 곡선 $y=f(x), y=\sin x$와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$를 좌표평면에 나타낸 것이다.

각 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수 a_k를 구하면 다음과 같다.

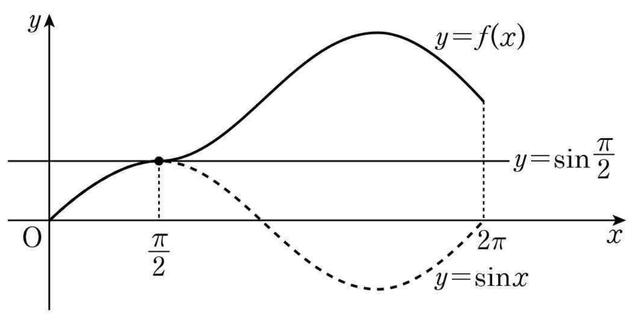
(ⅰ) $k=1$ 일 때, $a_1=2$



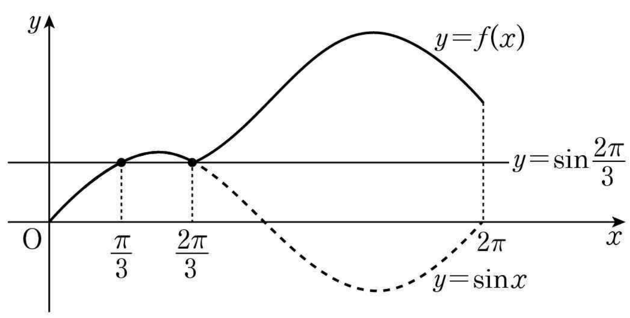
(ⅱ) $k=2$ 일 때, $a_2=2$



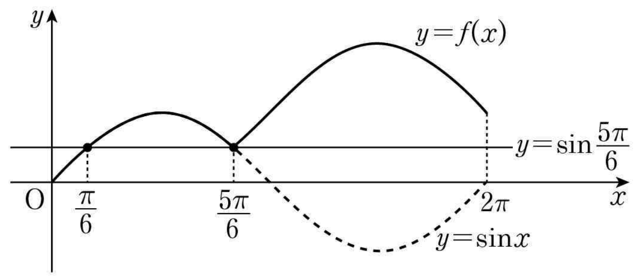
(ⅲ) $k=3$ 일 때, $a_3=1$



(ⅳ) $k=4$ 일 때, $a_4=2$



(ⅴ) $k=5$ 일 때, $a_5=2$



따라서 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2+2+1+2+2=9$

[다른 풀이]

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같다. 즉,

(ⅰ) $0\le x\le \frac{k}{6}\pi$ 일 때, $\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$

(ⅱ) $\frac{k}{6}\pi<x\le 2\pi$일 때,

$2\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)-\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$에서 $\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$

그러므로 교점의 개수는 구간 $[0, 2\pi]$에서 방정식 $\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$k=1, k=5$ 일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 2이다.

$k=3$ 일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)=1$이므로 $\sin x=1$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

따라서 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2+2+1+2+2=9$

57) [정답] ③

[해설]

$\cos\frac{(a-b)\pi}{2}=0$에서 $\frac{(a-b)\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore a-b=2n+1$ …… ㉠

㉠에서 정수 l, m에 대하여

$a=2l$일 때, $b=2m+1$

$a=2l+1$일 때, $b=2m$

꼴이어야 한다.

따라서 $a^2+b^2\le 13$을 만족하는 정수 a, b는 다음과 같다.

(ⅰ) $a=0$일 때,

$b^2\le 13$에서 $b=\pm1$, ±3이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 4쌍이다.

(ⅱ) $a=\pm1$일 때,

$b^2\le 12$에서 $b=0$, ±2이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 $2\times3=6$쌍이다.

(ⅲ) $a=\pm2$일 때,

$b^2 \le 9$에서 $b=\pm 1,\ \pm 3$이므로 순서쌍 $(a,\,b)$의 개수는 $2\times 4=8$쌍이다.

(iv) $a=\pm 3$일 때,

$b^2 \le 4$에서 $b=0,\ \pm 2$이므로 순서쌍 $(a,\,b)$의 개수는 $2\times 3=6$쌍이다.

이상에서 조건을 만족하는 순서쌍 $(a,\,b)$의 개수는 $4+6+8+6=24$쌍이다.

58) [정답] ③

[해설]

함수 $y=\sin kx$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{k}$

$0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $\sin kx=\dfrac{1}{3}$의

서로 다른 실근의 개수는

$0 \le x < 2\pi$에서 곡선 $y=\sin kx$와 직선 $y=\dfrac{1}{3}$이

만나는 점의 개수와 같다.

$1 \le l \le k$인 자연수 l에 대하여

$\dfrac{2(l-1)}{k}\pi \le x < \dfrac{2l}{k}\pi$에서 곡선 $y=\sin kx$와

직선 $y=\dfrac{1}{3}$이 만나는 점의 개수는 2이고

$0 \le x < 2\pi$에서 곡선 $y=\sin kx$와 직선 $y=\dfrac{1}{3}$이

만나는 점의 개수가 8이므로

$2k=8$에서 $k=4$

$0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $\sin 4x=\dfrac{1}{3}$의 서로 다른 실근을

작은 수부터 크기순으로 나열한 것을

$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_8$이라 하자.

함수 $y=\sin 4x$의 주기는 $\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\alpha_2=\dfrac{\pi}{4}-\alpha_1,\ \alpha_3=\dfrac{\pi}{2}+\alpha_1,\ \alpha_4=\dfrac{3}{4}\pi-\alpha_1,$

$\alpha_5=\pi+\alpha_1,\ \alpha_6=\dfrac{5}{4}\pi-\alpha_1,\ \alpha_7=\dfrac{3}{2}\pi+\alpha_1,$

$\alpha_8=\dfrac{7}{4}\pi-\alpha_1$

따라서 구하는 모든 해의 합은 7π

59) [정답] ①

[해설]

$\log_2 f(x)=n$ (단, n은 정수)라 하면 $f(x)=2^n$

즉, $\sin(a\pi x)+2b=2^n$에서 $\sin(a\pi x)=2^n-2b$이다.

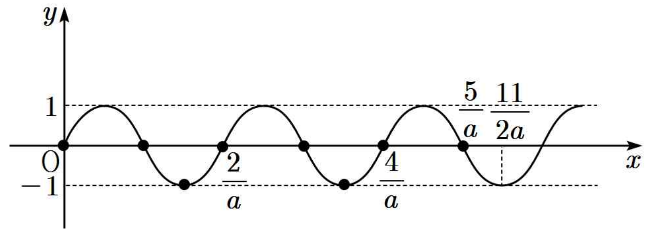
$\sin(a\pi x)=2^n-2b$를 만족하는 x의 값이 8개가 되도록 하는 경우는 다음과 같다.

(i) $b=1$일 때,

$\sin(a\pi x)=2^n-2$에서

$n=0$일 때, $\sin a\pi x=-1$

$n=1$일 때, $\sin a\pi x=0$



$0 \le x \le 1$에서 $\sin a\pi x=-1$ 또는 $\sin a\pi x=0$의 해가 8개이기 위해서는 위의 그림과 같이

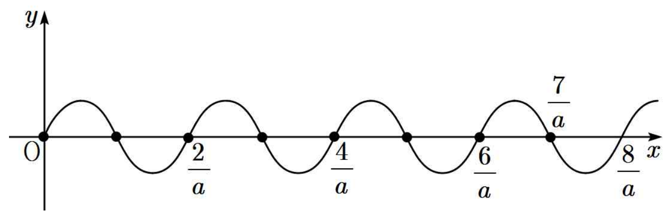
$\dfrac{5}{a} \le 1,\ \dfrac{11}{2a} > 1$

을 만족해야한다.

따라서 $5 \le a < \dfrac{11}{2}$이므로 자연수 a의 값은 5이다.

(ii) $b \ge 2$일 때,

(1) $b=2^{n-1}\,(n \ge 2)$인 경우 $\sin a\pi x=0$



$0 \le x \le 1$에서 $\sin a\pi x=0$의 해가 8개이기 위해서는 위의 그림과 같이

$\dfrac{7}{a} \le 1,\ \dfrac{8}{a} > 1$

을 만족해야 한다.

따라서 $7 \le a < 8$이므로 자연수 a의 값은 7이다.

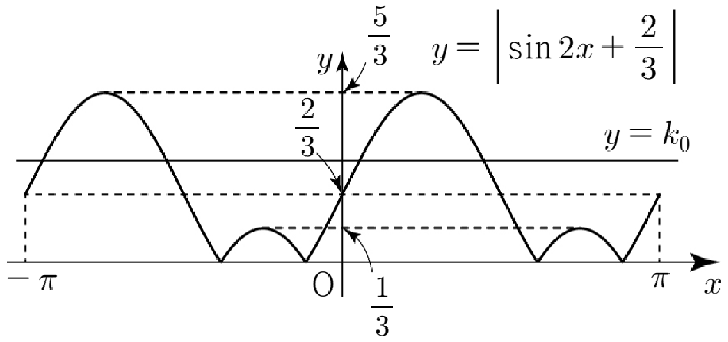
(2) $b \ne 2^{n-1}\,(n \ge 2)$인 경우 $\sin(a\pi x)=2^n-2b$의 해는 존재하지 않는다.

이상에서 만족하는 a의 값은 5 또는 7이므로 모든 a의 값의 합은 12이다.

60) [정답] ②

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선

$y=k_0(k_0>0)$과 만나는 서로 다른 점의 개수는

$0<k_0<\frac{1}{3}$일 때 8, $k_0=\frac{1}{3}$일 때 6

$\frac{1}{3}<k_0<\frac{2}{3}$일 때 4, $k_0=\frac{2}{3}$일 때 5

$\frac{2}{3}<k_0<\frac{5}{3}$일 때 4, $k_0=\frac{5}{3}$일 때 2

$k_0>\frac{5}{3}$일 때 0

$3k>k$이므로 $|m-n|=3$을 만족시키는

m과 n은 $m=2$, $n=5$ ……㉠

또는 $m=5$, $n=8$

$m=2$이면 $3k=\frac{5}{3}$, $k=\frac{5}{9}$

$\frac{1}{3}<\frac{5}{9}<\frac{2}{3}$에서 $n=4$이므로

㉠을 만족시키지 않는다.

$m=5$이면 $3k=\frac{2}{3}$, $k=\frac{2}{9}$

$0<\frac{2}{9}<\frac{1}{3}$에서 $n=8$이다.

$-\pi\le x\le\pi$일 때, 방정식 $\left|\sin 2x+\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{9}$의

모든 실근을 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, $\cdots$, α_8이라 하자.

$$\alpha_1+\alpha_4=\alpha_2+\alpha_3=2\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_5+\alpha_8=\alpha_6+\alpha_7=2\times\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$$

따라서

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_8=2\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2\times\frac{3}{2}\pi=2\pi$$

61) [정답] ⑤

[해설]

(i) $(a-2)(b-2)=0$일 때,

함수 $f(x)=\left|2a\cos\frac{b}{2}x\right|$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{b}{2}}=\frac{2\pi}{b}$이므로

조건 (가)에서

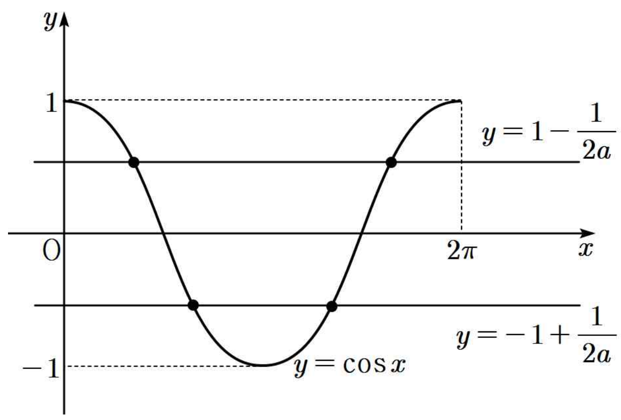
$\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\quad\therefore b=2$

$|2a\cos x|=2a-1$에서

$2a\cos x=2a-1$ 또는 $2a\cos x=-2a+1$

이므로

$\cos x=1-\frac{1}{2a}$ 또는 $\cos x=-1+\frac{1}{2a}$



자연수 a에 대하여 $0<1-\frac{1}{2a}<1$,

$-1<-1+\frac{1}{2a}<0$이므로 $0\le x\le 2\pi$에서

$\cos x=1-\frac{1}{2a}$와 $\cos x=-1+\frac{1}{2a}$은 각각 2개의 근을 가지므로 10 이하의 자연수 a에 대하여 항상 4개의 실근을 갖는다.

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 10이다.

(ii) $(a-2)(b-2)\neq 0$일 때,

함수 $f(x)=\left|2a\cos\frac{b}{2}x-(a-2)(b-2)\right|$의 주기는

$\frac{2\pi}{\frac{b}{2}}=\pi$에서 $b=4$

$f(x)=|2a\cos 2x-2(a-2)|$이므로

$|2a\cos 2x-2(a-2)|=2a-1$에서

$2a\cos 2x-2a+4=-2a+1$ 또는

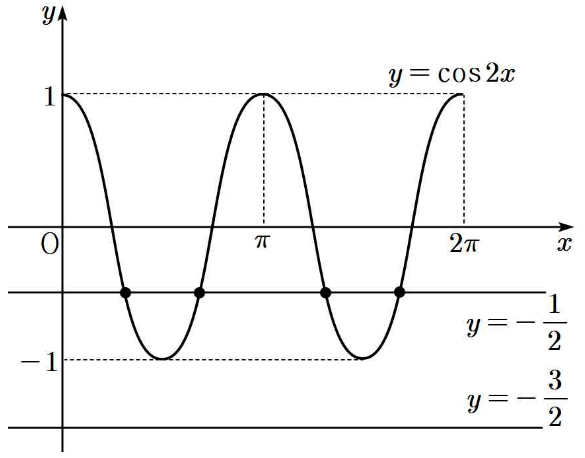
$2a\cos 2x-2a+4=2a-1$

$\therefore 2a\cos 2x=-3$ 또는 $2a\cos 2x=4a-5$ $\quad$…… ㉠

㉠에서

(1) $a=1$일 때,

$\cos 2x=-\frac{3}{2}$ 또는 $\cos 2x=-\frac{1}{2}$

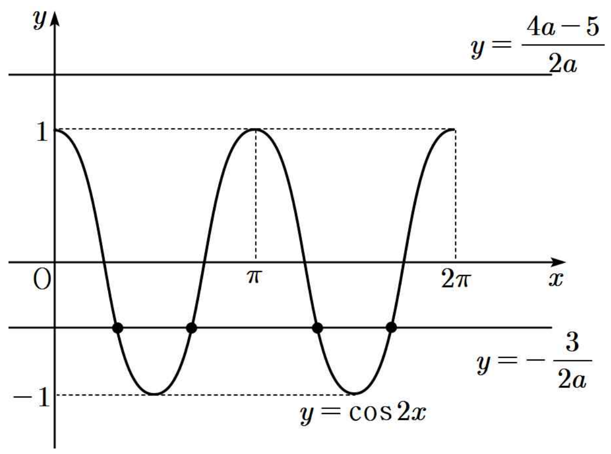


$\cos 2x=-\frac{3}{2}$을 만족하는 x의 값은 존재하지 않고,

$\cos 2x=-\frac{1}{2}$을 만족하는 x의 값은 4개 존재하므로 조건을 만족한다.

(2) $a \geq 3$일 때,

$\cos 2x=-\frac{3}{2a}$ 또는 $\cos 2x=\frac{4a-5}{2a}$



$4a-5>2a$에서 $\frac{4a-5}{2a}>1$이므로

$\cos 2x=\frac{4a-5}{2a}$를 만족하는 x의 값은 존재하지 않는다.

$2a>3$에서 $-1<-\frac{3}{2a}<0$이므로 $\cos 2x=-\frac{3}{2a}$를 만족하는 x의 값은 4개 존재한다.

모두 4개의 실근을 가지므로 조건을 만족한다.

따라서 $b=4$이고 $a=1,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 10$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 9개다.

(i), (ii)에서 자연수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $10+9=19$개다.

62) [정답] ①

[해설]

$\sin^2 x=\cos^2 x+\cos x$, $1-\cos^2 x=\cos^2 x+\cos x$

$2\cos^2 x+\cos x-1=0$

$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$에서

$\cos x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

$0<x\leq 2\pi$이므로

$\cos x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

$\cos x=-1$에서 $x=\pi$

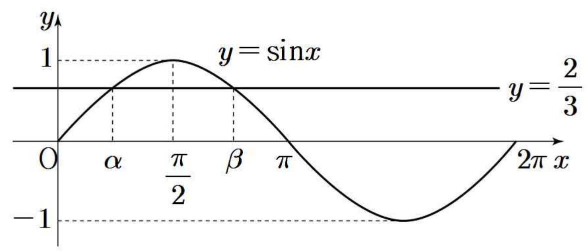
$\sin\frac{\pi}{3}>\cos\frac{\pi}{3}$, $\sin\frac{5}{3}\pi<\cos\frac{5}{3}\pi$, $\sin\pi>\cos\pi$이므로 구하는 모든 x의 값의 합은 $\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4}{3}\pi$

63) [정답] ①

[해설]

$3\sin x-2>0$에서 $\sin x>\frac{2}{3}$이다.

$0\leq x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{3}$는 그림과 같다.



$0\leq x<2\pi$일 때, 부등식 $3\sin x-2>0$의 해가 $\alpha<x<\beta$이므로 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{3}$가 만나는 두 점의 x좌표는 각각 α, β $(0<\alpha<\beta<\pi)$이다.

$\frac{\pi}{2}-\alpha=\beta-\frac{\pi}{2}$이므로 $\alpha+\beta=\pi$이다.

따라서 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\pi=-1$

64) [정답] ①

[해설]

x에 대한 이차방정식

$x^2-(2\sin\theta)x-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5=0$이 실근을 가지므로 $\frac{D}{4}\geq 0$이 성립한다.

$\frac{D}{4}=\sin^2\theta-(-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5)$

$= \sin^2\theta + 3\cos^2\theta + 5\sin\theta - 5$

$= 2\cos^2\theta + 5\sin\theta - 4$

$= -2\sin^2\theta + 5\sin\theta - 2 \geq 0$

즉, $2\sin^2\theta - 5\sin\theta + 2 \leq 0$이므로 $(\sin\theta - 2)(2\sin\theta - 1) \leq 0$

그런데 $-1 \leq \sin\theta \leq 1$이므로 $\sin\theta - 2 \leq 0$

$\therefore 2\sin\theta - 1 \geq 0$

즉, $\sin\theta \geq \dfrac{1}{2}$이므로 $0 \leq \theta < 2\pi$의 범위에서 만족하는 θ의 범위는 $\dfrac{\pi}{6} \leq \theta \leq \dfrac{5\pi}{6}$

따라서 $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, $\beta = \dfrac{5\pi}{6}$이므로 $4\beta - 2\alpha = 3\pi$

65) [정답] ①

[해설]

$\sin^2 x - 4\sin x - 5k + k \geq 0$

$\sin x = t(-1 \leq t \leq 1)$이라 하면 $t^2 - 4t - 5k + 5 \geq 0$

$(t-2)^2 - 5k + 1 \geq 0$

$f(t) = (t-2)^2 - 5k + 1(-1 \leq t \leq 1)$이라 하면 함수 $f(t)$는 $t = 1$에서 최솟값을 가지므로 $1 - 5k + 1 \geq 0$, $k \leq \dfrac{2}{5}$

따라서 k의 최댓값은 $\dfrac{2}{5}$

66) [정답] 7

[해설]

$(2a+6)\cos x - a\sin^2 x + a + 12 < 0$

$(2a+6)\cos x - a(1 - \cos^2 x) + a + 12 < 0$

$a\cos^2 x + (2a+6)\cos x + 12 < 0$

$(a\cos x + 6)(\cos x + 2) < 0$에서

$\cos x + 2 > 0$이므로 $a\cos x + 6 < 0$

$a > 0$이므로 $\cos x < -\dfrac{6}{a}$

$0 \leq x < 2\pi$에서 부등식 $\cos x < -\dfrac{6}{a}$의 해가 존재하기 위해서는 $-\dfrac{6}{a} > -1$이어야 한다.

따라서 $a > 6$이며 자연수 a의 최댓값은 7

67) [정답] 14

[해설]

$(a\sin^2 x - 4)\cos x + 4 = \{a(1 - \cos^2 x) - 4\}\cos x + 4$

$= -a\cos^3 x + (a-4)\cos x + 4$

$\cos x = t$라 하면 $-1 \leq t \leq 1$

(준 식)$= -at^3 + (a-4)t + 4$

$= -(t-1)(at^2 + at + 4)$

즉, $-1 \leq t \leq 1$에서 $-(t-1)(at^2 + at + 4) \geq 0$을 만족하는 a의 범위를 구하면 다음과 같다.

(i) $t = 1$일 때,

$0 \geq 0$이므로 성립한다.

(ii) $-1 \leq t < 1$일 때,

$t - 1 < 0$이므로 $at^2 + at + 4 \geq 0$을 만족해야 한다.

(1) $a = 0$일 때,

$4 \geq 0$이므로 성립한다.

(2) $a > 0$일 때,

$a\left(t + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}a + 4 \geq 0$이므로 $t = -\dfrac{1}{2}$일 때가 최소가 된다.

즉, $-\dfrac{1}{4}a + 4 \geq 0$이므로 $a \leq 16$

$\therefore 0 < a \leq 16$

(3) $a < 0$일 때,

$a\left(t + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}a + 4 \geq 0$이므로 $t = 1$일 때가 최소가 된다. 즉, $2a + 4 \geq 0$이므로 $a \geq -2$

$\therefore -2 \leq a < 0$

(1), (2), (3)에서 만족하는 a의 범위는 $-2 \leq a \leq 16$

따라서 실수 a의 최댓값은 16, 최솟값은 -2이므로 최댓값과 최솟값의 합은 14이다.

68) [정답] ②

[해설]

$f(m) = \sin\dfrac{2(m-1)}{k}\pi$라 하면 함수 $f(m)$의 주기가 k이므로 집합 A_k는 $A_k = \{f(1), f(2), \cdots, f(k)\}$이다.

ㄱ. $k = 3$일 때, $f(1) = 0$, $f(2) = \sin\dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$f(3) = \sin\dfrac{2 \times 2}{3}\pi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$A_3 = \left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ (참)

ㄴ. 1이 집합 A_k의 원소가 되려면 $f(m) = 1$을 만족시키는

자연수 $m(m=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$가 존재해야 한다.

$\sin\frac{2(m-1)}{k}\pi=1$에서 $\frac{2(m-1)}{k}\pi=\frac{\pi}{2}$

$m=1+\frac{k}{4}$이고 m이 자연수이므로 k는 4의 배수이어야 한다.

따라서 $k=12,\ 16,\ \cdots,\ 96$이며 그 개수는 22이다.

(참)

ㄷ. 4이상의 자연수 k에 대하여

(ⅰ) $k=4l$ (l은 자연수)인 경우

$f(m)=\sin\frac{2(m-1)}{4l}\pi=\sin\frac{m-1}{2l}\pi$이므로

$m=1$일 때, $f(1)=\sin\frac{1-1}{2l}\pi=\sin 0=0$

$m=l+1$일 때,

$$f(l+1)=\sin\frac{l+1-1}{2l}\pi=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

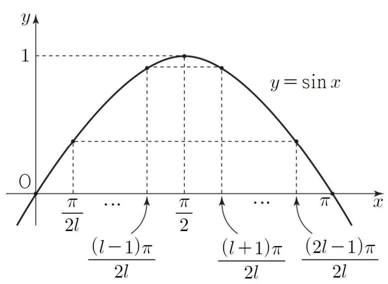
$m=2l+1$일 때,

$$f(2l+1)=\sin\frac{2l+1-1}{2l}\pi=\sin\pi=0$$

$m=\alpha(\alpha=2,\ 3,\ \cdots,\ l)$일 때,

$$\pi-\frac{\alpha-1}{2l}\pi=\frac{(2l+2-\alpha)-1}{2l}\pi$$

이므로 $\beta=2l+2-\alpha$라 하면 $f(\alpha)=f(\beta)$



그러므로 집합 A_k의 원소 중 양수는 $f(2),\ f(3),\ \cdots,\ f(l+1)$이고 그 개수는 l이다.

같은 방법으로 집합 A_k의 원소 중 음수의 개수도 l이다.

따라서 집합 A_k의 원소의 개수는

$$l+l+1=2l+1$$

(ⅱ) $k=4l+1$ (l은 자연수)인 경우

$f(m)=\sin\frac{2(m-1)}{4l+1}\pi$이므로

$m=1$일 때,

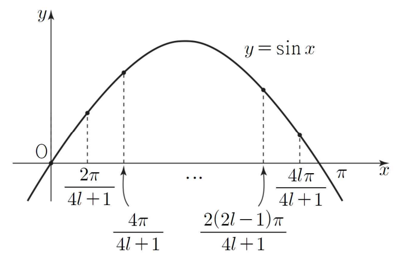
$$f(1)=\sin\frac{2\times(1-1)}{4l+1}\pi=\sin 0=0$$

$4l+1$이하의 서로 다른 두 자연수 $r,\ s$에 대하여

$\frac{2(r-1)}{4l+1}\pi+\frac{2(s-1)}{4l+1}\pi=\frac{2(r+s-2)}{4l+1}\pi$에서

$4l+1$은 홀수이고 $2(r+s-2)$는 짝수이므로

$\frac{2(r+s-2)}{4l+1}\pi\neq\pi,\ \frac{2(r+s-2)}{4l+1}\pi\neq 3\pi$이다.



따라서 집합 A_k의 원소의 개수는 $4l+1$

(ⅲ) $k=4l+2$ (l은 자연수)인 경우

$$f(m)=\sin\frac{2(m-1)}{4l+2}\pi=\sin\frac{m-1}{2l+1}\pi$$

$m=1$일 때,

$$f(1)=\sin\frac{1-1}{2l+1}\pi=\sin 0=0$$

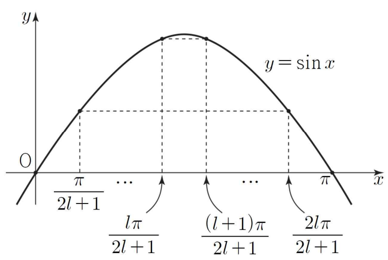
$m=2l+2$일 때,

$$f(2l+2)=\sin\frac{2l+2-1}{2l+1}\pi=\sin\pi=0$$

$m=\alpha(\alpha=2,\ 3,\ \cdots,\ l+1)$일 때,

$\pi-\frac{\alpha-1}{2l+1}\pi=\frac{(2l+3-\alpha)-1}{2l+1}\pi$이므로

$\beta=2l+3-\alpha$라 하면 $f(\alpha)=f(\beta)$



그러므로 집합 A_k의 원소 중 양수는 $f(2),\ f(3)$, $\cdots$, $f(l+1)$이고 그 개수는 l이다.

같은 방법으로 집합 A_k의 원소 중 음수의 개수도 l이다.

따라서 집합 A_k의 원소의 개수는

$$l+l+1=2l+1$$

(ⅳ) $k=4l+3$ (l은 자연수)인 경우

(ⅱ)와 같은 방법으로 구하면 집합 A_k의 원소의 개수는 $4l+3$이다.

$A_1=A_2=\{0\}$이고 (ⅰ)~(ⅳ)에 의하여

집합 A_k의 원소의 개수는

$$n(A_k)=\begin{cases}4l-3 & (k=4l-3)\\ 2l-1 & (k=4l-2)\\ 4l-1 & (k=4l-1)\\ 2l+1 & (k=4l)\end{cases}\ (l\text{은 자연수})$$

$k=4l-3$인 경우 $4l-3=11$을 만족시키는 자연수 l은 존재하지 않는다.

$k=4l-2$인 경우 $2l-1=11$을 만족시키는 자연수 l은

6이므로 $k=22$

$k=4l-1$인 경우 $4l-1=11$을 만족시키는 자연수 l은 3이므로 $k=11$

$k=4l$인 경우 $2l+1=11$을 만족시키는 자연수 l은 5이므로

$k=20$

따라서 $n(A_k)=11$을 만족시키는 모든 k의 값의 합은

$22+11+20=53$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

69) [정답] ②

[해설]

$y=f(x)$, $y=g(x)$는 $0<x<\dfrac{\pi}{24}$에서 적어도 하나의 교점을 가진다. 이 교점의 x좌표를 α라 하자.

$y=f(x)$는 주기가 $\dfrac{2\pi}{k}$, $y=g(x)$는 주기가 $\dfrac{\pi}{6}$인 함수이므로

$$\{x\,|\,f(x)=f(\alpha)\}$$
$$=\left\{\alpha,\ \frac{\pi}{k}-\alpha,\ \frac{2\pi}{k}+\alpha,\ \frac{3\pi}{k}-\alpha,\ \cdots\right\}$$

즉, $A=\left\{\alpha,\ \dfrac{\pi}{k}-\alpha,\ \dfrac{2\pi}{k}+\alpha,\ \dfrac{3\pi}{k}-\alpha,\ \cdots\right\}$라 하고,

$$\{x\,|\,g(x)=g(\alpha)\}$$
$$=\left\{\alpha,\ \frac{\pi}{6}-\alpha,\ \frac{\pi}{6}+\alpha,\ \frac{2\pi}{6}-\alpha,\ \cdots,\ \frac{12\pi}{6}-\alpha\right\}$$

에서 $B=\left\{\alpha,\ \dfrac{\pi}{6}-\alpha,\ \dfrac{\pi}{6}+\alpha,\ \dfrac{2\pi}{6}-\alpha,\ \cdots,\ \dfrac{12\pi}{6}-\alpha\right\}$라고 하자.

이때 $A\subset B$를 만족하기 위해서는 $\dfrac{\pi}{k}-\alpha\in B$여야 한다.

(i) $\dfrac{\pi}{k}-\alpha=\dfrac{n\pi}{6}-\alpha$인 경우

$\dfrac{1}{k}=\dfrac{n}{6}$에서 $k=\dfrac{6}{n}$이므로 $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=6$일 때 각각 $k=6$, $k=3$, $k=2$, $k=1$이다.
즉 4가지

㉠ $k=6$일 때

$$A=\left\{\alpha,\ \frac{\pi}{6}-\alpha,\ \frac{2\pi}{6}+\alpha,\ \frac{3\pi}{6}-\alpha,\ \frac{4\pi}{6}-\alpha,\ \cdots\right\}\subset B$$

㉡ $k=3$일 때

$$A=\left\{\alpha,\ \frac{2\pi}{6}-\alpha,\ \frac{4\pi}{6}+\alpha,\ \frac{6\pi}{6}-\alpha,\ \cdots\right\}\subset B$$

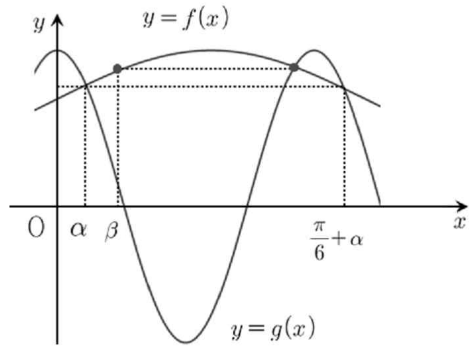
㉢ $k=2$일 때 $A=\left\{\alpha,\ \dfrac{3\pi}{6}-\alpha,\ \dfrac{6\pi}{6}+\alpha,\ \dfrac{9\pi}{6}-\alpha\right\}\subset B$

㉣ $k=1$일 때 $A=\left\{\alpha,\ \dfrac{6\pi}{6}-\alpha\right\}\subset B$

삼각함수의 대칭성과 주기성에 의하여 $(\alpha,\ f(\alpha))$이외의 교점에 대해서도 같은 방법으로 확인할 수 있다.

(ii) $\dfrac{\pi}{k}-\alpha=\dfrac{n\pi}{6}+\alpha$인 경우

그림과 같이 $\beta\in A$, $\beta\notin B$가 되는 β가 존재하므로 조건에 모순이다.



(i), (ii)에 의하여 조건을 만족하는 k는 4가지다.

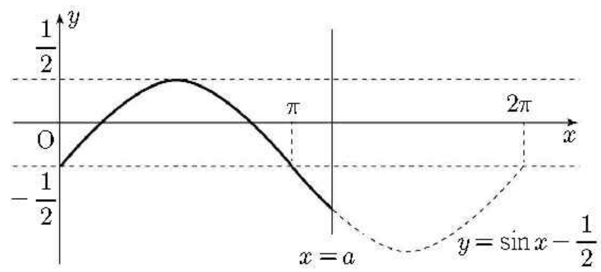
70) [정답] 110

[해설]

$\pi<a<2\pi$라 하면 함수 $y=\sin x-\dfrac{1}{2}$의 그래프에서

$\pi<x<a$일 때 $\sin x-\dfrac{1}{2}<-\dfrac{1}{2}$이므로 $\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|>\dfrac{1}{2}$이다.

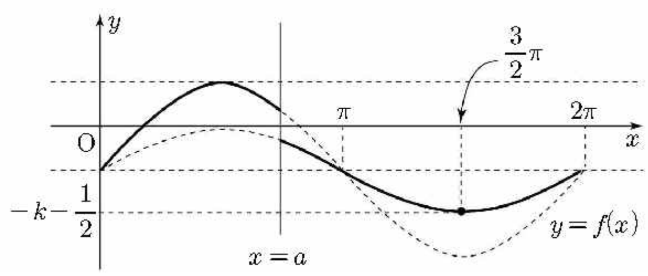
따라서 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



따라서 $0<a\le\pi$이다. ……㉠

(i) $k>0$인 경우

$a\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=k\sin x-\dfrac{1}{2}$은 $x=\dfrac{3}{2}\pi$일 때 최솟값 $k\sin\dfrac{3}{2}\pi-\dfrac{1}{2}=-k-\dfrac{1}{2}$을 갖는다.

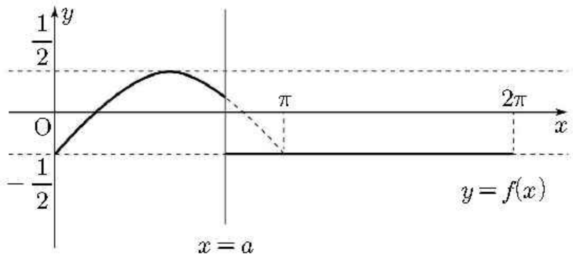


따라서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 $k+\frac{1}{2}$이고, $k+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $k=0$인 경우

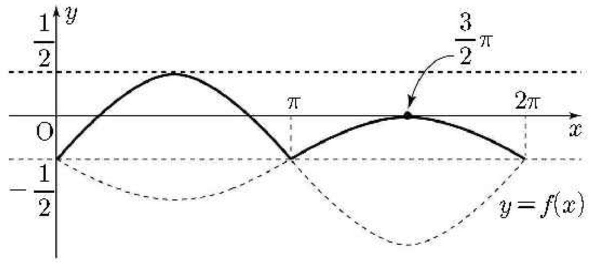
함수 $f(x)=\begin{cases} \sin x-\frac{1}{2} & (0\le x<a) \\ -\frac{1}{2} & (a\le x\le 2\pi) \end{cases}$ 이고

방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 2 이하이므로
조건 (나)를 만족시키지 않는다.



(iii) $k<0$인 경우
$0<a<\pi$이면 $\sin a>0$이므로
$f(a)=k\sin a-\frac{1}{2}<-\frac{1}{2}$이다.

따라서 $|f(a)|>\frac{1}{2}$이고 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 ㉠에 의해 $a=\pi$이다.
조건 (나)에 의해 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0$이다.

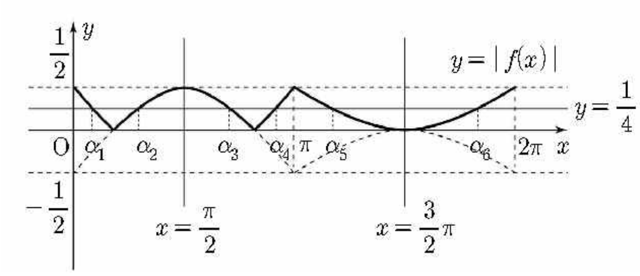


즉 $k\times(-1)-\frac{1}{2}=0$이므로 $k=-\frac{1}{2}$이다. 따라서 구하는 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \sin x-\frac{1}{2} & (0\le x<\pi) \\ -\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2} & (\pi\le x\le 2\pi) \end{cases}$$

이다.

함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}$이 만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6이라고 하자.



$\frac{\alpha_1+\alpha_4}{2}=\frac{\pi}{2}$, $\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}=\frac{\pi}{2}$, $\frac{\alpha_5+\alpha_6}{2}=\frac{3\pi}{2}$이므로

$S=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6=\pi+\pi+3\pi=5\pi$

이다. 따라서

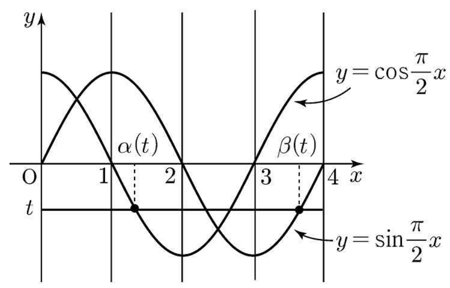
$20\left(\frac{a+S}{\pi}+k\right)=20\left(\frac{\pi+5\pi}{\pi}-\frac{1}{2}\right)=20\times\frac{11}{2}=110$

이다.

71) [정답] ②

[해설]

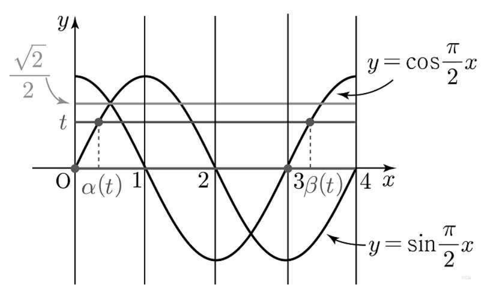
ㄱ. $-1\le t<0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)$와 $\beta(t)$의 위치는 아래 그림과 같다.



주어진 t의 범위에서 점 $(t,\ \alpha(t))$는 곡선 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$ 위에 있고 점 $(t,\ \beta(t))$는 곡선 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$에 있다.

이때, $\alpha(t)$와 $\beta(t)$는 직선 $x=\frac{5}{2}$에 대해 대칭이므로 $\frac{\alpha(t)+\beta(t)}{2}=\frac{5}{2}$이므로 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다. (참)

ㄴ. $t=0$일 때, $\alpha(0)=0$, $\beta(0)=3$이다.



이때, $t>\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때는 $\beta(t)-\alpha(t)>3$이므로 $\beta(t)-\alpha(t)=3$을 만족하는 t의 범위는 $0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

(참)

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=k$라 하면, t_1과 t_2는 $\sin\frac{k\pi}{2}$ 또는

$\cos\frac{k\pi}{2}$이다.

이때, $\sin\frac{k\pi}{2}=t_1$, $\cos\frac{k\pi}{2}=t_2$라 하면,

$t_2-t_1=\cos\frac{k\pi}{2}-\sin\frac{k\pi}{2}=\frac{1}{2}$이고, 양변을 제곱하면

$\left\{\cos\frac{k\pi}{2}\right\}^2-2\cos\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2}+\left\{\sin\frac{k\pi}{2}\right\}^2=\frac{1}{4}$

$\cos\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2}=\frac{3}{8}=t_2\times t_1$

즉, $t_1\times t_2=\frac{3}{8}$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

72) [정답] 59

[해설]

$f(x)=\sin x$이고 $g(x)=a\cos x+b$이다.

함수 $h(x)$는

$h(x)=\begin{cases} g(x) & (f(x)\le g(x)) \\ f(x) & (f(x)>g(x)) \end{cases}$이다.

조건 (나)에서 $0<c<\frac{\pi}{2}$인 어떤 실수 c에 대하여

$h(c)=h(c+\pi)=\frac{1}{2}$이므로

$f(c)=\frac{1}{2}$ 또는 $g(c)=\frac{1}{2}$이고

$f(c+\pi)=\frac{1}{2}$ 또는 $g(c+\pi)=\frac{1}{2}$이다.

한편, $0<c<\frac{\pi}{2}$이면

$f(c+\pi)=\sin(c+\pi)=-\sin c<0$이므로

$f(c+\pi)\ne\frac{1}{2}$이다.

따라서 $g(c+\pi)=\frac{1}{2}$이다. ……㉠

함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=\pi$에 대하여

대칭이므로 $g(\pi-c)=\frac{1}{2}$이다. ……㉡

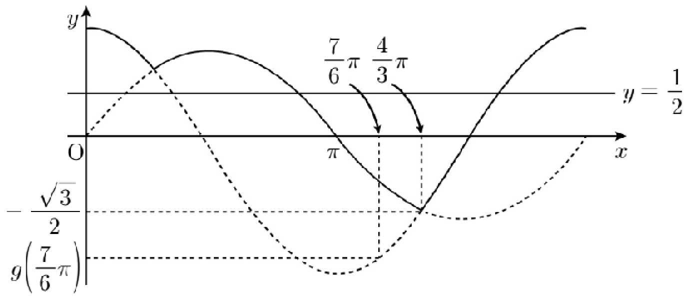
$0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $g(x)=\frac{1}{2}$의 실근의 개수는

최대 2이므로 ㉠, ㉡에 의하여 $g(c)\ne\frac{1}{2}$이다.

따라서 $f(c)=\frac{1}{2}$이고 $\sin c=\frac{1}{2}$에서 $c=\frac{\pi}{6}$이다.

㉠에 의하여 $g\left(\frac{7}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$이다. ……㉢

(i) $a>0$인 경우



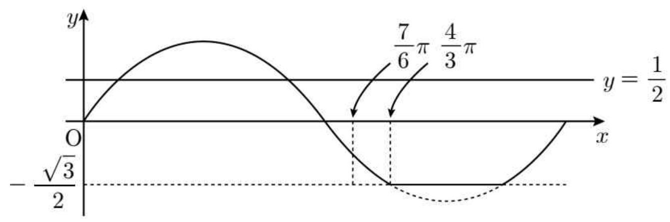
함수 $h(x)$의 최솟값이 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$이 되기 위하여 함수

$y=g(x)$의 그래프가 점 $\left(\frac{4}{3}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$을 지나야 한다.

$g\left(\frac{4}{3}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 $a>0$일 때 $g\left(\frac{4}{3}\pi\right)>g\left(\frac{7}{6}\pi\right)$이므로

$g\left(\frac{7}{6}\pi\right)<-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 이는 ㉢과 모순이다.

(ii) $a=0$인 경우 $(g(x)=b)$



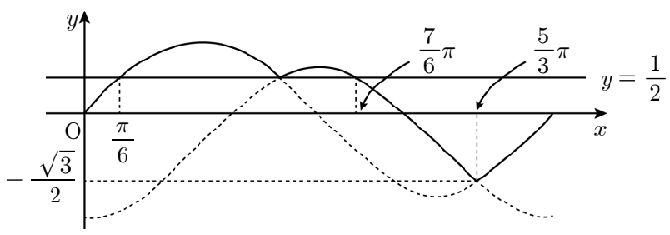
함수 $h(x)$의 최솟값이 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$이 되기 위하여 함수

$y=g(x)$의 그래프가 점 $\left(\frac{4}{3}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$을 지나야 하므로

$g(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 함수 $g(x)$가 상수함수이므로

$g\left(\frac{7}{6}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 이는 ㉢과 모순이다.

(iii) $a<0$인 경우



함수 $h(x)$의 최솟값이 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$이 되기 위하여 함수

$y=g(x)$의 그래프가 점 $\left(\frac{5}{3}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$을 지나야 한다. 즉

$g\left(\frac{5}{3}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. ……㉣

㉢, ㉣에 의하여 연립방정식

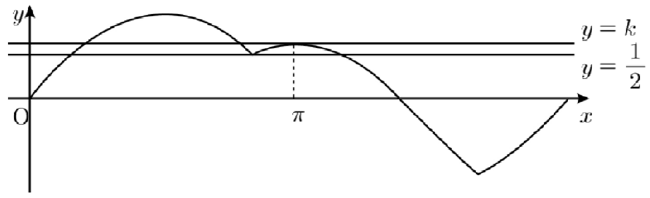
$\begin{cases} a\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+b=\frac{1}{2} \\ a\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+b=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

을 풀면 $a=-1$, $b=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$이다.

따라서 $g(x)=-\cos x+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

방정식 $h(x)=k\left(k>\dfrac{1}{2}\right)$가 서로 다른 세 실근을 가지는 경우는 그림과 같이 직선 $y=k$가 점 $(\pi,\ g(\pi))$를 지날 때이다.



$g(\pi)=-\cos\pi+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

즉 $k=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$이다. 따라서

$$\frac{k}{b}=\frac{\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{-2}=-\sqrt{3}$$

이므로 $a+20\left(\dfrac{k}{b}\right)^2=-1+20\times3=59$