Praise to Limit (극한을 찬미하며)

이번에는, 로피탈 정리 혹은 테일러급수를 통하여 도출 가능한 여러 극한의 값을 교과 내 과정으로 최대한 풀어보기 위해 노력할 것이다. 이는, 초월함수가 엮인 합성함수의 그래프를 그리기 위해 점근선을 조사할 때 유용하게 사용할 수 있을 것이다.

Question 1. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ 임을 증명하여라.

이를 증명하기 위해서는, $0 < \dfrac{x}{e^x} < \dfrac{x}{f(x)}$를 만족하는 적당한 다항함수 $f(x)$를 일단 찾아보아야 한다. 우리는 적당한 다항함수 $f(x)$를 찾아내어, 조임정리를 통하여 준 식의 값이 0으로 수렴함을 보일 것이다. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$이 되기 위해서는 우변의 극한이 우선 0이 되어야 하므로, $f(x)$의 차수가 2차 이상이어야 한다. 즉, 우리는 $f(x)$를 적당한 이차함수로 설정하는 것이 가장 이상적인 방법임을 유추할 수 있다. (실제로는 2차 이상의 다른 다항함수를 설정하여도 좋다.)

위의 부등식을 만족하기 위해서는 우선 $e^x > f(x)$이어야 하므로, $e^x > kx^2$을 만족하는 k를 찾아내어야 한다. $g(x) = e^x - kx^2$이라 하면 $g(0) = 1$이고 이는 0보다 크다. 또한 $g'(x) = e^x - 2kx$이므로 $k = \dfrac{1}{2}$를 선택하면 $x > 0$일 때 $g'(x) > 0$임을 알 수 있다. 요컨대, 다음과 같이 정리된다는 것이다.

$g(x) = e^x - \dfrac{1}{2}x^2$일 때

1) $g(0) = 1 > 0$

2) $x > 0$에서 $g'(x) = e^x - x > 0$

이므로 $x > 0$에서 $g(x) \geq 1 > 0$이 성립한다. 따라서 $e^x > \dfrac{1}{2}x^2$이다. 이를 처음 부등식에 적용한다.

$$0 < \frac{x}{e^x} < \frac{x}{\frac{1}{2}x^x} = \frac{2}{x}$$

이므로 조임정리에 의해 부등식의 양 변은 0으로 수렴한다. 따라서, $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ 을 만족한다. ■

그렇다면, 우리는 분자가 x가 아닌 임의의 다항함수 $f(x)$일 경우에는 어떤 값으로 극한이 수렴할지 묻지 않을 수 없다. 다음과 같은 질문을 생각해보자.

Question 2. 임의의 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{e^x} = 0$ 임을 증명하여라.

과연, 어떠한 방법으로 이를 증명할 수 있겠는가? 우선 $f(x)$를 구체적인 수식으로 나타내야 함은 자명해보인다. 증명을 위하여 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$에 대하여 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{e^x} = \lim_{x \to \infty} a_n \frac{x^n}{e^x} + a_{n-1}\frac{x^{n-1}}{e^x} + \cdots + a_1 \frac{x}{e^x} + a_0 \frac{1}{e^x}$$

위의 식에서, 자연수 n에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ 임을 보이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{e^x}=0$을 보이기에 충분하다는 것을 알 수 있다. 해당 과정에 맞게 증명을 진행하기 위하여 다음과 같이 식을 변형한다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left\{\frac{\frac{x}{n}}{e^{\frac{x}{n}}}\right\}^n\times n^n\right)$$

위 식에서 $\frac{x}{n}$을 t로 치환하면 극한값은 0으로 수렴함을 알 수 있다. 따라서 임의의 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{e^x}=0$ 임이 확실하다. ■

그렇다면, 우리는 또 다른 질문을 하지 않을 수 없다. 이를 이용하여 다른 지수함수 혹은 자연로그함수, 그리고 그들이 사용된 합성함수의 극한을 구하는 방법이 있는가? 당연하지만, 위에서 증명한 내용을 조금만 응용한다면 아래 기술될 몇 가지 극한을 손쉽게 구할 수 있다. 천천히 이해하면서 따라오도록 하자.

Question 3. $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$의 극한값을 구하여라.

수학적 센스가 있는 사람이라면 금방 눈치 챌 수 있었겠지만, 위의 극한값을 구해내는 것은 썩 어렵지 않다. $\ln x=t$로 치환하면, $x=e^t$이고 x가 양의 무한대로 발산할 때 t또한 양의 무한대로 발산하므로 다음과 같은 결과를 이끌어낼 수 있다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0\ (\because \text{Question 1})$$

■

Question 4. $\lim_{x\to+0}x\ln x$의 극한값을 구하여라.

$x=\frac{1}{t}$로 치환하면 x가 $+0$으로 수렴할 때 t는 양의 무한대로 발산하므로, 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to+0}x\ln x=\lim_{t\to\infty}-\frac{\ln t}{t}=0\ (\because \text{Question 3})$$

■

약간 응용하여 다음과 같은 두 가지 극한의 값들도 도출해낼 수 있다.

Question 5. $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$의 극한값을 구하여라.

여기서 답이 e라고 생각한 사람은 벽보고 열심히 반성하도록 하자. 값이 e가 되기 위해서는 해당 식에서 x가 0으로 수렴해야 한다. 지금은 x가 양의 무한대로 발산하는 경우를 조사해야 한다. 이를 위해 약간의 수학적 센스와 발상이 필요하다. 여백이 부족하니 다음 페이지에서 마저 설명하도록 하겠다. (나는 페르마처럼 불친절하게 생략하지는 않는다.)

$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$라고 할 때 $\lim_{x\to\infty} y$를 구하는 문제로 변형할 수 있다. 이를 직접 계산하기 어려우므로 로그를 취하여 $\lim_{x\to\infty}\ln y$를 계산해낸다면 구하는 극한은 $\lim_{x\to\infty}\ln y=e^{a}$가 될 것이다. (이는 $y=\ln x$의 그래프가 전단사함수이기고 역함수가 존재하기에 가능하다.) 즉, 다음이 성립한다.

$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)}\times\frac{1+x}{x}=0\times1=0$ ($\because x+1$을 치환 후 Question 3 이용)

따라서, $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{0}=1$ 이다. ■

Question 6. $\lim_{x\to+0} x^{x}$의 극한값을 구하여라.

이 문제 역시 어렵지는 않다. Question 5에서 도입한 로그극한법을 응용하고, Question 4의 결과를 이용하면 쉽게 극한값을 구할 수 있다. 즉, 다음과 같은 일련의 과정이 성립한다.

$$\lim_{x\to+0}(\ln x^{x})=\lim_{x\to+0}x\ln x=0$$
$$\therefore \lim_{x\to+0}x^{x}=e^{0}=1$$

■

자, 여기까지 잘 이해하고 따라왔는가? 그렇다면 실제 출제되었던 문항을 통해 이를 점검해보자. 물론, 해설은 공개하지 않겠다. 이를 풀고 연습하는 것은 여러분의 몫이지, 나는 위에서 본 문항을 풀기 위한 모든 것을 설명하였다고 자부한다. (굳이 힌트를 원한다면 본 페이지의 마지막에 적어두겠다. 필요한 사람만 참고하도록 하자.)

Question 7. 실수 a의 값에 따라 방정식 $e^{x}=x^{a}$이 몇 개의 양의 실근을 갖는지 설명하시오.

(서울대학교 2012 정시 기출문제 일부 발췌 및 변형)

Question 8. 양의 실수 a에 대하여 $a^{x}=x^{a}$를 만족하고 $x\neq a$인 양의 실수 x는 몇 개인가?

(한양대학교 2014 수시 기출문제 일부 발췌)

Hint : 양변에 로그를 취하고 a와 x를 좌변과 우변에 각각 분리하여 그래프를 그려보자.

Reference

1. 수능대비 고난도 수학 문제집 (이병배 지음)
2. The Art and Craft of Problem Solving (Paul Zeit 지음)
3. 중등수학 교재연구 (강옥기 지음)
4. 수리논술 개념 총정리 (대표저자 여상진)
5. 한양대학교 2014학년도 수시 기출문제
6. 서울대학교 2012학년도 정시 기출문제
7. 고등학교 고급수학 (서울대학교 국정도서 편찬위원회 지음)