[수학2] [미분] 평가원 최근 10개년 PART2

04 수2 05 함수의 증가와 감소

01 함수의 증가와 감소

02 증가와 감소2 (삼차함수의 증가와 감소)

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 06월 27

1. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+3$이 열린구간 $(-a,\ a)$에서 감소할 때, 양수 a의 최댓값을 구하시오.

04 수2 05 함수의 증가와 감소

01 함수의 증가와 감소

05 증가와 감소5 (사차함수의 증가와 감소)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 09월 21

2. 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$$

이다. 함수 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 감소하고 구간 $(2,\ \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여, a^2+b^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값은?

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{43}{8}$ ③ $\frac{11}{2}$

④ $\frac{45}{8}$ ⑤ $\frac{23}{4}$

04 수2 05 함수의 증가와 감소

02 함수의 극대와 극소

02 극대와 극소2 (삼차함수의 극대와 극소)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 예비 25

3. 함수 $f(x)=x^3-9x^2+24x+5$의 극댓값을 구하시오.

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 11월 25

4. 함수 $f(x)=2x^3-12x^2+ax-4$가 $x=1$에서 극댓값 M을 가질 때, $a+M$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 06월

5. 함수 $f(x)=x^3-9x^2+24x+a$의 극댓값이 10일 때, 상수 a의 값은?

① -12 ② -10 ③ -8
④ -6 ⑤ -4

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 09월

6. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+a$의 모든 극값의 곱이 -4일 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 6

7. 함수 $f(x)=x^3-ax+6$이 $x=1$에서 극소일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 9

8. 함수 $f(x)=x^3-3x+a$의 극댓값이 7일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 17

9. 함수 $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$의 극댓값이 4이고 $f(-2)>0$일 때, $f(-1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 10

10. 함수 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+mx+1$이 $x=3$에서 극대일 때, 상수 m의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 5

11. 함수 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

04 수2 05 함수의 증가와 감소

02 함수의 극대와 극소

03 극대와 극소3 (사차함수의 극대와 극소)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 12

12. 함수 $f(x)=-x^4+8a^2x^2-1$이 $x=b$와 $x=2-2b$에서 극대일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 $a>0$, $b>1$인 상수이다.)

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 19

13. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^4+kx+10$이 $x=1$에서 극값을 가질 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 19

14. 함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 4일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.)

04 수2 05 함수의 증가와 감소

02 함수의 극대와 극소

07 극대와 극소7 (곱함수와 뺀함수)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 11월 29

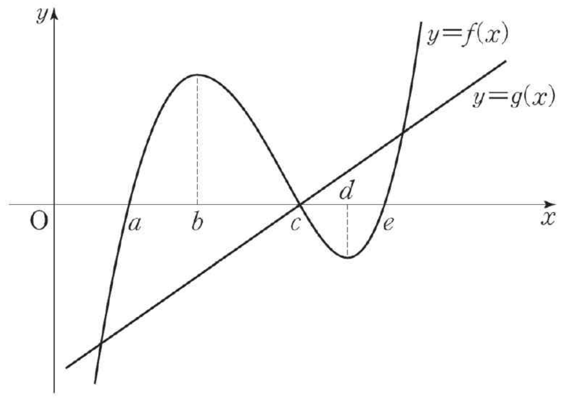
15. 두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)=(x^3+2)f(x)$$

를 만족시킨다. $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가질 때, $f(1)-f'(1)$의 값을 구하시오.

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 06월 18

16. 삼차함수 $y=f(x)$와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같고, $f'(b)=f'(d)=0$이다.



함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=p$와 $x=q$에서 극소이다. 다음 중 옳은 것은? (단, $p<q$)

① $a<p<b$이고 $c<q<d$ ② $a<p<b$이고 $d<q<e$

③ $b<p<c$이고 $c<q<d$ ④ $b<p<c$이고 $d<q<e$

⑤ $c<p<d$이고 $d<q<e$

04 수2 05 함수의 증가와 감소

03 증가감소와 극대극소의 활용

02 활용2 (미정계수와 관계식)

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 06월 20

17. 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+1 \ (k>0\text{인 상수})$$

의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선 l, m의 기울기가 모두 $3k^2$이다. 곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 두 직선과 접선 l, m으로 둘러싸인 도형의 넓이가 24일 때, k의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

04 수2 05 함수의 증가와 감소

03 증가감소와 극대극소의 활용

03 활용3 (구간정의함수)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 21

18. 함수 $f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x \geq 0) \end{cases}$ 의 극댓값이 5일 때, $f(2)$ 의 값은? (단 a는 상수이다.)

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

04 수2 05 함수의 증가와 감소

03 증가감소와 극대극소의 활용

04 활용4 (절댓값함수)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 14

19. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여
$xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
(나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않는 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

04 수2 05 함수의 증가와 감소

03 증가감소와 극대극소의 활용

06 활용6 (추론과 해석)

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 06월 21

20. 자연수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$의 극댓값을 a_n이라 하자.

(가) $f(n)=0$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x)\geq 0$이다.

a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은?

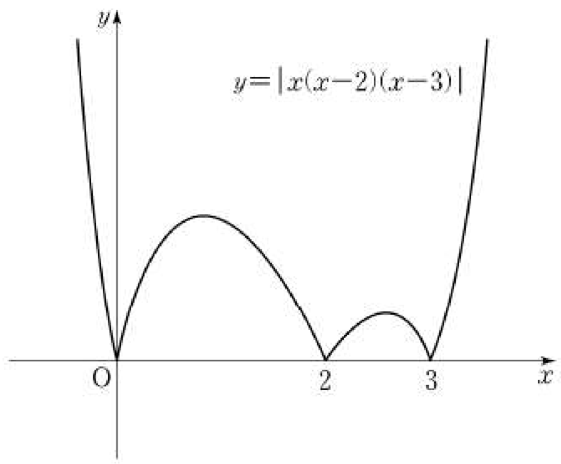
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 09월 21

21. 다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은?

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다.

(나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 09월 29

22. 두 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$$

을 만족시킨다. $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가질 때, $f'(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 30

23. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 30

24. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=f(3)=0$
(나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\frac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 22

25. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

04 수2 05 함수의 증가와 감소

03 증가감소와 극대극소의 활용

07 활용7 (정의된 함수)

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 09월 21

26. 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 함수

$$y=x^4-4x^3+10x-30,\ y=2x+2$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 점 A와 점 B 사이의 거리를 $f(t)$라 하자.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to 0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le 0$$

을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은?

① -7　② -3　③ 1

④ 5　⑤ 9

04 수2 05 함수의 증가와 감소

04 함수의 최대와 최소

01 최대와 최소1 (Mm 구하기)

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 06월 10

27. 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)=x^3-3x+5$의 최솟값은?

① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

04 수2 05 함수의 증가와 감소

04 함수의 최대와 최소

03 최대와 최소3 (Mm 조건 해석)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 06월 28

28. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$가 닫힌 구간 $[-a,\ a]$에서 최댓값 M, 최솟값 $\frac{14}{27}$를 갖는다. $a+M$의 값을 구하시오.

04 수2 05 함수의 증가와 감소

04 함수의 최대와 최소

06 최대와 최소6 (추론과 해석)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 18

29. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & (x<0) \\ f(x) & (x \ge 0) \end{cases}$$

이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작을 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $g(0)+g'(0)=\frac{1}{2}$

ㄴ. $g(1)<\frac{3}{2}$

ㄷ. 함수 $g(x)$의 최솟값이 0일 때, $g(2)=\frac{5}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 30

30. 이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고,

삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0이다. 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 0) \\ g(x) & (x > 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $h'(-3)+h'(4)$의 값을 구하시오.

(가) 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합은 1이다.
(나) 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $3+4\sqrt{3}$이다.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 22

31. 함수

$$f(x)=x^3-3px^2+q$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 25 이하의 두 자연수 p, q의 모든 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하시오.

(가) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 5이다.
(나) 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값과 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 같다.

04 수2 06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

01 방정식과 미분1 (삼차방정식의 근의 판별)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 15

32. 방정식 $x^3-3x^2-9x-k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 정수 k의 최댓값은?

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 26

33. 방정식 $x^3-x^2-8x+k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 6

34. 방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는?

① 20 ② 23 ③ 26

④ 29 ⑤ 32

04 수2 06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

04 방정식과 미분4 (다항함수, 방정식의 동치변형)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 27

35. 곡선 $y=x^3-3x^2+2x-3$과 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 25

36. 곡선 $y=4x^3-12x+7$과 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값을 구하시오.

04 수2 06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

05 방정식과 미분5 (변형함수, 방정식의 동치변형)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 20

37. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오.

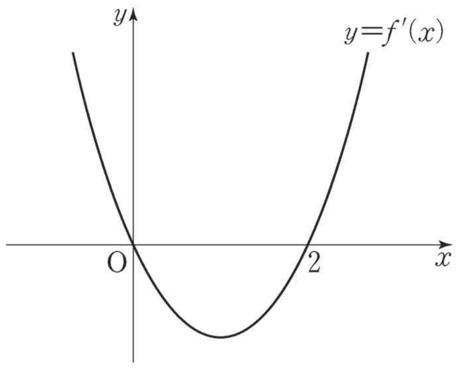
04 수2 06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

06 방정식과 미분6 (도함수의 그래프 조건)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 06월 21

38. 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $f(0)<0$이면 $|f(0)|<|f(2)|$이다.

ㄴ. $f(0)f(2)\geq 0$이면 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극소인 a의 값의 개수는 2이다.

ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이면 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

11 방정식과 미분11 (추론과 해석)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 11월 30

39. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2+6x+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식

$$4f'(x)+12x-18=(f'\circ g)(x)$$

가 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, m^2+M^2의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 21

40. 상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-1)>-1$

(나) $f(1)-f(-1)>8$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. $-1<x<1$일 때, $f'(x)\geq 0$이다.

ㄷ. 방정식 $f(x)-f'(k)x=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 30

41. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$(f\circ f)(x)=x$$

의 모든 실근이 0, 1, a, 2, b이다.

$$f'(1)<0,\ f'(2)<0,\ f'(0)-f'(1)=6$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. (단, $1<a<2<b$)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 22

42. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

04 수2 06 방부등식과 직선운동

02 부등식과 미분

03 부등식과 미분3 (부등식의 동치변형)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 9

43. 두 함수

$$f(x)=x^3-x+6,\quad g(x)=x^2+a$$

가 있다. $x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x) \geq g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

04 수2 06 방부등식과 직선운동

02 부등식과 미분

05 부등식과 미분5 (함수 구하기)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 11월 21

44. 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은?

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나) $f(0)=f'(0)$
(다) $x \geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$이다.

① 28 ② 33 ③ 38
④ 43 ⑤ 48

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 30

45. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선은 모두 x축이다.
>
> (나) 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 2이다.
>
> (다) 방정식 $f(x)=g(x)$는 오직 하나의 실근을 가진다.

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$$g(x) \le kx-2 \le f(x)$$

를 만족시키는 실수 k의 최댓값과 최솟값을 각각 α, β라 할 때, $\alpha-\beta=a+b\sqrt{2}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, a, b는 유리수이다.)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 18

46. 최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$|f'(x)| \le 4x^2+5$$

를 만족시킨다. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$일 때, 실수 a의 최댓값은?

① $\dfrac{3}{2}$　② 2　③ $\dfrac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\dfrac{7}{2}$

04 수2 06 방부등식과 직선운동

03 속도, 가속도와 미분

01 속도와 가속도

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 25

47. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 x가

$$x=t^3-5t^2+6t$$

이다. $t=3$에서 점 P의 가속도를 구하시오.

04 수2 06 방부등식과 직선운동

03 속도, 가속도와 미분

02 속도와 가속도의 해석1 (주어진 위치함수)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 06월

48. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=-t^2+4t$이다. $t=a$에서 점 P의 속도가 0일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

04 수2 06 방부등식과 직선운동

03 속도, 가속도와 미분

03 속도와 가속도의 해석2 (위치함수 구하기)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 27

49. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + k \ (k\text{는 상수})$$

이다. 점 P의 가속도가 0일 때 점 P의 위치는 40이다. k의 값을 구하시오.

04 수2 06 방부등식과 직선운동

03 속도, 가속도와 미분

05 속도와 가속도의 해석4 (운동방향)

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 06월 17

50. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t > 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 - 12t + k (k\text{는 상수})$$

이다. 점 P의 운동 방향이 원점에서 바뀔 때, k의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14

④ 16 ⑤ 18

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 16

51. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 + at^2 + bt \ (a,\ b\text{는 상수})$$

이다. 시각 $t=1$에서의 점 P가 운동 방향을 바꾸고, 시각 $t=2$에서의 점 P의 가속도는 0이다. $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[수학2] [미분] 평가원 최근 10개년 PART2(빠른 정답)

년도별경향 2022.12.21

1. [정답] 3
2. [정답] ③
3. [정답] 25
4. [정답] 22
5. [정답] ②

6. [정답] ①
7. [정답] ②
8. [정답] ⑤
9. [정답] ②
10. [정답] ①

11. [정답] ③
12. [정답] ①
13. [정답] 7
14. [정답] 2
15. [정답] 16

16. [정답] ②
17. [정답] ③
18. [정답] ⑤
19. [정답] ③
20. [정답] ③

21. [정답] ②
22. [정답] 10
23. [정답] 39
24. [정답] 105
25. [정답] 108

26. [정답] ④
27. [정답] ③
28. [정답] 12
29. [정답] ⑤
30. [정답] 38

31. [정답] 14
32. [정답] ②
33. [정답] 12
34. [정답] ③
35. [정답] 21

36. [정답] 15
37. [정답] 21
38. [정답] ⑤
39. [정답] 65
40. [정답] ③

41. [정답] 40
42. [정답] 61
43. [정답] ⑤
44. [정답] ⑤
45. [정답] 5

46. [정답] ②
47. [정답] 8
48. [정답] ②
49. [정답] 22
50. [정답] ④

51. [정답] ①

[수학2] [미분] 평가원 최근 10개년 PART2(해설)

년도별경향 2022.12.21

1) [정답] 3

[해설]

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+3$에서

$f'(x)=x^2-9=(x+3)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=3$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

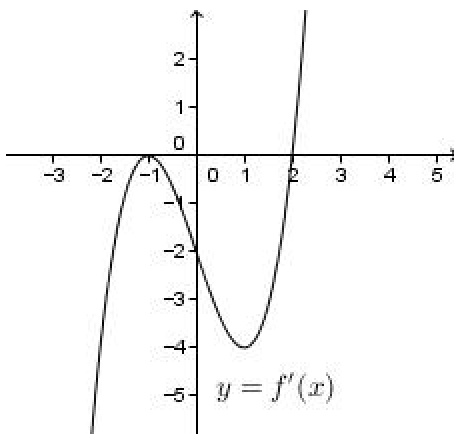
x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	21	↘	-15	↗

$-3<x<3$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로 열린구간 $(-a,\ a)$에서 함수 $f(x)$가 감소하기 위한 양수 a의 최댓값은 3이다.

2) [정답] ③

[해설]

$(-\infty,0)$에서 감소하고 $(2,\infty)$에서 증가하는 그래프가 되기 위한 $f'(x)$의 그래프 개형은 $x=-1$에서 접하는 그래프가 나와야 된다.



$f'(x)=(x+1)(x-\alpha)(x-\beta)\,(\alpha<\beta)$라 하면

$\alpha=-1$

$a=-(\alpha+\beta),\ b=\alpha\beta$

$a^2+b^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+(\alpha\beta)^2$

$=1-2\beta+2\beta^2=2\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

따라서 $\beta=\frac{1}{2}$일 때 최솟값을 갖고,

$\beta=2$일 때 최댓값을 갖는다.

$m=\frac{1}{2}, M=5$

$\therefore\ M+m=\frac{11}{2}$

3) [정답] 25

[해설]

$f(x)=x^3-9x^2+24x+5$에서

$f'(x)=3x^2-18x+24$

$=3(x-2)(x-4)$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서, $f(x)$의 극댓값은

$f(2)=8-36+48+5=25$

4) [정답] **22**

[해설]

삼차함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값을 가지므로

$f'(1)=0$이다. $f'(x)=6x^2-24x+a$이므로

$f'(1)=6-24+a=0\ \therefore a=18$

따라서, $f(x)=2x^3-12x^2+18x-4$이고

$f(1)=2-12+18-4=4=M$

$\therefore a+M=18+4=22$

5) [정답] ②

[해설]

극댓값을 구하기 위하여 주어진 식을 미분하여 정리해보면

$f'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4)$이다.

이를 증감표를 이용하여 극댓값을 구해보면

x		2		4	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	증가		감소		증가
		극대		극소	

$x=2$일 때 극댓값이다.

따라서 $f(2)=8-36+48+a=10$이다. $a=-10$

6) [정답] ①

[해설]

$f(x)=x^3-3x^2+a$에서 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서, 모든 극값의 곱이 -4이므로

$f(0)\times f(2)=a(a-4)=-4$

$\Leftrightarrow a^2-4a+4=0$

$\Leftrightarrow (a-2)^2=0 \therefore a=2$

7) [정답] ②

[해설]

$f(x)=x^3-ax+6$에서 $f'(x)=3x^2-a$

이때 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=0$

따라서 $f'(1)=3-a$에서

$3-a=0 \quad \therefore a=3$

8) [정답] ⑤

[해설]

$f(x)=x^3-3x+a$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ 에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$ 에서 극대, $x=1$에서 극소이다.

이때, 함수 $f(x)$의 극댓값이 7이므로

$f(-1)=-1+3+a=2+a=7$

따라서 $a=5$

9) [정답] ②

[해설]

$f'(x)=3x^2-6ax+3(a^2-1)=(3x-(3a+3))(x-(a-1))$

즉 $x=a-1$일 때 극댓값 4를 갖는다. $f(-2)>0$이므로

$f(-2)=-6a^2-12a-2$, $3a^2+6a+1<0$이 된다.

$\dfrac{-3-\sqrt{6}}{3}<a<\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$ 이므로 $a<0$이다.

$$\begin{aligned} f(a-1)&=(a-1)^3-3a(a-1)^2+3(a^2-1)(a-1) \\ &=(a-1)^2(a+2)=4 \end{aligned}$$

정리하면 $a^3-3a+2=4$,

$a^2-3a-2=(a+1)^2(a-2)=0$이다.

$\therefore a=-1(a<0)$

그러므로 $f(x)=x^3+3x^2 f(-1)=2$

10) [정답] ①

[해설]

$f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+2x^2+mx+1$에서

$f'(x)=-x^2+4x+m$

이때 함수 $f(x)$가 미분가능한 함수이고 $x=3$에서 극대이므로

$f'(3)=0$이다.

$f'(3)=-9+12+m=0$

따라서 $m=-3$

11) [정답] ③

[해설]

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$에서

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

이므로 $f'(x)=0$이 되는 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=1$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값

$M=f(-2)=-16+12+24+1=21$을 갖고, $x=1$에서

극솟값 $m=f(1)=2+3-12+1=-6$을 갖는다.

따라서 $M+m=15$

12) [정답] ①

[해설]

$f'(x)=-4x^3+16a^2x$

$=-4x(x^2-4a^2)$

$=-4x(x+2a)(x-2a)$

이므로 함수의 증감을 조사하면 $x=2a$, $x=-2a$에서

극댓값을 갖는다. 즉, $b+(2-2b)=2a+(-2a)=0$이므로

$b=2$

또, $b(2-2b)=2a\times(-2a)$이므로

$-4=-4a^2$

$a>0$이므로 $a=1$

따라서 $a+b=1+2=3$

13) [정답] 7

[해설]

$f'(x)=4x^3+k$, $f'(1)=4+k=0$, $k=-4$

$\therefore f(1)=1+k+10=7$

14) [정답] 2

[해설]

$f(x)=x^4+ax^2+b$에서

$f'(x)=4x^3+2ax$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로 $f'(1)=4+2a=0$

에서

$a=-2$

그러므로

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 4를 가지므로

$f(0)=b=4$

따라서 $a+b=(-2)+4=2$

15) [정답] 16

[해설]

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가지므로

$g(1)=24$, $g'(1)=0$

$g(x)=(x^3+2)f(x)$에서

$g(1)=3f(1)=24$ 이므로, $f(1)=8$

또, $g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+2)f'(x)$이므로

$g'(1)=3f(1)+3f'(1)=0$

$\therefore f'(1)=-f(1)=-8 \quad (\because f(1)=8)$

$\therefore f(1)-f'(1)=8-(-8)=16$

16) [정답] ②

[해설]

$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로 그래프를 이용하여 x의 값의 범위에 따라 y'의 값의 부호를 확인하면 다음 표와 같다.

x	$f'(x)g(x)$	$f(x)g'(x)$	y'
$x<a$	$-$	$-$	$-$
$x=a$	$-$	0	$-$
$a<x<b$	$-$	$+$	
$x=b$	0	$+$	$+$
$b<x<c$	$+$	$+$	$+$
$x=c$	0	0	0
$c<x<d$	$-$	$-$	$-$
$x=d$	0	$-$	$-$
$d<x<e$	$+$	$-$	
$x=e$	$+$	0	$+$
$x>e$	$+$	$+$	$+$

함수 $f(x)g(x)$는 $x=c$에서 극대이고, $a<x<b$와 $d<x<e$에서 극소이다.

따라서 $p<q$이므로 $a<p<b$이고 $d<q<e$이다.

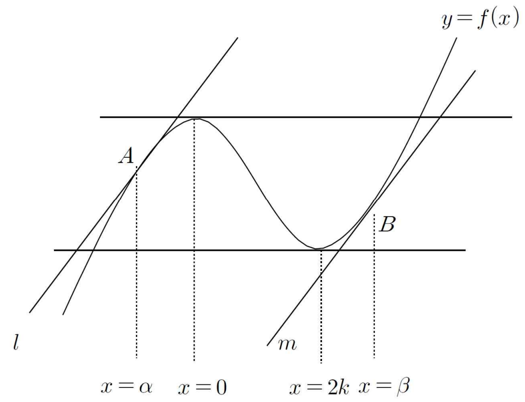
17) [정답] ③

[해설]

$f'(x)=x^2-2kx=x(x-2k)$이고

$\mathrm{A}\left(\alpha,\ \frac{1}{3}\alpha^3-\mathrm{k}\alpha^2+1\right)$, $\mathrm{B}\left(\beta,\ \frac{1}{3}\beta^3-\mathrm{k}\beta^2+1\right)$

$(\alpha<\beta)$라 하면 주어진 조건을 만족시키는 경우는 다음 그림과 같고 도형의 모양은 평행사변형이다.



또한 $f'(\alpha)=\alpha^2-2k\alpha=3k^2$에서

$\alpha^2-2k\alpha-3k^2=0,\ (\alpha-3k)(\alpha+k)=0$

이므로

$\alpha=-k\ (\alpha<0<\beta)$

즉, $\beta=3k$이다.

그리고 $f(0)=1$

$f(2k)=\frac{8k^3}{3}-4k^3+1=1-\frac{4}{3}k^3$이므로

$f(0)-f(2k)=\frac{4}{3}k^3$

또한, 점 A에서의 접선 l의 방정식은

$y-\left(-\frac{4}{3}k^3+1\right)=3k^2(x+k)$

$y=3k^2x+\frac{5}{3}k^3+1$

점 B에서의 접선 m의 방정식은

$y-1=3k^2(x-3k)$

$y=3k^2x-9k^3+1$

따라서 직선 $y=1$과 두 접선 $l,\ m$의 교점의 x좌표를 각각 $x_1,\ x_2$라 하면

$x_1=-\frac{5}{9}k,\ x_2=3k$이므로

$x_2-x_1=3k+\frac{5}{9}k=\frac{32}{9}k$

이때 평행사변형의 넓이는 24이므로

$\frac{4}{3}k^3\times\frac{32}{9}k=24,\ k^4=\frac{81}{16}$

따라서 $k=\frac{3}{2}$이다.

18) [정답] ⑤

[해설]

$f(x)=\begin{cases}a(3x-x^3) & (x<0)\\ x^3-ax & (x\ge 0)\end{cases}$에서

$f'(x)=\begin{cases}a(3-3x^2) & (x<0)\\ 3x^2-a & (x>0)\end{cases}$

a의 부호에 따라서 도함수의 그래프가 달라지기 때문에 a의 범위를 나누어야 한다.

(ⅰ) $a=0$일 때는 $f'(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 3x^2 & (x\ge 0)\end{cases}$이 되어서 $f(x)$의 극댓값이 발생하지 않는다.

(ⅱ) $a>0$일 때는 $x=-1,\ \sqrt{\frac{a}{3}}$에서 $f(x)$가 극솟값을 가지고 $x=0$에서 극댓값을 가지지만 그 값이 0이므로 문제의 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅲ) $a<0$일 때는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.

이상에서 $f(-1)=a(-3+1)=5,\ a=-\frac{5}{2}$이다.

$\therefore\ f(2)=2^3+\frac{5}{2}\cdot 2=13$

19) [정답] ③

[해설]

(가) 조건에 의해 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이므로

$g(x)=\frac{|x||f(x-p)+q|}{x}\ (x\ne 0)$이고 $g(x)$는 실수 전체에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0-}g(x)=g(0)$이므로

$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}|f(x-p)+q|=|f(-p)+q|$,

$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}|f(x-p)+q|=-|f(-p)+q|$

에서 $f(-p)+q=0$

$\therefore\ f(-p)=-q$

또, $g(0)=0$이므로 $g(x)$는 원점을 지난다.

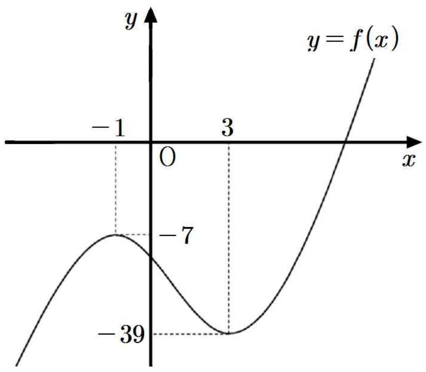
따라서 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{|x||f(x-p)+q|}{x} & (x\neq 0) \\ g(0) & (x=0) \end{cases}$

이 때 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$이므로

$$f'(x)=3x^2-6x-9$$
$$=3(x+1)(x-3)$$

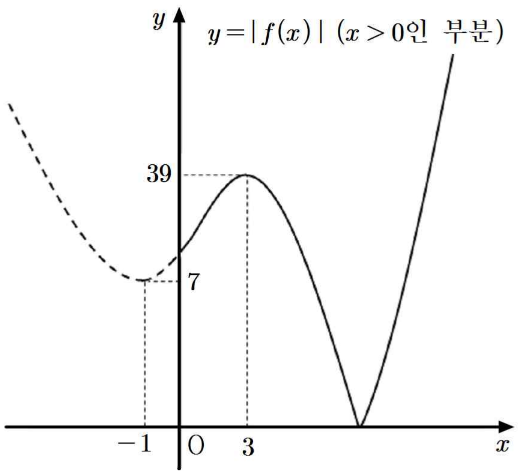
x		-1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-7	$\searrow$	-39	$\nearrow$

이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

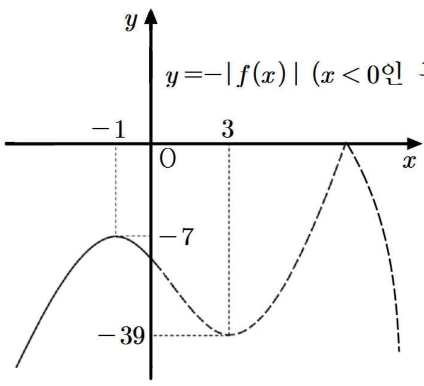


$h(x)=\dfrac{|x||f(x)|}{x}$ (단, $x\neq 0$)이라 하면

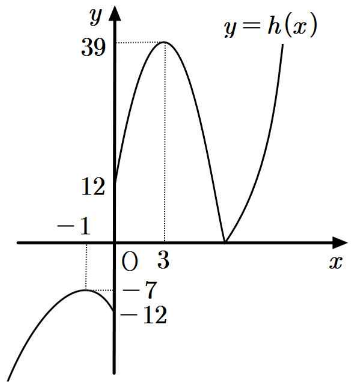
(i) $x>0$에서 $y=|f(x)|$



(ii) $x<0$에서 $y=-|f(x)|$



따라서 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그래프에서 미분불가능한 점이 2개다. 그런데, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $y=h(x)$의 그래프를 x축으로 p만큼 y축으로 q만큼 평행이동한 것이므로 $g(x)$의 그래프에서 미분불가능한 점이 1개가 되기 위해선 원래의 함수 $y=f(x)$의 평행이동한 함수 $y=f(x-p)+q$의 극점 중 한 개가 원점에 와야 한다.

즉, 극점이 원점으로 옮겨져야 한다.

따라서 $y=f(x)$의 극점 $(-1,\ -7)$, $(3,\ -39)$에 대하여

(i) 극점 $(-1,\ -7)$이 원점이 되는 경우

$p=1,\ q=7$

(ii) 극점 $(3,\ -39)$이 원점이 되는 경우

$p=-3,\ q=39$

그런데 $p,\ q$가 양수이어야 하므로 모순

(i), (ii)에서 만족하는 $p,\ q$의 값은 $p=1,\ q=7$

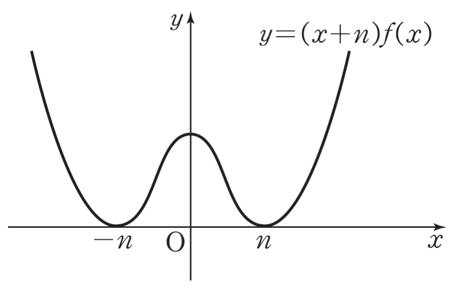
$\therefore\ p+q=1+7=8$

20) [정답] ③

[해설]

조건 (가)에서 $f(n)=0$이고, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=(x-n)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x)\geq 0$이어야 하므로 함수 $y=(x+n)f(x)$의 그래프는 그림과 같아야 한다.



즉, 방정식 $(x+n)f(x)=0$은 두 중근 $-n$, n을 갖는다.

$f(x)=(x-n)^2(x+n)$이므로

$f'(x)=2(x-n)(x+n)+(x-n)^2$

$= (x-n)\{2(x+n)+(x-n)\} = (x-n)(3x+n)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=n$ 또는 $x=-\dfrac{n}{3}$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{n}{3}$	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-\dfrac{n}{3}$ 일 때 극댓값 $f\left(-\dfrac{n}{3}\right)$ 을 갖는다.

$a_n = f\left(-\dfrac{n}{3}\right) = \left(-\dfrac{n}{3}-n\right)^2\left(-\dfrac{n}{3}+n\right) = \left(-\dfrac{4}{3}n\right)^2\left(\dfrac{2}{3}n\right) = \dfrac{32}{27}n^3$

에서 a_n 이 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값은 3 이다.

21) [정답] ②

[해설]

$h(x)=x(x-2)(x-3)$이라 하면

$h'(x)=(x-2)(x-3)+x(x-3)+x(x-2)$

이므로 $h'(0)=6,\ h'(2)=-2,\ h'(3)=3$

$f'(0)>6$ 또는 $f'(2)<-2$ 또는 $f'(2)>2$ 또는 $f'(3)<-3$이면 $h(x)$와 $f(x)$의 그래프가 교점이 생기게 되어 교점 좌우에서 대소관계가 뒤바뀌며 $g(x)$가 미분가능하다는 조건을 만족시키지 못한다.

$\therefore\ f'(0)\le 6,\ -2\le f'(2)\le 2,\ f'(3)\ge -3$

따라서 위 조건을 만족하는 $f(x)$의 개형은 다음과 같다.

(i) $f(x)=ax(x-2)^2(x-3)$에서

$f'(x)=a(4x^3-21x^2+32x-12)$

$\therefore\ f'(0)=-12a\le 6$

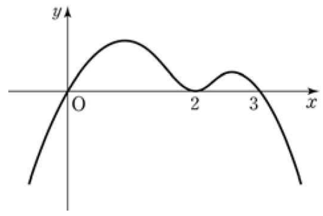
$\therefore\ a\ge -\dfrac{1}{2}$

$f'(3)=3a\ge -3$

$\therefore\ -\dfrac{1}{2}\le a<0$

$\therefore\ 0<f(1)=-2a\le 1$

$\therefore$ (최댓값)$=1$



(ii) $f(x)=ax(x-2)(x-3)^2$에서

$f'(x)=a(4x^3-24x^2+42x-18)$

$\therefore\ f'(0)=-18a\le 6$

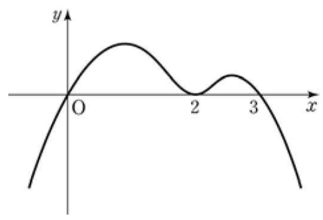
$\therefore\ a\ge -\dfrac{1}{3}$

$f'(2)=2a\ge -2,\ a\ge -1$

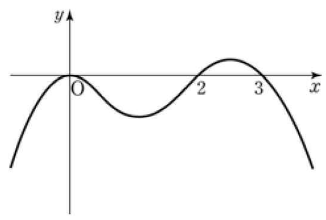
$\therefore\ -\dfrac{1}{3}\le a<0$

$\therefore\ 0<f(1)=-4a\le\dfrac{4}{3}$

$\therefore$ (최댓값)$=\dfrac{4}{3}$



(iii) $f(1)$은 음수이므로 최댓값이 아니다.



따라서 (i), (ii), (iii)을 비교하면 최댓값은 $\dfrac{4}{3}$이다.

22) [정답] 10

[해설]

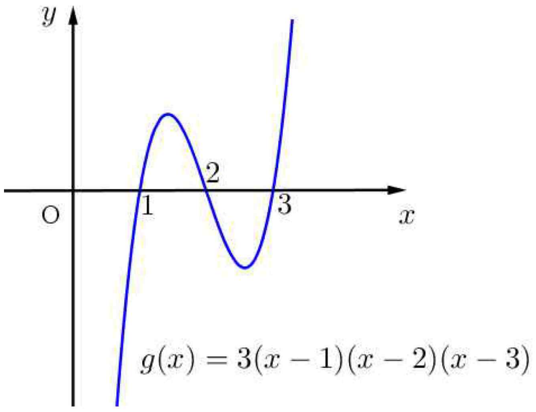
$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$에서

삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, 함수 $f(x)g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 $\dfrac{1}{3}$이다.

(i) 다항식 $g(x)$가 서로 다른 세 개의 일차식을 인수로 가질 때 $g(x)=3(x-1)(x-2)(x-3)$

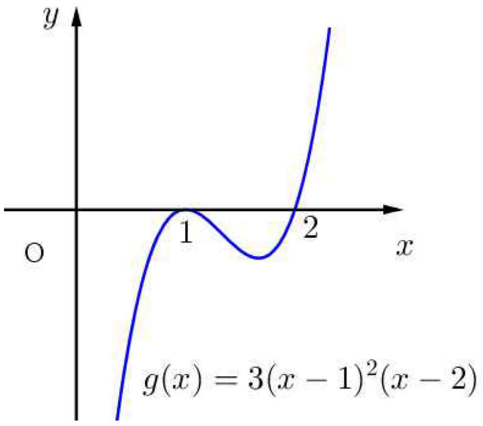
이므로 함수 $g(x)=3(x-1)(x-2)(x-3)$의 그래프의 개형은

다음과 같다.

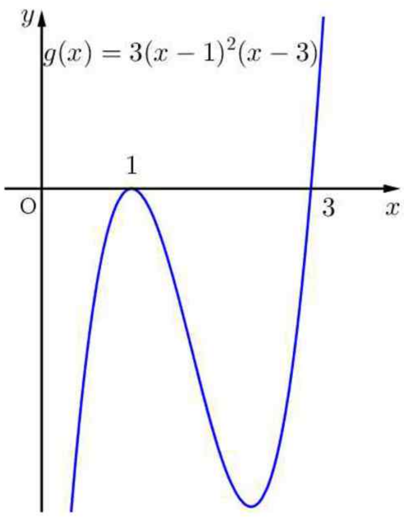


이때, 함수 $g(x)=3(x-1)(x-2)(x-3)$은 $x=2$에서 극값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 다항식 $g(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가질 때,
$g(x)=3(x-1)^2(x-2)$ 또는 $g(x)=3(x-1)^2(x-3)$이다.
함수 $g(x)=3(x-1)^2(x-2)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



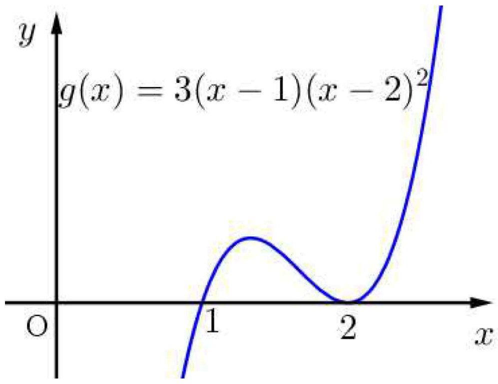
이때, 함수 $g(x)=3(x-1)^2(x-2)$는 $x=2$에서 극값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
또, 함수 $g(x)=3(x-1)^2(x-3)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



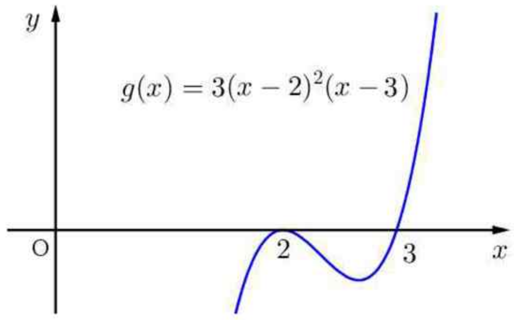
$g'(x)=6(x-1)(x-3)+3(x-1)^2=3(x-1)(3x-7)$
$g'(x)=0$에서
$x=1$ 또는 $x=\dfrac{7}{3}$

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖고, $x=\dfrac{7}{3}$에서 극솟값을 갖는다.
따라서 함수 $g(x)=3(x-1)^2(x-3)$은 $x=2$에서 극값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) 다항식 $g(x)$가 $(x-2)^2$을 인수로 가질 때
$g(x)=3(x-1)(x-2)^2$ 또는 $g(x)=3(x-1)(x-3)^2$이다.
함수 $g(x)=3(x-1)(x-2)^2$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

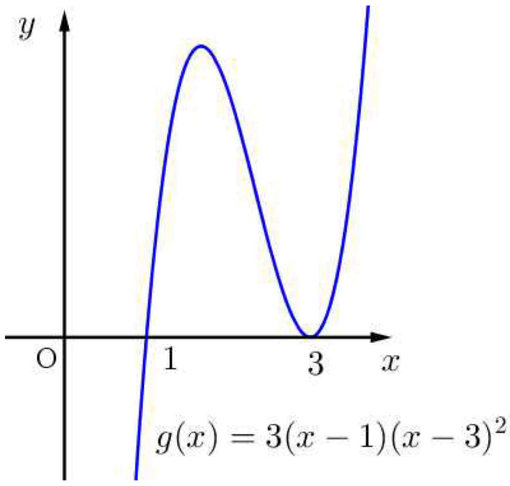


함수 $g(x)=3(x-1)(x-2)^2$은 $x=2$에서 극솟값을 가지므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
한편, 함수 $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$은 $x=2$에서 극댓값을 가지므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(iv) 다항식 $g(x)$가 $(x-3)^2$을 인수로 가질 때
$g(x)=3(x-1)(x-3)^2$ 또는 $g(x)=3(x-2)(x-3)^2$이다.
함수 $g(x)=3(x-1)(x-3)^2$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



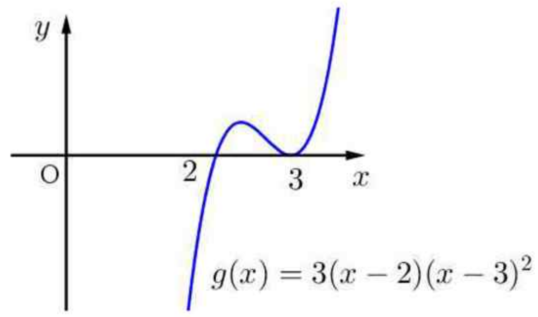
$g'(x)=3(x-3)^2+6(x-1)(x-3)=3(x-3)(3x-5)$
$g'(x)=0$에서

$x=\frac{5}{3}$ 또는 $x=3$

함수 $g(x)$는 $x=\frac{5}{3}$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 함수 $g(x)=3(x-1)(x-3)^2$은 $x=2$에서 극값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

또, 함수 $g(x)=3(x-2)(x-3)^2$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 함수 $g(x)=3(x-2)(x-3)^2$은 $x=2$에서 극값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서

$g(x)=3(x-2)^2(x-3)$이므로 $f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$이다.

이때,

$f'(x)=\frac{1}{3}\{2(x-1)(x-3)+(x-1)^2\}$

$=\frac{1}{3}(x-1)(3x-7)$

이므로

$f'(0)=\frac{1}{3}\times(-1)\times(-7)=\frac{7}{3}$

따라서 $p=3$, $q=7$이므로

$p+q=10$

23) [정답] **39**

[해설]

$y=|f(x)-g(x)|$가 조건에서

$h(0)=|f(0)-g(0)|=0$

$\therefore f(0)=g(0)$ …… ㉠

또, $x=0$에서 미분가능해야 하므로

$f'(0)-g'(0)=g'(0)-f'(0)$

즉, $f'(0)=g'(0)$이므로 $h'(0)=0$

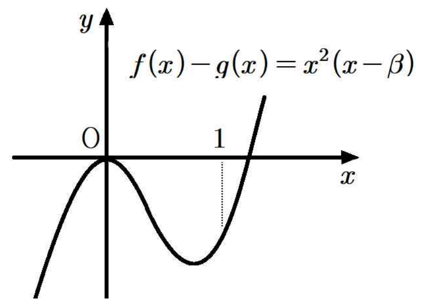
…… ㉡

그런데, 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이고 $x=0$에서 중근을 가져야 하므로

$y=f(x)-g(x)=x^2(x-\beta)$

로 놓을 수 있다.

또한 $x<1$인 모든 구간에서도 $h(x)=|f(x)-g(x)|$가 미분가능해야 하므로 아래 그림과 같이 $y=f(x)-g(x)\leq 0$이어야 한다.



즉, $h(x)=\begin{cases} -f(x)+g(x) & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1) \end{cases}$

$x=1$에서 미분가능하므로 연속이어야 한다.

즉, $-f(1)+g(1)=f(1)+g(1)$

또 미분가능하므로 $-f'(1)+g'(1)=f'(1)+g'(1)$

$\therefore f(1)=0,\ f'(1)=0$

따라서 $f(x)=(x-\alpha)(x-1)^2$ …… ㉢

로 놓을 수 있다.

㉠에서 $g(0)=f(0)$이고, ㉢에서 $f(0)=-\alpha$이므로

$g(0)=-\alpha$

㉢을 미분하면 $f'(x)=(x-1)^2+2(x-\alpha)(x-1)$ …… ㉣

㉡에서 $g'(0)=f'(0)$이고, ㉣에서 $f'(0)=1+2\alpha$이므로

$g'(0)=1+2\alpha$

따라서 $g(x)$는 $(0,\ -\alpha)$를 지나고 기울기가 $1+2\alpha$인 일차함수이므로 $g(x)=(1+2\alpha)x-\alpha$ …… ㉤

조건에서 $h(2)=5$이고, ㉢에서 $f(2)=2-\alpha$, ㉤에서 $g(2)=3\alpha+2$이므로

$f(2)+g(2)=(2-\alpha)+2+4\alpha-\alpha=5$

$\therefore \alpha=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)^2,\ g(x)=2x-\frac{1}{2}$

$\therefore h(4)=f(4)+g(4)$

$$=\frac{7}{2}\times 3^2+\frac{15}{2}$$

$$=\frac{78}{2}=39$$

24) [정답] 105

[해설]

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 개수를 $p(\neq 0)$라 하면

조건 (가)에서

$f(x)=p(x-1)(x-3)(x-q)$(p,q는 상수)

로 놓을 수 있고,

조건 (나)에서 $q<1$이다. 이때

$$f(a-x)=p(a-x-1)(a-x-3)(a-x-q)$$
$$=-p(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)$$

이므로

$$f(x)f(a-x)=-p^2(x-1)(x-3)(x-q)$$
$$\times(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)$$

따라서

$$g(x)=|f(x)f(a-x)|$$
$$=p^2|(x-1)(x-3)(x-q)$$
$$\times(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)|$$

이고 $p<1<3$이고 $a-3<a-1<a-q$이므로

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$g(x)=p^2|(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2|$ 꼴이어야 한다.

따라서

$a-3=q, a-1=1,\ a-q=3$ 이어야 한다.

따라서 $a=2,\ q=-1$이므로

$f(x)=p(x+1)(x-1)(x-3)$

$f(a-x)=-p(x+1)(x-1)(x-3)=-f(x)$이다.

따라서

$g(x)=|f(x)f(a-x)|=f(x)^2$ 이므로

$$\frac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}=\frac{f(8)^2}{f(0)\times f(8)}$$
$$=\frac{f(8)}{f(0)}$$
$$=\frac{p\times 9\times 7\times 5}{p\times 1\times(-1)\times(-3)}$$
$$=105$$

25) [정답] 108

[해설]

$i(x)=|f(x)|$로 놓으면 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 모든 x의 값에 대하여

$$\lim_{h\to 0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h},\ \lim_{h\to 0-}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}$$

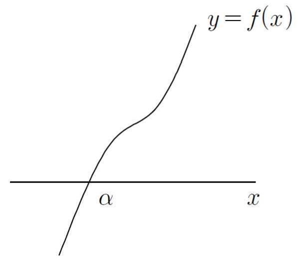
의 값이 항상 존재한다.

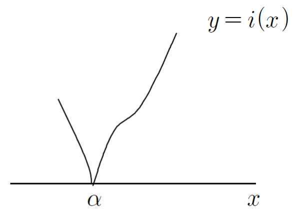
따라서

$$\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x)|-|f(x-h)|+|f(x)|}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}$$

(ⅰ) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않고

$f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)\neq 0$인 경우





$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$
$$=f(x-3)$$
$$\times\left\{\lim_{h\to 0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$$
$$=\begin{cases} f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<\alpha)\\ 0 & (x=\alpha)\\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>\alpha)\end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

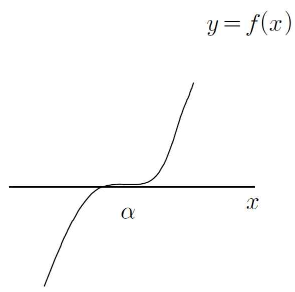
$\lim_{x\to\alpha-}g(x)=\lim_{x\to\alpha+}g(x)=g(\alpha)$이어야 하므로

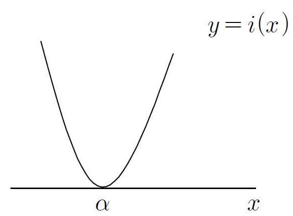
$f(\alpha-3)\times\{-2f'(\alpha)\}=f(\alpha-3)\times\{2f'(\alpha)\}=0$

그런데 $f'(\alpha)\neq 0,\ f(\alpha-3)\neq 0$이므로 모순이다.

(ⅱ) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않고

$f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)=0$인 경우





$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$
$$=f(x-3)$$
$$\times\left\{\lim_{h\to 0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$$
$$=\begin{cases} f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<\alpha)\\ 0 & (x=\alpha)\\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>\alpha)\end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$\lim_{x\to\alpha-} g(x)=\lim_{x\to\alpha+} g(x)=g(\alpha)$이어야 하고

$f'(\alpha)=0$이므로

$$f(\alpha-3)\times\{-2f'(\alpha)\}=f(\alpha-3)\times\{2f'(\alpha)\}=0$$

이 성립한다.

그런데, 방정식 $g(x)=0$을 만족시키는 실근은

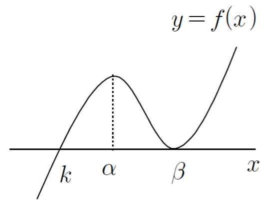
$$x=\alpha \text{ 또는 } x=\alpha+3$$

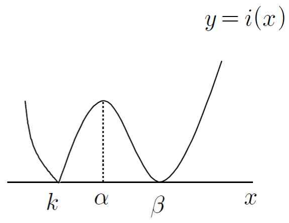
으로 2개 뿐이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(iii) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(\alpha)\neq 0$, $f(\beta)\neq 0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$인 경우

(i)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(iv) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0$, $f(\alpha)\neq 0$, $f(\beta)=0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0(k<\alpha<\beta)$인 경우



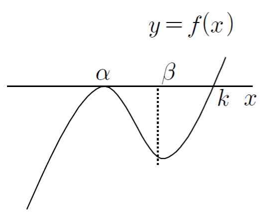


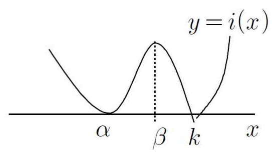
(i)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(v) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0$, $f(l)=0$, $f(m)=0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0(k<\alpha<l<\beta<m)$인 경우

(i)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(vi) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0$, $f(\alpha)=0$, $f(\beta)\neq 0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0(\alpha<\beta<k)$인 경우





$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$$=f(x-3)$$

$$\times\left\{\lim_{h\to 0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$$

$$=\begin{cases} f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<k) \\ 0 & (x=k) \\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>k)\end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$\lim_{x\to k-} g(x)=\lim_{x\to k+} g(x)=g(k)$이어야 하므로

$$f(k-3)\times\{-2f'(k)\}=f(k-3)\times\{2f'(k)\}=0$$

그런데 $f'(k)\neq 0$이므로 $f(k-3)=0$이고

$$k-3=\alpha \quad \cdots\cdots ㉠$$

즉, $k=\alpha+3$이면 조건 (가)를 만족시킨다.

또한, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근은

$x<k$일 때 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$

$x=k$일 때 $x=k$

$x>k$일 때 $x=k+3$이고 조건 (나)에서 서로 다른 네 실근의 합이 4이므로

$$\alpha+\beta+k+k+3=7$$

$$\alpha+\beta+2k=4 \quad \cdots\cdots ㉡$$

또한, $f(x)=(x-\alpha)^2(x-k)$이고

$f'(x)=(x-\alpha)(3x-2k-\alpha)$이므로 $f'(x)=0$에서

$$\beta=\frac{\alpha+2k}{3}$$

㉡에 대입하여 정리하면 $\alpha+2k=3$

㉠, ㉡에서 $\alpha=-1$, $k=2$이므로 $f(x)=(x+1)^2(x-2)$

따라서 $f(5)=(5+1)^2(5-2)=36\times 3=108$

26) [정답] ④

[해설]

$(x^4-4x^3+10x-30)-(2x+2)>0$

$\Leftrightarrow x^4-4x^3+8x-32>0$

$\Leftrightarrow (x^3+8)(x-4)>0$

로부터

$$f(t)=\begin{cases} t^4-4t^3+8t-32 & (t<-2,\ t>4) \\ -t^4+4t^3-8t+32 & (-2\le t\le 4)\end{cases}$$

$x=t$인 지점에서의 좌미분계수와 우미분계수의 부호가 서로 달라야 하므로 $y=f(t)$의 개형이 바뀌는 $t=-2$, 4와 $f'(t)=0$을 만족하는 $t=-2$, $1-\sqrt{3}1$, $1+\sqrt{3}$, 4이 주어진 조건을 만족한다.

따라서 구하고자 하는 답은

$-2+(1-\sqrt{3})+1+(1+\sqrt{3})+4=5$

27) [정답] ③

[해설]

$f(x)=x^3-3x+5$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	7	↘	3	↗	23

따라서 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$는

$x=1$에서 최솟값 3을 갖는다.

28) [정답] 12

[해설]

$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=0 \Leftrightarrow x=-a,\ \dfrac{a}{3}$ 로부터

$f(-a)=a^3+2,\ f\left(\dfrac{a}{3}\right)=-\dfrac{5}{27}a^3+2,\ f(a)=a^3+2$

이므로

$-\dfrac{5}{27}a^3+2=\dfrac{14}{27}$

$\therefore\ a=2,\ M=10$

따라서 $a+M=12$

29) [정답] ⑤

[해설]

$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (x<0)\\ f(x) & (x\geq 0)\end{cases}$ 에서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라고 놓으면 $g(x)$는 모든 실수에서 미분 가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}(x^3+ax^2+bx+c)=c$$

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$g(0)=f(0)=c$$

$$\therefore c=\frac{1}{2}$$

$x=0$에서 미분 가능하므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^3+ah^2+bh}{h}$$

$=\lim\limits_{h\to 0+}(h^2+ah+b)$

$=b$

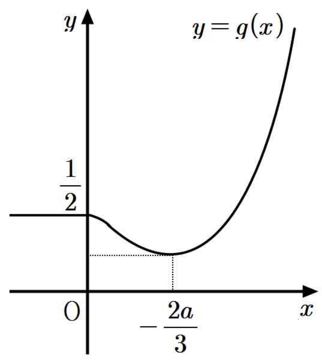
$$\lim_{h\to 0-}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{h}=0$$

$\therefore\ b=0$

$\therefore f(x)=x^3+ax^2+\dfrac{1}{2}$

또, 양변을 미분하면 $f'(x)=3x^2+2ax=3x\left(x+\dfrac{2}{3}a\right)$이므로

조건에서 $g(x)$의 최솟값이 $\dfrac{1}{2}$보다 작은 값을 만족하는 $g(x)$의 개형은 아래와 같다.



ㄱ. $g(0)=\dfrac{1}{2},\ g'(0)=0$이므로

$g(0)+g'(0)=\dfrac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $g(1)=f(1)=1+a+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}+a$ …… ㉠

그런데 $f\left(-\dfrac{2}{3}a\right)<\dfrac{1}{2}$에서

$f\left(-\dfrac{2}{3}a\right)=-\dfrac{8}{27}a^3+\dfrac{4}{9}a^3+\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{4}{27}a^3+\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}$

$\therefore a<0$

$\therefore\ \dfrac{3}{2}+a<\dfrac{3}{2}$ …… ㉡

$\therefore g(1)<\dfrac{3}{2}$ ($\because$ ㉠, ㉡) (참)

ㄷ. $g(x)$의 최솟값이 $f\left(-\dfrac{2}{3}a\right)=\dfrac{4}{27}a^3+\dfrac{1}{2}=0$에서

$\dfrac{4}{27}a^3=-\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore a=-\dfrac{3}{2}$ …… ㉢

$g(2)=f(2)$

$=8+4a+\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{5}{2}$ ($\because$ ㉢) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

30) [정답] 38

[해설]

이차함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극대이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-1$에서 대칭이다.

그러므로

$f(-2)=f(0)=h(0)$

이때 $h(0)=k$라 하면 $f(x)$는

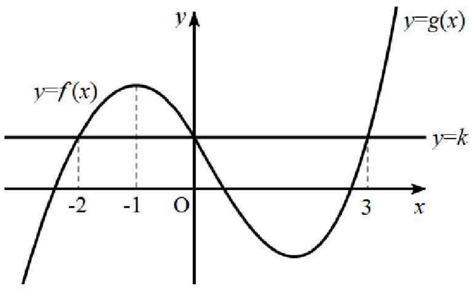
$$\begin{aligned}f(x)&=ax(x+2)+k\\&=ax^2+2ax+k\ (a<0)\end{aligned}$$

로 놓을 수 있다.

한편, $g(x)$가 삼차함수이므로 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $x=0$에서의 곡선 $y=g(x)$에 접하는 접선의 기울기는 음수이어야 한다.

또, 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근이 합이 1이어야 하므로 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우



$$\begin{aligned}g(x)&=px(x-3)(x-q)+k\\&=p\{x^3-(q+3)x^2+3qx\}+k\end{aligned}$$

한편, $g(x)$의 이차항의 계수가 0이므로 $q=-3$이고

$g(x)=p(x^3-9x)+k$

이때, $g'(x)=p(3x^2-9)$이므로 $g'(x)=0$에서

$x=\sqrt{3}$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

그러므로 함수 $h(x)$는 $x=\sqrt{3}$에서 극소이다.

한편, $x=0$에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기와 $x=0$에서의 곡선 $y=g(x)$의 접선의 기울기가 같아야 하고

$f'(x)=2ax+2a,\quad g'(x)=p(3x^2-9)$이므로

$2a=-9p$ ……㉠

또, 구간 $[-2,3]$에서 $h(x)$의 최댓값은 $f(-1)$, 최솟값은 $g(\sqrt{3})$이므로 ㉠을 이용하면

$$\begin{aligned}f(-1)-g(\sqrt{3})&=(-a+k)-(-6\sqrt{3}p+k)\\&=-a+6\sqrt{3}p\\&=\frac{9}{2}p+6\sqrt{3}p\\&=\frac{9+12\sqrt{3}}{2}p\\&=3+4\sqrt{3}\end{aligned}$$

그러므로

$p=\frac{2}{3}$이고

$a=-\frac{9}{2}p=-3$

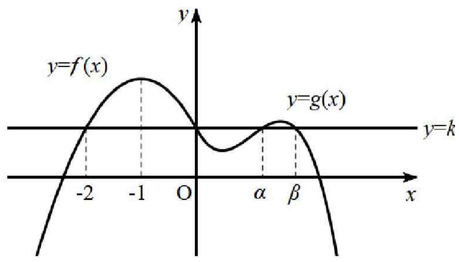
따라서

$f'(x)=-6x-6,\ g'(x)=2x^2-6$

이므로

$$\begin{aligned}h'(-3)+h'(4)&=f'(-3)+g'(4)\\&=12+26=38\end{aligned}$$

(ii) $g(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우



$g(x)=px(x-\alpha)(x-\beta)+k(\alpha+\beta=3)$

로 놓으면

$$\begin{aligned}g(x)&=p\{x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\}+k\\&=p\{x^3-3x^2+\alpha\beta x\}+k\end{aligned}$$

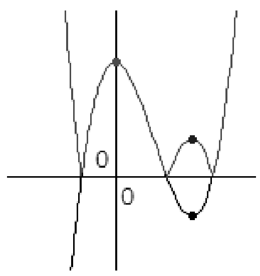
이므로 이차항의 계수가 0이 아니다.

그러므로 이러한 경우는 없다.

따라서 (i)에서 구하는 값은 38이다.

31) [정답] 14

[해설]



(가)를 만족하려면 그림과 같이

$f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

$f'(x)=3x^2-6px=3x(x-2p)$

$f(0)=q>0,\ f(2p)=-4p^3+q<0$

즉 $q<4p^3$

(나)를 만족하려면 각 구간에서 최댓값은 $f(0)=q$일 때이다.

한편 $f(-1)=-1-3p+q,\quad f(1)=1-3p+q$

$f(2)=8-12p+q,\quad f(-2)=-8-12p+q$

$-q\le f(-1)\le q,\ -q\le f(1)\le q$

$-q\le f(-2)\le q,\ -2\le f(2)\le q$

인데, $f(-2)\ge -q$이면 충분하다.

$-8-12p+q\ge -q$, 즉 $4+6p\le q$

두 조건으로부터 $4+6p\le q<4p^3$을 만족하는 25 이하의 자연수는

$p=2$일 때 $16\le q\le 25$--10개

$p=3$일 때 $22\le q\le 25$--4개

$\therefore 14$개

32) [정답] ②

[해설]

$x^3-3x^2-9x-k=0$에서 $y=x^3-3x^2-9x=k$

즉 $f(x)=x^3-3x^2-9x$, $g(x)=k$라 하자.

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)=0$$

$f'(x)=0$을 만족하는 x의 값은 $x=-1$, 3이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=5$, $x=3$에서 극솟값 $f(3)=-27$을 갖는다.

$g(x)=k$가 서로 다른 세 개의 실근을 갖기 위해서는 극솟값과 극댓값 사이에서 교점을 가져야하므로

$$-27<k<5$$

따라서 정수 k의 최댓값은 4

33) [정답] 12

[해설]

방정식 $x^3-x^2-8x+k=0$에서

$x^3-x^2-8x=-k$

$f(x)=x^3-x^2-8x$라 하면

$f'(x)=3x^2-2x-8$

$=(3x+4)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

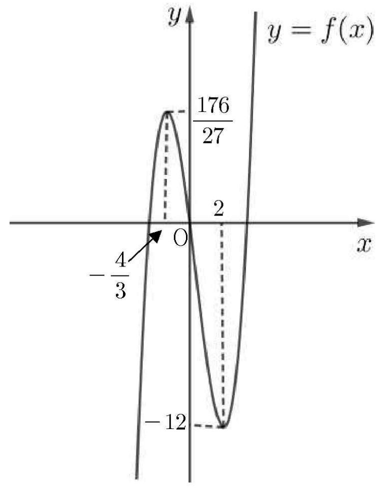
$x=-\frac{4}{3}$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$f\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{176}{27}$, $f(2)=-12$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $f(x)=-k$의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$-k=\frac{176}{27}$ 또는 $-k=-12$

즉, $k=-\frac{176}{27}$ 또는 $k=12$ 이다.

이때 k는 양수이므로

$k=12$

34) [정답] ③

[해설]

방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$,

즉 $2x^3-3x^2-12x=-k$ $\cdots\cdots$ ㉠

에서

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라 하자.

$f'(x)=6x^2-6x-12$

$=6(x+1)(x-2)$

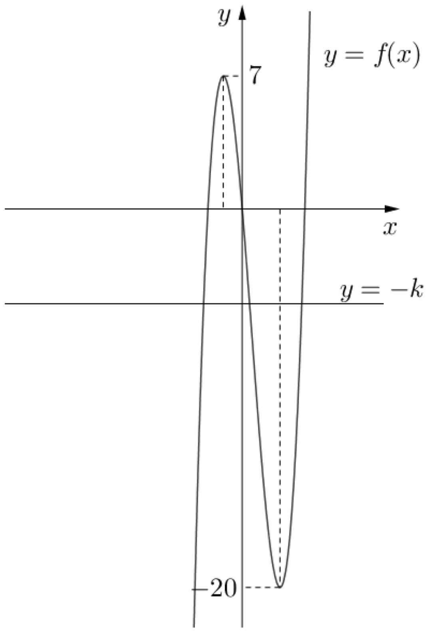
$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-20	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 7을 갖고, $x=2$에서 극솟값 -20을 갖는다.



방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-20<-k<7$

즉, $-7<k<20$이다.

따라서 정수 k의 값은

$-6,\ -5,\ -4,\ \cdots,\ 19$

이고, 그 개수는 26이다.

35) [정답] 21

[해설]

$y=x^3-3x^2+2x-3$과 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 $y=2x+k$은 $y=x^3-3x^2+2x-3$의 접선이 된다. 따라서 기울기가 2인 접선의 방정식을 통하여 $y=2x+k$을 구할 수 있다.

접점을 (t, t^3-3t^2+2t-3)이라고 하면 접선의 기울기는 $3t^2-6t+2$이다. 기울기는 $3t^2-6t+2=2$이므로 $t=0,2$이다. 따라서 접점은 $(0,\ -3)$, $(2,\ -3)$이다. 직선의 방정식은 다음과 같다.

$y=2x-3, y=2x-7$

따라서 k의 곱은 21이다.

36) [정답] 15

[해설]

곡선 $y=4x^3-12x+7$과 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 2개가 되는 경우는 $y=k$가 극점을 지나는 경우이다.

즉, k는 극댓값 또는 극솟값이어야 한다.

$y=4x^3-12x+7$에서 $y'=12x^2-12$

$$12x^2-12=0,\ 12(x+1)(x-1)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=-1$$

따라서 곡선 $y=4x^3-12x+7$에서 $x=1$일 때, 극솟값 $y=4-12+7=-1$을 갖고, $x=-1$일 때, 극댓값 $y=-4+12+7=15$을 갖는다.

그런데 조건에서 $k>0$이므로 $k=15$

37) [정답] 21

[해설]

함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)+|f(x)+x|-6x$라 하면

$$g(x)=\begin{cases}-7x & (f(x)<-x)\\ 2f(x)-5x & (f(x)\geq -x)\end{cases}$$

이고, 주어진 방정식은 $g(x)=k$와 같다.

$f(x)=-x$에서

$$\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x=-x,\ \frac{x}{2}(x^2-9x+22)=0$$

이때 모든 실수 x에 대하여

$x^2-9x+22=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$는 오직 원점 $(0,\ 0)$에서만 만난다.

따라서 함수 $h(x)$를 $h(x)=2f(x)-5x=x^3-9x^2+15x$라 하면

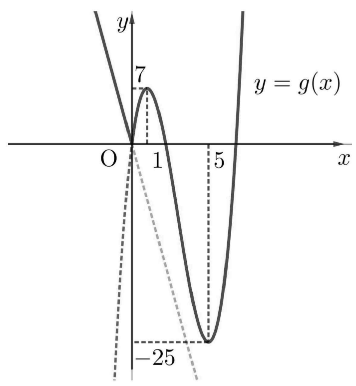
$g(x)=\begin{cases}-7x & (x<0)\\ h(x) & (x\geq 0)\end{cases}$이다.

$h'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$이므로 $h'(x)=0$에서

$$x=1 \text{ 또는 } x=5$$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $h(1)=1-9+15=7$을 갖고, $x=5$에서 극솟값 $h(5)=125-225+75=-25$를 갖는다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되기 위해서는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 4이어야 하므로 실수 k의 값의 범위는 $0<k<7$이다.

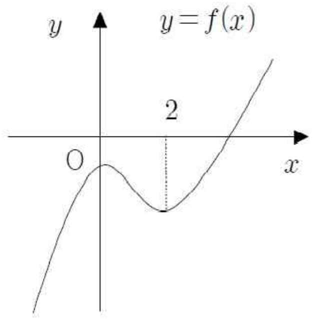
따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$$1+2+3+\cdots+6=\frac{6}{2}(1+6)=21$$

38) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $f(0)<0$이면 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

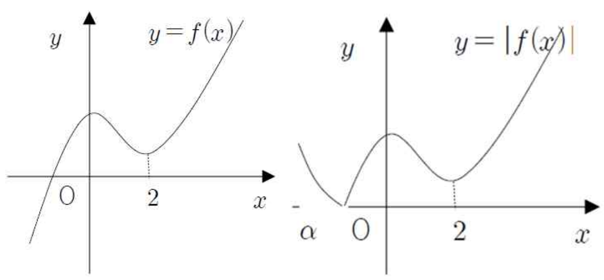


이 때, $f(2)<f(0)<0$ 이므로 $|f(0)|<|f(2)|$ <참>

ㄴ. $f(0)f(2)\geq 0$일 때 $f(0)>f(2)$이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형을 각 경우에 따라 그리면 다음과 같다.

(ⅰ) $f(0)>f(2)>0$ 일 때,

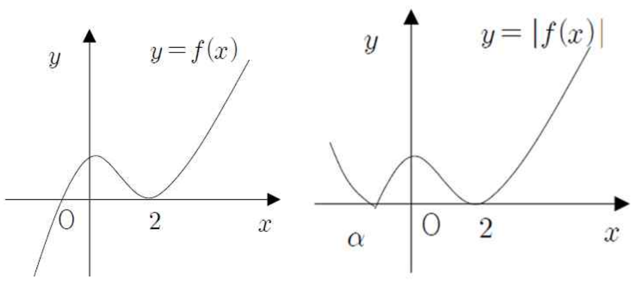
함수 $y=f(x)$와 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



그러므로 $|f(\alpha)|=0\ (\alpha\neq 2)$라 하면 a의 값은 α와 2로 2개이다.

(ⅱ) $f(0)>f(2)$ 이고, $f(2)=0$ 일 때,

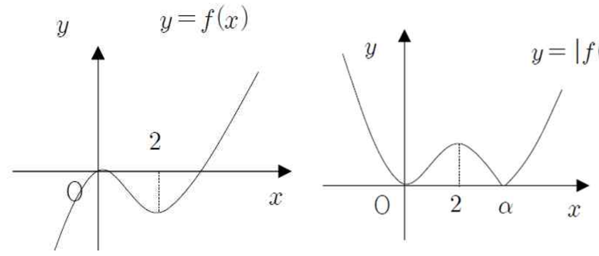
함수 $y=f(x)$와 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



그러므로 $|f(\alpha)|=0\ (\alpha\neq 2)$라 하면 a의 값은 α와 2로 2개이다.

(ⅲ) $f(0)=0$ 이고 $f(2)<0$ 일 때,

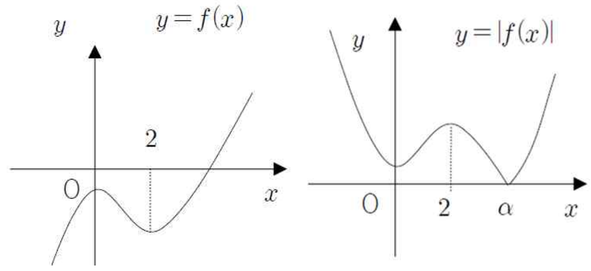
함수 $y=f(x)$와 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



그러므로 $|f(\alpha)|=0\ (\alpha\neq 2)$라 하면 a의 값은 0과 α로 2개이다.

(ⅳ) $f(2)<f(0)<0$ 일 때,

함수 $y=f(x)$와 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



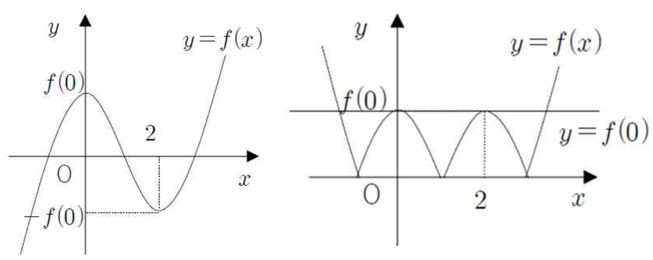
그러므로 $|f(\alpha)|=0$ 라 하면 a의 값은 0과 α로 2개이다.

따라서 (ⅰ),(ⅱ),(ⅲ),(ⅳ)에 의하여

극소인 a의 값의 개수는 2이다. <참>

ㄷ. $f(0)+f(2)=0$ 이므로 $f(2)=-f(0)$

함수 $y=f(x)$와 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=f(0)$과의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

위의 그림에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=f(0)$의 서로 다른 교점의 개수는 4개이므로 서로 다른 실근의 개수도 4개이다. <참>

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

39) [정답] **65**

[해설]

$f'(x)=3x^2-6x+6$ 이므로

$4(3x^2-6x+6)+12x-18=f'(g(x))$

$12x^2-12x+6=3\{g(x)\}^2-6g(x)+6$

$\{g(x)\}^2-2g(x)=4x^2-4x$

$\{g(x)\}^2-4x^2-2g(x)+4x=0$

$(g(x)-2x)(g(x)+2x)-2(g(x)-2x)=0$

$(g(x)-2x)(g(x)+2x-2)=0$

따라서,

$g(x)-2x=0$ 또는 $g(x)+2x-2=0$

(i) $g(x)-2x=0$일 때,

즉 $g(x)=2x$ 이면 $f(2x)=x$ 이므로

$8x^3-12x^2+12x+k=x$

$k=-8x^3+12x^2-11x$ …… ㉠

따라서, $h_1(x)=-8x^3+12x^2-11x$ 라 하면

$h_1{}'(x)=-24x^2+24x-11<0$

이므로 닫힌 구간 $[0,\ 1]$ 에서 $-7\le h_1(x)\le 0$

즉, 방정식 ㉠이 닫힌 구간 $[0,\ 1]$ 에서 실근이 존재하기

위해서는 $-7\le k\le 0$

(ii) $g(x)+2x-2=0$ 일 때,

즉 $g(x)=-2x+2$ 이면 $f(-2x+2)=x$ 이므로

$(-2x+2)^3-3(-2x+2)^2+6(-2x+2)+k=x$

$-8x^3+12x^2-13x+8+k=0$

$k=8x^3-12x^2+13x-8$ …… ㉡

따라서 $h_2(x)=8x^3-12x^2+13x-8$ 라 하면

$h_2{}'(x)=24x^2-24x+13>0$

이므로 닫힌 구간 $[0,\ 1]$ 에서

$-8\le h_2(x)\le 1$

즉, 방정식 ㉡이 닫힌 구간 $[0,\ 1]$ 에서 실근이 존재하기

위해서는 $-8\le k\le 1$

(i), (ii)에 의하여 $-8\le k\le 1$ 이므로 $m=-8,\ M=1$

따라서 $m^2+M^2=(-8)^2+1^2=65$

40) [정답] ③

[해설]

(가) 조건에 의해

$f(-1)=-1+a-b\ge 1$

$\therefore\ a>b$ …… ㉠

(나) 조건에 의해

$f(1)-f(-1)=1+a+b-(-1+a-b)$

$=2+2b>8$

$\therefore\ b>3$ …… ㉡

ㄱ. $f'(x)=3x^2+2ax+b$

㉠, ㉡에 의해

$a>b \Rightarrow a^2>ab>3b$ ($\because\ a>b>3$)

따라서

$D/4=a^2-3b>0$ (참)

ㄴ. $f'(-1)=3-2a+b=3-a+b-a$이고

$3-a<0,\ b-a<0$이므로

$\therefore\ f'(-1)<0$

$f'(1)=3+2a+b>0$

사잇값 정리에 의해 $f'(x)$는 $(-1,\ 0)$에서 근을 가진다.

$f'(\alpha)=0$이라 하면

x가 $(-1,\ \alpha)$에서 $f'(\alpha)<0$이다 (거짓)

ㄷ. $f(x)=f'(k)x$라 하면

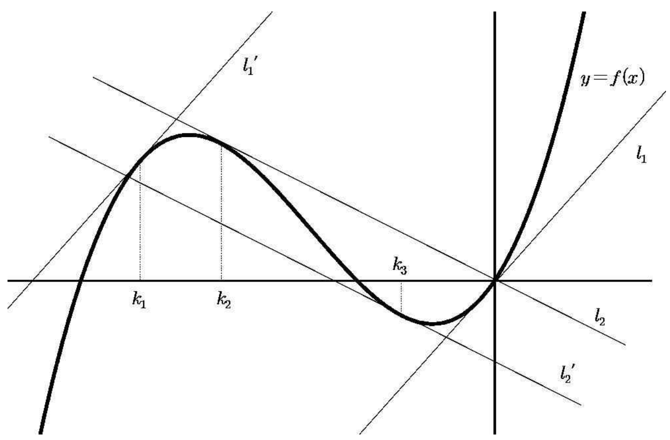
$f'(k)x$는 $(0,\ 0)$을 지나는 직선이다.

삼차함수 $f(x)$와 직선이 2개의 교점을 가지려면 직선은 $f(x)$의 접선이어야한다.

ㄱ에 의해 $f'(x)$는 두 근을 갖고

따라서

$(0,\ 0)$에서 $f(x)$에 그은 접선은 $l_1,\ l_2$ 두 개다.



i) l_1인 경우

$f'(k)=f'(0)$이므로

위 그림에서

$k=0,\ k_1$

ii) l_2인 경우

$(0,\ 0)$에서 $f(x)$에 그은 접선의 접점을 k_2라 할 때

$f'(k)=f'(k_2)$이므로

$k=k_2,\ k_3$

따라서 k의 개수는 4개다.

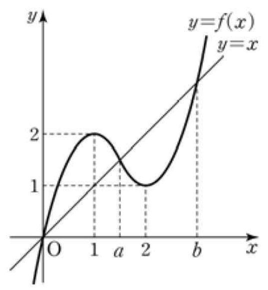
41) [정답] **40**

[해설]

$(f\circ f)(x)=x$을 만족하기 위해서는

(i) 모든 x에 대하여 $f(x)=x$일 때
$f(1)=1,\ f(2)=2$가 되면 $f(x)$는 증가함수가 되어
$f'(1)<0,\ f'(2)<0$인 조건에 만족하지 않는다.

(ii) $f(p)=q,\ f(q)=p$일 때,



실근이 $0,\ 1,\ a,\ 2,\ b$이고 $f'(1)<0,\ f'(2)<0$이므로
위의 그래프와 같이 1, 2가 $y=x$ 대칭이어야 한다.
따라서 $f(1)=2,\ f(2)=1$
또, $f(0)=0,\ f'(0)-f'(1)=6$이므로
$f(x)=px^3+qx^2+rx+s$라 하면 $f'(x)=3px^2+2qx^2+r$이고

$$f(1)=p+q+r+s=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$f(2)=8p+4q+2r+s=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$$f(0)=s=0 \quad \cdots\cdots ㉢$$

$$f'(0)-f'(1)=r-3p-2q-r=6 \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉠, ㉡, ㉢, ㉣를 연립하면 $p=1,\ q=-\dfrac{9}{2},\ r=\dfrac{11}{2},\ s=0$

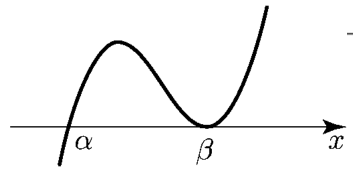
$$\therefore f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{11}{2}x$$

$$\therefore f(5)=40$$

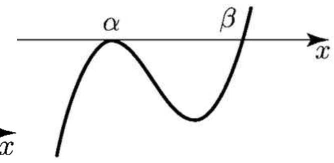
42) [정답] **61**

[해설]

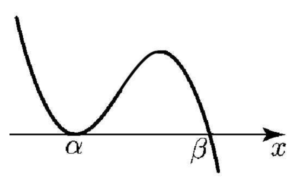
(가)조건을 만족하는 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같이 4가지 경우가 있다.



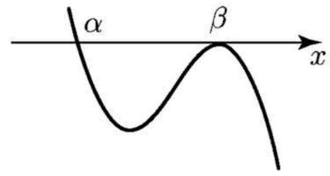
[그림1]



[그림2]



[그림3]



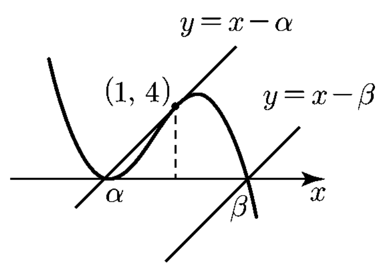
[그림4]

그런데, (나)조건 $f(x-f(x))=0$에서

$$x-f(x)=\alpha \text{ 또는 } x-f(x)=\beta$$

즉, $f(x)=x-\alpha$ 또는 $f(x)=x-\beta$이므로 직선 $y=x-\alpha,\ y=x-\beta$를 그렸을 때 교점이 3개인 경우는 [그림3], [그림4]이다.

그런데, $f(1)=4,\ f'(1)=1$를 만족해야 하므로 [그림4]는 모순이다.



[그림3]

즉 [그림3]에서 $(1,\ 4)$에서 접하므로

$f(x)-(x-\alpha)=a(x-1)^2(x-\alpha)$라 놓을 수 있다.

그리고 $f(1)=4$이므로 $1-\alpha=4,\ \alpha=-3$

따라서 $f(x)-(x+3)=a(x-1)^2(x+3)$

또, $\alpha=-3$에서 $f(x)$가 접하므로 $f(x)$는 $(x+3)^2$의 인수를 가져야 한다.

㉠을 정리하면 $f(x)=(x+3)\{a(x-1)^2+1\}$

그런데, $a(x-1)^2+1$이 $x+3$의 인수를 가져야 하므로

$$a(-3-1)^2+1=0$$

$\therefore 16a+1=0,\ a=-\frac{1}{16}$

$$f(x)=(x+3)\left\{-\frac{1}{16}(x-1)^2+1\right\}$$
$$=(x+3)\left\{-\frac{1}{16}(x^2-2x+1)+1\right\}$$
$$=(x+3)\left\{-\frac{1}{16}(x^2-2x+1-16)\right\}$$
$$=(x+3)^2\left\{-\frac{1}{16}(x-5)\right\}$$

$\therefore f(0)=9\times\frac{5}{16}=\frac{45}{16}$

따라서 $p=16,\ q=45$이므로 $p+q=16+45=61$

43) [정답] ⑤

[해설]

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^3-x^2-x+6-a$

이때 $x\ge0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)\ge0$이 성립하려면 $x\ge0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 0 이상이어야 한다.

$h'(x)=3x^2-2x-1$

$=(3x+1)(x-1)$

이므로 $h'(x)=0$ 에서

$x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

$x\ge0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$6-a$	↘	$5-a$	↗

즉, $x\ge0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 $5-a$이므로 주어진 조건을 만족시키려면 $5-a\ge0$이어야 한다.

따라서 $a\le5$이므로 구하는 실수 a의 최댓값은 5이다.

44) [정답] ⑤

[해설]

조건 (가)에서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수)로 놓을 수 있다.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (나)에서 $f(0)=f'(0)$이므로 $c=b$

즉, $f(x)=x^3+ax^2+bx+b$이므로

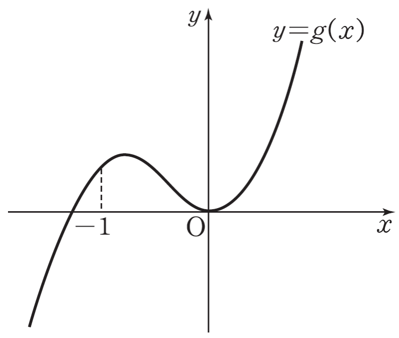
$g(x)=f(x)-f'(x)$라 하면

$g(x)=(x^3+ax^2+bx+b)-(3x^2+2ax+b)$

$=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$

$g'(x)=3x^2+2(a-3)x+b-2a$

$g(0)=0$이고, 조건 (다)에서 $x\ge-1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge0$이므로



그림과 같이 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 $g'(0)=0$이므로

$b-2a=0,\ b=2a$

$g(x)=x^3+(a-3)x^2$

$=x^2(x+a-3)$

$g(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3-a$

$x\ge-1$에서 $g(x)\ge0$이므로 $3-a\le-1$, 즉 $a\ge4$이어야 한다.

$f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$에서

$f(2)=8+4a+4a+2a=10a+8$이고 $a\ge4$이므로

$f(2)=10a+8\ge10\times4+8=48$

따라서 $f(2)$의 최솟값은 48이다.

45) [정답] 5

[해설]

조건 (가)에서

곡선 $y=g(x)$위의점 $(2,\ 0)$에서의 접선이 x축이고 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 -1인 이차함수이므로

$g(x)=-(x-2)^2$

이다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $x<0$인 범위에서 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$는 반드시 한 점에서 만난다.

조건 (다)에서 방정식 $f(x)=g(x)$는 오직 하나의 실근을 가지므로 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$는 $x<0$에서 만나는 점을 제외한 점에서는 만나지 않아야 한다.

또, 조건 (가)에서

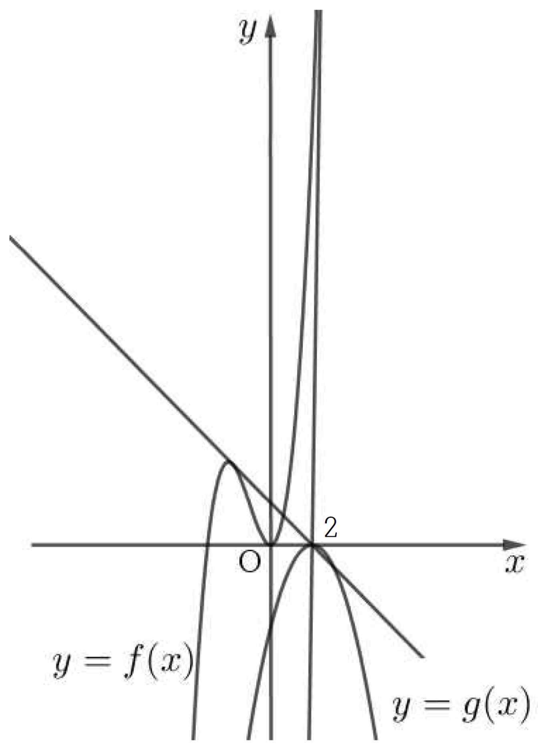
곡선 $y=f(x)$위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선이 x축이므로 곡선

$y=f(x)$는 x축과 접해야 한다.

그러므로 함수 $y=f(x)$가 극값을 갖는 경우와 극값을 갖지 않는 경우로 나눈 후 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수를 조사하면 다음과 같다.

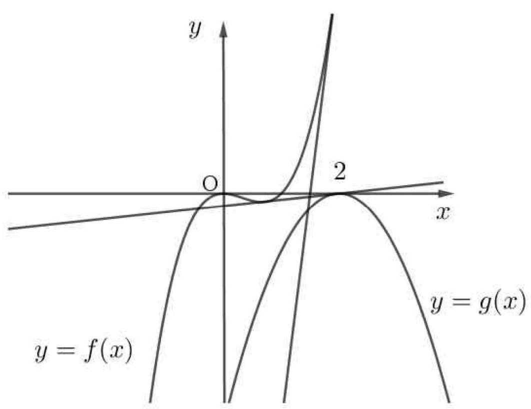
(ⅰ)함수 $f(x)$가 극값을 갖는 경우

함수 $y=f(x)$가 $x=0$에서 극솟값을 가질 때, 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 다음 그림과 같이 x축을 포함하여 3개다.

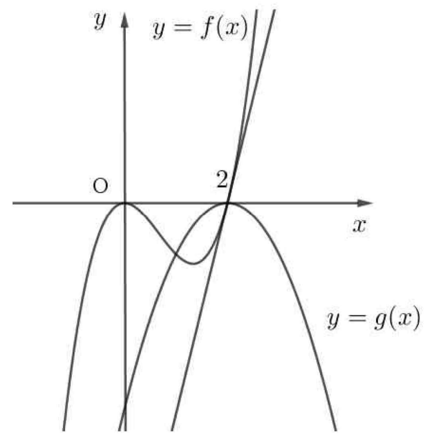


한편, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가질 때 다음과 같이 세 가지로 나누어 생각할 수 있다.

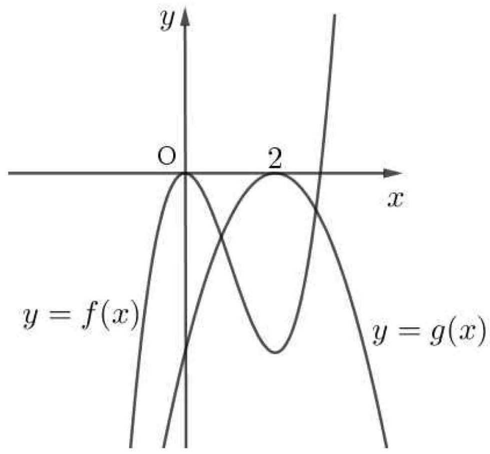
$f(2)>0$이면 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 다음 그림과 같이 x축을 포함하여 3개다.



$f(2)=0$이면 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 다음 그림과 같이 x축 포함하여 2개다. 하지만 이때는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 서로 다른 세 점에서 만난다.

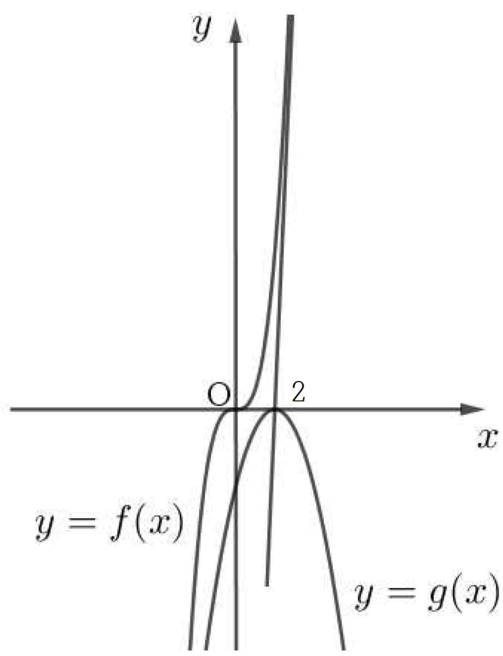


$f(2)<0$이면 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선은 x축 뿐이다. 즉, 접선의 개수는 다음 그림과 같이 1개다.



(ⅱ)함수 $y=f(x)$가 극값을 갖지 않는 경우

함수 $f(x)=x^3$이고 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 그림과 같이 x축 포함하여 2개다.



(ⅰ), (ⅱ)에서

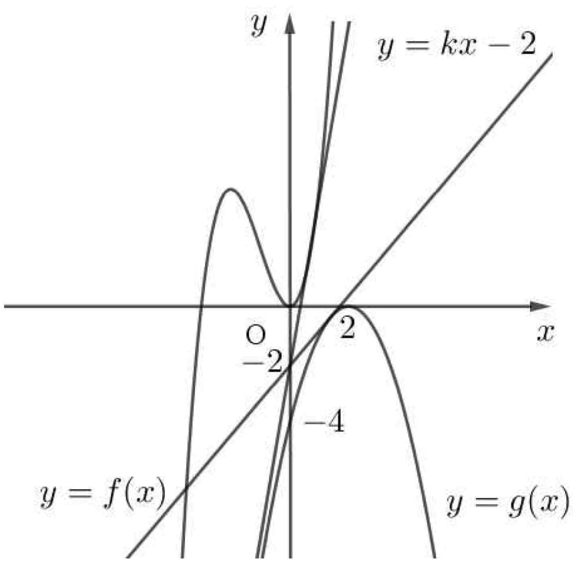
$f(x)=x^3$

이다. 한편 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x) \le kx-2 \le f(x)$

이므로 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=kx-2$가 만나거나 아래쪽에 있어야 하고 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=kx-2$와 만나거나 위쪽에 있어야 한다.

한편, 직선 $y=kx-2$는 점 $(0,\ -2)$를 지나는 직선이고 k는 이 직선의 기울기이므로 k가 최소가 되는 직선과 최대가 되는 직선은 다음 그림과 같이 접선이다.



점 $(0,\ -2)$를 지나고 곡선 $y=f(x)$와의 접점을 $(p,\ p^3)$이라 하면 $f'(x)=3x^2$이므로 접선의 방정식은

$y=3p^2(x-p)+p^3$

이다. 이 접선이 $(0,\ -2)$를 지나므로 대입하면

$-2=3p^2(-p)+p^3$

$p=1$

그러므로 $\alpha=3$

또, 점 $(0,\ -2)$를 지나고 곡선 $y=g(x)$의 접점을 $(q,\ -(q-2)^2)$이라 하면 $g'(x)=-2(x-2)$이므로 접선의 방정식은

$y=-2(q-2)(x-q)-(q-2)^2$

이다. 이 접선이 $(0,\ -2)$를 지나므로 대입하면

$-2=-2(q-2)(-q)-(q-2)^2$

$-2=-2q^2-4q-q^2+4q-4$

$q^2=2$

$q>0$이므로

$q=\sqrt{2}$

그러므로

$\beta=-2(\sqrt{2}-2)=4-2\sqrt{2}$

이다. 이때,

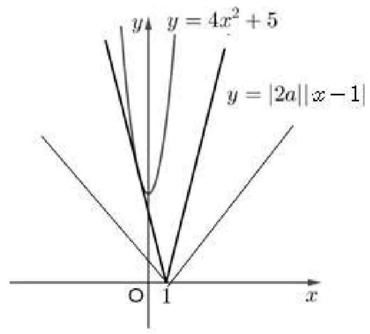
$\alpha-\beta=3-(4-2\sqrt{2})$
$=-1+2\sqrt{2}$

따라서 $a=-1,\ b=2$이므로

$a^2+b^2=(-1)^2+2^2=5$

46) [정답] ②

[해설]
주어진 조건에 의하여
$f(x)=a(x-1)^2+b$(b는 상수)로 놓으면
$f'(x)=2a(x-1)$이므로
$|f'(x)| \le 4x^2+5$에서
$|2a(x-1)| \le 4x^2+5$ ……㉠
즉, ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 두 곡선
$y=|2a(x-1)|=|2a||x-1|,\ y=4x^2+5$
가 그림과 같아야 한다.



즉, 실수 a의 최댓값은 점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=4x^2+5$에 그은 접선이 $y=-|2a|(x-1)$일 때이므로 접점을 $(k,\ 4k^2+5)(k<0)$이라 하면
$y'=8x$에서 $y-(4k^2+5)=8k(x-k)$이 접선이
점 $(1,\ 0)$을 지나므로
$4k^2-8k-5=0$
$(2k-5)(2k+1)=0$
$k=-\frac{1}{2}$
즉, 접선의 기울기는
$8\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$ 이므로
$-|2a|=-4,\ |a|=2$
$a=-2$ 또는 $a=2$
따라서 실수 a의 최댓값은 2이다.

47) [정답] 8

[해설]

점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=t^3-5t^2+6t$

이므로 시각 t에서의 속도를 v라 하면 $v=3t^2-10t+6$

또, 시각 t에서의 가속도를 a라 하면 $a=6t-10$

따라서, $t=3$에서의 가속도는 $6\times3-10=8$

48) [정답] ②

[해설]

속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=\dfrac{dx}{dt}=-2t+4$

$v(a)=-2a+4=0$

이므로

$a=2$

49) [정답] **22**

[해설]

점 P의 시각 t $(t\ge0)$에서의 위치 x가

$x=-\dfrac{1}{3}t^3+3t^2+k$

이므로 점 P의 시각 t $(t\ge0)$에서의 속도 v는

$v=-t^2+6t$

이고, 점 P의 시각 t $(t\ge0)$에서의 가속도 a는

$a=-2t+6$

점 P의 가속도가 0이므로

$-2t+6=0$에서

$t=3$

$t=3$일 때, 점 P의 위치가 40이므로

$-\dfrac{1}{3}\times3^3+3\times3^2+k=40$

따라서 $k=22$

50) [정답] ④

[해설]

점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v=0$에서

$t=2\,(\because t>0)$

점 P의 운동 방향이 원점에서 바뀌므로 $t=2$일 때 점 P의 위치는 0이다.

따라서 $0=2^3-12\times2+k$이므로

$k=16$

51) [정답] ①

[해설]

속도를 $v(t)$라 하고 가속도를 $a(t)$라고 하면

$v(x)=3t^2+2at+b$ 이고, $a(t)=6t+2a$ 이다.

$t=2$에서 점 P의 가속도는 0이므로

$a(2)=12+2a=0$, $a=-6$이다.

$v(x)=3t^2+12t+b$이고 $t=1$에서

점 P가 운동 방향을 바꾸므로

$v(1)=3-12+b=0$, $b=9$이다.

따라서 $a+b=3$