[수학2] [미분] 평가원 최근 10개년 PART1

04 수2 03 미분계수와 도함수

01 미분계수

01 미분계수1 (평균변화율)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 30

1. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) 5 이하의 모든 자연수 n에 대하여
$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(n)f(n+1)$이다.

(나) $n=3,\ 4$일 때, $f(x)$에서 x의 값이 n에서 $n+2$까지 변할 때의 평균변화율은 양수가 아니다.

$128 \times f\left(\frac{5}{2}\right)$의 값을 구하시오.

04 수2 03 미분계수와 도함수

01 미분계수

02 미분계수2 (평균변화율과 미분계수)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 26

2. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율이 $f'(2)$의 값과 같게 되도록 하는 양수 a의 값을 구하시오.

04 수2 03 미분계수와 도함수

02 도함수의 정의와 미분법 공식

02 미분법 공식1 (공식과 미분계수)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 23

3. 함수 $f(x)=5x^2+3x-1$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 09월 23

4. 함수 $f(x)=7x^3-ax+3$ 에 대하여 $f'(1)=2$ 를 만족시키는 상수 a 의 값을 구하시오.

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 06월

5. 함수 $f(x)=x^2+x+3$ 에 대하여 $f'(10)$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 09월 23

6. 함수 $f(x)=x^2-2x-12$ 에 대하여 $f'(5)$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 11월

7. 함수 $f(x)=x^3+7x+3$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 06월 23

8. 함수 $f(x)=x^3+10x$에 대하여 $f'(0)$의 값을 구하시오.

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 06월 23

9. 함수 $f(x)=x^3-2x-2$에 대하여 $f'(3)$의 값을 구하시오.

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 11월 23

10. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+3$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오.

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 11월 26

11. 곡선 $y=x^3-ax+b$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이다. 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 09월 23

12. 함수 $f(x)=3x^2-2x$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 06월 23

13. 함수 $f(x)=5x^5+3x^3+x$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 11월 23

14. 함수 $f(x)=2x^3+x+1$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 23

15. 함수 $f(x)=x^3-2x^2+4$ 에 대하여 $f'(3)$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 23

16. 함수 $f(x)=x^3+5x^2+1$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 23

17. 함수 $f(x)=x^4-3x^2+8$ 에 대하여 $f'(2)$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 6

18. 함수 $f(x)=x^4+3x-2$에 대하여 $f'(2)$의 값은?

① 35 ② 37 ③ 39

④ 41 ⑤ 43

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 2

19. 함수 $f(x)=x^3+7x+1$에 대하여 $f'(0)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 2

20. 함수 $f(x)=x^3-2x-7$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 2

21. 함수 $f(x)=2x^3+4x+5$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 2

22. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 19

23. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 $f'(a)$의 값이 같게 되도록 하는 $0<a<4$인 모든 실수 a의 값의 곱은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

04 수2 03 미분계수와 도함수

02 도함수의 정의와 미분법 공식

03 미분법 공식2 (극한식의 해석)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 6

24. 함수 $f(x)=x^3-x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{2h}$의 값은?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3

④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 11월 5

25. 함수 $f(x)=2x^2+ax$ 에 대하여

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=6$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0

④ 2 ⑤ 4

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 06월

26. 함수 $f(x)=x^2+4x$ 에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{2h}$ 의

값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 06월 11

27. 함수 $f(x)=x^2+8x$ 에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{h}$ 의

값은?

① 16 ② 17 ③ 18

④ 19 ⑤ 20

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 2

28. 함수 $f(x)=x^3+9$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ 의

값은?

① 11 ② 12 ③ 13

④ 14 ⑤ 15

04 수2 03 미분계수와 도함수

02 도함수의 정의와 미분법 공식

07 미분법 공식6 (적절한 수치대입)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 26

29. 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 2이다. $g(x)=x^3f(x)$일 때, $g'(2)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 17

30. 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=2$, $f'(1)=4$를 만족시킬 때, 함수 $g(x)=(x+1)f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하시오.

04 수2 03 미분계수와 도함수

03 미분법 공식의 활용

01 활용1 (함수 구하기, 인수정리)

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 06월 30

31. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 α가 존재한다.
>
> (나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 11

32. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

방정식 $f(x)=9$는 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근은 크기 순서대로 등비수열을 이룬다.

$f(0)=1$, $f'(2)=-2$일 때, $f(3)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

04 수2 03 미분계수와 도함수

03 미분법 공식의 활용

08 활용8 (부등식의 해석)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 예비 18

33. $x>0$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하고
$2x \le f(x) \le 3x$이다. $f(1)=2$이고 $f(2)=6$일 때,
$f'(1)+f'(2)$의 값은?

① 8 ② 7 ③ 6
④ 5 ⑤ 4

04 수2 03 미분계수와 도함수

04 미분가능성과 연속성

04 미분가능조건1 (구간정의함수)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 09월 25

34. 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & (x<1) \\ x^4+a & (x\ge 1) \end{cases}$$

이 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 06월 16

35. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & (x\le -2) \\ 2x & (x>-2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 10

36. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax+b & (x<1) \\ bx+4 & (x\ge 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

04 수2 03 미분계수와 도함수

04 미분가능성과 연속성

06 미분가능조건3 (곱함수)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 20

37. 함수

$$f(x)=\begin{cases}-x & (x \le 0)\\ x-1 & (0 < x \le 2)\\ 2x-3 & (x > 2)\end{cases}$$

와 상수가 아닌 다항식 $p(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $p(0)=0$이다.

ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(2)=0$이다.

ㄷ. 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어진다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

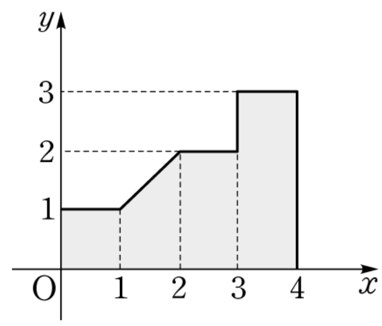
04 수2 03 미분계수와 도함수

04 미분가능성과 연속성

07 미분가능조건4 (정의된 함수)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 예비 21

38. 좌표평면 위에 그림과 같이 어두운 부분을 내부로 하는 도형이 있다. 이 도형과 네 점 $(0,\ 0)$, $(t,\ 0)$, $(t,\ t)$, $(0,\ t)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형이 겹치는 부분의 넓이를 $f(t)$라 하자.



열린구간 $(0,\ 4)$에서 함수 $f(t)$가 미분가능하지 않은 모든 t의 값의 합은?

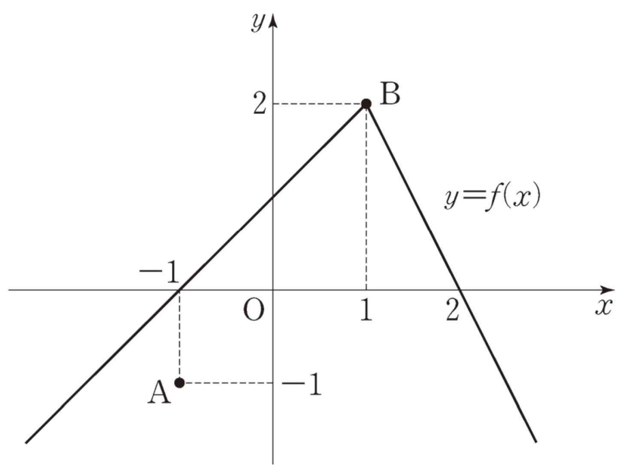
① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 06월 29

39. 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<1) \\ -2x+4 & (x \ge 1) \end{cases}$$

이고, 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$, $\mathrm{B}(1,\ 2)$가 있다. 실수 x에 대하여 점 $(x,\ f(x))$에서 점 A까지의 거리의 제곱과 점 B까지의 거리의 제곱 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합이 p일 때, $80p$의 값을 구하시오.



04 수2 04 접선의 방정식

01 접선의 방정식

01 접점1 (접선의 방정식)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 06월

40. 곡선 $y=-x^3+2x$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선이 점 $(-10,\ a)$를 지날 때, a의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 24

41. 곡선 $y=x^3-6x^2+6$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선이 점 $(0,\ a)$를 지날 때, a의 값을 구하시오.

04 수2 04 접선의 방정식

01 접선의 방정식

02 접점2 (법선의 방정식)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 9

42. 곡선 $y=x^3-3x^2+2x+2$위의 점 A$(0,\ 2)$에서 접선과 수직이고 점 A를 지나는 직선의 x절편은?

① 4 ② 6 ③ 8

④ 10 ⑤ 12

04 수2 04 접선의 방정식

01 접선의 방정식

03 접점3 (해석)

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 11월

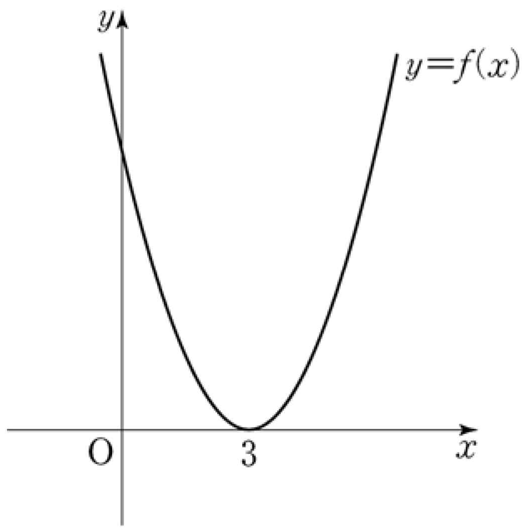
43. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)=x^3f(x)-7$
(나) $\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-2}=2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, a, b는 상수이다.)

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 06월

44. 함수 $f(x)$ 가 $f(x)=(x-3)^2$ 이다.



함수 $g(x)$ 의 도함수가 $f(x)$ 이고 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$ 에서의 접선의 y 절편이 -5 일 때, 이 접선의 x 절편은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

04 수2　04 접선의 방정식

01 접선의 방정식

04 기울기1 (접선의 방정식)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 17

45. 곡선 $y=x^3-3x^2+x+1$ 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하다. 점 A의 x좌표가 3일 때, 점 B에서의 접선의 y절편의 값은?

① 5　② 6　③ 7
④ 8　⑤ 9

04 수2

04 접선의 방정식

01 접선의 방정식

06 기울기3 (길이 또는 넓이의 Mm)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 09월

46. 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}$ $(x>0)$ 위를 움직이는 점 P와 직선 $x-y-10=0$ 사이의 거리를 최소가 되게 하는 곡선 위의 점 P의 좌표를 (a, b)라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

04 수2

04 접선의 방정식

01 접선의 방정식

08 곡선 밖의 점2 (접점의 좌표)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 9

47. 원점을 지나고 곡선 $y=-x^3-x^2+x$에 접하는 모든 직선의 기울기의 합은?

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$

④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

04 수2 04 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

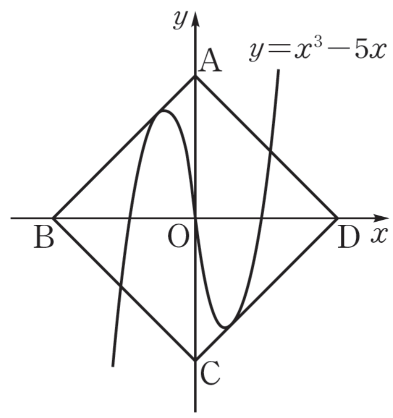
01 활용1 (접선과 교점의 관계)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 09월 27

48. 곡선 $y=x^3+2x+7$ 위의 점 $\mathrm{P}(-1,\ 4)$에서의 접선이 점 P가 아닌 점 $(a,\ b)$에서 곡선과 만난다. $a+b$의 값을 구하시오.

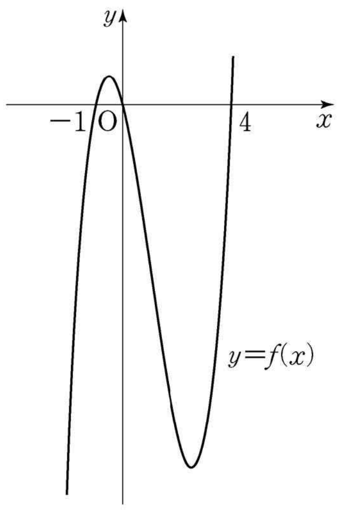
[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 예비 30

49. 그림과 같이 정사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A, C는 y축 위에 있고, 두 꼭짓점 B, D는 x축 위에 있다. 변 AB와 변 CD가 각각 삼차함수 $y=x^3-5x$의 그래프에 접할 때, 정사각형 ABCD의 둘레의 길이를 구하시오.



[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 11월 14

50. 함수 $f(x)=x(x+1)(x-4)$에 대하여 직선 $y=5x+k$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 양수 k의 값은?



① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6

④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

04 수2 04 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

05 활용5 (함수 구하기)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 09월

51. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

(가) $f(0)=-3$
(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $6x-6\le f(x)\le 2x^3-2$이다.

① 36 ② 38 ③ 40

④ 42 ⑤ 44

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 30

52. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선과 점 $(2, f(2))$에서의 접선이 점 $(k, 0)$에서 만난다.
$f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하시오.
(단, k는 상수이다.)

04 수2 04 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

06 활용6 (정의된 함수)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 11월 21

53. 좌표평면에서 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 P라 할 때, 원점에서 점 P까지의 거리를 $g(t)$라 하자. 함수 $f(x)$와 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=2$
> (나) 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 21 ② 24 ③ 27
④ 30 ⑤ 33

04 수2 04 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

07 활용7 (추론과 이해)

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 11월 29

54. 두 실수 a와 k에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x \le a)\\ (x-1)^2(2x+1) & (x > a)\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}0 & (x \le k)\\ 12(x-k) & (x > k)\end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge g(x)$이다.

k의 최솟값이 $\frac{q}{p}$일 때, $a+p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

04 수2 04 접선의 방정식

03 평균값의 정리

04 평균값의 정리3 (부등식의 해석)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 8

55. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최솟값은?

> (가) $f(1)=3$
>
> (나) $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \ge 5$이다.

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

[수학2] [미분] 평가원 최근 10개년 PART1(빠른 정답)

년도별경향 2022.12.20

1. [정답] 65
2. [정답] 3
3. [정답] 13
4. [정답] 19
5. [정답] 21

6. [정답] 8
7.[정답] ④
8. [정답] 10
9. [정답] 25
10. [정답] 24

11. [정답] 2
12. [정답] 4
13. [정답] 35
14. [정답] 7
15. [정답] 15

16. [정답] 13
17. [정답] 20
18. [정답] ①
19. [정답] ④
20. [정답] ①

21. [정답] ⑤
22. [정답] ⑤
23. [정답] 11
24. [정답] ③
25. [정답] ④

26. [정답] ③
27. [정답] ⑤
28. [정답] ②
29. [정답] 28
30. [정답] 10

31. [정답] 243
32. [정답] ②
33. [정답] ④
34. [정답] 2
35. [정답] ⑤

36. [정답] ④
37. [정답] ②
38. [정답] ③
39. [정답] 186
40. [정답] 12

41. [정답] 10
42. [정답] ①
43. [정답] 97
44. [정답] ⑤
45. [정답] ②

46. [정답] 5
47. [정답] ②
48. [정답] 21
49. [정답] 32
50. [정답] ①

51. [정답] ①
52. [정답] 42
53. [정답] ④
54. [정답] 32
55. [정답] ③

[수학2] [미분] 평가원 최근 10개년 PART1(해설)

년도별경향 2022.12.20

1) [정답] 65

[해설]

조건 (가)에 의해

$f(1)+\cdots+f(n-1)+f(n)=f(n)f(n+1)$ $\cdots$ ①

$f(1)+\cdots+f(n-1)=f(n-1)f(n)$ $\cdots$ ②

①−②를 하면

$f(n)=f(n)\{f(n+1)-f(n-1)\}$이다.

따라서 $f(n)=0$ 또는 $f(n+1)-f(n-1)=1$ $\cdots(*)$이어야 한다.

조건 (나)에 의해

$n=3$일 때 $\dfrac{f(5)-f(3)}{5-3}\le 0$에서 $f(5)\le f(3)$

$n=4$일 때 $\dfrac{f(6)-f(4)}{6-4}\le 0$에서 $f(6)\le f(4)$

이므로 $(*)$에 의해 $f(4)=0,\ f(5)=0$이 된다.

조건 (가)에 $n=1,\ 2,\ 3$을 각각 대입하여 정리하면

$n=1$일 때 $f(1)=f(1)f(2)$

$n=2$일 때 $f(1)+f(2)=f(2)f(3)$

$n=3$일 때 $f(1)+f(2)+f(3)=0$ $(\because\ f(4)=0)$

(ⅰ) $f(3)=0$인 경우

$f(1)+f(2)=0$에서 $f(1)=-\{f(1)\}^2$이므로

$f(1)=0$ 또는 $f(1)=-1$이다.

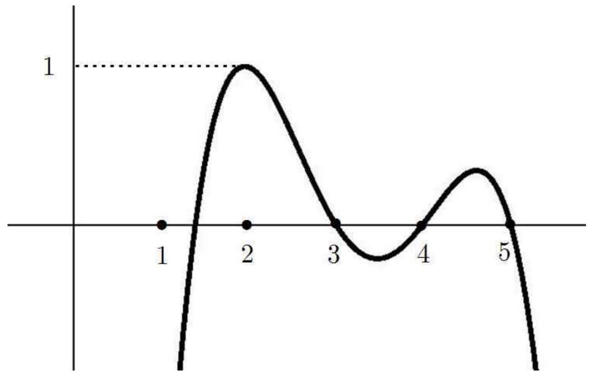
$f(1)=0$이면 $f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=0$이 되어

사차함수라는 조건에 위배된다.

따라서 $f(1)=-1,\ f(2)=1,\ f(3)=f(4)=f(5)=0\cdots$ ③

이 성립한다.

그래프를 그려보면 사잇값 정리에 의해 (1, 2)에서 근을 갖고 $f(6)-f(4)\le 0$을 만족한다.



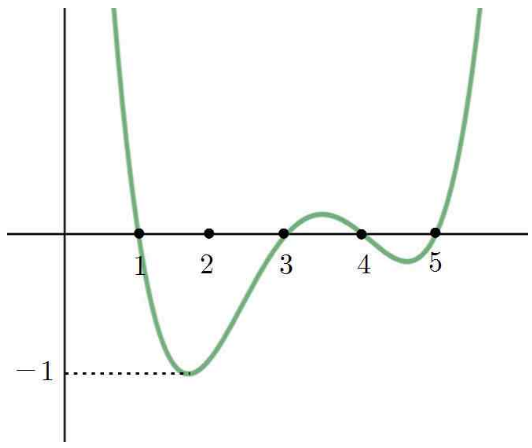
(ⅱ) $f(3)\ne 0$인 경우

$f(1)+f(2)=-f(2)\{f(1)+f(2)\}$에서 $f(2)=-1$이므로

$f(1)=0$이 된다.

따라서 $f(1)=0,\ f(2)=-1,\ f(3)=1,\ f(4)=f(5)=0$이 성립한다.

그래프를 그려보면 $f(6)-f(4)\le 0$을 만족하지 않는다.



(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $f(x)=(ax+b)(x-3)(x-4)(x-5)$이 된다.

③을 대입하면

$f(1)=-24(a+b)=-1,\ f(2)=-6(2a+b)=1$에서

$a=-\dfrac{5}{24},\ b=\dfrac{6}{24}$을 얻는다.

$\therefore\ f(x)=-\dfrac{1}{24}(5x-6)(x-3)(x-4)(x-5)$

$128\times f\left(\dfrac{5}{2}\right)=2^7\times\left(-\dfrac{1}{24}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right)\left(-\dfrac{5}{2}\right)\left(\dfrac{25}{2}-6\right)=65$

2) [정답] 3

[해설]

함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}=\dfrac{a^3-3a^2+5a}{a}$

$=a^2-3a+5$

또 $f'(x)=3x^2-6x+5$이므로

$f'(2)=12-12+5=5$

따라서 $a^2-3a+5=5$에서

$a(a-3)=0$

$a=0$ 또는 $a=3$

$a>0$이므로 $a=3$

3) [정답] **13**

[해설]

$f'(x)=10x+3$이므로 $f'(1)=13$이다.

4) [정답] **19**

[해설]

$f'(x)=21x^3-a,\ f'(1)=21-a=2$

$\therefore\ a=19$

5) [정답] **21**

[해설]

$f'(x)=2x+1$이므로 $f'(10)=21$

6) [정답] **8**

[해설]

$f'(x)=2x-2$이므로 $f'(5)=8$

7)[정답] ④

[해설]

$f(x)=x^3+7x+3$에서 $f'(x)=3x^2+7$이므로

$f'(1)=3\times1^2+7=10$

8) [정답] **10**

[해설]

$f(x)-x^3+10x$에서

$f'(x)=3x^2+10$

이므로 $f'(0)=10$

9) [정답] **25**

[해설]

$f(x)=x^3-2x-2$ 이므로

$f'(x)=3x^2-2$

따라서 $f'(3)=3\times3^2-2=25$

10) [정답] **24**

[해설]

$f(x)=x^3+3x^2+3$에서

$f'(x)=3x^2+6x$

이므로

$f'(2)=12+12=24$

11) [정답] 2

[해설]

$y=x^3-ax+b$에서 $y'=3x^2-a$이므로

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $3-a$이다.

이때 이 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로

$(3-a)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

$3-a=2,\ a=1$

또한 점 $(1,\ 1)$은 곡선 $y=x^3-x+b$ 위의 점이므로

$1=1^3-1+b,\ b=1$

따라서 $a+b=1+1=2$

12) [정답] **4**

[해설]

$f(x)=3x^2-2x$ 에서 $f'(x)=6x-2$

따라서 $f'(1)=6\times1-2=4$

13) [정답] **35**

[해설]

$f(x)=5x^5+3x^3+x$에서

$f'(x)=25x^4+9x^2+1$

따라서 $f'(1)=25+9+1=35$

14) [정답] 7

[해설]

$f(x)=2x^3+x+1$에서

$f'(x)=6x^2+1$이므로

$f'(1)=6\times1^2+1=7$

15) [정답] 15

[해설]

$f(x)=x^3-2x^2+4$ 이므로 $f'(x)=3x^2-4x$ 이다

따라서 $f'(3)=15$

16) [정답] **13**

[해설]

$f(x)=x^3+5x^2+1$을 미분하면 $f'(x)=3x^2+10x$

$\therefore f'(1)=3+10=13$

17) [정답] 20

[해설]

$f'(x)=4x^3-6x$ 이므로

$f'(2)=4\times2^3-6\times2=20$

18) [정답] ①

[해설]

$f(x)=x^4+3x-2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=4x^3+3$

$x=2$를 대입하면 $f'(2)=32+3=35$

19) [정답] ④

[해설]

$f'(x)=3x^2+7$이므로

$f'(0)=7$

20) [정답] ①

[해설]

$f'(x)=3x^2-2$

따라서

$f'(1)=3\times1^2-2=1$

21) [정답] ⑤

[해설]

$f(x)=2x^3+4x+5$에서 $f'(x)=6x^2+4$이므로

$f'(1)=6+4=10$

22) [정답] ⑤

[해설]

$f'(x)=3x^2+6x+1$

이므로

$f'(1)=3+6+1=10$

23) [정답] **11**

[해설]

함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{64-96+20}{4}=-3$$

또한, $f'(x)=3x^2-12x+5$이므로

$$3a^2-12a+5=-3,\ 3a^2-12a+8=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠을 만족시키는 모든 실수 a는 $0<a<4$를 만족시키므로 모든 실수 a의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{8}{3}$이다.

따라서 $p=3$, $q=8$이므로 $p+q=11$

24) [정답] ③

[해설]

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{2h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times\frac{3}{2}\right\}$

$=\frac{3}{2}f'(1)$

이 때, $f'(x)=3x^2-1$이므로

$\frac{3}{2}f'(1)=\frac{3}{2}\times 2=3$

25) [정답] ④

[해설]

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=6$이고 $f'(x)=4x+a$이므로

$\therefore f'(1)=4+a=6$

$\therefore a=2$

26) [정답] ③

[해설]

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{f'(1)}{2}$

한편, $f(x)=x^2+4x$에서 $f'(x)=2x+4$이므로 $f'(1)=6$

따라서 구하는 값은 $\frac{1}{2}\times 6=3$

27) [정답] ⑤

[해설]

함수 $f(x)$가 미분가능하므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=2\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}$

$=2f'(1)$

한편, $f'(x)=2x+8$에서

$f'(1)=10$

따라서 $2f'(1)=20$

28) [정답] ②

[해설]

$f(x)=x^3+9$에서

$f'(x)=3x^2$

이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$

$=3\times 2^2=12$

29) [정답] 28

[해설]

우선 주어진 조건으로부터 $f(2)=1$, $f'(2)=2$이다.

$g(x)$를 미분하면 $g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$이고 $x=2$이면

$g'(2)=12f(2)+8f'(2)=12\times1+8\times2=28$이다.

30) [정답] 10

[해설]

$g'(x)=f(x)+(x+1)f'(x)$이므로

$g'(1)=f(1)+2f'(1)=10$

31) [정답] 243

[해설]

조건 (가)에 의하여 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x=\alpha$인 점에서 만나고 그 점에서 접선의 기울기가 같으므로

방정식 $f(x)-g(x)=0$은 $x=\alpha$를 중근으로 갖는다.

따라서 또 다른 한 근을 γ라 하면

$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x-\gamma)$ …… ㉠

㉠의 양변을 미분하면

$f'(x)-g'(x)=2(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)^2$

따라서 조건 (나)에 의하여

$f'(\beta)-g'(\beta)=2(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)+(\beta-\alpha)^2=0$

$\alpha\neq\beta$이므로

$2(\beta-\gamma)+\beta-\alpha=0$

$\gamma=\dfrac{3\beta-\alpha}{2}$

즉, ㉠에 대입하면

$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2\left(x-\dfrac{3\beta-\alpha}{2}\right)$ …… ㉡

또한, 이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 대칭축은 $g'(\alpha)=-16$, $g'(\beta)=16$에서 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$이므로

$g(x)=2\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+k$ (k는 상수)

라 놓으면

$g'(x)=4\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

따라서

$g'(\alpha)=4\left(\alpha-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=4\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)=2(\alpha-\beta)=-16$

에서 $\alpha-\beta=-8$이다.

㉡에 $\beta+1$을 대입하면

$$\begin{aligned}f(\beta+1)-g(\beta+1)&=(\beta+1-\alpha)^2\left(\beta+1-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)\\&=(\alpha-\beta-1)^2\left(\frac{\alpha-\beta+2}{2}\right)\\&=(-8-1)^2\left(\frac{-8+2}{2}\right)\\&=81\times(-3)=-243\end{aligned}$$

따라서 $g(\beta+1)-f(\beta+1)=243$이다.

32) [정답] ②

[해설]

세 실근을 a, ar, ar^2이라 하면

$f(x)=(x-a)(x-ar)(x-ar^2)+9$

$=x^3-a(1+r+r^2)x^2+a^2r(1+r+r^2)x-(ar)^3+9$

$f'(x)=3x^2-2a(1+r+r^2)x+a^2r(1+r+r^2)$

$f(0)=-(ar)^3+9=1$

$f'(2)=12-4a(1+r+r^2)+a^2r(1+r+r^2)$

$=-2$

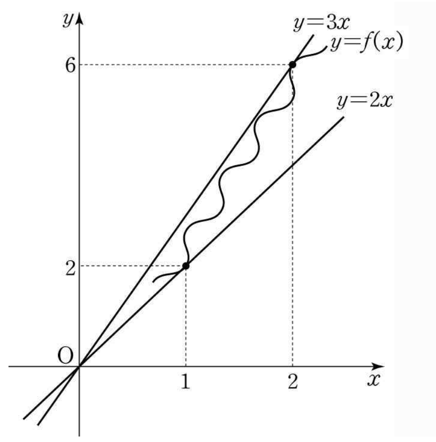
$ar=2$, $a(1+r+r^2)=7$

$\therefore f(3)=27-63+42+1=7$

33) [정답] ④

[해설]

$x>0$에서 $f(x)$가 미분가능하고, $2x\le f(x)\le 3x$, $f(1)=2$, $f(2)=6$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 두 직선 $y=2x$와 $y=3x$ 사이에 존재한다.



$y=2x$에서 $y'=2$

$y=3x$에서 $y'=3$

이므로 $f'(1)=2$, $f'(2)=3$

$\therefore\ f'(1)+f'(2)=5$

34) [정답] **2**

[해설]

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)=f(1)$

즉, $a+1=1+a$

또한, $f(x)=\begin{cases}ax^2+1 & (x<1)\\ x^4+a & (x\ge1)\end{cases}$에서

미분계수 $f'(1)$가 존재해야 하므로

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{ax^2+1-(a+1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{a(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1-}a(x+1)$

$=2a$

$\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{x^4+a-(1+a)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1+}\{(x^2+1)(x+1)\}$

$=4$

이므로 $2a=4$, $a=2$

35) [정답] ⑤

[해설]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 연속이고 미분가능하다.

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -2-}(x^2+ax+b)=\lim_{x\to -2+}2x=f(-2)$에서

$4-2a+b=-4$, $b=2a-8$ ……㉠

$$\lim_{x\to -2-}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2-}\frac{(x^2+ax+b)-(4-2a+b)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2-}\frac{x^2+ax+2(a-2)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2-}\frac{(x+2)(x+a-2)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2-}(x+a-2)=a-4$$

$$\lim_{x\to -2+}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2+}\frac{2x-(4-2a+b)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2+}\frac{2(x+2)}{x+2}\quad \text{(㉠에 의해)}$$

$$=\lim_{x\to -2+}2=2$$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 미분가능하므로

$a-4=2$, $a=6$

㉠에서 $b=12-8=4$

따라서 $a+b=6+4=10$

36) [정답] ④

[해설]

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능 하다.

$f(1)=b+4$이므로

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1+}\frac{bx+4-b-4}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1+}\frac{b(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1+}b=b \text{……㉠}$$

이고

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1-}\frac{x^3+ax+b-b-4}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1-}\frac{x^3+ax-4}{x-1}\text{……㉡}$$

이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$의 값이 존재해야 하므로

㉠, ㉡에서

$$\lim_{x\to 1-}\frac{x^3+ax-4}{x-1}=b\text{……㉢}$$

이어야 한다.

이때 $x\to 1-$일 때 (분모)$\to 0$이고 ㉢이 수렴하므로

(분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1-}(x^3+ax-4)=1+a-4=0$에서

$a=3$

이때 ㉢에서

$$b=\lim_{x\to 1-}\frac{x^3+3x-4}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(x^2+x+4)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1-}(x^2+x+4)$$

$=1^2+1+4$

$=6$

따라서

$a+b=3+6=9$

37) [정답] ②

[해설]

다항함수 $p(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+}p(x)=\lim_{x\to 0-}p(x)=p(0)$$

이 성립한다.

ㄱ. $f(0)=0$이고 $\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}(-x)=0$,

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(x-1)=-1$이므로

$\lim_{x\to 0-} p(x)f(x) = \lim_{x\to 0-} p(x) \times \lim_{x\to 0-} f(x) = 0$,

$\lim_{x\to 0+} p(x)f(x) = \lim_{x\to 0+} p(x) \times \lim_{x\to 0+} f(x) = -p(0)$

$p(0)f(0) = 0$

이때 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to 0-} p(x)f(x) = \lim_{x\to 0+} p(x)f(x) = p(0)f(0)$이 성립한다. 즉, $-p(0)=0$이어야 하므로 $p(0)=0$ (참)

ㄴ. $g(x)=p(x)f(x)$라 하자.

함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=2$에서도 미분가능하므로 $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$의 값이 존재해야 한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2-}\frac{p(x)f(x)-p(2)f(2)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2-}\frac{(x-1)p(x)-p(2)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2-}\frac{(x-2)p(x)+p(x)-p(2)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2-}p(x)+\lim_{x\to 2-}\frac{p(x)-p(2)}{x-2}\\ &= p(2)+p'(2)\end{aligned}$$

이고,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2+}\frac{p(x)f(x)-p(2)f(2)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2+}\frac{(2x-3)p(x)-p(2)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2-}\frac{2(x-2)p(x)+p(x)-p(2)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2-}2p(x)+\lim_{x\to 2-}\frac{p(x)-p(2)}{x-2}\\ &= 2p(2)+p'(2)\end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

가 성립하려면

$$p(2)+p'(2) = 2p(2)+p'(2)$$

즉, $p(2)=0$이어야 한다. (참)

ㄷ. (반례) $h(x)=p(x)\{f(x)\}^2$이라 하자.

$p(x)=x^2(x-2)$이면

$$h(x)=\begin{cases} x^4(x-2) & (x\le 0)\\ x^2(x-1)^2(x-2) & (0<x\le 2)\\ x^2(2x-3)(x-2) & (x>2)\end{cases}$$

이므로 함수 $h(x)$는 $x\ne 0$, $x\ne 2$인 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

한편,

$$\lim_{x\to 0-}\frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{h(x)-h(0)}{x} = 0$$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

$$\lim_{x\to 2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2} = 4$$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

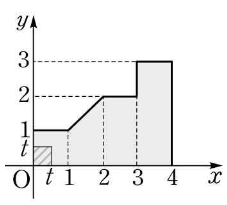
하지만 함수 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어지지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

38) [정답] ③

[해설]

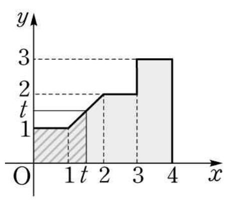
(ⅰ) $0<t\le 1$일 때,



$f(t)$는 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이이므로

$f(t)=t^2$

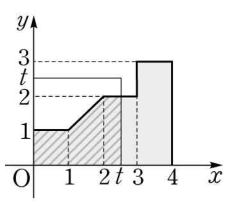
(ⅱ) $1<t\le 2$일 때,



$f(t)$는 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이이므로

$f(t)=1+\frac{1}{2}(1+t)(t-1)=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$

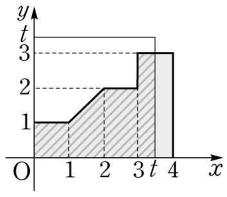
(ⅲ) $2<t\le 3$일 때,



$f(t)$는 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이이므로

$f(t)=1+\frac{1}{2}\times(1+2)\times 1+2(t-2)=2t-\frac{3}{2}$

(ⅳ) $3<t<4$일 때,



$f(t)$는 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이이므로

$f(t)=1+\frac{1}{2}\times(1+2)\times1+1\times2+3(t-3)=3t-\frac{9}{2}$

이상에서

$$f(t)=\begin{cases} t^2 & (0<t\le1) \\ \frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2} & (1<t\le2) \\ 2t-\frac{3}{2} & (2<t\le3) \\ 3t-\frac{9}{2} & (3<t<4)\end{cases}$$

이므로

$$f'(t)=\begin{cases} 2t & (0<t<1) \\ t & (1<t<2) \\ 2 & (2<t<3) \\ 3 & (3<t<4)\end{cases}$$

이때 $\lim_{t\to2+}f'(t)=\lim_{t\to2-}f'(t)=2$이므로 함수 $f(t)$는 $t=2$에서 미분가능하고

$\lim_{t\to1+}f'(t)=1,\ \lim_{t\to1-}f'(t)=2,$

$\lim_{t\to3+}f'(t)=3,\ \lim_{t\to3-}f'(t)=2$

이므로 함수 $f(t)$는 $t=1,\ t=3$에서 미분가능하지 않다.

따라서 구하는 모든 t의 값의 합은

$1+3=4$

39) [정답] **186**

[해설]

함수 $y=f(x)$위의 점을 P라 하고 구간을 나누어 함수 $g(x)$ 를 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $x<1$일 때, $\mathrm{P}(x,\ x+1)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(x+1)^2+(x+2)^2$

$=2x^2+6x+5$

$\overline{\mathrm{BP}}^2=(x-1)^2+(x-1)^2$

$=2x^2-4x+2$

이때, $\overline{\mathrm{AP}}^2\ge\overline{\mathrm{BP}}^2$을 풀면

$2x^2+6x+5\ge2x^2-4x+2$

$10x\ge-3$

$x\ge-\frac{3}{10}$

그러므로

$$g(x)=\begin{cases} 2x^2+6x+5 & \left(x<-\frac{3}{10}\right) \\ 2x^2-4x+2 & \left(-\frac{3}{10}\le x<1\right)\end{cases}$$

(ⅱ) $x\ge1$일 때, $\mathrm{P}(x,\ -2x+4)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(x+1)^2+(-2x+5)^2$

$=5x^2-18x+26$

$\overline{\mathrm{BP}}^2=(x-1)^2+(-2x+2)^2$

$=5x^2-10x+5$

이때, $\overline{\mathrm{AP}}^2\ge\overline{\mathrm{BP}}^2$을 풀면

$5x^2-18x+26\ge5x^2-10x+5$

$8x\le21$

$x\le\frac{21}{8}$

그러므로

$$g(x)=\begin{cases} 5x^2-10x+5 & \left(1\le x<\frac{21}{8}\right) \\ 5x^2-18x+26 & \left(x\ge\frac{21}{8}\right)\end{cases}$$

그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$g(x)=\begin{cases} 2x^2+6x+5 & \left(x<-\frac{3}{10}\right) \\ 2x^2-4x+2 & \left(-\frac{3}{10}\le x<1\right) \\ 5x^2-10x+5 & \left(1\le x<\frac{21}{8}\right) \\ 5x^2-18x+26 & \left(x\ge\frac{21}{8}\right)\end{cases}$$

이때, 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.

한편

$$g'(x)=\begin{cases} 4x+6 & \left(x<-\frac{3}{10}\right) \\ 4x-4 & \left(-\frac{3}{10}<x<1\right) \\ 10x-10 & \left(1<x<\frac{21}{8}\right) \\ 10x-18 & \left(x>\frac{21}{8}\right)\end{cases}$$

이므로

$\lim_{x \to -\frac{3}{10}-} g'(x) \neq \lim_{x \to -\frac{3}{10}+} g'(x)$

$\lim_{x \to 1-} g'(x) = \lim_{x \to 1+} g'(x)$

$\lim_{x \to \frac{21}{8}-} g'(x) \neq \lim_{x \to \frac{21}{8}+} g'(x)$

그러므로 $x=a$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않는 a의 값은 $-\frac{3}{10}$, $\frac{21}{8}$ 이다.

따라서

$80p = 80\left(-\frac{3}{10} + \frac{21}{8}\right)$
$= -24 + 210$
$= 186$

40) [정답] **12**

[해설]

주어진 식의 $(1,1)$에서 접선의 방정식은 $y=-x+2$이다.

따라서 주어진 점을 대입하여 보면 $a=12$이다.

41) [정답] 10

[해설]

$y = x^3 - 6x^2 + 6$에서

$y' = 3x^2 - 12x$이므로 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$3 \times 1^2 - 12 \times 1 = -9$

따라서 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y - 1 = -9(x-1)$

$y = -9x + 10$

이 접선이 점 $(0,\ a)$를 지나므로

$a = -9 \times 0 + 10 = 10$

42) [정답] ①

[해설]

곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$의 도함수는 $y' = 3x^2 - 6x + 2$

즉, 점 $A(0,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 2이므로 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

따라서 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 점 $A(0,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2}(x-0) + 2$$

즉 $y = -\frac{1}{2}x + 2$이다.

따라서 직선의 x절편은 $y=0$일 때 $x=4$

43) [정답] **97**

[해설]

조건 (나)에서 $x \to 2$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 하므로

$f(2) = g(2)$

조건 (가)에서 $x=2$를 대입하면

$g(2) = 8f(2) - 7$이므로

$g(2) = 8g(2) - 7$에서 $g(2) = 1$

또 조건 (나)에서

$\lim_{x \to 2} \frac{\{f(x) - f(2)\} - \{g(x) - g(2)\}}{x-2} = f'(2) - g'(2) = 2$

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x)$

$x=2$를 대입하면

$g'(2) = 12 \times + 8f'(2)$

$g'(2) = 12 \times 1 + 8\{g'(2) + 2\}$
$= 8g'(2) + 28$

에서 $g'(2) = -4$

따라서 접선의 방정식은

$y - 1 = -4(x-2)$, $y = -4x + 9$

이므로

$a^2 + b^2 = (-4)^2 + 9^2 = 97$

44) [정답] ⑤

[해설]

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선의 방정식은

$y=g'(2)(x-2)+g(2)$ …… ㉠

이때, $g'(x)=f(x)$이고

$f(2)=1$에서 $g'(2)=1$이므로 ㉠에서

$y=1\cdot(x-2)+g(2)$

$\therefore\ y=x-2+g(2)$

이때, 접선의 y절편이 -5이므로

$x=0,\ y=-5$를 대입하면

$-5=-2+g(2)$

$\therefore\ g(2)=-3$

이때, 접선의 방정식은

$y=x-5$

$y=0$을 대입하면

$0=x-5$

$\therefore\ x=5$

따라서, 접선의 x절편은 5이다.

45) [정답] ②

[해설]

y를 x에 대하여 미분하면 $y'=3x^2-6x+1$이다. 따라서 점 A에서의 접선의 기울기는 $y'=3x^2-6x+1|_{x=3}=10$이다. 또,

$3x^2-6x+1=10$

$\Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0,$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$

$\therefore\ x=-1,3$

즉, 점 B의 x좌표는 -1이다. 따라서 점 B에서의 접선의 방정식은

$y-(-4)=10(x-(-1))$

$\Leftrightarrow y=10x+6$

이다. 즉, y절편은 6이다.

46) [정답] **5**

[해설]

$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}\ (x>0)$에서 $y'=x^2$

또한 직선 $y=x-10$은 기울기가 1이므로 $x^2=1$에서 $x=1$

따라서 $y=\frac{1}{3}+\frac{11}{3}=4$이므로 점 P의 좌표는 $(1,\ 4)$이다.

$\therefore\ a+b=5$

47) [정답] ②

[해설]

접점의 x좌표를 t라 하면 $y'=-3x^2-2x+1$

$y=(-3t^2-2t+1)(x-t)-t^3-t^2+t$

$0=3t^3+2t^2-t-t^3-t^2+t$

$2t^3+t^2=0,\ t^2(2t+1)=0$

$t=0,\ -\frac{1}{2},\ y'=1,\ \frac{5}{4},\ \therefore 1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$

48) [정답] **21**

[해설]

$f(x)=x^3+2x+7$...(가)

점 $P(-1,4)$에서 접선의 방정식을 l이라 하면

$f'(x)=3x^2+2,\ l: y=f'(-1)(x+1)+4=5x+9$

곡선과 접선의 교점을 구하려면 $x^3+2x+7=5x+9$이며 이항하여

$x^3-3x-2=0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore\ a=2, b=19$

이므로 구하는 값인 $a+b=21$

49) [정답] **32**

[해설]

$f(x)=x^3-5x$라 하면 $f'(x)=3x^2-5$

직선 AB와 삼차함수 $y=x^3-5x$의 그래프의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-5t)$라 하면 직선 AB의 기울기가 1이므로

$f'(t)=3t^2-5=1$

$3t^2=6 \therefore\ t=-\sqrt{2}\ (\because t<0)$

접점의 좌표는 $(-\sqrt{2},\ 3\sqrt{2})$이고, 기울기가 1이므로 직선 AB의 방정식은

$y-3\sqrt{2}=x-(-\sqrt{2})\ \therefore y=x+4\sqrt{2}$

두 점 A, B의 좌표는 각각

$A(0,\ 4\sqrt{2}),\ B(-4\sqrt{2},\ 0)$

이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2}=8$

따라서 정사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$4\overline{AB}=4\times 8=32$

50) [정답] ①

[해설]

직선 $y=5x+k$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선 $y=5x+k$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 접해야 한다.

접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$라 하면

$f(x)=x^3-3x^2-4x$에서

$f'(x)=3x^2-6x-4$ 이므로

접선의 기울기는

$f'(a)=3a^2-6a-4$

한편, 기울기가 5이므로

$3a^2-6a-4=5$

$a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=3$

(ⅰ) $a=-1$일 때,
접점은 $(-1,\ 0)$이므로
접선의 방정식은 $y=5(x+1)+0$
즉, $y=5x+5$이므로 $k=5$

(ⅱ) $a=3$일 때,
접점은 $(3,\ -12)$이므로 접선의 방정식은
$y=5(x-3)-12$
즉, $y=5x-27$
이때, k는 양수이므로 k의 값은 없다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$k=5$

51) [정답] ①

[해설]

$g(x)=6x-6,\ h(x)=2x^3-2$ 라 하면

$h(x)$ 의 $x=1$ 에서의 접선의 방정식이 $y=g(x)$ 이므로

$f(x)$ 는 3 차 함수이다.

또한 조건 (나)에서 $f(x)$ 는 $(1,\ 0),\ (0,\ -3)$ 을 지나는 최고차항의 계수가 1 인 3 차 함수이므로

$f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$

라 놓을 수 있다.

따라서 $f'(1)=6$ 에서 $a+b+1=6$ 이고 $f(0)=-3$ 에서 $b=3$ 이고 $a=2$ 이다.

따라서

$f(x)=(x-1)(x^2+2x+3)$

이다.

구하는 답은 $f(3)=36$ 이다.

52) [정답] 42

[해설]
$f(-1),\ f(0),\ f(1),\ f(2)$가 등차수열이므로 네 점을 연결하는 직선을 $y=mx+n$이라고 하자.
그러면 $f(x)-(mx+n)=x(x+1)(x-1)(x-2)$라고 할 수 있다.
$f(x)=x(x-1)(x+1)(x-2)+mx+n$이라고 하면
$f'(-1)=m-6,\ f'(2)=m+6,\ f(-1)=-m+n,$
$f(2)=2m+n$이다.
-1에서의 접선은 $y=(m-6)(x+1)-m+n$
2에서의 접선은 $y=(m+6)(x-2)+2m+n$
$(k,0)$에서 두 접선이 만나므로
$0=(m-6)(k+1)-m+n,$
$0=(m+6)(k-2)+2m+n$
두 식을 k에 관하여 정리하면

$k=\dfrac{m-n}{m-6}-1,$

$k=-\dfrac{2m+n}{m+6}+2$

연립하면 $m+2n=18$

$m=-2n+18$을 $k=\frac{m-n}{m-6}-1$에 대입하면 $k=\frac{1}{2}$가 나온다.

따라서 $f(2k)=f(1)=m+n=10$이므로 $m=22$, $n=-2$가 된다.

$f(x)=x(x-1)(x+1)(x-2)+22x-2$

$f(4k)=f(2)=42$

53) [정답] ④

[해설]

조건 (가)에서 $f(1)=2$이므로 $1+a+b=2$

$\therefore a+b=1$ ⋯⋯ ㉠

$f(x)=x^3+ax^2+bx$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

따라서 점 $(t,\ f(t))$, 즉 $(t,\ t^3+at^2+bt)$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3+at^2+bt)=(3t^2+2at+b)(x-t)$

이므로 점 P의 좌표는 $(0,\ -2t^3-at^2)$이다.

$\therefore g(t)=|-2t^3-at^2|=t^2|2t+a|$

함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$-\frac{a}{2}=0$이어야 하므로 $a=0$

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $b=1$

따라서 $f(x)=x^3+x$이므로

$f(3)=3^3+3=30$

54) [정답] 32

[해설]

함수 $f(x)$는 $x<a$, $x>a$일 때, 다항함수이므로 이 범위에서 미분가능하다.

한편, 조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능해야 하므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능해야 한다. 즉,

$\lim\limits_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$이어야 한다.

이때,

$\lim\limits_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a-}\frac{0-0}{x-a}=0$ ⋯⋯㉠

또, $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a+}\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x-a}$

여기서 $x\to a+$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재해야 하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim\limits_{x\to a+}(x-1)^2(2x+1)=0$, $(a-1)^2(2a+1)=0$

$a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$

(i) $a=-\frac{1}{2}$일 때,

$\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}+}\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}+}2(x-1)^2$

$=\frac{9}{2}$

이 값은 ㉠의 값과 다르므로 $a=-\frac{1}{2}$일 때 함수 $f(x)$는 미분가능하지 않다.

(ii) $a=1$일 때,

$\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to 1+}\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x-1}$

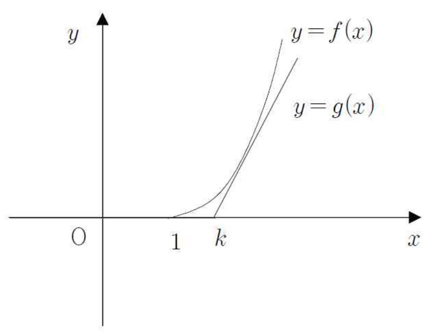
$=\lim\limits_{x\to 1+}(x-1)(2x+1)$

$=0$

이 값은 ㉠의 값과 같으므로 $a=1$일 때 함수 $f(x)$는 미분가능하다.

따라서 (i), (ii)에서 $a=1$이다.

한편, 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge g(x)$이어야하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 접해야 한다.



$x>1$일 때, 함수 $f(x)=(x-1)^2(2x+1)$와 접하고 기울기가 12인 접선의 접점을 $(m,\ f(m))$ $(m>1)$라 하자.

$f'(x)=\{(x-1)^2\}'(2x+1)+(x-1)^2(2x+1)'$

$=2(x-1)(2x+1)+2(x-1)^2$

$=(x-1)\{(4x+2)+(2x-2)\}$

$=6x(x-1)$

이때, 접선의 기울기가 12이므로

$6m(m-1)=12$

$m^2-m-2=0,\ (m+1)(m-2)=0$

$m=-1$ 또는 $m=2$

이때, $m=2$

그러므로 접선의 방정식은 $y-5=12(x-2)$

$y=12x-19,\ y=12\left(x-\frac{19}{12}\right)$

따라서 $k\ge\frac{19}{12}$이므로 k의 최솟값은 $\frac{19}{12}$이다.

그러므로 $a+p+q=1+12+19=32$

55) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 5]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 5)$에서 미분가능하므로

평균값의 정리에 의하여

$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c)\cdots$㉠

를 만족하는 상수 c가 열린구간 $(1, 5)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, 조건 (나)에 의하여

$f'(c)\ge 5$

이므로 ㉠에서

$\frac{f(5)-3}{4}\ge 5$

$f(5)\ge 23$

따라서 $f(5)$의 최솟값은 23이다.