[수학1] [삼각함수] 평가원 최근 10개년

03 수1 05 삼각함수의 정의

02 삼각함수의 정의

03 정의3 (부호와 함수변형규칙)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 3

1. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\sin\theta=\frac{\sqrt{21}}{7}$일 때, $\tan\theta$의 값은?

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ 0

④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 3

2. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta=\frac{12}{5}$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은?

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ 0

④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$

03 수1

05 삼각함수의 정의

02 삼각함수의 정의

04 정의4 (특수각의 확장)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 06월 2

3. $\cos\frac{3\pi}{2}$의 값은?

① -1 ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 0

④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ 1

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 06월 2

4. $\sin\frac{7\pi}{3}$ 의 값은?

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 3

5. $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ 3

④ $\frac{15}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

03 수1 05 삼각함수의 정의

02 삼각함수의 정의

06 정의6 (삼각함수 사이의 관계. 값 구하기)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 5

6. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{12}{25}$일 때, $\sin\theta-\cos\theta$의 값은?

① $\frac{4}{5}$ ② 1 ③ $\frac{6}{5}$

④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 6

7. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$일 때, $\cos\theta$의 값은?

① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 3

8. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\cos^2\theta=\frac{4}{9}$일 때, $\sin^2\theta+\cos\theta$의 값은?

① $-\frac{4}{9}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{2}{9}$

④ $-\frac{1}{9}$ ⑤ 0

03 수1 06 삼각함수의 그래프

01 삼각함수의 그래프

04 그래프4 (표준형 그래프에서 Mm)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 22

9. 함수$f(x)=5\sin x+1$의 최댓값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 4

10. 함수 $f(x)=4\cos x+3$의 최댓값은?

① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 7

11. 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=-\sin 2x$가 $x=a$에서 최댓값을 갖고 $x=b$에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는?

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$

④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

03 수1 06 삼각함수의 그래프

02 삼각함수의 그래프 활용

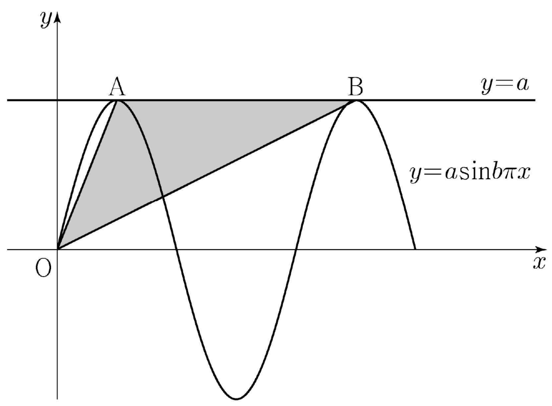
01 활용1 (대칭성과 길이 또는 넓이)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 10

12. 두 양수 a, b에 대하여 곡선

$y=a\sin b\pi x\left(0\leq x\leq \frac{3}{b}\right)$이 직선 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자.

삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

03 수1 06 삼각함수의 그래프

02 삼각함수의 그래프 활용

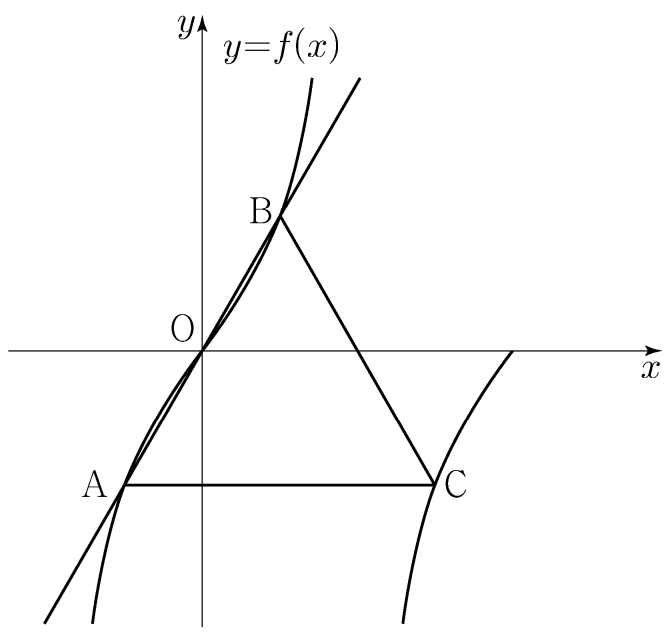
02 활용2 (그래프의 활용)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 11

13. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{a}{2}<x\leq a,\ x\neq\frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x)=\tan\frac{\pi x}{a}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

03 수1　　06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

01 삼각방정식1 (일차식꼴)

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 09월 6

14. $0 \le x \le \pi$일 때, 방정식

$$1+\sqrt{2}\sin 2x=0$$

의 모든 해의 합은?

① π　② $\frac{5\pi}{4}$　③ $\frac{3\pi}{2}$

④ $\frac{7\pi}{4}$　⑤ 2π

03 수1　　06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

02 삼각방정식2 (이차식꼴)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 09월 7

15. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $2\sin^2 x+3\cos x=3$의 모든 해의 합은?

① $\frac{\pi}{2}$　② π　③ $\frac{3\pi}{2}$

④ 2π　⑤ $\frac{5\pi}{2}$

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 11월 25

16. $0 < x < 2\pi$일 때, 방정식 $\cos^2 x-\sin x=1$의 모든 실근의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 11월 7

17. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식

$$\cos^2 x = \sin^2 x - \sin x$$

의 모든 해의 합은?

① 2π ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ 3π

④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ 4π

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 7

18. $0 < x < 2\pi$일 때, 방정식 $4\cos^2 x - 1 = 0$과 부등식 $\sin x \cos x < 0$을 동시에 만족시키는 모든 x의 값의 합은?

① 2π ② $\frac{7}{3}\pi$ ③ $\frac{8}{3}\pi$

④ 3π ⑤ $\frac{10}{3}\pi$

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 16

19. $0 \le x \le 4\pi$일 때, 방정식

$$4\sin^2 x - 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3 = 0$$

의 모든 해의 합은?

① 5π ② 6π ③ 7π

④ 8π ⑤ 9π

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 7

20. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta - \frac{6}{\tan\theta} = 1$일 때, $\sin\theta + \cos\theta$의 값은?

① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0

④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

03 수1 06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

03 삼각방정식3 (교점)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 8

21. 함수 $y=6\sin\frac{\pi}{12}x(0\le x\le 12)$ 의 그래프와 직선 $y=3$ 이 만나는 두 점을 각각 A, B 라 할 때, 선분 AB 의 길이는?

① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

03 수1 06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

08 방부등식의 활용1 (이차함수의 활용)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 11

22. $0\le\theta<2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식

$$6x^2+(4\cos\theta)x+\sin\theta=0$$

이 실근을 갖지 않도록 하는 모든 θ의 값의 범위는 $\alpha<\theta<\beta$이다. $3\alpha+\beta$의 값은?

① $\frac{5}{6}\pi$ ② π ③ $\frac{7}{6}\pi$

④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 14

23. $0 \le \theta < 2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-(2\sin\theta)x-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5=0$$

이 실근을 갖도록 하는 θ의 최솟값과 최댓값을 각각 α, β라 하자. $4\beta-2\alpha$의 값은?

① 3π　② 4π　③ 5π　④ 6π　⑤ 7π

03 수1 06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

11 방부등식의 활용4 (추론과 해석)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 21

24. 닫힌구간$[-2\pi,\ 2\pi]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\sin kx+2,\ g(x)=3\cos 12x$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는?

실수 a가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 y좌표이면 $\{x \mid f(x)=a\} \subset \{x \mid g(x)=a\}$ 이다.

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 15

25. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다.

ㄴ. $\{t \mid \beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2=\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 수1 07 삼각함수의 활용

01 사인법칙과 코사인법칙

01 사인법칙1 (기본)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 23

26. 반지름의 길이가 15인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $\sin B=\frac{7}{10}$일 때, 선분 AC의 길이를 구하시오.

03 수1 07 삼각함수의 활용

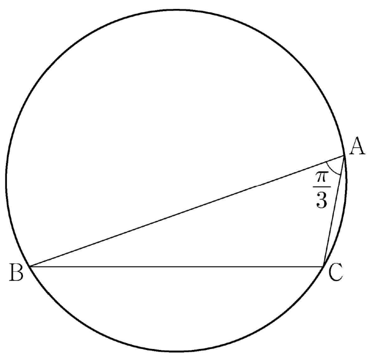
01 사인법칙과 코사인법칙

05 사인법칙과 코사인법칙의 동시 적용

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 10

27. $\angle A = \frac{\pi}{3}$이고 $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 1$인 삼각형 ABC가 있다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 선분 AC의 길이는?



① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{22}$

④ $\sqrt{23}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

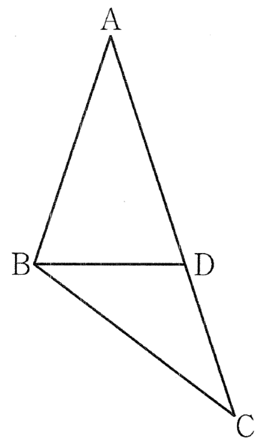
03 수1 07 삼각함수의 활용

02 사인법칙과 코사인법칙의 활용

03 활용3 (코사인법칙의 활용)

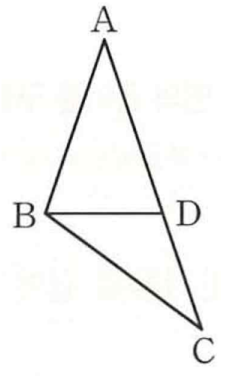
[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 25

28. $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{AB} = \overline{AD}$가 되도록 잡는다. $\overline{BD} = \sqrt{15}$일 때, 선분 BC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오.



[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 12

29. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{AB}=\overline{AD}$가 되도록 잡는다. $\overline{BD}=\sqrt{15}$일 때, 선분 BC의 길이는?



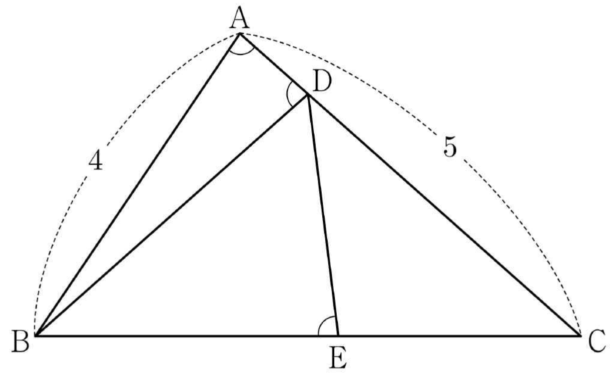
① $\sqrt{37}$ ② $\sqrt{38}$ ③ $\sqrt{39}$
④ $2\sqrt{10}$ ⑤ $\sqrt{41}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 12

30. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC=\angle BDA=\angle BED$$

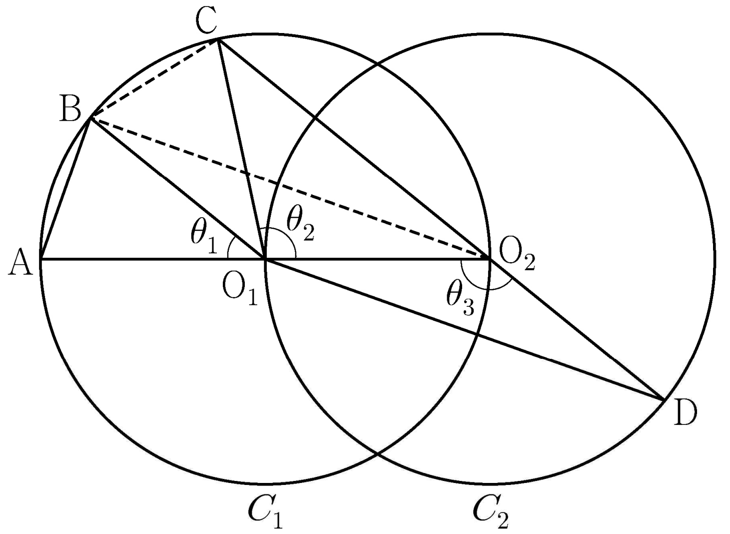
일 때, 선분 DE의 길이는?



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$
④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 15

31. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다. 이때 $\angle BO_1A=\theta_1$, $\angle O_2O_1C=\theta_2$, $\angle O_1O_2D=\theta_3$이라 하자.



다음은 $\overline{AB}:\overline{O_1D}=1:2\sqrt{2}$이고 $\theta_3=\theta_1+\theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

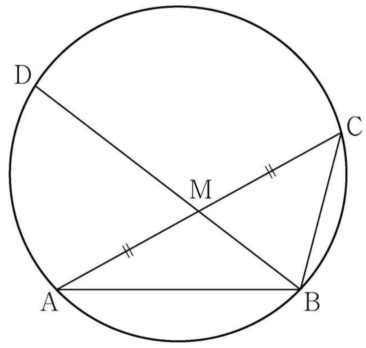
> $\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$이므로 $\theta_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로 $\angle CO_1B=\theta_1$이다.
> 이때 $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.
> $\overline{AB}=k$라 할 때
> $\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2}=\boxed{\text{(가)}}$이고,
> $\angle BO_2A=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\dfrac{\theta_1}{2}=\boxed{\text{(나)}}$이다.
> 삼각형 O_2BC에서
> $\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C}=\boxed{\text{(다)}}$이다.
> $\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로
> $\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\dfrac{\boxed{\text{(가)}}}{2}+\boxed{\text{(다)}}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은?

① $\dfrac{169}{27}$ ② $\dfrac{56}{9}$ ③ $\dfrac{167}{27}$
④ $\dfrac{166}{27}$ ⑤ $\dfrac{55}{9}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 10

32. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\dfrac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는?



① $\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\dfrac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$
④ $\dfrac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

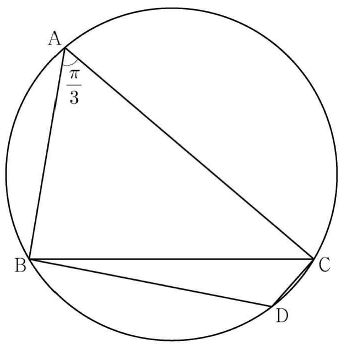
03 수1 07 삼각함수의 활용

02 사인법칙과 코사인법칙의 활용

04 활용4 (사인법칙과 코사인법칙의 활용)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 12

33. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD}+\overline{CD}$의 값은?



① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$

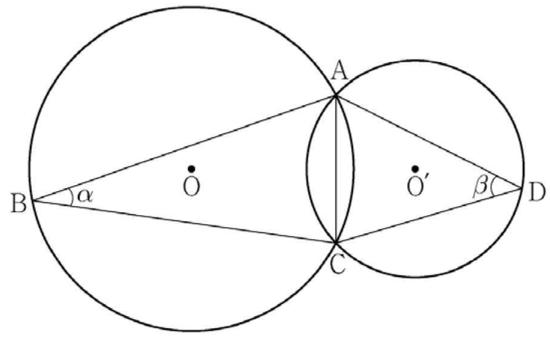
④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 21

34. 그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD의 외심을 각각 O, O′이라 하고 $\angle ABC=\alpha$, $\angle ADC=\beta$라 할 때,

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{2},\ \cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3},\ \overline{OO'}=1$$

이 성립한다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[수학1] [삼각함수] 평가원 최근 10개년(빠른 정답)

년도별경향 2022.12.18

1. [정답] ①
2. [정답] ①
3. [정답] ③
4. [정답] ⑤
5. [정답] ④

6. [정답] ④
7. [정답] ①
8. [정답] ④
9. [정답] **6**
10. [정답] ②

11. [정답] ④
12. [정답] ③
13. [정답] ③
14. [정답] ③
15. [정답] ④

16. [정답] **7**
17. [정답] ④
18. [정답] ②
19. [정답] ②
20. [정답] ①

21. [정답] ③
22. [정답] ④
23. [정답] ①
24. [정답] ②
25. [정답] ②

26. [정답] **21**
27. [정답] ②
28. [정답] **41**
29. [정답] ⑤
30. [정답] ③

31. [정답] ②
32. [정답] ③
33. [정답] ②
34. [정답] **26**

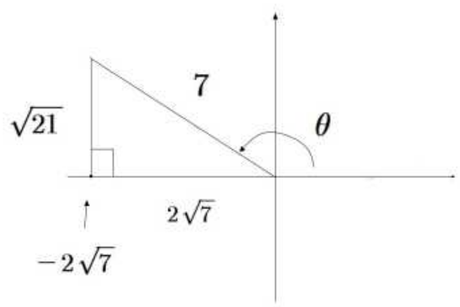
[수학1] [삼각함수] 평가원 최근 10개년(해설)

년도별경향 2022.12.18

1) [정답] ①

[해설]

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ는 그림과 같이 제2사분면의 각이므로 $\tan\theta$는 음의 값을 가진다.



피타고라스 정리에 의해

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{21}}{-2\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) [정답] ①

[해설]

θ가 3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이므로

그런데, $\tan\theta=\frac{12}{5}$이므로 $\sin\theta=-\frac{12}{13}$, $\cos\theta=-\frac{5}{13}$

$$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{17}{13}$$

3) [정답] ③

[해설]

$$\cos\frac{3\pi}{2}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\frac{\pi}{2}=0$$

4) [정답] ⑤

[해설]

$$\sin\frac{7\pi}{3}=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

5) [정답] ④

[해설]

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+(-\sqrt{3})^2$$

$$=\frac{3}{4}+3=\frac{15}{4}$$

6) [정답] ④

[해설]

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$$
$$=1+\frac{24}{25}=\frac{49}{25}$$

$\sin\theta-\cos\theta>0$이므로 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}$

7) [정답] ①

[해설]

$\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$에서

$$\frac{\sin\theta(1+\sin\theta)-\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}=4$$

$$\frac{2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=4,\ \frac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}=4$$

$$1-\cos^2\theta=2\cos^2\theta$$

따라서 $\cos^2\theta=\frac{1}{3}$이고, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

8) [정답] ④

[해설]

$\cos^2\theta=\frac{4}{9}$이고

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$일 때 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{2}{3}$

한편, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

$=1-\frac{4}{9}$

$=\frac{5}{9}$

따라서

$\sin^2\theta+\cos\theta=\frac{5}{9}+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{9}$

9) [정답] 6

[해설]

$-1\le\sin x\le 1$에서 $-5\le 5\sin x\le 5$이므로

$-5+1\le 5\sin x+1\le 5+1$

$\therefore -4\le 5\sin x+1\le 6$

즉, $f(x)=5\sin x+1$의 최댓값은 6

10) [정답] ②

[해설]

$-1\le\cos x\le 1$이므로 $f(x)=4\cos x+3$에서

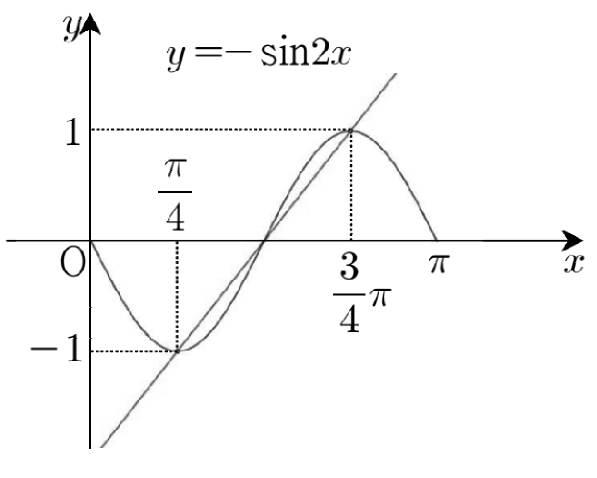
$-1\le 4\cos x+3\le 7$

즉, $-1\le f(x)\le 7$이므로 $f(x)$의 최댓값은 7이다.

11) [정답] ④

[해설]

함수 $f(x)=-\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$일 때 최솟값

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$

을 갖고, $x=\frac{3}{4}\pi$일 때 최댓값

$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\sin\frac{3}{2}\pi=1$

을 갖는다.

따라서 $a=\frac{3\pi}{4}$, $b=\frac{\pi}{4}$이므로 두 점 $\left(\frac{3}{4}\pi,\ 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},\ -1\right)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1-(-1)}{\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}$

12) [정답] ③

[해설]

함수 $y=a\sin b\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$이므로 두 점 A, B의 좌표는 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2b},\ a\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{5}{2b},\ a\right)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이가 5이므로

$\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{5}{2b}-\frac{1}{2b}\right)=5,\ \frac{a}{b}=5$

$a=5b$ …… ㉠

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$이므로

$\frac{a}{\frac{1}{2b}}\times\frac{a}{\frac{5}{2b}}=2ab\times\frac{2ab}{5}$

$=\frac{4a^2b^2}{5}=\frac{5}{4}$

$a^2b^2=\frac{25}{16},\ ab=\frac{5}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$a+b=3$

13) [정답] ③

[해설]

$\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a$이므로

함수 $f(x)$의 주기는 a이다.

직선 AB는 원점을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선이므로 양수 t에 대하여 $\mathrm{B}(t,\ \sqrt{3}t)$로 놓으면 $\mathrm{A}(-t,\ -\sqrt{3}t)$이고, $\overline{\mathrm{AB}}=4t$이다.

이때, 함수 $f(x)$의 주기가 a이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=4t=a$이고,

$\mathrm{C}(-t+a,\ -\sqrt{3}t)$, 즉 $\mathrm{C}(3t,\ -\sqrt{3}t)$이다.

점 C가 곡선 $y=\tan\frac{\pi x}{a}=\tan\frac{\pi x}{4t}$ 위의 점이므로

$-\sqrt{3}t=\tan\frac{\pi\times 3t}{4t}$

$-\sqrt{3}t=\tan\frac{3\pi}{4}$에서

$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4t)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$$
$$=\frac{4}{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

14) [정답] ③

[해설]

$1+\sqrt{2}\sin 2x=0$에서

$\sin 2x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$2x=\frac{5\pi}{4}$ 또는 $2x=\frac{7\pi}{4}$

$x=\frac{5\pi}{8}$ 또는 $x=\frac{7\pi}{8}$

따라서 모든 해의 합은

$\frac{5\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=\frac{12\pi}{8}=\frac{3\pi}{2}$

15) [정답] ④

[해설]

$2\sin^2 x+3\cos x=3$

$2(1-\cos^2 x)+3\cos x=3$

$2\cos^2 x-3\cos x+1=0$

$(\cos x-1)(2\cos x-1)=0$

$\cos x=1$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

이때, $0\le x<2\pi$이므로

$x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

따라서, 모든 해의 합은 2π이다.

16) [정답] **7**

[해설]

$\cos^2 x-\sin x=1$

$(1-\sin^2 x)-\sin x=1$

$\sin^2 x+\sin x=0$

$\sin x(\sin x+1)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\sin x=-1$

$x=\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

따라서 모든 실근의 합은 $\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{5}{2}\pi$이므로

$p+q=2+5=7$

17) [정답] ④

[해설]

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로

방정식 $\cos^2 x=\sin^2 x-\sin x$에서

$1-\sin^2 x=\sin^2 x-\sin x$

$2\sin^2 x-\sin x-1=0$

$(2\sin x+1)(\sin x-1)=0$

$\sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

이때, $0\le x<2\pi$이므로

(ⅰ) $\sin x=-\frac{1}{2}$에서

$x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(ⅱ) $\sin x=1$에서

$x=\frac{\pi}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 모든 해의 합은

$\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{7}{2}\pi$

18) [정답] ②

[해설]

$4\cos^2 x-1=0$에서

$(2\cos x+1)(2\cos x-1)=0$

$\cos x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $\cos x=\dfrac{1}{2}$

$x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$

한편, $\sin x\cos x<0$이므로 x는 제2사분면의 각 또는 제4사분면의 각이다.

따라서 구하는 x의 값은 $x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$이므로 모든 합은 $\dfrac{7}{3}\pi$이다.

19) [정답] ②

[해설]

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$이므로

$4\sin^2 x-4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)-3$

$=4\sin^2 x+4\sin x-3$

$\sin x=t$라 하면 t의 범위는 $0\le x\le 4\pi$에 의하여

$-1\le t\le 1$

준 식은 $4t^2+4t-3$이므로

$(2t-1)(2t+3)=0$

$\therefore t=\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{2}$

$\therefore t=\dfrac{1}{2}$ $(\because -1\le t\le 1)$

즉, $0\le x\le 4\pi$에서 $\sin x=\dfrac{1}{2}$를 만족하는 x의 값은

$x=\dfrac{\pi}{6},\ \pi-\dfrac{\pi}{6},\ 2\pi+\dfrac{\pi}{6},\ 3\pi-\dfrac{\pi}{6}$

따라서 모든 해의 합은 6π

20) [정답] ①

[해설]

$\tan\theta-\dfrac{6}{\tan\theta}=1$이므로

양변에 $\tan\theta$를 곱하면

$\tan^2\theta-6=\tan\theta$

$\tan^2\theta-\tan\theta-6=0$

$(\tan\theta+2)(\tan\theta-3)=0$

$\tan\theta=-2$ 또는 $\tan\theta=3$

이때, $\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$이므로

$\tan\theta=3$

이때,

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=3,$

$\sin\theta=3\cos\theta$

이므로

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$9\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$

$10\cos^2\theta=1$

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ 또는 $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

이때, $\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$이므로

$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ …… ㉠

이 값을 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$\sin^2\theta+\dfrac{1}{10}=1$

$\sin^2\theta=\dfrac{9}{10}$

$\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ 또는 $\sin\theta=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

이때, $\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$이므로

$\sin\theta=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ …… ㉡

따라서, ㉠과 ㉡에서

$$\sin\theta+\cos\theta=\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)+\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$$
$$=-\dfrac{4}{\sqrt{10}}$$
$$=-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$$

21) [정답] ③

[해설]

$6\sin\frac{\pi}{12}x=3$에서 $\sin\frac{\pi}{12}x=\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{12}x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

$x=2,\ 10,\ \therefore \overline{\mathrm{AB}}=10-2=8$

22) [정답] ④

[해설]

이차방정식 $6x^2+(4\cos\theta)x+\sin\theta=0$이 실근을 갖지 않아야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4\cos^2\theta-6\sin\theta<0$

$2(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta<0$

$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2>0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)>0$

$0\le\theta<2\pi$에서 $-1\le\sin\theta\le1$이므로

$\sin\theta+2>0$

즉, $2\sin\theta-1>0$에서 $\sin\theta>\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$이므로 $\alpha=\frac{\pi}{6},\ \beta=\frac{5}{6}\pi$

따라서 $3\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{6}\pi=\frac{4}{3}\pi$

23) [정답] ①

[해설]

x에 대한 이차방정식

$x^2-(2\sin\theta)x-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5=0$이 실근을 가지므로

$\frac{D}{4}\ge0$이 성립한다.

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=\sin^2\theta-(-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5)\\&=\sin^2\theta+3\cos^2\theta+5\sin\theta-5\\&=2\cos^2\theta+5\sin\theta-4\\&=-2\sin^2\theta+5\sin\theta-2\ge0\end{aligned}$$

즉, $2\sin^2\theta-5\sin\theta+2\le0$이므로 $(\sin\theta-2)(2\sin\theta-1)\le0$

그런데 $-1\le\sin\theta\le1$이므로 $\sin\theta-2\le0$

$\therefore 2\sin\theta-1\ge0$

즉, $\sin\theta\ge\frac{1}{2}$이므로 $0\le\theta<2\pi$의 범위에서 만족하는 θ의 범위는 $\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{5\pi}{6}$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6},\ \beta=\frac{5\pi}{6}$이므로 $4\beta-2\alpha=3\pi$

24) [정답] ②

[해설]

$y=f(x),\ y=g(x)$는 $0<x<\frac{\pi}{24}$에서 적어도 하나의 교점을 가진다. 이 교점의 x좌표를 α라 하자.

$y=f(x)$는 주기가 $\frac{2\pi}{k}$, $y=g(x)$는 주기가 $\frac{\pi}{6}$인 함수이므로

$$\{x\mid f(x)=f(\alpha)\}=\left\{\alpha,\ \frac{\pi}{k}-\alpha,\ \frac{2\pi}{k}+\alpha,\ \frac{3\pi}{k}-\alpha,\ \cdots\right\}$$

즉, $A=\left\{\alpha,\ \frac{\pi}{k}-\alpha,\ \frac{2\pi}{k}+\alpha,\ \frac{3\pi}{k}-\alpha,\ \cdots\right\}$라 하고,

$$\{x\mid g(x)=g(\alpha)\}=\left\{\alpha,\ \frac{\pi}{6}-\alpha,\ \frac{\pi}{6}+\alpha,\ \frac{2\pi}{6}-\alpha,\ \cdots,\ \frac{12\pi}{6}-\alpha\right\}$$

에서 $B=\left\{\alpha,\ \frac{\pi}{6}-\alpha,\ \frac{\pi}{6}+\alpha,\ \frac{2\pi}{6}-\alpha,\ \cdots,\ \frac{12\pi}{6}-\alpha\right\}$라고 하자.

이때 $A\subset B$를 만족하기 위해서는 $\frac{\pi}{k}-\alpha\in B$여야 한다.

(ⅰ) $\frac{\pi}{k}-\alpha=\frac{n\pi}{6}-\alpha$인 경우

$\frac{1}{k}=\frac{n}{6}$에서 $k=\frac{6}{n}$이므로 $n=1,\ n=2,\ n=3,\ n=6$일 때 각각 $k=6,\ k=3,\ k=2,\ k=1$이다.

즉 4가지

㉠ $k=6$일 때

$$A=\left\{\alpha,\ \frac{\pi}{6}-\alpha,\ \frac{2\pi}{6}+\alpha,\ \frac{3\pi}{6}-\alpha,\ \frac{4\pi}{6}-\alpha,\ \cdots\right\}\subset B$$

㉡ $k=3$일 때

$$A=\left\{\alpha,\ \frac{2\pi}{6}-\alpha,\ \frac{4\pi}{6}+\alpha,\ \frac{6\pi}{6}-\alpha,\ \cdots\right\}\subset B$$

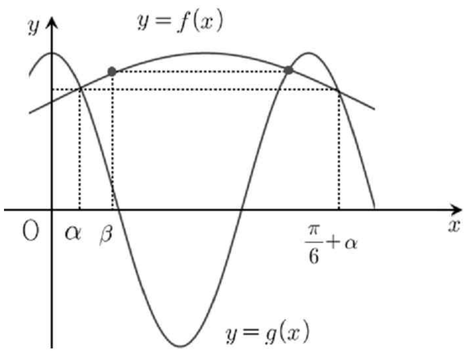
㉢ $k=2$일 때 $A=\left\{\alpha,\ \frac{3\pi}{6}-\alpha,\ \frac{6\pi}{6}+\alpha,\ \frac{9\pi}{6}-\alpha\right\}\subset B$

㉣ $k=1$일 때 $A=\left\{\alpha,\ \frac{6\pi}{6}-\alpha\right\}\subset B$

삼각함수의 대칭성과 주기성에 의하여 $(\alpha,\ f(\alpha))$이외의 교점에 대해서도 같은 방법으로 확인할 수 있다.

(ii) $\dfrac{\pi}{k}-\alpha=\dfrac{n\pi}{6}+\alpha$인 경우

그림과 같이 $\beta\in A$, $\beta\notin B$가 되는 β가 존재하므로 조건에 모순이다.

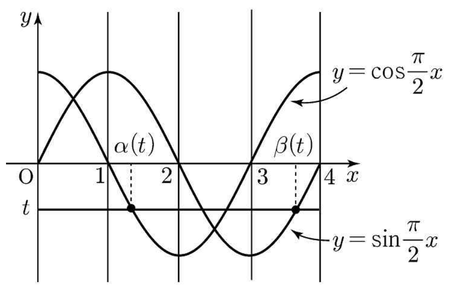


(i), (ii)에 의하여 조건을 만족하는 k는 4가지다.

25) [정답] ②

[해설]

ㄱ. $-1\le t<0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)$와 $\beta(t)$의 위치는 아래 그림과 같다.

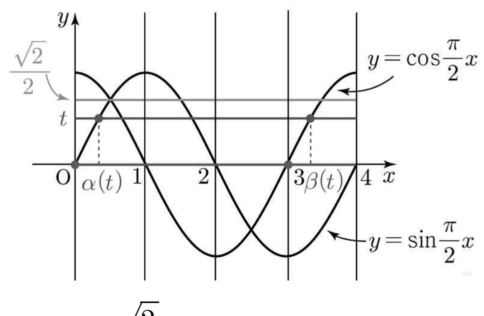


주어진 t의 범위에서 점 $(t,\ \alpha(t))$는 곡선 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ 위에 있고 점 $(t,\ \beta(t))$는 곡선 $y=\cos\dfrac{\pi x}{2}$에 있다.

이때, $\alpha(t)$와 $\beta(t)$는 직선 $x=\dfrac{5}{2}$에 대해 대칭이므로

$\dfrac{\alpha(t)+\beta(t)}{2}=\dfrac{5}{2}$이므로 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다. (참)

ㄴ. $t=0$일 때, $\alpha(0)=0$, $\beta(0)=3$이다.



이때, $t>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$일 때는 $\beta(t)-\alpha(t)>3$이므로

$\beta(t)-\alpha(t)=3$을 만족하는 t의 범위는 $0\le t\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

(참)

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=k$라 하면, t_1과 t_2는 $\sin\dfrac{k\pi}{2}$ 또는 $\cos\dfrac{k\pi}{2}$이다.

이때, $\sin\dfrac{k\pi}{2}=t_1$, $\cos\dfrac{k\pi}{2}=t_2$라 하면,

$t_2-t_1=\cos\dfrac{k\pi}{2}-\sin\dfrac{k\pi}{2}=\dfrac{1}{2}$이고, 양변을 제곱하면

$$\left\{\cos\frac{k\pi}{2}\right\}^2-2\cos\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2}+\left\{\sin\frac{k\pi}{2}\right\}^2=\frac{1}{4}$$

$$\cos\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2}=\frac{3}{8}=t_2\times t_1$$

즉, $t_1\times t_2=\dfrac{3}{8}$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

26) [정답] **21**

[해설]

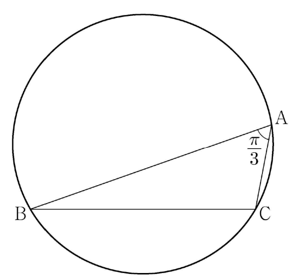
반지름의 길이 $R=15$인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서

$\sin B=\dfrac{7}{10}$이므로 사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=2\times R$에 대입하면

$$\overline{AC}=2\times15\times\frac{7}{10}=21$$

27) [정답] ②

[해설]



원의 반지름이 7이고, 위의 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\times7$$

$$\therefore \overline{BC}=7\sqrt{3}$$

$\overline{AB}$: $\overline{AC}=3$: 1이므로 $\overline{AB}=3x$, $\overline{AC}=x$라 하면 삼각형 ABC에서 제이코사인법칙에 의하여

$$(7\sqrt{3})^2=(3x)^2+x^2-2\times 3x\times x\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$$7x^2=147,\ x^2=21$$

$$\therefore x=\sqrt{21}\ (\because x>0)$$

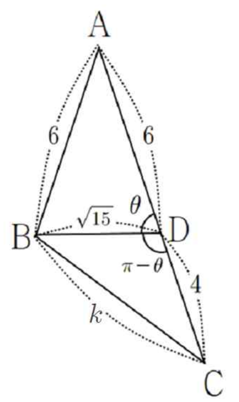
따라서 선분 AC의 길이는 $\overline{AC}=\sqrt{21}$

28) [정답] 41

[해설]

$\overline{AC}=10$, $\overline{AB}=\overline{AD}=6$이므로 $\overline{DC}=4$이다.

$\overline{BC}=k$, $\angle ABD=\theta$라 하면 $\angle BDC=\pi-\theta$이고 다음 그림과 같다.



삼각형 ABD에서 코사인법칙을 쓰면

$$6^2=6^2+\sqrt{15}^2-2\cdot 6\cdot\sqrt{15}\cdot\cos\theta$$

$$36=51-12\sqrt{15}\cos\theta \qquad \cdots\cdots ㉠$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙을 쓰면

$$k^2=4^2+\sqrt{15}^2-2\cdot 4\cdot\sqrt{15}\cdot\cos(\pi-\theta)$$

$$k^2=31+8\sqrt{15}\cos\theta \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하면 $3k^2+72=93+102$

$$\therefore k^2=41$$

29) [정답] ⑤

[해설]

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 대하여

$$\cos A=\frac{6^2+6^2-(\sqrt{15})^2}{2\times 6\times 6}=\frac{57}{72}=\frac{19}{24}$$

이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 대하여

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\cos A$$

$$=6^2+10^2-2\times 6\times 10\times\frac{19}{24}$$

$$=36+100-95$$

$$=41$$

따라서 $\overline{BC}=\sqrt{41}$

30) [정답] ③

[해설]

$\triangle ABC$에서 코사인법칙을 적용하면

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\cos(\angle BAC)$$

$$=4^2+5^2-2\times 4\times 5\times\frac{1}{8}$$

$$=1$$

$$\therefore\overline{BC}=6$$

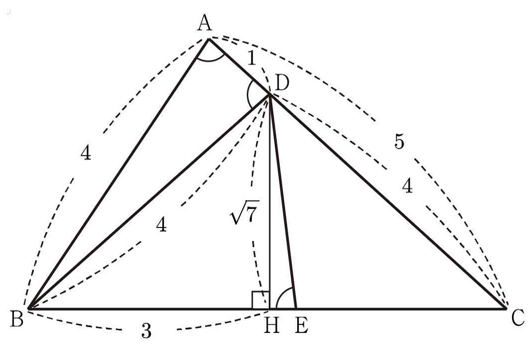
$\triangle ABD$는 이등변삼각형이므로 $\overline{BD}=4$

$\triangle ABD$에서 코사인법칙을 적용하면

$$\overline{DB}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\cos(\angle BAC)$$

$$4^2=4^2+\overline{AD}^2-2\times 4\times\overline{AD}\times\frac{1}{8}$$

따라서 $\overline{AD}=1$, $\overline{CD}=4$



위의 그림에서 $\triangle BCD$는 이등변 삼각형이므로 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{BH}=3$

따라서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{BH}=\sqrt{7}$

$\cos(\angle BAC)=\cos(\angle DEH)=\dfrac{1}{8}$이므로

$$\sin(\angle DEH)=\sqrt{1-\cos^2(\angle DEH)}$$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{64}}$$

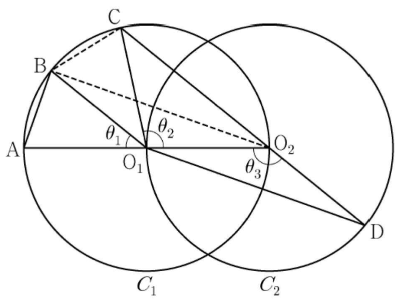
$=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

그런데, $\sin(\angle \mathrm{DEH})=\dfrac{\overline{\mathrm{DH}}}{\overline{\mathrm{DE}}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\overline{\mathrm{DE}}}$이므로 $\dfrac{\sqrt{7}}{\overline{\mathrm{DE}}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

$\therefore \overline{\mathrm{DE}}=\dfrac{8}{3}$

31) [정답] ②

[해설]



$\angle \mathrm{CO_2O_1}+\angle \mathrm{O_1O_2D}=\pi$이므로 $\theta_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}$이고

$\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로 $\angle \mathrm{CO_1B}=\theta_1$이다.

이때, $\angle \mathrm{O_2O_1B}=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로

삼각형 $\mathrm{O_1O_2B}$와 삼각형 $\mathrm{O_2O_1D}$는 합동이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=k$라 할 때,

$\overline{\mathrm{BO_2}}=\overline{\mathrm{O_1D}}=2\sqrt{2}k$이므로

$\overline{\mathrm{AO_2}}=\sqrt{k^2+(2\sqrt{2}k)^2}=\boxed{3k}$이고,

$\angle \mathrm{BO_2A}=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로

$\cos\dfrac{\theta_1}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}k}{3k}=\boxed{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$이다.

삼각형 $\mathrm{O_2BC}$에서

$\overline{\mathrm{BC}}=k$, $\overline{\mathrm{BO_2}}=2\sqrt{2}k$, $\angle \mathrm{CO_2B}=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로 삼각형 $\mathrm{BO_2C}$에서

$\overline{\mathrm{O_2C}}=x$ $(0<x<3k)$라 하면

코사인법칙에 의하여

$k^2=x^2+(2\sqrt{2}k)^2-2\times x\times 2\sqrt{2}k\times\cos\dfrac{\theta_1}{2}$

$k^2=x^2+(2\sqrt{2}k)^2-2\times x\times 2\sqrt{2}k\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$3x^2-16kx+21k^2=0$

$(3x-7k)(x-3k)=0$

$0<x<3k$이므로

$x=\dfrac{7}{3}k$

즉, $\overline{\mathrm{O_2C}}=\boxed{\dfrac{7}{3}k}$이다.

$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{O_2D}}+\overline{\mathrm{O_2C}}=\overline{\mathrm{O_1O_2}}+\overline{\mathrm{O_2C}}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{CD}}=k:\left(\boxed{\dfrac{3k}{2}}+\boxed{\dfrac{7}{3}k}\right)$이다.

이상에서

$f(k)=3k$, $g(k)=\dfrac{7}{3}k$, $p=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

이므로

$f(p)\times g(p)$

$=\left(3\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\left(\dfrac{7}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$=\dfrac{56}{9}$

32) [정답] ③

[해설]

$\angle \mathrm{BAC}=\theta$, $\overline{\mathrm{AC}}=a$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos\theta$

즉,

$2^2=3^2+a^2-2\times3\times a\times\dfrac{7}{8}$

$a^2-\dfrac{21}{4}a+5=0$

$4a^2-21a+20=0$

$(4a-5)(a-4)=0$

따라서 조건에서 $a>3$이므로 $a=4$

$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{CM}}=\dfrac{a}{2}=2$

같은 방법으로 삼각형 ABM에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{MB}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AM}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AM}}\times\cos\theta$

$=3^2+2^2-2\times3\times2\times\dfrac{7}{8}$

$=\dfrac{5}{2}$

이므로

$\overline{\mathrm{MB}}=\sqrt{\dfrac{5}{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

이때 두 삼각형 ABM, DCM은 서로 닮은 도형이므로

$\overline{\mathrm{MA}}\times\overline{\mathrm{MC}}=\overline{\mathrm{MB}}\times\overline{\mathrm{MD}}$

에서

$2\times2=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\times\overline{\mathrm{MD}}$

따라서

$\overline{\mathrm{MD}}=\dfrac{8}{\sqrt{10}}=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

33) [정답] ②

[해설]
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$이므로

사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle\mathrm{BAC})}=4\sqrt{7}$

즉, $\overline{\mathrm{BC}}=\sin\dfrac{\pi}{3}\times4\sqrt{7}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times4\sqrt{7}=2\sqrt{21}$

또, 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이도 $2\sqrt{7}$이므로
삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle\mathrm{BCD})}=4\sqrt{7}$$

즉, $\overline{\mathrm{BD}}=\sin(\angle\mathrm{BCD})\times4\sqrt{7}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\times4\sqrt{7}=8$

한편, $\angle\mathrm{BDC}=\pi-\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{2}{3}\pi$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=x$라 하면
삼각형 BCD에서 코사인 법칙에 의하여

$$(2\sqrt{21})^2=x^2+8^2-2\times x\times8\times\cos\frac{2}{3}\pi$$

$$x^2+8x-20=0,\ (x-2)(x+10)=0$$

$x>0$이므로 $x=2$

즉, $\overline{\mathrm{CD}}=2$

따라서 $\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{CD}}=8+2=10$

34) [정답] **26**

[해설]

$\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\dfrac{3}{2}$이므로 사인법칙에 의하여 두 원의 반지름의
길이의 비는 $3:2$이다.

각각의 반지름의 길이를 $3r$, $2r$라 하면 삼각형 $\mathrm{AOO'}$에서
코사인법칙에서

$1=9r^2+4r^2-12r^2\cos(\pi-(\alpha+\beta))=17r^2$

$r^2=\dfrac{1}{17}$,

$\therefore S=9r^2\pi=\dfrac{9}{17}\pi,\ p+q=26$