[수학1] [지수로그함수] 평가원 최근 10개년

03 수1 01 지수

03 지수법칙의 활용

02 활용2 (정수론)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 21

1. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다. (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

03 수1 01 지수

03 지수법칙의 활용

04 활용4 (실생활)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 15

2. 지면으로부터 H_1인 높이에서 풍속이 V_1이고 지면으로부터 H_2인 높이에서 풍속이 V_2일 때, 대기 안정도 계수 k는 다음 식을 만족시킨다.

$$V_2 = V_1 \times \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{\frac{2}{2-k}}$$

(단, $H_1 < H_2$이고, 높이의 단위는 m, 풍속의 단위는 m/초이다.)

A지역에서 지면으로부터 12 m와 36 m인 높이에서 풍속이 각각 2 (m/초)와 8 (m/초)이고, B지역에서 지면으로부터 10 m와 90 m인 높이에서 풍속이 각각 a (m/초)와 b (m/초)일 때, 두 지역의 대기 안정도 계수 k가 서로 같았다. $\frac{b}{a}$의 값은? (단, a, b는 양수이다.)

① 10 ② 13 ③ 16

④ 19 ⑤ 22

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 24

3. 지면으로부터 H_1인 높이에서 풍속이 V_1이고 지면으로부터 H_2인 높이에서 풍속이 V_2일 때, 대기 안정도 계수 k는 다음 식을 만족시킨다.

$$V_2 = V_1 \times \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{\frac{2}{2-k}}$$

(단, $H_1 < H_2$이고, 높이의 단위는 m, 풍속의 단위는 m/초이다.)

A지역에서 지면으로부터 12m와 36m인 높이에서 풍속이 각각 2(m/초)와 8(m/초)이고, B지역에서 지면으로부터 10m와 90m인 높이에서 풍속이 각각 a(m/초)와 b(m/초)일 때, 두 지역의 대기 안정도 계수 k가 서로 같았다. $\frac{b}{a}$의 값을 구하시오. (단, a, b는 양수이다.)

03 수1 02 로그

02 로그의 성질

03 로그의 성질3 (밑 변환)

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 09월 13

4. 두 실수 a, b가

$$ab = \log_3 5,\ b - a = \log_2 5$$

를 만족시킬 때, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$의 값은?

① $\log_5 2$ ② $\log_3 2$ ③ $\log_3 5$

④ $\log_2 3$ ⑤ $\log_2 5$

03 수1 02 로그

02 로그의 성질

05 로그의 성질5 (문자로 나타내기)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 8

5. $\log_2 5 = a$, $\log_5 3 = b$일 때, $\log_5 12$를 a, b로 옳게 나타낸 것은?

① $\frac{1}{a}+b$ ② $\frac{2}{a}+b$ ③ $\frac{1}{a}+2b$

④ $a+\frac{1}{b}$ ⑤ $2a+\frac{1}{b}$

03 수1 02 로그

02 로그의 성질

06 로그의 성질6 (식의 값 구하기)

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 11월 16

6. 1보다 큰 두 실수 a, b에 대하여

$$\log_{\sqrt{3}} a = \log_9 ab$$

가 성립할 때, $\log_a b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 28

7. 네 양수 a, b, c, k가 다음 조건을 만족시킬 때, k^2의 값을 구하시오.

(가) $3^a = 5^b = k^c$

(나) $\log c = \log(2ab) - \log(2a+b)$

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 11

8. 1보다큰 세 실수 a, b, c가

$$\log_a b = \frac{\log_b c}{2} = \frac{\log_c a}{4}$$

를 만족시킬 때, $\log_a b + \log_b c + \log_c a$의 값은?

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$

④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

03 수1 02 로그

02 로그의 성질

09 로그의 성질 활용2 (해석)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 11

9. 좌표평면 위의 두 점 $(2, \log_4 2)$, $(4, \log_2 a)$를 지나는 직선이 원점을 지날 때, 양수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 13

10. 두 상수 a, b $(1<a<b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a,\ \log_2 a)$, $(b,\ \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a,\ \log_4 a)$, $(b,\ \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다. 함수 $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$에 대하여 $f(1)=40$일 때, $f(2)$의 값은?

① 760 ② 800 ③ 840
④ 880 ⑤ 920

03 수1 02 로그

02 로그의 성질

13 로그의 성질 활용6 (정수론)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 06월 30

11. 다음 조건을 만족시키는 20 이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

$\log_2(na-a^2)$과 $\log_2(nb-b^2)$은 같은 자연수이고 $0<b-a\le\frac{n}{2}$인 두 실수 a, b가 존재한다.

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 15

12. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $5\log_n 2$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은?

① 34 ② 38 ③ 42
④ 46 ⑤ 50

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 21

13. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오.

03 수1 02 로그

02 로그의 성질

14 로그의 성질 활용7 (실생활)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 예비 25

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 예비 28

14. 통신이론에서 신호의 주파수 대역폭이 B(Hz)이고 신호잡음전력비가 x일 때, 전송할 수 있는 신호의 최대 전송 속도 C(bps)는 다음과 같이 계산된다고 한다.

$$C = B \times \log_2(1+x)$$

신호의 주파수 대역폭이 일정할 때, 신호잡음전력비를 a에서 $33a$로 높였더니 신호의 최대 전송 속도가 2배가 되었다. 양수 a의 값을 구하시오. (단, 신호잡음전력비는 잡음전력에 대한 신호전력의 비이다.)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 06월

15. 세대당 종자의 평균 분산거리가 D이고 세대당 종자의 증식률이 R인 나무의 10세대 동안 확산에 의한 이동거리를 L이라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$L^2 = 100D^2 \times \log_3 R$$

세대당 종자의 평균 분산거리가 20이고 세대당 종자의 증식률이 81인 나무의 10세대 동안 확산에 의한 이동거리 L의 값은? (단, 거리의 단위는 m이다.)

① 400 ② 500 ③ 600
④ 700 ⑤ 800

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 06월

16. 세대당 종자의 평균 분산거리가 D이고 세대당 종자의 증식률이 R인 나무의 10세대 동안 확산에 의한 이동거리를 L이라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$L^2 = 100D^2 \times \log_3 R$$

세대당 종자의 평균 분산거리가 각각 20, 30인 A나무와 B나무의 세대당 종자의 증식률을 각각 R_A, R_B라 하고 10세대 동안 확산에 의한 이동거리를 각각 L_A, L_B라 하자.
$\frac{R_A}{R_B} = 27$이고 $L_A = 400$일 때, L_B의 값은?
(단, 거리의 단위는 m이다.)

① 200 ② 300 ③ 400
④ 500 ⑤ 600

03 수1 02 로그

03 상용로그

06 추론과 활용1 (빼거나 더해서 정수)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 09월 20

17. 자연수 n에 대하여 실수 a가 $10^n < a < 10^{n+1}$을 만족시킨다. $\log a$의 소수 부분과 $\log \sqrt[n]{a}$의 소수 부분의 합이 정수이고 $(n+1)\log a = n^2 + 8$일 때, $\dfrac{\log a}{n}$의 값은?

① $\dfrac{57}{56}$ ② $\dfrac{22}{21}$ ③ $\dfrac{11}{10}$
④ $\dfrac{6}{5}$ ⑤ $\dfrac{17}{12}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 10

18. $\dfrac{1}{2} < \log a < \dfrac{11}{2}$ 인 양수 a에 대하여 $\dfrac{1}{3} + \log \sqrt{a}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은?

① 10^{10} ② 10^{11} ③ 10^{12}
④ 10^{13} ⑤ 10^{14}

03 수1 02 로그

03 상용로그

07 추론과 활용2 (소수부분의 범위와 표현)

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 06월 20

19. 양수 t에 대하여 $\log t$의 소수부분을 $f(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 양수 t의 개수를 a_n이라 할 때, a_4+a_5의 값은?

(가) $1 \le t < 100$

(나) $f(t^n)+2f(t)=1$

① 8 ② 10 ③ 12

④ 14 ⑤ 16

03 수1 02 로그

03 상용로그

08 추론과 활용3 (추론과 정수론)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 11월 20

20. 1보다 큰 실수 x에 대하여 $\log x$의 정수부분과 소수부분을 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. $3f(x)+5g(x)$의 값이 10의 배수가 되도록 하는 x의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때 2번째 수를 a, 6번째 수를 b라 하자. $\log ab$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12

④ 14 ⑤ 16

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 30

21. 자연수 k에 대하여 $\log k$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 x좌표와 y좌표로 갖는 점을 P_k라 하자. 다음 조건을 만족시키는 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오.

(가) $1 \le m < n < 100$
(나) $\overline{\mathrm{P}_m\mathrm{P}_n} = \sqrt{1+(\log 2)^2}$

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 06월

22. 양수 x에 대하여 $\log x$의 소수 부분을 $f(x)$라 하자. 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오.

(가) $a \le b \le 20$
(나) $\log b - \log a \le f(a) - f(b)$

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 06월 20

23. 양수 x에 대하여 $\log x$의 정수부분을 $f(x)$라 할 때

$$f(ab) = f(a)f(b) + 2$$

를 만족시키는 20 이하의 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최솟값은?

① 19 ② 20 ③ 21
④ 22 ⑤ 23

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 11월

24. 양수 x에 대하여 $\log x$의 정수부분을 $f(x)$라 하자.

$$f(n+10)=f(n)+1$$

을 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수는?

① 11 ② 13 ③ 15

④ 17 ⑤ 19

03 수1 02 로그

03 상용로그

09 추론과 활용4 (실생활 활용)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 11월 25

25. 단면의 반지름의 길이가 $R(R<1)$인 원기둥 모양의 어느 급수관에 물이 가득 차 흐르고 있다. 이 급수관의 단면의 중심에서의 물의 속력을 v_c, 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 $x(0<x\le R)$만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력을 v라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\frac{v_c}{v}=1-k\log\frac{x}{R}$$

(단, k는 양의 상수이고, 길이의 단위는 m, 속력의 단위는 m/초이다.)

$R<1$인 이 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 $R^{\frac{27}{23}}$만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력이 중심에서의 물의 속력의 $\frac{1}{2}$일 때, 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 R^a만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력이 중심에서의 물의 속력의 $\frac{1}{3}$이다. $23a$의 값을 구하시오.

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 11월 10

26. 단면의 반지름의 길이가 $R(R<1)$인 원기둥 모양의 어느 급수관에 물이 가득 차 흐르고 있다. 이 급수관의 단면의 중심에서의 물의 속력을 v_c, 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 $x(0<x\le R)$만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력을 v라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\frac{v_c}{v}=1-k\log\frac{x}{R}$$

(단, k는 양의 상수이고, 길이의 단위는 m, 속력의 단위는 m/초이다.)

$R<1$인 이 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 $R^{\frac{27}{23}}$만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력이 중심에서의 물의 속력의 $\frac{1}{2}$일 때, 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 R^a만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력이 중심에서의 물의 속력의 $\frac{1}{3}$이다. a의 값은?

① $\frac{39}{23}$ ② $\frac{37}{23}$ ③ $\frac{35}{23}$

④ $\frac{33}{23}$ ⑤ $\frac{31}{23}$

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 11월 10

27. 디지털 사진을 압축할 때 원본 사진과 압축한 사진의 다른 정도를 나타내는 정수부분인 최대 신호 대 잡음비를 P, 원본 사진과 압축한 사진의 평균제곱오차를 E라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$P=20\log 255-10\log E \quad (E>0)$$

두 원본 사진 A, B를 압축했을 때 최대 신호 대 잡음비를 각각 P_A, P_B라 하고, 평균제곱오차를 각각 $E_A\,(E_A>0)$, $E_B\,(E_B>0)$이라 하자. $E_B=100E_A$일 때, P_A-P_B의 값은?

① 30 ② 25 ③ 20

④ 15 ⑤ 10

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 09월

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 09월

28. 도로용량이 C인 어느 도로구간의 교통량을 V, 통행시간을 t라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log\left(\frac{t}{t_0}-1\right)=k+4\log\frac{V}{C}\quad (t>t_0)$$

(단, t_0은 도로 특성 등에 따른 기준통행시간이고, k는 상수이다.)

이 도로구간의 교통량이 도로용량의 2배일 때, 통행시간은 기준통행시간 t_0의 $\frac{7}{2}$배이다. k의 값은?

① $-4\log2$ ② $1-7\log2$ ③ $-3\log2$

④ $1-6\log2$ ⑤ $1-5\log2$

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 11월 25

29. 디지털 사진을 압축할 때 원본 사진과 압축한 사진의 다른 정도를 나타내는 지표인 최대 신호 대 잡음비를 P, 원본 사진과 압축한 사진의 평균제곱오차를 E라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$P=20\log255-10\log E\ (E>0)$$

두 원본 사진 A, B를 압축했을 때 최대 신호 대 잡음비를 각각 P_A, P_B라 하고, 평균제곱오차를 각각 $E_A(E_A>0)$, $E_B(E_B>0)$이라 하자. $E_B=100E_A$일 때, P_A-P_B의 값을 구하시오.

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 09월 25

30. 고속철도의 최고소음도 L(dB)을 예측하는 모형에 따르면 한 지점에서 가까운 선로 중앙 지점까지의 거리를 d(m), 열차가 가까운 선로 중앙 지점을 통과할 때의 속력을 v(km/h)라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$L = 80 + 28\log\frac{v}{100} - 14\log\frac{d}{25}$$

가까운 선로 중앙 지점 P까지의 거리가 75 m인 한 지점에서 속력이 서로 다른 두 열차 A, B의 최고소음도를 예측하고자 한다. 열차 A가 지점 P를 통과할 때의 속력이 열차 B가 지점 P를 통과할 때의 속력의 0.9배일 때, 두 열차 A, B의 예측 최고소음도를 각각 L_A, L_B라 하자. $L_B - L_A$의 값을 $a + b\log 3$이라 할 때, $a - b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 정수이다.)

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 09월 16

31. 고속철도의 최고소음도 L(dB)을 예측하는 모형에 따르면 한 지점에서 가까운 선로 중앙 지점까지의 거리를 d(m), 열차가 가까운 선로 중앙 지점을 통과할 때의 속력을 v(km/h)라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$L = 80 + 28\log\frac{v}{100} - 14\log\frac{d}{25}$$

가까운 선로 중앙 지점 P까지의 거리가 75 m인 한 지점에서 속력이 서로 다른 두 열차 A, B의 최고소음도를 예측하고자 한다. 열차 A가 지점 P를 통과할 때의 속력이 열차 B가 지점 P를 통과할 때의 속력의 0.9배일 때, 두 열차 A, B의 예측 최고소음도를 각각 L_A, L_B라 하자. $L_B - L_A$의 값은?

① $14 - 28\log 3$　② $28 - 56\log 3$
③ $28 - 28\log 3$　④ $56 - 84\log 3$
⑤ $56 - 56\log 3$

03 수1 03 지수함수

01 지수함수의 그래프

05 지수함수의 그래프의 해석1 (기본)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 7

32. 함수 $f(x)=-2^{4-3x}+k$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않도록 하는 자연수 k의 최댓값은?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

03 수1 03 지수함수

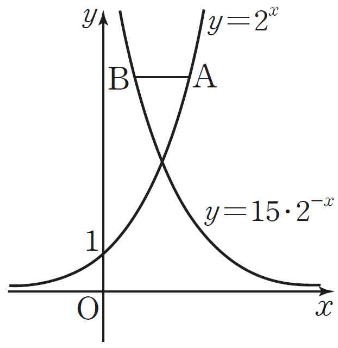
01 지수함수의 그래프

06 지수함수의 그래프의 해석2 (길이와 넓이)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 17

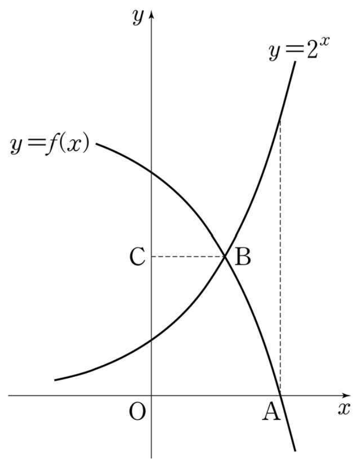
[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 20

33. 그림과 같이 함수 $y=2^x$ 의 그래프 위의 한 점 A를 지나고 x 축에 평행한 직선이 함수 $y=15\cdot2^{-x}$ 의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 점 A의 x 좌표를 a 라 할 때, $1<\overline{\mathrm{AB}}<100$ 을 만족시키는 2 이상의 자연수 a 의 개수는?



① 40 ② 43 ③ 46
④ 49 ⑤ 52

곡선 $y=-2^{x}$을 y축의 방향으로 m만큼 평행이동시킨 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점을 A라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $m>2$이다.)



[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 예비 8

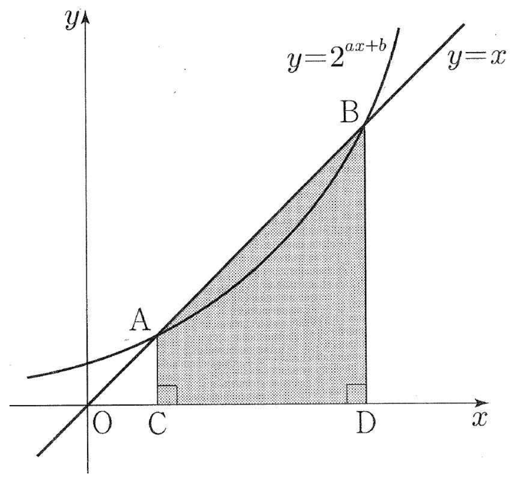
34. 곡선 $y=2^{x}$이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 B, 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 C라 하자. $\overline{\mathrm{OA}}=2\overline{\mathrm{BC}}$일 때, m의 값은?

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$
④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 13

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 15

35. 곡선 $y=2^{ax+b}$과 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=6\sqrt{2}$이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 9

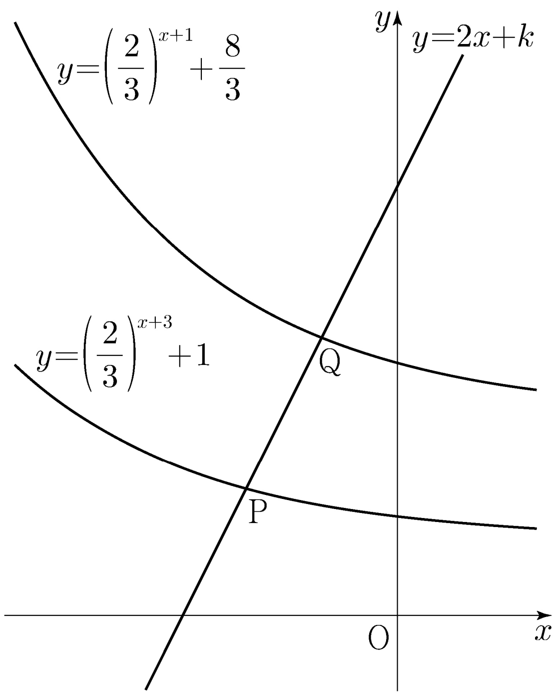
36. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\ y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$

④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$



03 수1 03 지수함수

02 지수함수의 최대와 최소

01 Mm1 (기본그래프)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 06월

37. $-1\le x\le 3$에서 두 함수

$$f(x)=2^x,\ g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$$

의 최댓값을 각각 a, b라 하자. ab의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 09월 7

38. $0<a<1$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=a^x$은 $-2\le x\le 1$에서 최솟값 $\frac{5}{6}$, 최댓값 M을 갖는다. $a\times M$의 값은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$

④ 1 ⑤ $\frac{6}{5}$

03 수1 03 지수함수

03 지수방정식과 부등식

06 지수부등식1 (기본)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 11월 15

39. 지수부등식 $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x}\le 5^{x+4}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은?

① 11 ② 12 ③ 13

④ 13 ⑤ 15

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 7

40. 부등식 $\frac{27}{9^x}\ge 3^{x-9}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

03 수1

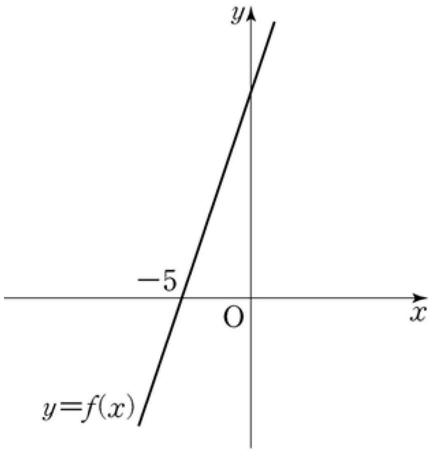
03 지수함수

04 지수함수의 활용

01 활용1 (부등식과 그래프)

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 06월 28

41. 일차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고 $f(-5)=0$이다. 부등식 $2^{f(x)} \le 8$의 해가 $x \le -4$일 때, $f(0)$의 값을 구하시오.



03 수1

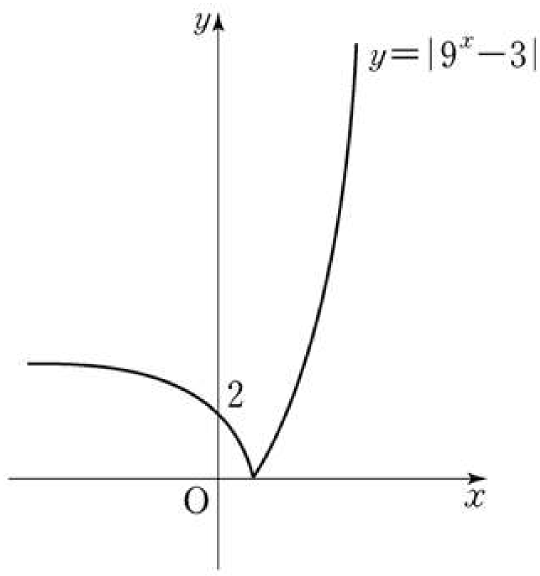
03 지수함수

04 지수함수의 활용

03 활용3 (지수방정식의 실근 조건, 그래프로 해석)

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 06월 18

42. 좌표평면 위의 두 곡선 $y=|9^x-3|$과 $y=2^{x+k}$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 x_1, $x_2(x_1<x_2)$라 할 때, $x_1<0$, $0<x_2<2$를 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은?



① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

03 수1 03 지수함수

04 지수함수의 활용

05 활용5 (그래프를 이용한 대소 비교)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 18

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 21

43. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자. $x_1<x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $x_2>\frac{1}{2}$

ㄴ. $y_2-y_1<x_2-x_1$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2<1$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 수1 03 지수함수

04 지수함수의 활용

07 활용7 (격자점 문제)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 11월 30

44. 좌표평면에서 $a>1$인 자연수 a에 대하여 두 곡선 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 20 이상 40 이하가 되도록 하는 a의 개수를 구하시오.

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 09월

45. 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오.

> (가) $1 \le a \le 10$, $1 \le b \le 100$
>
> (나) 곡선 $y = 2^x$이 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$과 만나지 않는다.
>
> (다) 곡선 $y = 2^x$이 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 4$와 적어도 한 점에서 만난다.

03 수1 03 지수함수

04 지수함수의 활용

08 활용8 (실생활 활용)

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 11월

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 11월

46. 어느 금융상품에 초기자산 W_0을 투자하고 t년이 지난 시점에서의 기대자산 W가 다음과 같이 주어진다고 한다.

$$W = \frac{W_0}{2} 10^{at}\left(1 + 10^{at}\right)$$

(단, $W_0 > 0$, $t \ge 0$이고, a는 상수이다.)

이 금융상품에 초기자산 w_0을 투자하고 15년이 지난 시점에서의 기대자산은 초기자산의 3배이다. 이 금융상품에 초기자산 w_0을 투자하고 30년이 지난 시점에서의 기대자산이 초기자산의 k배일 때, 실수 k의 값은? (단, $w_0 > 0$)

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

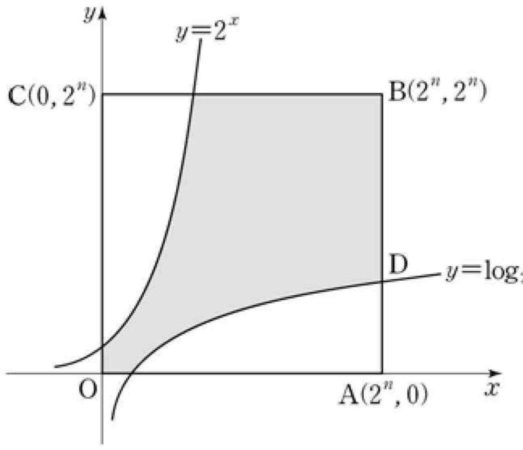
03 수1

04 로그함수

01 로그함수의 그래프

05 로그함수의 그래프의 해석1 (기본)

좌표평면에서 꼭짓점의 좌표가 O(0, 0), A$(2^n, 0)$, B$(2^n, 2^n)$, C$(0, 2^n)$인 정사각형 OABC와 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, n은 자연수이다.)



[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 09월 13

47. 선분 AB가 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 D라 하자. 선분 AD를 $2:3$으로 내분하는 점을 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 E, 점 E를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 F라 하자. 점 F의 y좌표가 16일 때, 직선 DF의 기울기는?

① $-\frac{13}{28}$ ② $-\frac{25}{56}$ ③ $-\frac{3}{7}$

④ $-\frac{23}{56}$ ⑤ $-\frac{11}{28}$

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 06월

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 06월

48. $0<a<1<b$인 두 실수 a, b에 대하여 두 함수

$$f(x)=\log_a(bx-1),\ g(x)=\log_b(ax-1)$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점이 곡선 $y=g(x)$의 점근선 위에 있도록 하는 a와 b 사이의 관계식과 a의 범위를 옳게 나타낸 것은?

① $b=-2a+2\left(a<a<\frac{1}{2}\right)$ ② $b=2a\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$

③ $b=2a\left(\frac{1}{2}<a<1\right)$ ④ $b=2a+1\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$

⑤ $b=2a+1\left(\frac{1}{2}<a<1\right)$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 10

49. $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x,\ y=-\log_n(x+3)+1$$

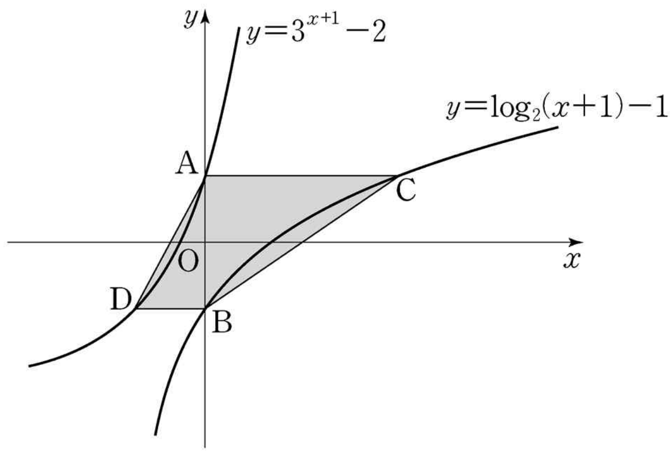
이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은?

① 30 ② 35 ③ 40
④ 45 ⑤ 50

03 수1	04 로그함수
01 로그함수의 그래프	
06 로그함수의 그래프의 해석2 (길이와 넓이)	

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 09월

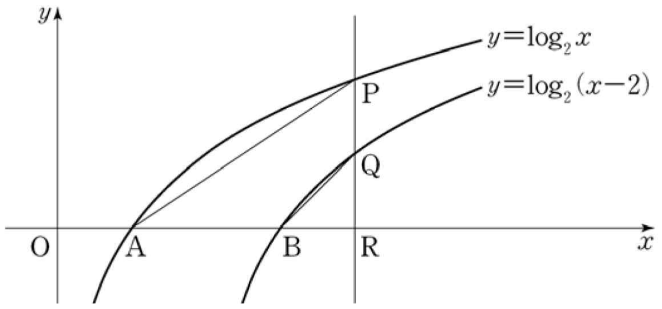
50. 그림과 같이 두 곡선 $y=3^{x+1}-2$, $y=\log_2(x+1)-1$이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2(x+1)-1$과 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=3^{x+1}-2$와 만나는 점을 D라 할 때, 사각형 ADBC의 넓이는?



① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$
④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 09월 12

51. 그림과 같이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 직선 $x=k(k>0)$이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, x축과 만나는 점을 R라 하자. 점 Q가 선분 PR의 중점일 때, 사각형 ABQP의 넓이는?

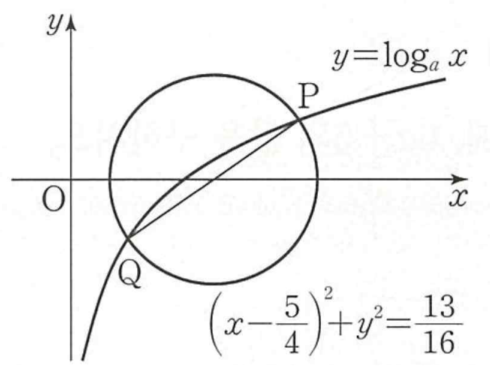


① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$

④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 09월 16

52. $a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와 원 $C:\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$의 두 교점을 P, Q라 하자. 선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a의 값은?



① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4

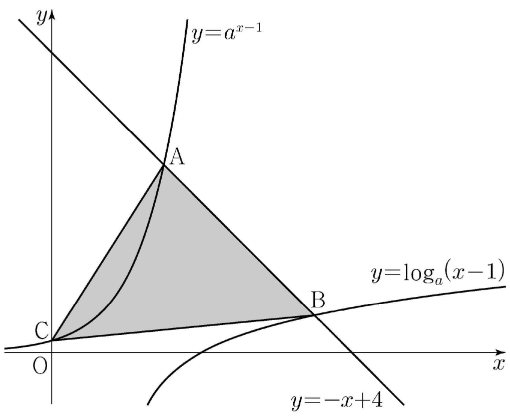
④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 21

53. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\ y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오.



03 수1 04 로그함수

02 로그함수의 최대와 최소

03 Mm3 (치환)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 17

54. $\angle\mathrm{A}=90^\circ$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2\log_2 x$, $\overline{\mathrm{AC}}=\log_4\dfrac{16}{x}$인 삼각형 ABC의 넓이를 $S(x)$라 하자. $S(x)$가 $x=a$에서 최댓값 M를 가질 때, $a+M$의 값은? (단, $1<x<16$)

① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

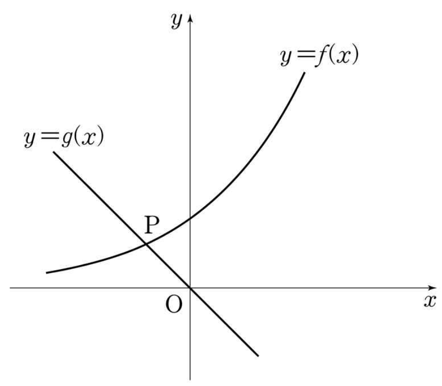
03 수1 04 로그함수

03 지수함수와 로그함수의 역함수 관계

01 역함수1 (역함수의 함숫값)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 예비 9

55. 좌표평면에서 함수 $f(x)=2^x$의 그래프와 함수 $g(x)=-x$의 그래프가 만나는 점을 $\mathrm{P}(a,\ -a)$라 할 때, 옳은 것만을
<보기>에서 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $a<-1$

ㄴ. $t>0$이면 $|f(-t)-g(-t)|<|f(t)-g(t)|$이다.

ㄷ. 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 좌표는 $(-a,\ a)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

03 수1 04 로그함수

03 지수함수와 로그함수의 역함수 관계

02 역함수2 (역함수 구하기)

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 06월 15

56. 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y=f(x)$라 하자. 함수 $f(x)$의 역함수가
$f^{-1}(x)=3^{x-2}+4$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

03 수1

04 로그함수

03 지수함수와 로그함수의 역함수 관계

03 역함수3 (y=x대칭)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 5

57. 함수 $y=2^x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=\log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 m의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

03 수1

04 로그함수

04 로그방정식과 부등식

01 로그방정식1 (기본)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 09월

58. 로그방정식 $\log_8 x-\log_8(x-7)=\frac{1}{3}$ 의 해를 구하시오.

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 09월 8

59. 로그방정식 $\log_2(4+x)+\log_2(4-x)=3$ 을 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 곱은?

① -10 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 23

60. 방정식 $2\log_4(5x+1)=1$ 의 실근을 α 라 할 때, $\log_5\dfrac{1}{\alpha}$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 24

61. 방정식 $\log_2 x = 1+\log_4(2x-3)$ 을 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 곱을 구하시오.

03 수1 04 로그함수

04 로그방정식과 부등식

04 로그방정식4 (근과 계수의 관계)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 09월 25

62. 방정식 $(\log_3 x)^2-6\log_3\sqrt{x}+2=0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, β 라 할 때, $\alpha\beta$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 27

63. 방정식 $x^{\log_2 x}=8x^2$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, $\alpha\beta$ 의 값을 구하시오.

03 수1 04 로그함수

04 로그방정식과 부등식

05 로그방정식5 (해석)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 15

64. 지수함수 $y=a^x\,(a>1)$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$이 만나는 점을 A라 하자. 점 B(4, 0)에 대하여 직선 OA와 직선 AB가 서로 수직이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? (단, O는 원점이다.)

① $3^{\frac{1}{3}}$ ② $3^{\frac{2}{3}}$ ③ 3

④ $3^{\frac{4}{3}}$ ⑤ $3^{\frac{5}{3}}$

03 수1 04 로그함수

04 로그방정식과 부등식

06 로그부등식1 (기본)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 예비 6

65. 로그부등식 $\log_{\sqrt{2}}|x|<5$를 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 6 ② 8 ③ 10

④ 12 ⑤ 14

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 06월 10

66. 부등식 $\log_3(x-1)+\log_3(4x-7)\le 3$을 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 06월 8

67. 부등식 $2\log_2|x-1| \le 1-\log_2\frac{1}{2}$ 을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

03 수1 04 로그함수

04 로그방정식과 부등식

09 로그부등식4 (해의 조건)

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 11월

68. x에 대한 로그부등식

$$\log_5(x-1) \le \log_5\left(\frac{1}{2}x+k\right)$$

를 만족시키는 모든 정수 x의 개수가 3일 때, 자연수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

03 수1 04 로그함수

05 로그함수의 활용

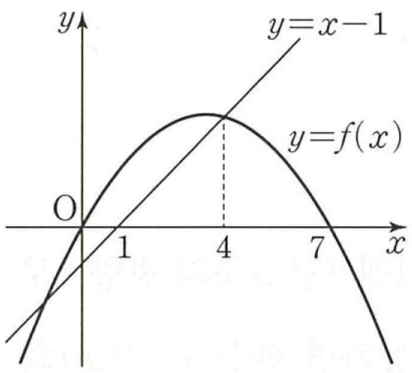
01 활용1 (방, 부등식과 그래프)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 24

69. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x-1$이 그림과 같을 때, 부등식

$$\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\le 0$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. (단, $f(0)=f(7)=0$, $f(4)=3$)



03 수1 04 로그함수

05 로그함수의 활용

03 활용3 (로그방정식의 실근 조건, 그래프로 해석)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 예비 20

70. 정의역이 $\{x|1\le x<100\}$이고 함숫값이 $\log x$의 소수부분인 함수를 $f(x)$라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2-\frac{x}{n}$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 자연수 n의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

03 수1 04 로그함수

05 로그함수의 활용

06 활용6 (추론과 해석)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 11월 14

71. 자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$$f(n)=\begin{cases}\log_3 n & (n\text{이 홀수})\\ \log_2 n & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

20 이하의 두 자연수 m, n에 대하여 $f(mn)=f(m)+f(n)$을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수는?

① 220 ② 230 ③ 240
④ 250 ⑤ 260

03 수1 04 로그함수

05 로그함수의 활용

07 활용7 (격자점 문제)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 11월 30

72. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 삼각형 OAB의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

(가) 점 A의 좌표는 $(-2,\ 3^n)$이다.

(나) 점 B의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, a와 b는 자연수이고 $b \le \log_2 a$를 만족시킨다.

(다) 삼각형 OAB의 넓이는 50 이하이다.

03 수1　　04 로그함수

05 로그함수의 활용

08 활용8 (실생활 활용)

[출처]　2013 모의_공공 평가원 고3 09월 10

[출처]　2013 모의_공공 평가원 고3 09월 17

73. 질량 a(g)의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 c(%)인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량 b(g)는 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$\log\frac{b}{a}=-1+k\log c$ (단, k는 상수이다.)

10 g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 8 %인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량은 4 g이다. 20 g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 27 %인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량(g)은? (단, 각 용액의 양은 충분하다.)

① 10　② 12　③ 14

④ 16　⑤ 18

[수학1] [지수로그함수] 평가원 최근 10개년(빠른 정답)

년도별경향 2022.12.16

1. [정답] 24
2. [정답] ③
3. [정답] 16
4. [정답] ④
5. [정답] ②

6. [정답] ③
7. [정답] 75
8. [정답] ①
9. [정답] ②
10. [정답] ②

11. [정답] 78
12. [정답] ①
13. [정답] 426
14. [정답] 31
15. [정답] ①

16. [정답] ②
17. [정답] ④
18. [정답] ①
19. [정답] ③
20. [정답] ⑤

21. [정답] 12
22. [정답] 71
23. [정답] ③
24. [정답] ⑤
25. [정답] 31

26. [정답] ⑤
27. [정답] ③
28. [정답] ④
29. [정답] 20
30. [정답] 84

31. [정답] ②
32. [정답] ④
33. [정답] ④
34. [정답] ②
35. [정답] ④

36. [정답] ④
37. [정답] 32
38. [정답] ⑤
39. [정답] ⑤
40. [정답] ④

41. [정답] 15
42. [정답] ②
43. [정답] ⑤
44. [정답] 15
45. [정답] 196

46.[정답] ②
47. [정답] ⑤
48. [정답] ③
49. [정답] ②
50. [정답] ⑤

51. [정답] ③
52. [정답] ③
53. [정답] 192
54. [정답] ①
55. [정답] ⑤

56. [정답] ④
57. [정답] ③
58. [정답] 14
59. [정답] ②
60. [정답] 1

61. [정답] 12
62. [정답] 27
63. [정답] 4
64. [정답] ②
65. [정답] ③

66. [정답] ③
67. [정답] ②
68. [정답] ①
69. [정답] 15
70. [정답] ⑤

71. [정답] ①

72. [정답] 120

73. [정답] ⑤

[수학1] [지수로그함수] 평가원 최근 10개년(해설)

년도별경향 2022.12.16

1) [정답] **24**

[해설]

(가)조건에서 $(x^n-64)f(x)=0$의 서로 다른 실근은 모두 중근이므로 n은 짝수이어야 한다.

(가)조건을 만족시키는 $f(x)$를 $f(x)=(x-\alpha)(x+\alpha)$라 하면 (나)조건에서 $f(x)$의 최솟값이 음의 정수라 했으므로 $f(x)$의 최솟값 $f(0)=-\alpha^2$에서 α^2은 정수이다. …… ㉠

또한, (가)에서 $x^n-64=0$이 $x=\alpha,\ -\alpha$를 가져야 하므로

$\alpha^n=64=2^6$, 즉 $\alpha=2^{\frac{6}{n}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha^2=2^{\frac{12}{n}}$을 만족하는 정수이어야 하므로 n은 12의 약수 중 짝수가 되어야 한다.

즉, 12의 약수인 짝수는 2, 4, 6, 12이므로 만족하는 n의 값은 2, 4, 6, 12이다.

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은 24

2) [정답] ③

[해설]

A지역에서 $H_1=12,\ H_2=36,\ V_1=2,\ V_2=8$이므로

$4=3^{\frac{2}{2-k}}$

B지역에서 $H_1=10,\ H_2=90,\ V_1=a,\ V_2=b$이므로

$\frac{b}{a}=9^{\frac{2}{2-k}}$

두 지역의 대기 안정도 계수 k가 서로 같으므로

$$\frac{b}{a}=9^{\frac{2}{2-k}}=(3^2)^{\frac{2}{2-k}}=\left(3^{\frac{2}{2-k}}\right)^2=4^2=16$$

3) [정답] 16

[해설]

A지역에서

$$8=2\times\left(\frac{36}{12}\right)^{\frac{2}{2-k}}$$

$\therefore\ 3^{\frac{2}{2-k}}=4$ ……㉠

B지역에서

$$b=a\times\left(\frac{90}{10}\right)^{\frac{2}{2-k}}$$

$\therefore\ 9^{\frac{2}{2-k}}=\frac{b}{a}$ ……㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$9^{\frac{2}{2-k}}=16$이므로

㉡에서 $\frac{b}{a}=16$

4) [정답] ④

[해설]

$ab=\log_3 5,\ b-a=\log_2 5$이므로

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}=\frac{\log_2 5}{\log_3 5}=\frac{\frac{\log 5}{\log 2}}{\frac{\log 5}{\log 3}}=\frac{\log 3}{\log 2}=\log_2 3$$

5) [정답] ②

[해설]

$\log_2 5=a,\ \log_5 3=b$에서 밑을 5로 통일하면

$\log_5 2=\frac{1}{a},\ \log_5 3=b$ …… ㉠

$$\begin{aligned}\log_5 12&=\log_5(2^2\times 3)\\&=\log_5 2^2+\log_5 3\\&=2\log_5 2+\log_5 3\\&=\frac{2}{a}+b\ (\because\ ㉠)\end{aligned}$$

6) [정답] ③

[해설]

$\log_{\sqrt{3}}a = 2\log_3 a = 4\log_9 a = \log_9 a^4$이므로

$\log_9 a^4 = \log_9 ab$에서

$a^4 = ab$

$a(a^3 - b) = 0$에서 $b = a^3$

따라서 $\log_a b = \log_a a^3 = 3$

7) [정답] 75

[해설]

$3^a = 5^b = k^c = X$라고 하면 $3 = X^{\frac{1}{a}}, 5 = X^{\frac{1}{b}}, k = X^{\frac{1}{c}}$이다.

한편 주어진 조건에서 $\frac{1}{c} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{b}$이므로

$X^{\frac{1}{c}} = X^{\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}} = X^{\frac{1}{2a}}X^{\frac{1}{b}}$이다. 즉, $k = \sqrt{3}\times 5$이다. 따라서 $k^2 = 75$이다.

8) [정답] ①

[해설]

$\log_a b = \frac{\log_b c}{2} = \frac{\log_c a}{4} = k$라 하면

$\log_a b = k,\ \log_b c = 2k,\ \log_c a = 4k$ …… ㉠

㉠을 모두 곱하면 $1 = 8k^3$

$\therefore\ k = \frac{1}{2}$ (단, a, b, c는 1보다 큰 실수)

$\log_a b + \log_b c + \log_c a$

$= k + 2k + 4k = 7k$

$= \frac{7}{2}$

9) [정답] ②

[해설]

두 점 $(2,\ \log_4 2)$, $(4,\ \log_2 a)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{\log_2 a - \log_4 2}{4-2}(x-2) + \log_4 2,$$

$$y = \frac{\log_2 a - \frac{1}{2}}{2}(x-2) + \frac{1}{2}$$

$$\therefore y = \frac{2\log_2 a - 1}{4}x - \log_2 a + 1$$

이 직선이 원점을 지나므로

$0 = -\log_2 a + 1,\ \log_2 a = 1$

$\therefore\ a = 2$

10) [정답] ②

[해설]

두 점 $(a,\ \log_2 a)$, $(b,\ \log_2 b)$를 지나는 직선의 방정식은

$y = \frac{\log_2 b - \log_2 a}{b-a}(x-a) + \log_2 a$

그러므로 이 직선의 y절편은

$-\frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b-a} + \log_2 a$ …… ㉠

두 점 $(a,\ \log_4 a)$, $(b,\ \log_4 b)$를 지나는 직선의 방정식은

$y = \frac{\log_4 b - \log_4 a}{b-a}(x-a) + \log_4 a$

그러므로 이 직선의 y절편은

$-\frac{a(\log_4 b - \log_4 a)}{b-a} + \log_4 a$

$= -\frac{1}{2}\times\frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b-a} + \frac{1}{2}\log_2 a$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같으므로

$-\frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b-a} + \log_2 a$

$= -\frac{1}{2}\times\frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b-a} + \frac{1}{2}\log_2 a$

이 식을 정리하면

$\frac{1}{2}\times\log_2 a = \frac{1}{2}\times\frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b-a}$

$\log_2 a = \frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b-a}$

$(b-a)\log_2 a = a\log_2\frac{b}{a}$

$\log_2 a^{b-a} = \log_2\left(\frac{b}{a}\right)^a$

$a^{b-a} = \frac{b^a}{a^a}$

$a^b = b^a$ …… ㉢

한편, $f(x) = a^{bx} + b^{ax}$이고 $f(1) = 40$이므로

$a^b + b^a = 40$

ⓒ을 대입하면

$a^b + a^b = 40$

$a^b = 20$

따라서 $b^a = 20$이므로

$f(2) = a^{2b} + b^{2a}$

$= (a^b)^2 + (b^a)^2$

$= 20^2 + 20^2$

$= 800$

11) [정답] 78

[해설]

진수의 조건에서

$na - a^2 > 0,\ nb - b^2 > 0$이므로

$0 < a < n,\ 0 < b < n$

또 $\log_2(na - a^2) = \log_2(nb - b^2)$에서

$na - a^2 = nb - b^2$

$(b-a)(b+a-n) = 0$

$b - a > 0$이므로 $b + a = n$

$na - a^2 = (b+a)a - a^2 = ab$이므로

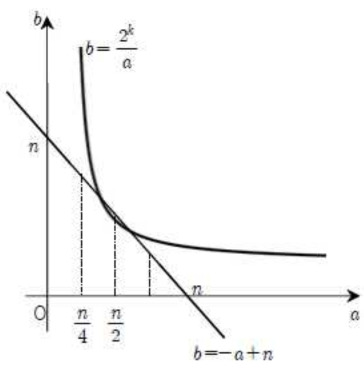
$ab = 2^k\ (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$꼴이어야 한다.

한편, $0 < b - a \le \dfrac{n}{2}$에서

$0 < (n-a) - a \le \dfrac{n}{2},\ 0 < b - (n-b) \le \dfrac{n}{2}$

$\dfrac{n}{4} \le a < \dfrac{n}{2},\ \dfrac{n}{2} < b \le \dfrac{3n}{4}$

즉 그림과 같이 좌표평면에서 직선 $b + a = n$과 곡선 $ab = 2^k$가 $\dfrac{n}{4} \le a < \dfrac{n}{2}$인 범위에서 만나는 점이 존재해야 한다.



$\dfrac{2^k}{\frac{n}{4}} \ge \dfrac{3n}{4},\ \dfrac{2^k}{\frac{n}{2}} < \dfrac{n}{2}$이 성립해야 하므로

$\dfrac{3n^2}{16} \le 2^k < \dfrac{n^2}{4}$

$3n^2 \le 2^{k+4} < 4n^2\ (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$k = 1$일 때, $3n^2 \le 32 < 4n^2$을 만족시키는 n의 값은 3

$k = 3$일 때, $3n^2 \le 128 < 4n^2$을 만족시키는 n의 값은 6

$k = 4$일 때, $3n^2 \le 256 < 4n^2$을 만족시키는 n의 값은 9

$k = 5$일 때, $3n^2 \le 512 < 4n^2$을 만족시키는 n의 값은 12, 13

$k = 6$일 때, $3n^2 \le 1024 < 4n^2$을 만족시키는 n의 값은 17, 18

따라서 조건을 만족시키는 20이하의 자연수 n의 값은

3, 6, 9, 12, 13, 17, 18이고, 그 합은

$3 + 6 + 9 + 12 + 13 + 17 + 18 = 78$이다.

12) [정답] ①

[해설]

로그의 밑을 변환하면

$5\log_n 2 = 5 \times \dfrac{\log_2 2}{\log_2 n}$

$= 5 \times \dfrac{1}{\log_2 n}$

이 수가 자연수이어야 하므로 $\log_2 n$은 5의 양의 약수이어야 한다.

그러므로

$\log_2 n = 1$ 또는 $\log_2 n = 5$

$n = 2^1$ 또는 $n = 2^5$

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$2 + 32 = 34$

13) [정답] 426

[해설]

$4\log_{64}\left(\dfrac{3}{4n+16}\right) = \log_8\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)^2$

이므로 이 값이 정수가 되려면

$\left(\frac{3}{4n+16}\right)^2=8^m$ (m은 정수) ⋯⋯㉠

의 꼴이 되어야 한다.

그러려면 우선 $4n+16$이 3의 배수가 되어야 하므로

$n=3k-1$ (k는 $1\le k\le 333$인 자연수)

이어야 한다. 이때 ㉠에서

$\left(\frac{1}{4k+4}\right)^2=2^{3m}$

$16(k+1)^2=2^{-3m}$

$(k+1)^2=2^{-3m-4}$

이어야 하므로

$(k+1)^2=2^2,\ 2^8,\ 2^{14}$

$k+1=2,\ 2^4,\ 2^7$

$k=1$ 또는 $k=15$ 또는 $k=127$

즉, $n=2$ 또는 $n=44$ 또는 $n=380$이므로 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$2+44+380=426$

14) [정답] 31

[해설]

신호잡음전력비가 a일 때

$C=B\times\log_2(1+a)$⋯⋯㉠

신호잡음전력비가 $33a$일 때

$2C=B\times\log_2(1+33a)$⋯⋯㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2B\times\log_2(1+a)=B\times\log_2(1+33a)$

$\log_2(1+a)^2=\log_2(1+33a)$

$(1+a)^2=1+33a$

$a^2-31a=0$

$a(a-31)=0$

$\therefore\ a=31$

15) [정답] ①

[해설]

$D=20,\ R=81$을 주어진 식에 대입하면

$L^2=100\times 20^2\times\log_3 81=10^2\times 20^2\times 2^2$

$L>0$이므로

$L=10\times 20\times 2=400$

16) [정답] ②

[해설]

$L_A^2=100\times 20^2\times\log_3 R_A$⋯⋯㉠

$L_B^2=100\times 30^2\times\log_3 R_B$⋯⋯㉡

이고 $\frac{R_A}{R_B}=27$에서

$\log_3\frac{R_A}{R_B}=\log_3 27=3$이므로

$\log_3 R_A-\log_3 R_B=3$

$\therefore\ \log_3 R_A=3+\log_3 R_B$

또한, $L_A^2=400^2=100^2\times 4^2$이므로 ㉠에 대입하면

$100^2\times 4^2=100\times 20^2\times(3+\log_3 R_B)$

$4=3+\log_3 R_B$

$\log_3 R_B=1$

따라서 ㉡에 대입하면

$L_B^2=100\times 30^2$

$\therefore\ L_B=10\times 30=300$

17) [정답] ④

[해설]

$10^n<a<10^{n+1}$에서

$n<\log a<n+1$

$\log a=n+\alpha$ $(0<\alpha<1)$라고 놓으면

$\log\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\log a=\frac{1}{n}(n+\alpha)=1+\frac{\alpha}{n}$

$\log a$와 $\log\sqrt[n]{a}$의 소수 부분의 합이 정수이므로

$\alpha+\frac{\alpha}{n}=1$

$\therefore\ \alpha=\frac{n}{n+1}$

또한 $(n+1)\log a=n^2+8$에서

$(n+1)(n+\alpha)=n^2+8$

$(n+1)\left(n+\frac{n}{n+1}\right)=n^2+8\left(\because\alpha=\frac{n}{n+1}\right)$

$2n=8$

$\therefore\ n=4,\quad \alpha=\frac{4}{5}$

$\therefore\ \frac{\log a}{n}=\frac{4+\frac{4}{5}}{4}=\frac{6}{5}$

18) [정답] ①

[해설]

$\frac{1}{4} < \log\sqrt{a} < \frac{11}{4}$, $\frac{7}{12} < \frac{1}{3} + \log\sqrt{a} < \frac{37}{12}$

$\frac{1}{3} + \log\sqrt{a} = 1,\ 2,\ 3$, $\log a = \frac{4}{3},\ \frac{10}{3},\ \frac{16}{3}$

$\log(a_1 \times a_2 \times a_3) = \frac{4}{3} + \frac{10}{3} + \frac{16}{3} = 10$

$\therefore a_1 \times a_2 \times a_3 = 10^{10}$

19) [정답] ③

[해설]

$f(t) = \alpha$라 하면

$f(t^n)$이 될 수 있는 값은 $n\alpha,\ n\alpha - 1,\ \cdots\cdots,\ n\alpha - (n-1)$이다.

$f(t^n)$이 될 수 있는 k번째 소수부분을 $n\alpha - (k-1)$이라고 하면 ㈏조건에 의해

$f(t^n) + 2f(t) = 1$이고

$n\alpha - (k-1) + 2\alpha = 1$ …… ㉠

이어야 한다.

$\therefore\ \alpha = \frac{k}{n+2}$

또한 소수부분의 조건에 의해

$0 \le n\alpha - (k-1) < 1$ …… ㉡

이어야 하므로 ㉠을 ㉡에 대입하면

$0 \le 1 - 2\alpha < 1$이고

$\therefore\ 0 < \alpha \le \frac{1}{2}$

따라서 $0 < \frac{k}{n+2} \le \frac{1}{2}$이고 $0 < k \le \frac{n+2}{2}$이다.

i) $n = 4$일 때

$0 < k \le \frac{4+2}{2} = 3$이므로

$k = 1,\ 2,\ 3$이고

$1 \le t < 100$에서 정수부분이 0과 1인 두 가지 경우가 있으므로 $\therefore\ 2 \cdot 3 = 6$

ii) $n = 5$일 때

$0 < k \le \frac{5+2}{2} = 3.5$

$k = 1,\ 2,\ 3$

$1 \le t < 100$에서 정수부분이 0과 1인 두 가지 경우가 있으므로

$\therefore\ 2 \cdot 3 = 6$

따라서 구하는 답은 12이다.

20) [정답] ⑤

[해설]

1보다 큰 실수 x에 대해 $f(x)$, $g(x)$는 $\log x$의 정수부분과 소수부분이므로

$\log x = f(x) + g(x)$ (단, $f(x)$는 정수, $0 \le g(x) < 1$)

이때 $3f(x) + 5g(x) = 10k$ (단, k는 자연수)로 나타낼 수 있다.

또한, $f(x)$는 정수이므로

$5g(x) = 10k - 3f(x)$는 정수이고 $0 \le g(x) < 1$이므로

$0 \le 5g(x) < 5$에서 $5g(x) = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$이어야 한다.

한편, $3f(x) = 10k - 5g(x)$이므로 조건들을 만족시키는 x의 값은 자연수 k의 값이 작을수록 $5g(x)$의 값이 클수록 작아진다.

따라서 x의 값을 작은 수부터 구하려면 자연수 k는 작은 순서대로, $5g(x)$의 값은 큰 순서대로 구하면 된다.

(ⅰ) $k = 1$, $5g(x) = 4$일 때,

$3f(x) = 6$이므로 $f(x) = 2$

$\therefore\ \log x = 2 + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$

즉 $x = 10^{\frac{14}{5}}$

(ⅱ) $k = 1$, $5g(x) = 1$일 때,

$3f(x) = 9$이므로 $f(x) = 3$

$\therefore\ \log x = 3 + \frac{1}{5} = \frac{16}{5}$

즉 $x = 10^{\frac{16}{5}}$

(ⅲ) $k = 2$, $5g(x) = 2$일 때,

$3f(x) = 18$이므로 $f(x) = 6$

$\therefore\ \log x = 6 + \frac{2}{5} = \frac{32}{5}$

즉 $x = 10^{\frac{32}{5}}$

(ⅳ) $k = 3$, $5g(x) = 3$일 때,

$3f(x) = 27$이므로 $f(x) = 9$

$\therefore\ \log x = 9 + \frac{3}{5} = \frac{48}{5}$

즉 $x = 10^{\frac{48}{5}}$

(ⅴ) $k = 3$, $5g(x) = 0$일 때,

$3f(x) = 30$이므로 $f(x) = 10$

$\therefore\ \log x = 10$

즉 $x=10^{10}$

(vi) $k=4$, $5g(x)=4$일 때,

$3f(x)=36$이므로 $f(x)=12$

$\therefore \log x=12+\frac{4}{5}=\frac{64}{5}$

즉 $x=10^{\frac{64}{5}}$

따라서 x의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$10^{\frac{14}{5}}$, $10^{\frac{16}{5}}$, $10^{\frac{32}{5}}$,$10^{\frac{48}{5}}$, 10^{10}, $10^{\frac{64}{5}}$, ……

이므로

$a=10^{\frac{16}{5}}$, $b=10^{\frac{64}{5}}$

$\therefore \log ab=\log a+\log b$

$=\frac{16}{5}+\frac{64}{5}=16$

21) [정답] 12

[해설]

자연수 m의 정수 부분과 소수 부분을 각각 n_1, α_1, 자연수 n의 정수 부분과 소수 부분을 각각 n_2, α_2라 하면

$\mathrm{P}_m(n_1, \alpha_1)$, $\mathrm{P}_n(n_2, \alpha_2)$

(나)에서 $\overline{\mathrm{P}_m\mathrm{P}_n}=\sqrt{1+(\log 2)^2}$이므로

$\overline{\mathrm{P}_m\mathrm{P}_n}^2=1+(\log 2)^2$

$(n_2-n_1)^2+(\alpha_2-\alpha_1)^2=1+(\log 2)^2$

이 때, n_1, n_2은 정수이고 $0\le\alpha_1<1$

$0\le\alpha_2<1$이므로

$|n_2-n_1|=1$, $|\alpha_2-\alpha_1|=\log 2$

한편, $m<n$이므로

$n_2=n_1+1$

(i) $\alpha_2>\alpha_1$일 때,

$\alpha_2=\alpha_1+\log 2$이므로

$\log m=n_1+\alpha_1$ ……㉠

$\log n=n_1+1+\alpha_1+\log 2$ ……㉡

㉡에서 ㉠을 변변 빼면

$\log\frac{n}{m}=1+\log 2$

$\log\frac{n}{m}=\log 20$

$\therefore \frac{n}{m}=20$

$\therefore n=20m$

이 조건을 만족하는 순서쌍 (m, n)은 (1, 20), (2, 40), (3, 60), (4, 80)로 4개이다.

(ii) $\alpha_2<\alpha_1$일 때,

$\alpha_2=\alpha_1-\log 2$이므로

$\log m=n_1+\alpha_1$

$\log n=n_1+1+\alpha_1-\log 2$ …(ㄹ)

(2)에서 ㉢을 변변 빼면

$\log\frac{n}{m}=1-\log 2$

$\log\frac{n}{m}=\log 5$

$\therefore \frac{n}{m}=5$

$\therefore n=5m$

이 조건을 만족하는 순서쌍 (m, n)은

(2, 10), (3, 15), (4, 20), (5, 25), (6, 30), (7, 35), (8, 40), (9, 45)로 8개이다.

따라서, 순서쌍 (m, n)의 개수는 12개다.

22) [정답] 71

[해설]

$\log a=n_1+\alpha_1$(n_1은 정수, $0\le\alpha_1<1$)

$\log b=n_2+\alpha_2$(n_2는 정수, $0\le\alpha_2<1$)

라 하자.

조건 (나)에서

$\log b-\log a\le f(a)-f(b)$

이므로

$(n_2+\alpha_2)-(n_1+\alpha_1)\le\alpha_1-\alpha_2$

$\therefore n_2-n_1\le 2(\alpha_1-\alpha_2)$ …… ㉠

한편, $0\le\alpha_1<1$, $0\le\alpha_2<1$이므로

$-1<\alpha_1-\alpha_2<1$,

$-2<2(\alpha_1-\alpha_2)<2$

한편, $a\le b$에서 $n_1\le n_2$이고 n_2-n_1은 정수이므로 ㉠에서

$n_2-n_1=0$ 또는 $n_2-n_1=1$

(i) $n_2-n_1=0$ 즉, $n_2=n_1$일 때,

㉠에서 $\alpha_1\ge\alpha_2$이고 $a\le b$이므로 $a=b$이어야 한다.

그러므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 20이다.

(ii) $n_2-n_1=1$ 즉, $n_2=n_1+1$일 때,

$a\le b\le 20$이므로 $n_1=0$이고 $n_2=1$

㉠에서

$1\le 2(\alpha_1-\alpha_2)$

$\alpha_1-\alpha_2\ge\frac{1}{2}$

한편, $\log a=\alpha_1$, $\log b=1+\alpha_2$이므로

$\alpha_1-\alpha_2=\log a-(\log b-1)$

$=\log\frac{10a}{b}$

$\geq \frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{10a}{b} \geq \sqrt{10}$

양변을 제곱하여 정리하면

$10a^2 \geq b^2$

한편 $1 \leq a \leq 9$이고 $10 \leq b \leq 20$이므로 위의 조건을 만족하는 a의 값과 b의 값은 다음과 같다.

$a=4$일 때, $b=10,\ 11,\ 12$

$a=5$일 때, $b=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15$

$a=6$일 때, $b=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18$

$a=7$일 때, $b=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20$

$a=8$일 때, $b=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20$

$a=9$일 때, $b=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20$

그러므로 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$3+6+9+11+11+11=51$

따라서, (ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$20+51=71$

이다.

23) [정답] ③

[해설]

조건을 만족시키는 20 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 최솟값을 다음과 같이 4가지로 구분하여 구할 수 있다.

(ⅰ) $1 \leq a \leq 9$, $1 \leq b \leq 9$인 경우

$f(a)=f(b)=0$이므로

$f(ab)=f(a)f(b)+2=0\times0+2=2$

이때, $1 \leq ab \leq 81$이므로

$f(ab)=2$인 자연수 a, b는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $1 \leq a \leq 9$, $10 \leq b \leq 20$인 경우

$f(a)=0$, $f(b)=1$이므로

$f(ab)=f(a)f(b)+2=0\times1+2=2$

이때, $10 \leq ab \leq 180$이므로

$f(ab)=2$이려면

$100 \leq ab \leq 180$이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(5,\ 20)$,

$(6,\ 17)$, $(6,\ 18)$, $(6,\ 19)$, $(6,\ 20)$,

$(7,\ 15)$, $(7,\ 16)$, $\cdots$, $(7,\ 20)$,

$(8,\ 13)$, $(8,\ 14)$, $\cdots$, $(8,\ 20)$,

$(9,\ 12)$, $(9,\ 13)$, $\cdots$, $(9,\ 20)$

이므로 $a+b$의 최솟값은 21이다.

(ⅲ) $10 \leq a \leq 20$, $1 \leq b \leq 9$인 경우

(ⅱ)와 같은 방법으로 $a+b$의 최솟값은 21이다.

(ⅳ) $10 \leq a \leq 20$, $10 \leq b \leq 20$인 경우

$f(a)=f(b)=1$이므로

$f(ab)=f(a)f(b)+2=1\times1+2=3$

이때, $100 \leq ab \leq 400$이므로

$f(ab)=3$인 자연수 a, b는 존재하지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 $a+b$의 최솟값은 21이다.

24) [정답] ⑤

[해설]

$1 \leq n \leq 100$이므로 $0 \leq f(n) \leq 2$이다.

(ⅰ) $f(n)=0$ 즉 $1 \leq n \leq 9$일 때

$f(n+10)=1$이어야 하므로

$10 \leq n+10 < 100$

$\therefore\ 1 \leq n \leq 9$

(ⅱ) $f(n)=1$ 즉 $10 \leq n \leq 99$일 때

$f(n+10)=2$이어야 하므로

$100 \leq n+10 \leq 1000$

$\therefore\ 90 \leq n \leq 99$

(ⅲ) $f(n)=2$ 즉 $n=100$일 때

$f(n+10)=f(110)=2$이므로

$f(n+10)=3$을 만족하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 자연수 n의 개수는

$9+10=19$

25) [정답] 31

[해설]

$x=R^{\frac{27}{23}}$일 때의 물의 속력을 v_1이라 하면

$v_1=\frac{1}{2}v_c$이므로

$$\frac{v_c}{v_1}=1-k\log\frac{R^{\frac{27}{23}}}{R}=2$$

$k\log R^{\frac{4}{23}}=-1$, $\frac{4}{23}k\log R=-1$

$$\therefore\ k\log R=-\frac{23}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x=R^{a}$ 일 때의 물의 속력을 v_2 라 하면

$v_2=\frac{1}{3}v_c$ 이므로

$$\frac{v_c}{v_2}=1-k\log\frac{R^a}{R}=3$$

$k\log R^{a-1}=-2,\ (a-1)k\log R=-2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$(a-1)\times\left(-\frac{23}{4}\right)=-2$$

$$a-1=\frac{8}{23}$$

$$\therefore\ a=\frac{31}{23}$$

$$\therefore\ 23a=31$$

26) [정답] ⑤

[해설]

$$\frac{v_c}{\frac{1}{2}v_c}=1-k\log\frac{R^{\frac{27}{23}}}{R},\ 2=1-\frac{4}{23}k\log R$$

$$\therefore\ k\log R=-\frac{23}{4}$$

$$\frac{v_c}{\frac{1}{3}v_c}=1-k\log\frac{R^a}{R},$$

$$3=1-(a-1)k\log R=1-(a-1)\times\left(-\frac{23}{4}\right)$$

$$8=23a-23$$

$$\therefore\ a=\frac{31}{23}$$

27) [정답] ③

[해설]

두 원본 A, B를 압축했을 때, 최대 신호대 잡음비는 각각 P_A, P_B이고 평균제곱오차는 각각 E_A, E_B이므로 주어진 식에 대입하면

$$P_A=20\log 255-10\log E_A$$

$$P_B=20\log 255-10\log E_B$$

이때 두 식을 변끼리 빼면

$$P_A-P_B=10\log\frac{E_B}{E_A}$$

이때 $E_B=100E_A$이므로

$$P_A-P_B=10\log\frac{100E_A}{E_A}$$

$$=10\log 100$$

$$=20$$

28) [정답] ④

[해설]

도로구간의 교통량이 도로용량의 2배이므로 $V=2C$,

통행시간은 기준통행시간의 $\frac{7}{2}$ 배이므로

$$\frac{V}{C}=2,\ \frac{t}{t_0}=\frac{7}{2}$$

$$\therefore\ \log\left(\frac{7}{2}-1\right)=k+4\log2$$

$$\therefore\ k=1-6\log2$$

29) [정답] 20

[해설]

두 원본 A, B를 압축 했을 때, 최대 신호 대 잡음비는 각각 P_A, P_B이고 평균 제곱오차는 각각 E_A, E_B이므로 주어진 식에 대입하면

$$P_A=20\log255-10\log E_A$$

$$P_B=20\log255-10\log E_B$$

이때, 두 식을 변끼리 빼면

$$P_A-P_B=-10\log E_A+10\log E_B$$

$$P_A-P_B=10\log\frac{E_B}{E_A}$$

이때, $E_B=100E_A$ 이므로

$$P_A-P_B=10\log\frac{100E_A}{E_A}$$

$$=10\log100$$

$$=20$$

30) [정답] 84

[해설]

두 열차 A, B가 지점 P 를 통과할 때의 속력을

각각 v_A, v_B 라 하면 $v_A=0.9v_B$ 이다.

가까운 선로 중앙 지점 P 까지의 거리가 $75m$ 인 한

지점에서

L_A, L_B를 구하면

$L_A = 80+28\log\dfrac{v_A}{100} - 14\log\dfrac{75}{25} \cdots ①$ 이고,

$L_B = 80+28\log\dfrac{v_B}{100} - 14\log\dfrac{75}{25} \cdots ②$ 이다.

② − ① 을 하면

$$\begin{aligned} L_B - L_A &= 28\log\frac{v_B}{v_A} \\ &= 28\log\frac{v_B}{0.9v_B} \\ &= 28(1-2\log 3) \\ &= 28-56\log 3 \end{aligned}$$

이다.

따라서 $a=28$, $b=-56$ 이고

$a-b=84$

31) [정답] ②

[해설]

B의 속력을 v_B라 하면 A의 속력은 $v_A = 0.9v_B$라 놓을 수 있다. $L_A = 80+28\log\dfrac{0.9v_B}{100} - 14\log\dfrac{d}{25}$,

$L_B = 80+28\log\dfrac{v_B}{100} - 14\log\dfrac{d}{25}$

로부터

$$L_B - L_A = 28\left(\log\frac{v_B}{100} - \log\frac{0.9v_B}{100}\right)$$

$= 28\left(\log\dfrac{10}{9}\right)$

$= 28(1-2\log 3)$

$= 28-56\log 3$

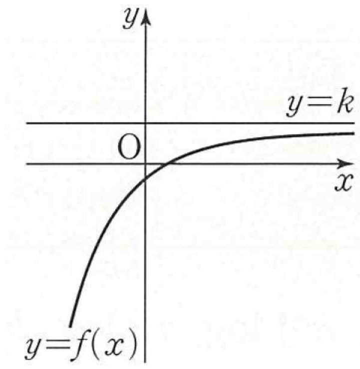
32) [정답] ④

[해설]

$f(x) = -2^{4-3x}+k = -\left(\dfrac{1}{8}\right)^{x-\frac{4}{3}}+k$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\left(\dfrac{1}{8}\right)^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\dfrac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제2사분면을 지나지 않아야 하므로 $f(0) \le 0$이어야 한다.



$f(0) = -2^4+k \le 0$에서 $k \le 16$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k의 최댓값은 16이다.

33) [정답] ④

[해설]

두 곡선 $y=2^x$, $y=15\times 2^{-x}$ 의 교점의 x 좌표를 t 라 하면

$2^t = 15\times 2^{-t}$

$(2^t)^2 = 15$, $2^t = \sqrt{15} < 4$

이므로 $t<2 \cdots\cdots$ ㉠

점 A$(a,\ 2^a)$과 점 B의 y 좌표가 서로 같으므로

$15\times 2^{-x} = 2^a \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2(15\times 2^{-x}) = \log_2 2^a$, $\log_2 15 - x = a$

$x = \log_2 15 - a$

이므로 점 B의 x 좌표는 $\log_2 15 - a$ 이다.

이때 ㉠에서 $t<2$이고, $a \ge 2$이므로 점 A의 x 좌표가 점 B의 x 좌표보다 크다.

따라서 $\overline{AB} = a-(\log_2 15 - a) = 2a - \log_2 15$

$1 < \overline{AB} < 100$ 에서

$1 < 2a - \log_2 15 < 100$

$\dfrac{1+\log_2 15}{2} < a < \dfrac{100+\log_2 15}{2}$

이때 $\log_2 2^3 < \log_2 15 < \log_2 2^4$, 즉 $3 < \log_2 15 < 4$이고 a 는

자연수이므로

$3 \le a \le 51$

따라서 자연수 a 의 개수는

$51-3+1=49$

34) [정답] ②

[해설]

$y=f(x)$는 $y=-2^x$을 y축의 방향으로 m만큼 평행이동시킨 곡선이므로 $f(x)=-2^x+m$이다.

$y=-2^x+m$이 x축과 만나는 점의 좌표는 $y=0$일 때,

$-2^x+m=0,\ 2^x=m$

$\therefore\ x=\log_2 m$

$\therefore\ A(\log_2 m,\ 0)$

$\therefore\ \overline{OA}=\log_2 m$

이때, $\overline{OA}=2\overline{BC}$이므로

$\overline{BC}=\frac{1}{2}\log_2 m=\log_2\sqrt{m}$

$\therefore\ B(\log_2\sqrt{m},\ \sqrt{m})$

점 B는 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$-2^{\log_2\sqrt{m}}+m=\sqrt{m}$

$-\sqrt{m}+m=\sqrt{m}$

$m=2\sqrt{m}$

$m^2-4m=0$

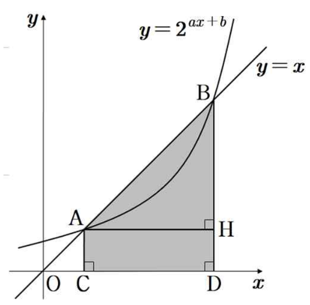
$m(m-4)=0$

$\therefore\ m=4\ (\because m>2)$

35) [정답] ④

[해설]

점 A에서 선분 BD에 수선의 발 H를 내리면 △ABH는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AH}=\overline{BH}=6$



점 C의 x좌표를 m이라 하면 점 A, H, B, D의 좌표는 각각

A(m, m), H(m+6, m), B(m+6, m+6), D(m+6, 0)

따라서 사각형 ACDB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\overline{AC}+\overline{BD})\times\overline{CD}$

$=\frac{1}{2}\times\{m+(m+6)\}\times 6$

$=6(m+3)$

따라서 $6(m+3)=30$에서 $m=2$

즉, 두 점 A, B의 좌표는 A(2, 2), B(8, 8)이다.

이때 두 점 A, B가 곡선 $y=2^{ax+b}$위의 점이므로

식에 대입하면 $2^{2a+b}=2,\ 2^{8a+b}=8$

즉, $2a+b=1,\ 8a+b=3$

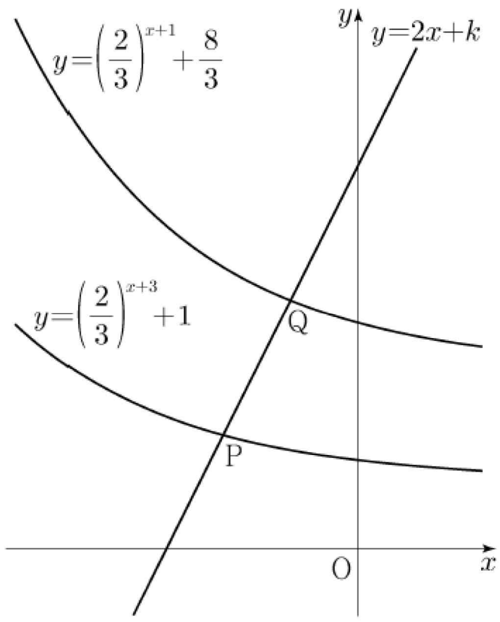
두 식을 연립하면 $6a=2$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 $b=\frac{1}{3}$

$\therefore a+b=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

36) [정답] ④

[해설]



두 점 P, Q의 x좌표를 각각 $p,\ q\ (p<q)$라 하면

두 점 P, Q는 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$P(p,\ 2p+k),\ Q(q,\ 2q+k)$로 놓을 수 있다.

이때, $\overline{PQ}=\sqrt{5}$, 즉 $\overline{PQ}^2=5$이므로 $(q-p)^2+(2q-2p)^2=5$

$(q-p)^2=1$

$q-p>0$이므로 $q-p=1$

즉, $q=p+1$이다.

한편, 점 P는 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+1=2p+k$ …… ㉠

점 Q는 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}=2p+k+2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+3$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}=1$

$p+2=0$, 즉 $p=-2$

$p=-2$를 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2+3}+1=2\times(-2)+k$

따라서 $k=\frac{17}{3}$

37) [정답] 32

[해설]

지수함수 $f(x)$는 증가함수이고, 지수함수 $g(x)$는 감소함수이므로 $-1\le x\le 3$에서 각각 $f(3), g(-1)$이 최댓값을 갖는다. 따라서 $ab=8\times 4=32$이다.

38) [정답] ⑤

[해설]

$0<a<1$이므로 함수 $f(x)=a^x$은 실수 전체의 집합에서 감소한다.

그러므로 $-2\le x\le 1$에서 최솟값은 $x=1$에서 가지고 최솟값이 $\frac{5}{6}$이므로

$a^1=\frac{5}{6}$, $a=\frac{5}{6}$

이때, $f(x)=\left(\frac{5}{6}\right)^x$이고 함수 $f(x)$는 주어진 범위에서 최댓값은 $x=-2$에서 가지므로

$M=f(-2)=\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}=\left(\frac{6}{5}\right)^2$

따라서, $a\times M=\frac{5}{6}\times\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{6}{5}$

39) [정답] ⑤

[해설]

$\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x}\le 5^{x+4}$에서

$5^{2x-1}\le 5^{x+4}$

$2x-1\le x+4$

$x\le 5$

따라서 자연수 x의 값은

1, 2, 3, 4, 5이므로

구하는 합은

$1+2+3+4+5=15$

40) [정답] ④

[해설]

$\frac{27}{9^x}\ge 3^{x-9}$를 정리하면

$3^x\times 3^{2x}\le 3^3\times 3^9$이므로

$3x\le 12$이다.

$x\le 4$인 자연수는 $x=1, 2, 3, 4$이다.

따라서 x의 개수는 4개다

41) [정답] 15

[해설]

일차함수 $f(x)$에 대하여

$f(-5)=0$이므로

$f(x)=a(x+5)$ $(a>0)$

로 놓을 수 있다.

$2^{f(x)}\le 8$에서

$2^{f(x)}\le 2^3$

밑이 1보다 크므로

$f(x)\le 3$

즉, $a(x+5)\le 3$

$a>0$이므로

$x+5 \le \dfrac{3}{a}$

$x \le \dfrac{3}{a}-5$

즉, 주어진 부등식의 해가 $x \le \dfrac{3}{a}-5$이므로

$\dfrac{3}{a}-5=-4$에서 $\dfrac{3}{a}=1$

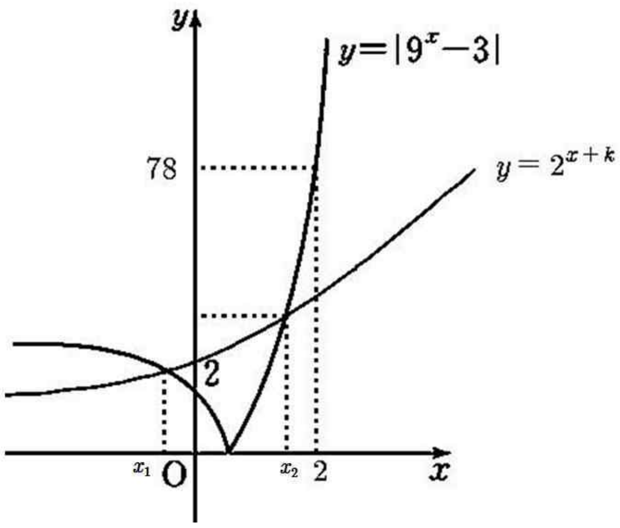
$\therefore\ a=3$

따라서 $f(x)=3(x+5)$

$f(0)=15$

42) [정답] ②

[해설]



$f(x)=\mid 9^x-3 \mid$ 라 하고 $g(x)=2^{x+k}$라 하면

$x<0$에서 근을 갖기 위해서 그림과 같이

$f(0)<g(0)$이어야 하므로 $2<2^k$이고,

$0<x<2$에서 근을 갖기 위해서 오른쪽 그림과 같이

$f(2)>g(2)$이어야 하므로 $78>2^{2+k}$이다.

따라서

$\therefore 2<2^k<\dfrac{78}{4}=\dfrac{39}{2}=19.5$

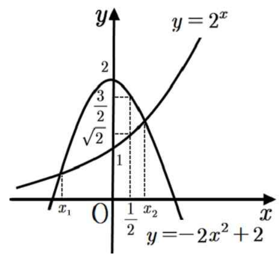
만족하는 k는 2, 3, 4이다.

$\therefore$ 모든 자연수의 합은 9이다.

43) [정답] ⑤

[해설]

곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점이 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ (단, $x_1<x_2$)이므로 그래프를 그리면 다음과 같다.



ㄱ. 위의 그래프에서 $\dfrac{1}{2}<x_2$ (참)

ㄴ. 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$의 기울기를 구하면 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

그런데 위의 그래프에서 $(0,\ 1)$, $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$를 지나는

기울기가 1이므로 두 기울기를 비교해보면 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<1$

$\therefore y_2-y_1<x_2-x_1\ (\because x_1<x_2)$ (참)

ㄷ. 위의 그래프에서 $-1<x_1<0$, $\dfrac{1}{2}<x_2<1$이므로

따라서 $-\dfrac{1}{2}<x_1+x_2<1$ …… ㉠

그런데, 곡선 $y=-2x^2+2$이 y축 대칭함수이므로

$|x_1|>|x_2|$, 즉, $x_1+x_2<0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-\dfrac{1}{2}<x_1+x_2<0$

식을 정리하면 $2^{-\frac{1}{2}}<2^{x_1+x_2}<2^1$

$\dfrac{2}{\sqrt{2}}<2^{x}_1 \cdot 2^{x}_2<2$

$\therefore \dfrac{2}{\sqrt{2}}<y_1 \cdot y_2<2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

44) [정답] 15

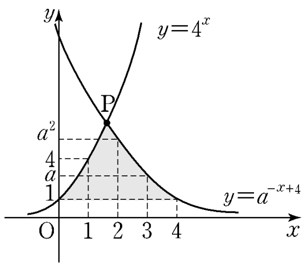
[해설]

두 지수함수 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$의 교점을 $\mathrm{P}(\alpha,\ 4^\alpha)$이라 하면

$4^\alpha=a^{-\alpha+4}$, $\alpha=\dfrac{4\log a}{\log 4a}$ 교점의 위치에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각하면

ⅰ) $1\le\alpha<2$일 때

$1\le\dfrac{4\log a}{\log 4a}<2$를 풀면 $\sqrt[3]{4}\le a<4$ …… ㉠



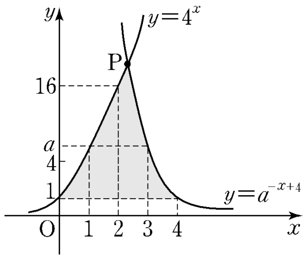
영역내 x좌표가 0, 1, 2, 3, 4인 점의 개수의 합은

$1+4+a^2+a+1$이므로 $20 \le a^2+a+6 \le 40$ …… ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족하는 자연수 a는 없다.

ii) $2 \le \alpha < 3$일 때

$2 \le \dfrac{4\log a}{\log 4a} < 3$을 풀면 $4 \le a < 64$ …… ㉢

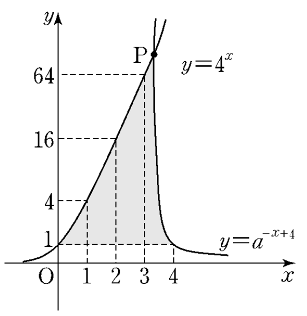


영역내 x좌표가 0, 1, 2, 3, 4인 점의 개수의 합은

$1+4+16+a+1$이므로 $20 \le a+22 \le 40$ …… ㉣

㉢, ㉣을 모두 만족하는 a의 범위는 $4 \le a \le 18$이므로 자연수 a의 개수는 15개이다.

iii) $3 \le \alpha < 4$일 때



영역내 x좌표가 0, 1, 2, 3인 점의 개수의 합이

$1+4+16+64$이므로 조건을 만족하지 않는다.

i), ii), iii)으로부터 a의 개수는 15개이다.

45) [정답] 196

[해설]

$(x-a)^2+(y-b)^2=1=2^0$ …… ㉠

$(x-a)^2+(y-b)^2=4=2^2$ …… ㉡

곡선 $y=2^x$이 원 과 만나지 않는다. (다) 곡선 $y=2^x$이 원 ㉠과는 만나지 않고 원 ㉡과 적어도 한 점에서 만나므로

$a=1$일 때, $2^2<b\le 2^3$

$a=2$일 때, $2^0<b\le 2^1$ 또는 $2^3<b\le 2^4$

$a=3$일 때, $2^1<b\le 2^2$ 또는 $2^4<b\le 2^5$

$a=4$일 때, $2^2<b\le 2^3$ 또는 $2^5<b\le 2^6$

$a=5$일 때, $2^3<b\le 2^4$ 또는 $2^6<b\le 100$

$a=6$일 때, $2^4\le b<2^5$

$a=2$일 때, $2^5\le b<2^6$

$a=2$일 때, $2^6\le b<100$

이어야 한다.

따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$2^2+(2^0+2^3)+(2^1+2^4)+(2^2+2^5)+(2^3+36)+2^4+2^5+37$

$=(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^5)+37+(2^2+2^3+2^4+2^5)+36$

$=\dfrac{1(2^6-1)}{2-1}+\dfrac{2^2(2^4-1)}{2-1}+73=63+60+73=196$

46)[정답] ②

[해설]

$$\frac{W}{W_0}=\frac{1}{2}\times 10^{at}(1+10^{at})$$

$3=\dfrac{1}{2}\times 10^{15a}(1+10^{15a})$에서

$$(10^{15a})^2+10^{15a}-6=0$$

$$(10^{15a}+3)(10^{15a}-2)=0$$

$10^{15a}>0$이므로 $10^{15a}=2$

$$\therefore\ k=\frac{1}{2}\times 10^{30a}(1+10^{30a})$$

$=\dfrac{1}{2}\times 4\times(1+4)=10$

47) [정답] ⑤

[해설]

점 E의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 F의 좌표는 $(a,\ 2^a)$이고

$2^a=16$에서

$\therefore\ a=4$

또 점 E는 곡선 $y=\log_2 x$위의 점이므로

$b=\log_2 4=2$

두 점 $A(2^n, 0)$, $D(2^n, n)$을 이은 선분을 $2:3$으로 내분하는 점은 $\left(2^n, \frac{2}{5}n\right)$이고

이 점의 y좌표가 점 E의 y좌표와 같으므로

$\frac{2}{5}n=2$ $\therefore\ n=5$

따라서 두 점 $D(32, 5)$, $F(4, 16)$을 지나는 직선 DF의 기울기는

$\frac{16-5}{4-32}=-\frac{11}{28}$

48) [정답] ③

[해설]

$g(x)=\log_b(ax-1)$의 점근선은 $x=\frac{1}{a}$

$y=f(x)$와 x축과의 교점이 $y=g(x)$의 점근선 위에 존재하므로 $f\left(\frac{1}{a}\right)=0$을 만족한다.

$\log_a\left(\frac{b}{a}-1\right)=0 \Leftrightarrow \frac{b}{a}-1=1$ 에서 $b=2a$

조건에 의하여 $0<a<1$이고 $b>1$이므로 $2a>1$

$\therefore\ \frac{1}{2}<a<1$ $\therefore b=2a\left(\frac{1}{2}<a<1\right)$

49) [정답] ②

[해설]

$y=\log_n x$, $y=-\log_n(x+3)+1$을 연립하면

$\log_n x=-\log_n(x+3)+1$, $\log_n x+\log_n(x+3)=1$

$\log_n x(x+3)=1$

즉, $x(x+3)=n$이므로 $x^2+3x-n=0$

$f(x)=x^2+3x-n$이라 하면 문제 조건에서 함수 $y=f(x)$의 근이 1보다 크고 2보다 작은 근이 존재한다는 의미이므로 $f(1)<0$, $f(2)>0$이어야 한다.

따라서 $f(1)=4-n<0$, $f(2)=4+6-n>0$

즉, $n>4$, $n<10$이므로 만족하는 n의 범위는 $4<n<10$

따라서 만족하는 자연수 n의 값은 $n=5$, 6, 7, 8, 9

구하고자 하는 n의 값의 합은 $5+6+7+8+9=35$

50) [정답] ⑤

[해설]

$A(1, 0)$이고, $\log_2(x+1)-1=1$에서 $x+1=4$,

즉 $x=3$이므로 $C(3, 1)$

또, $B(0, -1)$이고 $3^{x+1}-2=-1$에서 $x+1=0$,

즉 $x=-1$이므로 $D(-1, -1)$

따라서 $\overline{AC}=3$, $\overline{DB}=1$, $\overline{AB}=2$이므로 사다리꼴

ABCD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(3+1)\times 2=4$

51) [정답] ③

[해설]

$A(1, 0)$, $B(3, 0)$, $P(k, \log_2 k)$, $Q(k, \log_2(k-2))$로부터

점 Q가 선분 PR의 중점이므로

$2\times\log_2(k-2)=\log_2 k \Leftrightarrow (k-2)^2=k$

$\therefore\ k=4$ $(\because\ k>3)$

$\square ABQP=\triangle ARP-\triangle BRQ$

$=\frac{1}{2}\times 3\times 2-\frac{1}{2}\times 1\times 1$

$=\frac{5}{2}$

52) [정답] ③

[해설]

$P(p, \log_a p)$, $Q(q, \log_a q)$ $(p>q)$로 놓으면

선분 PQ의 중점이 원 C의 중심 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$이므로

$\frac{p+q}{2}=\frac{5}{4}$에서 $p+q=\frac{5}{2}$

$\frac{\log_a p+\log_a q}{2}=0$에서 $\log_a pq=0$, $pq=a^0=1$

p, q를 두 실근으로 갖는 t에 대한 이차방정식

$t^2-\frac{5}{2}t+1=0$에서 $2t^2-5t+2=0$, $(2t-1)(t-2)=0$

$t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$, 즉 $p=2$, $q=\frac{1}{2}$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는

$P(2,\ \log_a 2)$, $Q\left(\frac{1}{2},\ -\log_a 2\right)$이다.

선분 PQ가 원 C의 지름이므로

$\overline{PQ}^2=\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\{\log_a 2-(-\log_a 2)\}^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$

$(\log_a 4)^2=1$

이때 $a>1$이므로 $\log_a 4=1$에서 $a=4$

53) [정답] **192**

[해설]

곡선 $y=a^{x-1}$은 곡선 $y=a^x$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=\log_a(x-1)$은 곡선 $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$은 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.

즉, 두 직선 $y=-x+4$, $y=x-1$의 교점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $M\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$이고, 점 M은 선분 AB의 중점이므로 $\overline{AM}=\sqrt{2}$이다.

점 A의 좌표를 $(k,\ -k+4)$라 하면

$\left(k-\frac{5}{2}\right)^2+\left(-k+\frac{5}{2}\right)^2=2$에서 $k=\frac{3}{2}$

즉, $A\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$이므로

$$\frac{5}{2}=a^{\frac{3}{2}-1},\ a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2},\ a=\frac{25}{4}$$

이때 점 C의 좌표는 $\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$, 즉 $\left(0,\ \frac{4}{25}\right)$이고, 점 C에서 직선 $y=-x+4$에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH의 길이는 점 C와 직선 $y=-x+4$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{CH}=\frac{\left|0+\frac{4}{25}-4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{48\sqrt{2}}{25}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}$$

$$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{48\sqrt{2}}{25}$$

$$=\frac{96}{25}$$

이므로 $50\times S=50\times\frac{96}{25}=192$

54) [정답] ①

[해설]

$\angle A=90^\circ$이고 $\overline{AB}=2\log_2 x$, $\overline{AC}=\log_4\frac{16}{x}$인 삼각형 ABC의 넓이를 $S(x)$는

$$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}$$

$=\frac{1}{2}\times2\log_2 x\times\log_4\frac{16}{x}$

$=\frac{1}{2}\times2\log_2 x\times\frac{1}{2}(\log_2 16-\log_2 x)$

$=\frac{1}{2}\times\log_2 x\times(4-\log_2 x)$ $(1<x<16)$

식에서 $\log_2 x=t$로 치환하면

$$f(t)=\frac{1}{2}t(4-t)\ (0<t<4)$$

$=\frac{1}{2}(t-2)^2+2$

따라서 $t=2$일 때, $f(t)$가 최댓값 2를 갖는다.

즉 $\log_2 x=2$, $x=4$일 때, $S(x)$는 최댓값 2를 갖는다.

따라서 $a=4$, $M=2$이므로 $a+M=6$

55) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. (거짓) $f(-1)=\frac{1}{2}$, $g(-1)=1$이므로

$f(-1)<g(-1)$

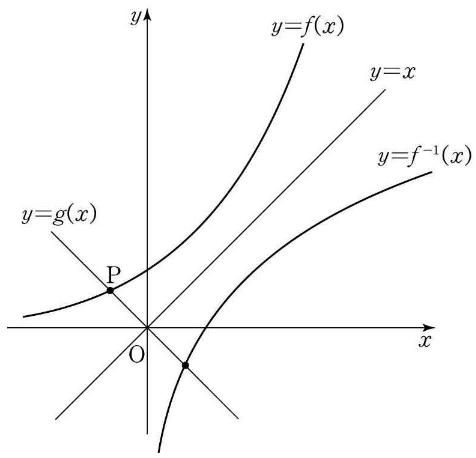
$\therefore a>-1$

ㄴ. (참) $t>0$이면 그래프에서

$|f(-t)-g(-t)|<|f(t)-g(t)|$

ㄷ. (참) 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 점은 점 $P(a,\ -a)$와 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 점이다.

따라서, 구하는 점의 좌표는 $(-a,\ a)$이다.



56) [정답] ④

[해설]

함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$y=\log_3(x-a)+2 \cdots\cdots$ ㉠

그러므로

$f(x)=\log_3(x-a)+2$

함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$는 ㉠에서 x대신 y를, y대신 x를 대입하면 되므로

$x=\log_3(y-a)+2$

$x-2=\log_3(y-a)$

$3^{x-2}=y-a$

$\therefore\ y=3^{x-2}+a$

$\therefore\ f^{-1}(x)=3^{x-2}+a$

이때, $f^{-1}(x)=3^{x-2}+4$이므로

$a=4$

57) [정답] ③

[해설]

함수 $y=2^x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$y=2^{x-m}+2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

함수 $y=\log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$y=\log_2 8(x-2) \qquad \cdots\cdots$ ㉡

함수 ㉠의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수는 함수 ㉠의 역함수이므로

㉠에서 $2^{x-m}=y-2$

$x-m=\log_2(y-2)$

$x=\log_2(y-2)+m$

x, y를 서로 바꾸면

$y=\log_2(x-2)+m$

$=\log_2(x-2)+\log_2 2^m$

$=\log_2 2^m(x-2)$

이 함수가 ㉡과 같아야 하므로

$2^m=8$

따라서 $m=3$

58) [정답] 14

[해설]

$\log_8 x-\log_8(x-7)=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \log_8\dfrac{x}{x-7}=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-7}=2$

$\Leftrightarrow x=2x-14 \therefore x=14$

59) [정답] ②

[해설]

주어진 식의 진수 조건에 의해

$-4<x<4$이다.

$\log_2(4+x)+\log_2(4-x)=3$

$\Leftrightarrow \log_2(16-x^2)=\log_2 8$

따라서 $x^2=8$

$x=\pm 2\sqrt{2}$이고

두 근 모두 진수조건의 범위 안에 들어가므로

따라서, 두 근의 곱은 -8

60) [정답] 1

[해설]

$2\log_4(5x+1)=1$의 실근을 α라 하면

$2\log_4(5\alpha+1)=1,\ \log_2(5\alpha+1)=1$

$5\alpha+1=2$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{1}{5}$

$\therefore \log_5\dfrac{1}{\alpha}=\log_5 5=1$

61) [정답] **12**

[해설]

진수 조건에 의하여 $x>0$이고 $2x-3>0$이므로

$x>\dfrac{3}{2}$ …… ㉠

$\log_2 x=1+\log_4(2x-3)$에서

$\log_4 x^2=\log_4 4(2x-3)$

$x^2=4(2x-3),\ x^2-8x+12=0$

$(x-2)(x-6)=0$

따라서 ㉠을 만족하는 x의 값은 $x=2$ 또는 6이므로 실수 x의 값의 곱은 $2\times6=12$

62) [정답] 27

[해설]

문제에서 주어진 등식이 $(\log_3 x)^2-6\log_3\sqrt{x}+2=0$이므로

먼저 진수 조건을 확인하면 $x>0$...① 공통부분인 $\log_3 x=t$로 치환하면 $t^2-3t+2=0$의 두 근은 $\log_3\alpha, \log_3\beta$이므로

근과 계수와의 관계를 이용하면 $\begin{cases}\log_3\alpha+\log_3\beta=3\\ \log_3\alpha\cdot\log_3\beta=2\end{cases}$...②

$\therefore \alpha\beta=27$

63) [정답] 4

[해설]

방정식 $x^{\log_2 x}=8x^2$의 양변에 2를 밑으로 하는 로그를 취하면 $(\log_2 x)^2=3+2\log_2 x$이다. 방정식 $(\log_2 x)^2-2(\log_2 x)-3=0$의 두 실근이 α, β이므로, $\log_2 x=t$라고 치환하면

$t^2-2t-3=0$의 두 실근은 $\log_2\alpha, \log_2\beta$이다.

근과 계수와의 관계에 의해서

$\log_2\alpha+\log_2\beta=\log_2\alpha\beta=2$이다. $\therefore \alpha\beta=4$

64) [정답] ②

[해설]

$a^x=\sqrt{3}$에서 $x=\log_a\sqrt{3}$이므로 점 A의 좌표는 $(\log_a\sqrt{3},\ \sqrt{3})$이다.

직선 OA의 기울기는 $\dfrac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}-4}$

직선 OA와 직선 AB가 서로 수직이므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}-4}=-1$

이어야 한다. 즉,

$(\log_a\sqrt{3})^2-4\log_a\sqrt{3}+3=0$에서

$(\log_a\sqrt{3}-1)(\log_a\sqrt{3}-3)=0$

$\log_a\sqrt{3}=1$ 또는 $\log_a\sqrt{3}=3$

$a=\sqrt{3}$ 또는 $a^3=\sqrt{3}$

따라서 $a=3^{\frac{1}{2}}$ 또는 $a=3^{\frac{1}{6}}$이므로 모든 a의 값의 곱은

$3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=3^{\frac{2}{3}}$

65) [정답] ③

[해설]

$\log_{\sqrt{2}}|x|<5$에서

$2\log_2|x|<5$

$\log_2|x|<\dfrac{5}{2}$

$0<|x|<2^{\frac{5}{2}}$

$\therefore -2^{\frac{5}{2}}<x<2^{\frac{5}{2}},\ x\neq0$

이때, $5 < 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{32} < 6$이므로 부등식을 만족하는 정수는 $-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$로 10개다.

66) [정답] ③

[해설]

진수 조건에서

$x-1>0,\ 4x-7>0$

이므로

$x > \frac{7}{4}$ …… ㉠

$\log_3(x-1)+\log_3(4x-7) \le 3$에서 로그의 성질에 의해

$\log_3(x-1)(4x-7) \le \log_3 3^3$

밑이 1보다 크므로

$(x-1)(4x-7) \le 27$

$4x^2-11x-20 \le 0$

$(x-4)(4x+5) \le 0$

이므로

$-\frac{5}{4} \le x \le 4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{7}{4} < x \le 4$

따라서 정수 x는 2, 3, 4이므로 정수 x의 개수는 3개다.

67) [정답] ②

[해설]

(ⅰ) $\log_2|x-1|$ 의 진수조건에서

$x \ne 1$

(ⅱ) $2\log_2|x-1| \le 1-\log_2\frac{1}{2}$

$2\log_2|x-1| \le 1-(-1)$

$2\log_2|x-1| \le 2$

$\log_2|x-1| \le 1$

$\log_2|x-1| \le \log_2 2$

$|x-1| \le 2$에서

$-1 \le x \le 3$

즉 정수 x의 값은 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 값은 $-1,\ 0,\ 2,\ 3$이고, 그 개수는 4이다.

68) [정답] ①

[해설]

진수조건에서

$x-1>0,\ \frac{1}{2}x+k>0$

이므로 $x>1$ …… ㉠

$\log_5(x-1) \le \log_5\left(\frac{1}{2}x+k\right)$에서

$x-1 \le \frac{1}{2}x+k,\ \frac{1}{2}x \le k+1$

$\therefore\ x \le 2(k+1)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $1 < x \le 2(k+1)$이고 모든 정수 x의 개수가 3이므로

$2(k+1)-1 = 2k+1 = 3$

$\therefore\ k=1$

69) [정답] 15

[해설]

$\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1) \le 0$에서

$\log_3 f(x)-\log_3(x-1) \le 0$

$\log_3 f(x) \le \log_3(x-1)$이므로

$f(x)>0,\ x-1>0,\ f(x) \le x-1$

(ⅰ) $f(x)>0$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $0<x<7$

(ⅱ) $x-1>0$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $x>1$

(ⅲ) $f(x) \le x-1$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $x>1$일 때 $x \ge 4$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 부등식을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$4 \le x < 7$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x는 4, 5, 6이므로

구하는 합은

$4+5+6=15$

70) [정답] ⑤

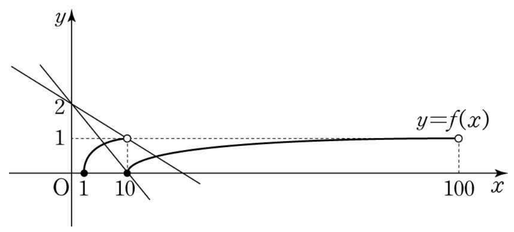
[해설]

$1 \le x < 100$에서 $f(x)$는 $\log x$의 소수부분이다.

$1 \le x < 100$일 때, $f(x)=\log x$

$10 \le x < 100$일 때, $f(x)=\log x-1$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2-\dfrac{x}{n}$는 그림과 같다.



직선 $y=2-\dfrac{x}{n}$가 점 $(10, 0)$을 지날 때,

$$2-\frac{10}{n}=0 \qquad \therefore\ n=5$$

점 $(10, 1)$을 지날 때,

$$2-\frac{10}{n}=1 \qquad \therefore\ n=10$$

따라서 $5 \le n < 10$일 때, 직선 $y=2-\dfrac{x}{n}$와 곡선 $y=f(x)$가 두 점에서 만난다.

$\therefore\ n=5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$

즉, 자연수 n의 개수는 5이다.

71) [정답] ①

[해설]

$f(mn)=f(m)+f(n)$

ⅰ) m이 짝수, n이 짝수일 때

$\log_2 mn=\log_2 m+\log_2 n$

따라서, m과 n이 모두 짝수일 때는 항상 성립한다.

순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $10\times10=100$(개)

ⅱ) m이 짝수, n이 홀수일 때

$\log_2 mn=\log_2 m+\log_3 n$

$\log_2 n=\log_3 n \therefore\ n=1$

순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $10\times1=10$(개)

ⅲ) m이 홀수, n이 짝수

$\log_2 mn=\log_3 m+\log_2 n$

$\log_2 m=\log_3 m \therefore\ m=1$

순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $1\times10=10$(개)

ⅳ) m이 홀수, n이 홀수

$\log_3 mn=\log_3 m+\log_3 n$

따라서, m과 n이 모두 홀수일 때는 항상 성립한다.

순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $10\times10=10$(개)

ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)에서 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$100+10+10+100=220$(개)

72) [정답] **120**

[해설]

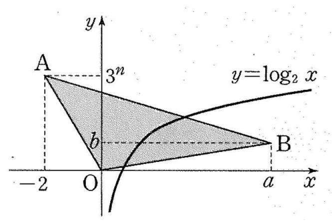
삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(3^n+b)\times(a+2)-\frac{1}{2}\times a\times b-\frac{1}{2}\times2\times3^n$$

$$=\frac{3^n}{2}a+b$$

조건 (나)에서 $b \le \log_2 a$, 즉

$2^b \le a$

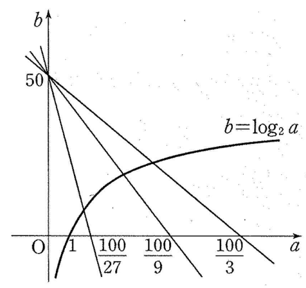


조건 (다)에서 넓이가 50이하이어야 하므로

$\dfrac{3^n}{2}a+b \le 50$

즉, $3^n a+2b \le 100$

(ⅰ) $n=1$일 때, $3a+2b \le 100$이고 $2^b \le a$이므로



$b=1$일 때 $2 \le a \le \dfrac{98}{3}$, $b=2$일 때 $4 \le a \le 32$

$b=3$일 때 $8 \le a \le \dfrac{94}{3}$, $b=4$일 때 $16 \le a \le \dfrac{92}{3}$

$b \ge 5$일 때, 부등식을 만족시키는 자연수 a는 존재하지 않는다.

따라서 $f(1)=31+29+24+15=99$이다.

(ⅱ) $n=2$일 때, $9a+2b \le 100$이고 $2^b \le a$이므로

$b=1$일 때 $2 \le a \le \dfrac{98}{9}$, $b=2$일 때 $4 \le a \le \dfrac{96}{9}$,

$b=3$일 때 $8 \le a \le \frac{94}{9}$, $b \ge 4$일 때, 부등식을 만족시키는 자연수 a는 존재하지 않는다.
따라서 $f(2)=9+7+3=19$이다.

(iii) $n=3$일 때, $27a+2b \le 100$이고 $2^b \le a$이므로
$b=1$일 때, $2 \le a \le \frac{98}{27}$
$b \ge 2$일 때, 부등식을 만족시키는 자연수 a는 존재하지 않는다.
따라서 $f(3)=2$이다.

(i), (ii), (iii)에서

$$f(1)+f(2)+f(3)=99+19+2=120$$

73) [정답] ⑤

[해설]

10g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 8%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량은 4g이므로

$\log\frac{4}{10}=-1+k\log 8$, $\quad k\log 8=\log\frac{4}{10}+1$

$3k\log 2=\log 4$, $\quad 3k\log 2=2\log 2$

$3k=2 \therefore k=\frac{2}{3}$

따라서 20g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 27%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량을 xg이라 하면

$\log\frac{x}{20}=-1+\frac{2}{3}\log 27$

$\log\frac{x}{20}=\log\frac{9}{10}$, $\quad \frac{x}{20}=\frac{9}{10} \therefore x=18$

따라서 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량은 18g이다.