[기하] 사관학교 최근10개년

07 기하 01 포물선

02 포물선의 정의 활용

01 정의 활용1 (초점, 포물선 위의 점을 이은 선분 관련)

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 6

1. 초점이 F인 포물선 $y^2=4x$위의 점 P(a, 6)에 대하여 $\overline{\text{PF}}=\text{k}$이다. $a+k$의 값은?

① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

[출처] 2022 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능특강 예제와 유제 유제

2. 초점이 F, 준선이 l인 포물선 $y^2=ax$ 위의 점 $\text{A}(2,\ 2\sqrt{2})$에서 준선 l에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 AHF의 둘레의 길이는? (단, a는 상수이다.)

① 8 ② $6+\sqrt{6}$ ③ $6+2\sqrt{2}$
④ $6+\sqrt{10}$ ⑤ $6+2\sqrt{3}$

3. 포물선 $y^2=8x$의 초점을 F라고 하자. 포물선 위의 두 점 A, B의 중점의 좌표가 $\left(\frac{7}{2},\ -1\right)$일 때, $\overline{\text{AF}}+\overline{\text{BF}}$의 값을 구하시오.

07 기하

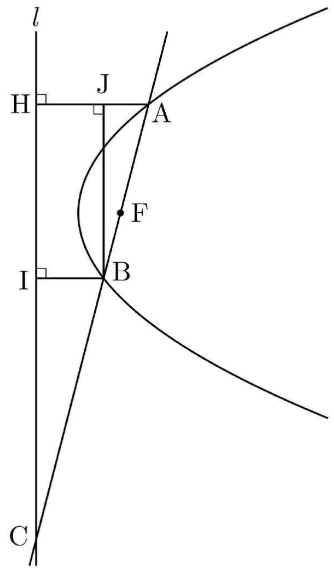
01 포물선

02 포물선의 정의 활용

02 정의 활용2 (초점을 지나는 직선 관련)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 28

4. 점 F를 초점으로 하고 직선 l을 준선으로 하는 포물선이 있다. 포물선 위의 두 점 A, B와 점 F를 지나는 직선이 직선 l과 만나는 점을 C라 하자. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고 점 B에서 직선 AH에 내린 수선의 발을 J라 하자. $\dfrac{\overline{BJ}}{\overline{BI}}=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$이고 $\overline{AB}=8\sqrt{5}$일 때, 선분 HC의 길이는?

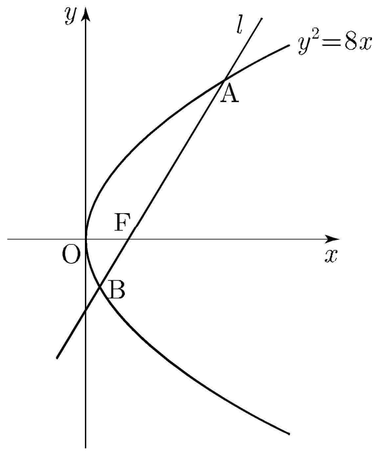


① $21\sqrt{3}$ ② $22\sqrt{3}$ ③ $23\sqrt{3}$
④ $24\sqrt{3}$ ⑤ $25\sqrt{3}$

5. 포물선 $y^2=16x$의 초점 F를 지나고 기울기가 2인 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 이 두 점에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 할 때, $\overline{AH_1}+\overline{BH_2}$의 값을 구하시오.

[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 9

6. 포물선 $y^2=8x$의 초점 F를 지나는 직선 l이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB}=14$를 만족시키는 직선 l의 기울기를 m이라 할 때, 양수 m의 값은?



① $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ③ 1
④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

07 기하

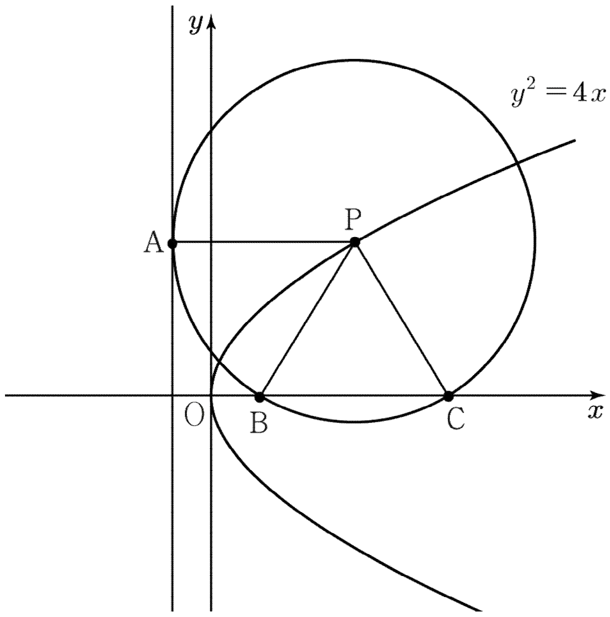
01 포물선

02 포물선의 정의 활용

06 정의 활용6 (포물선과 원 관련)

[출처] 2016 모의_공공 사관학교 고3 07월 10

7. 그림과 같이 포물선 $y^2=4x$ 위의 한 점 P를 중심으로 하고 준선과 점 A에서 접하는 원이 x축과 만나는 두 점을 각각 B, C라 하자. 부채꼴 PBC의 넓이가 부채꼴 PAB의 넓이의 2배일 때, 원의 반지름의 길이는?
(단, 점 P의 x좌표는 1보다 크고, 점 C의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 크다.)

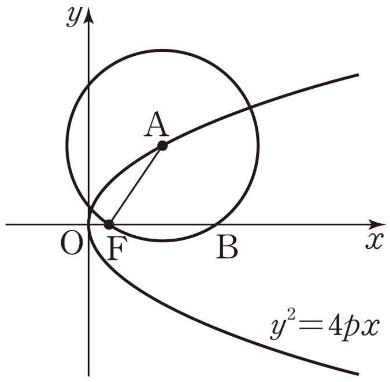


① $2+2\sqrt{3}$ ② $3+2\sqrt{2}$ ③ $3+2\sqrt{3}$
④ $4+2\sqrt{2}$ ⑤ $4+2\sqrt{3}$

8. 그림과 같이 꼭짓점이 원점 O인 포물선

$y^2 = 4px\,(0 < p < 1)$

의 초점을 F라 하자. 이 포물선 위에 있고 제1사분면에 있는 점 A에서 초점 F에 이르는 거리가 3일 때, 점 A를 중심으로 하고 초점 F를 지나는 원이 x축과 만나는 두 점 중 F가 아닌 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{OB}} = 6\overline{\mathrm{OF}}$일 때, 상수 p의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

9. 초점이 F인 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 제1사분면의 점 P를 중심으로 하고, 두 직선 $x = -p$, $y = -p$에 모두 접하는 원 C가 있다. 원 C의 넓이가 25π일 때, $\overline{\mathrm{OF}} + \overline{\mathrm{PF}}$의 값은? (단, O는 원점이고, $p > 0$이다.)

① 5 ② 6 ③ 7

④ 8 ⑤ 9

07 기하 02 타원

02 타원의 정의 활용

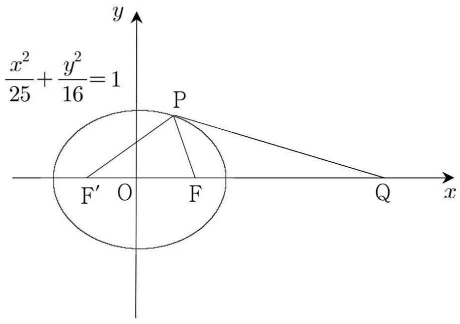
01 정의 활용1 (타원의 두 정보)

[출처] 2015 모의_공공 사관학교 고3 07월 24

10. 타원 $2x^2 + y^2 = 16$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 이 타원 위의 점 P에 대하여 $\frac{\overline{\mathrm{PF'}}}{\overline{\mathrm{PF}}} = 3$일 때, $\overline{\mathrm{PF}} \times \overline{\mathrm{PF'}}$의 값을 구하시오.

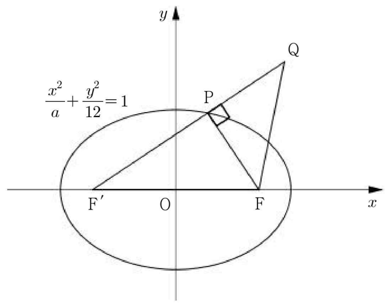
[출처] 2013 모의_공공 사관학교 고3 07월 25

11. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점을 각각 F, F$'$이라 하자. 타원 위의 한 점 P와 x축 위의 한 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{QF}}:\overline{\mathrm{QF'}}=2:3$일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}^2$의 값을 구하시오. (단, 점 Q는 타원 외부의 점이다.)



[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 15

12. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{12}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F$'$이라 하자. 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{12}=1$ 위에 있고 제 1사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 F$'$P의 연장선 위에 점 Q를 $\overline{\mathrm{F'Q}}=10$이 되도록 잡는다. 삼각형 PFQ가 직각이등변삼각형일 때, 삼각형 QF$'$F의 넓이는? (단, $a>12$)



① 15 ② $\frac{35}{2}$ ③ 20
④ $\frac{45}{2}$ ⑤ 25

07 기하

02 타원

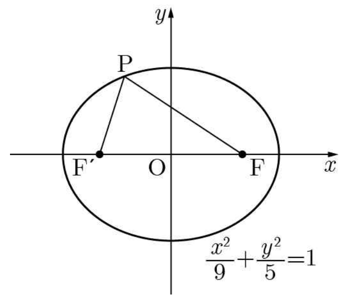
02 타원의 정의 활용

04 정의 활용4 (둘레의 길이 관련)

[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 24

13. 좌표평면에서 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)(c>0)$이라 하자. 이 타원 위의 제 1사분면에 있는 점 P에 대하여 점 F′을 중심으로 하고 점 P를 지나는 원과 직선 PF′이 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하고, 점 F를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원과 직선 PF가 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R라 할 때, 삼각형 PQR의 둘레의 길이를 구하시오.

14. 그림과 같은 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점 F, F′과 타원 위의 점 P에 대하여 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는?



① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

15. $9x^2+16y^2=144$의 두 초점 F, F′과 y축 위의 A에 대하여 삼각형 FAF′의 둘레의 길이를 구하시오.

① $8+2\sqrt{5}$ ② $8+2\sqrt{6}$ ③ $8+2\sqrt{7}$
④ $6+2\sqrt{5}$ ⑤ $6+2\sqrt{7}$

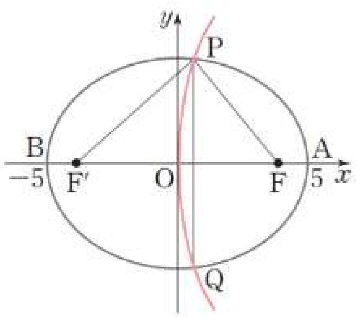
07 기하

02 타원

02 타원의 정의 활용

06 정의 활용6 (포물선과 타원)

16. 좌표평면에서 두 점 A(5, 0), B(−5, 0)에 대하여 장축이 $\overline{\mathrm{AB}}$인 타원의 두 초점을 각각 F, F′이라 하자. 초점이 F이고 꼭짓점이 원점인 포물선이 타원과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고 $\overline{\mathrm{PQ}}=8$일 때, $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소, 점 F의 x좌표는 양수이다.)



[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 12

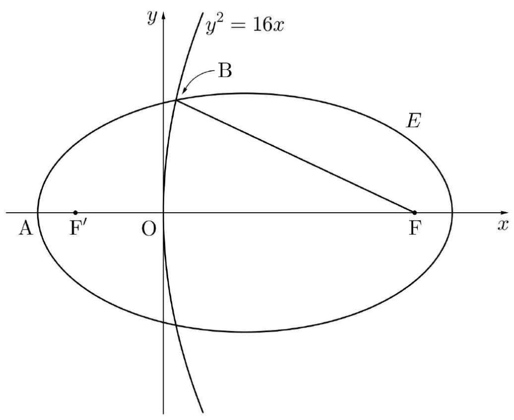
17. 좌표평면에서 두 점 A(−3, 0), B(3, 0)을 초점으로 하고 장축의 길이가 8인 타원이 있다. 초점이 B이고 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이 타원과 만나는 한 점을 P라 할 때, 선분 PB의 길이는?

① $\frac{22}{7}$ ② $\frac{23}{7}$ ③ $\frac{24}{7}$

④ $\frac{25}{7}$ ⑤ $\frac{26}{7}$

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 29

18. 그림과 같이 포물선 $y^2=16x$의 초점을 F라 하자. 점 F를 한 초점으로 하고 점 A$(-2,\ 0)$을 지나며 다른 초점 F$'$이 선분 AF위에 있는 타원 E가 있다. 포물선 $y^2=16x$가 타원 E와 제 1사분면에서 만나는 점을 B라 하자.
$\overline{\mathrm{BF}}=\dfrac{21}{5}$일 때, 타원 E의 장축의 길이는 k이다. $10k$의 값을 구하시오.



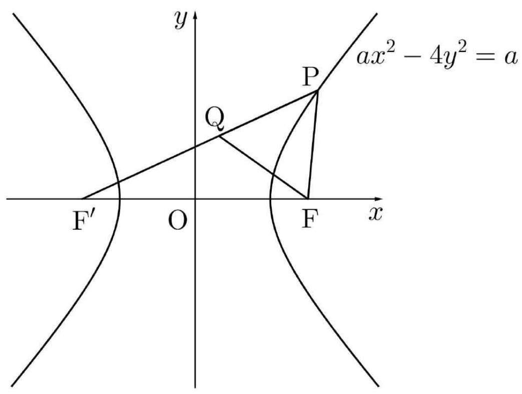
07 기하
03 쌍곡선

02 쌍곡선의 정의 활용

02 정의 활용2 (쌍곡선의 한 정보)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 27

19. 그림과 같이 두 초점이 F, F$'$인 쌍곡선 $ax^2-4y^2=a$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P와 선분 PF$'$ 위의 점 Q에 대하여 삼각형 PQF는 한 변의 길이가 $\sqrt{6}-1$인 정삼각형이다. 상수 a의 값은? (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.)



① $\dfrac{9}{2}$　② 5　③ $\dfrac{11}{2}$　④ 6　⑤ $\dfrac{13}{2}$

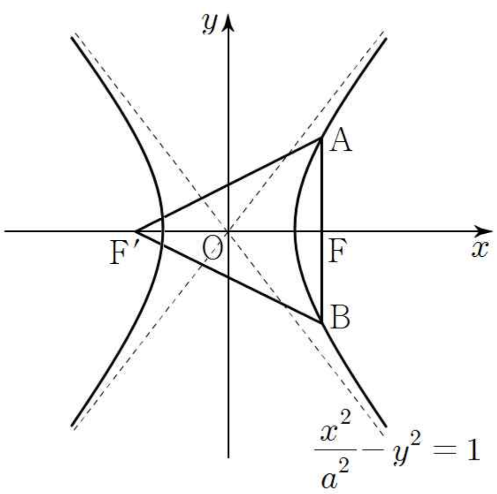
20. 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$위의 점 P에 대하여

$$\overline{\mathrm{PF}}=4,\ \cos(\angle \mathrm{FPF'})=\frac{1}{4}$$

일 때, b^2의 값은? (단, b는 상수이고, $\overline{\mathrm{PF}}<\overline{\mathrm{PF'}}$이다.)

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

21. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$의 한 초점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 쌍곡선과 만나는 두 점을 A, B라 하자. 쌍곡선의 다른 초점 F′에 대하여 삼각형 ABF′가 정삼각형일 때, $8a^2$의 값을 구하시오. (단, a는 양의 실수)



07 기하

03 쌍곡선

02 쌍곡선의 정의 활용

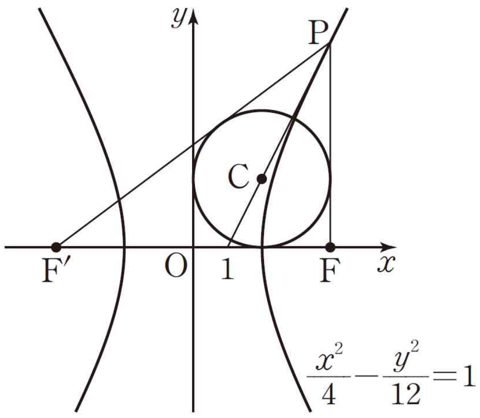
05 정의 활용5 (원과 쌍곡선)

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 13

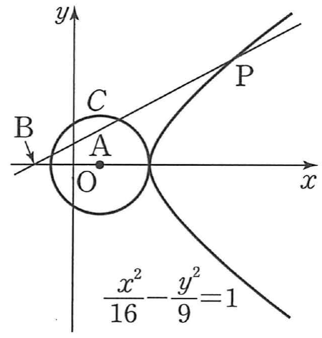
22. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$의 꼭짓점 중 x좌표가 음수인 점을 중심으로 하는 원 C가 있다. 점 (3, 0)을 지나고 원 C에 접하는 두 직선이 각각 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$과 한 점에서만 만날 때, 원 C의 반지름의 길이는?

① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$
④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

23. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P와 이 쌍곡선의 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)(c>0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $\mathrm{PF}'\mathrm{F}$의 내접원의 중심을 C라 하자. 직선 PC가 x축과 만나는 점의 x좌표가 1일 때, 삼각형 $\mathrm{PF}'\mathrm{F}$의 둘레의 길이를 구하시오.



24. 그림과 같이 중심이 $\mathrm{A}(a,\ 0)$이고 곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\,(x>0)$과 한 점에서 만나는 원을 C라 하자. 점 $\mathrm{B}(-2,\ 0)$과 곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\,(x>0)$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 직선 PB가 원 C와 항상 만나도록 하는 a의 최댓값은?
(단, $-2<a<4$)



① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

07 기하

03 쌍곡선

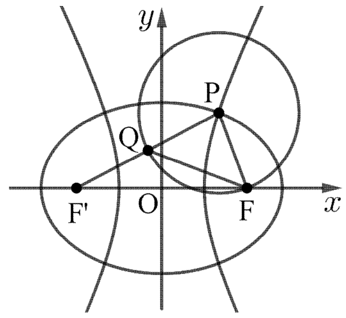
02 쌍곡선의 정의 활용

07 정의 활용7 (타원과 쌍곡선)

[출처] 2016 모의_공공 사관학교 고3 07월 24

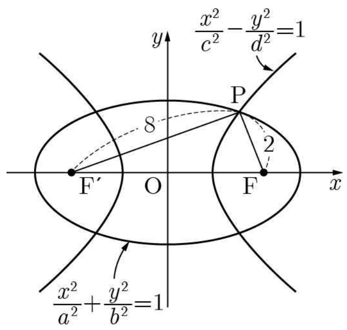
25. 두 초점 F, F′을 공유하는 타원 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{16}=1$과 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$이 있다. 타원과 쌍곡선이 만나는 점 중 하나를 P라 할 때, $\left|\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{PF'}}^2\right|$의 값을 구하시오. (단, a는 양수이다.)

26. 그림과 같이 두 초점 F,F′을 공유하는 타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$과 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$이 제 1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 점 P를 중심으로 하고 초점 F를 지나는 원이 선분 PF′과 만나는 점을 Q라 할 때, $\overline{\mathrm{QF'}}=2$이다. 삼각형 QFF′의 넓이를 S, $\overline{\mathrm{PF}}=c$라 할 때, $a+b+c+S$의 값은? (단, a, b, c는 양수이다)



① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

27. 그림과 같이 두 초점 F, F′을 공유하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$과 쌍곡선 $\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{d^2}=1$이 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=2$, $\overline{\mathrm{PF'}}=8$일 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $a^2+b^2+c^2+d^2$의 값을 구하시오. (단, $a>b>0$, $c>0$, $d>0$)



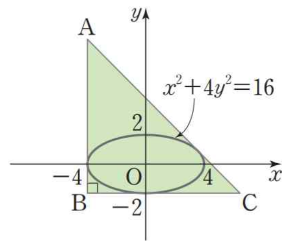
07 기하

04 이차곡선과접선

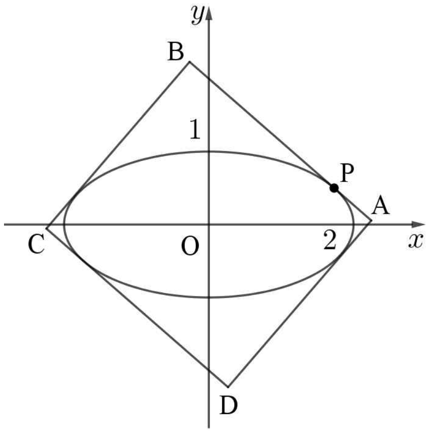
02 타원과 접선

03 타원과 접선3 (기울기조건)

28. 그림과 같이 타원 $x^2+4y^2=16$에 직각이등변삼각형 ABC가 외접할 때, △ABC의 넓이가 $a+b\sqrt{5}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.



29. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$에 외접하는 직사각형 ABCD에서 접점 P의 좌표가 $\left(\sqrt{3},\ \frac{1}{2}\right)$일 때, 직사각형의 넓이는 $\frac{a\sqrt{19}}{b}$이다. $a+b$의 값은?
(단, a, b는 서로소인 자연수)



① 17 ② 19 ③ 21
④ 23 ⑤ 25

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 25

30. 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$과 두 점 A$(4,\ 0)$, B$(0,\ -3)$이 있다. 이 타원 위의 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 넓이가 k가 되도록 하는 점 P의 개수가 3일 때, 상수 k의 값은?

① $3\sqrt{2}-3$ ② $6\sqrt{2}-7$ ③ $3\sqrt{2}-2$
④ $6\sqrt{2}-6$ ⑤ $6\sqrt{2}-5$

07 기하　　04 이차곡선과접선

03 쌍곡선과 접선

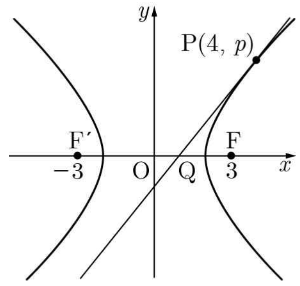
02 쌍곡선과 접선2 (접점조건)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 25

31. 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선의 x절편이 $\frac{1}{3}$이다. 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F라 할 때, 선분 PF의 길이는?

① 5　② $\frac{16}{3}$　③ $\frac{17}{3}$
④ 6　⑤ $\frac{19}{3}$

32. 다음 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(3, 0)$, $\mathrm{F}'(-3, 0)$인 쌍곡선 위의 점 $\mathrm{P}(4, p)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q가 선분 $\mathrm{F}'\mathrm{F}$를 $2:1$로 내분할 때, p의 값은?



① $\sqrt{15}$　② $3\sqrt{2}$　③ $\sqrt{21}$
④ $2\sqrt{6}$　⑤ $3\sqrt{3}$

[출처] 2015 모의_공공 사관학교 고3 07월 5

33. 쌍곡선 $7x^2-ay^2=20$ 위의 점 $(2, b)$에서의 접선이 점 $(0, -5)$를 지날 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 4　② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

07 기하

05 평면벡터의연산

01 벡터의 뜻과 연산

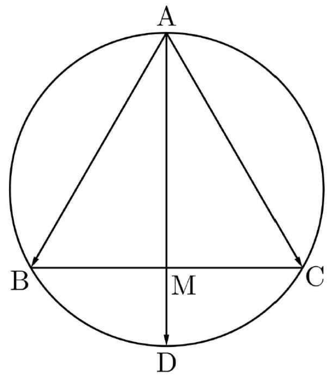
05 벡터의 연산3 (도형에서 벡터의 연산)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 26

34. 그림과 같이 정삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 M이라 하고, 직선 AM이 정삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하자.

$$\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$$

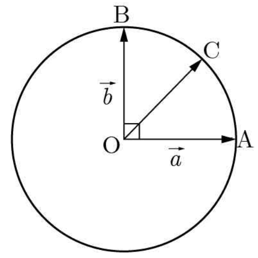
일 때, $m+n$의 값은? (단, m, n은 상수이다.)



① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{17}{12}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

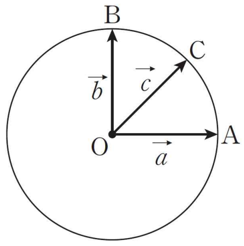
35. 다음 그림에서 원의 중심은 O이고, 선분 OA와 선분 OB는 원의 반지름이며 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, $\angle AOC=45°$이다. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 할 때, $\overrightarrow{OC}=m\vec{a}+n\vec{b}$를 만족시키는 두 실수 m, n에 대하여 $3m^2+n^2$의 값은?



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ 2 ⑤ 4

36. 다음 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 세 점 A, B, C가 다음 조건을 모두 만족시킨다.



$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\quad \overrightarrow{OB}=\vec{b},\quad \overrightarrow{OC}=\vec{c}$$

일 때, $\vec{c}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내면?

(가) $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$
(나) $\overrightarrow{OC}$는 $\angle AOB$의 이등분선이다.

① $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ ③ $\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b})$

④ $\frac{3}{4}(\vec{a}+\vec{b})$ ⑤ $\vec{a}+\vec{b}$

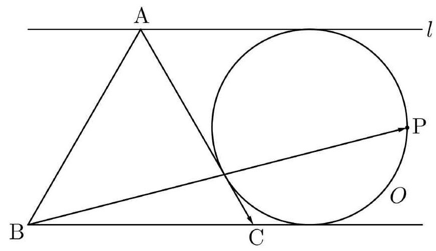
07 기하 05 평면벡터의연산

02 벡터의 해석과 활용

05 벡터의 해석5 (Mm)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 27

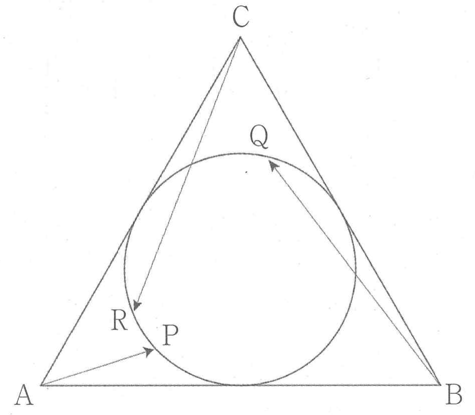
37. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC에 대하여 점 A를 지나고 직선 BC에 평행한 직선을 l이라 할 때, 세 직선 AC, BC, l에 모두 접하는 원을 O라 하자. 원 O위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BP}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?
(단, 원 O의 중심은 삼각형 ABC의 외부에 있다.)



① 46 ② 47 ③ 48

④ 49 ⑤ 50

38. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC의 내부에 원 O가 내접해 있다. 원 O 위의 임의의 세 점 P, Q, R에 대하여 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}|$의 최댓값은?



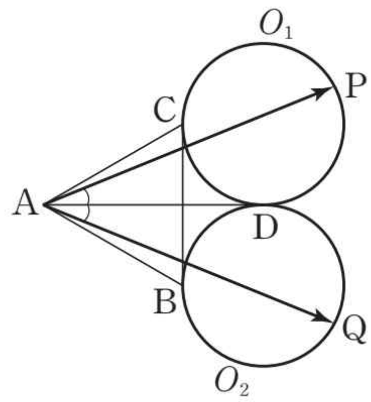
① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 3
④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

[출처] 2022 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능특강 레벨3 실력완성

39. 한 평면에 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC와 반지름의 길이가 같은 두 원 O_1, O_2가 있다. 그림과 같이 두 원 O_1, O_2는 점 D에서만 만나고 직선 BC와 각각 두 점 C, B에서 접한다. 원 O_1 위의 한 점 P와 원 O_2 위의 한 점 Q에 대하여

$$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AQ}|,\ \angle PAD=\angle QAD$$

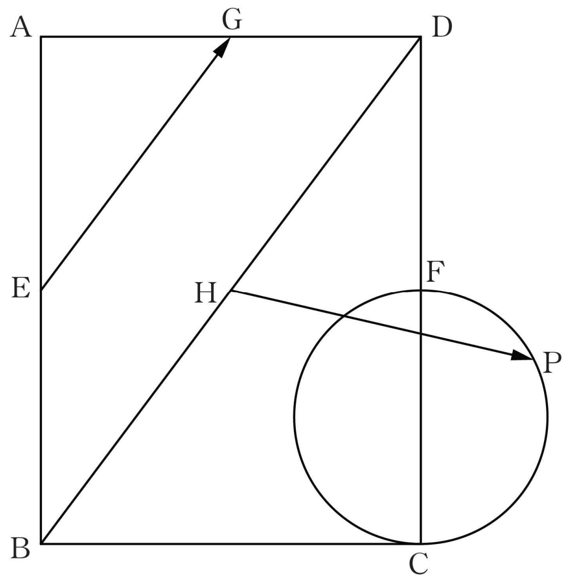
일 때, $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|$의 최댓값과 최솟값의 합은?



① $2+2\sqrt{3}$ ② $3+2\sqrt{3}$ ③ $2+3\sqrt{3}$
④ $3+4\sqrt{3}$ ⑤ $4+4\sqrt{3}$

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 10월 18

40. $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=6$인 직사각형 ABCD에 대하여 네 선분 AB, CD, DA, BD의 중점을 각각 E, F, G, H라 하자. 선분 CF를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}|$의 최댓값은?



① 8 ② $2+2\sqrt{10}$ ③ $2+2\sqrt{11}$
④ $2+4\sqrt{3}$ ⑤ $2+2\sqrt{13}$

07 기하

06 위치벡터와평면벡터의성분

02 벡터의 성분과 연산

08 벡터의 성분8 (추론과 해석)

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

41. 좌표평면에서 점 A$(0, 12)$와 양수 t에 대하여 점 P$(0, t)$와 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$
(나) $\frac{t}{3}\le|\overrightarrow{PQ}|\le\frac{t}{2}$

$6\le t\le 12$에서 $|\overrightarrow{AQ}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① $12\sqrt{2}$ ② $14\sqrt{2}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $18\sqrt{2}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

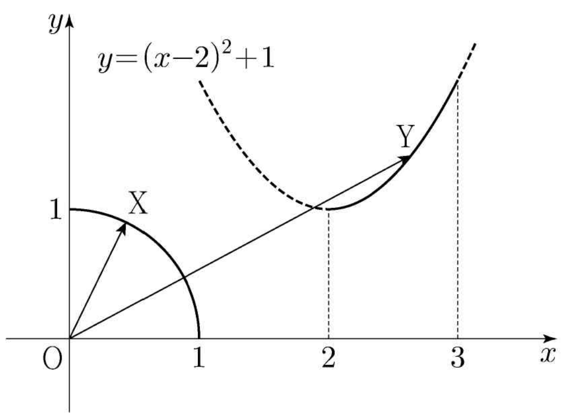
[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 19

42. 좌표평면 위에 두 점 A(1, 0), B(0, 1)이 있다.

중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB 위를 움직이는 점 X와 함수 $y=(x-2)^2+1\,(2 \le x \le 3)$의 그래프 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OX}$$

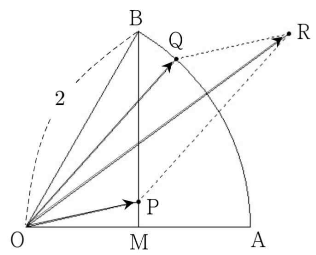
를 만족시키는 점 P가 나타내는 영역을 R라 하자. 점 O로부터 영역 R에 있는 점까지의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, M^2+m^2의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $16-2\sqrt{5}$ ② $16-\sqrt{5}$ ③ 16
④ $16+\sqrt{5}$ ⑤ $16+2\sqrt{5}$

[출처] 2013 모의_공공 사관학교 고3 07월 15

43. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB에서 선분 OA의 중점을 M이라 하자. 점 P는 두 선분 OM과 BM 위를 움직이고, 점 Q는 호 AB 위를 움직인다. $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$를 만족시키는 점 R가 나타내는 영역 전체의 넓이는?



① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $2\sqrt{3}$
④ 4 ⑤ $3\sqrt{3}$

07 기하 07 평면벡터의내적

01 평면벡터의 내적

02 내적2 (내적 구하기, 벡터의 크기 구하기)

44. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$이고 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$일 때, 벡터 $\vec{a}-2\vec{b}$의 크기는?

① $\sqrt{26}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{7}$
④ $\sqrt{29}$ ⑤ $\sqrt{30}$

45. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 60°이고, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$일 때, $|\vec{a}-\vec{b}|$의 값은?

① $\sqrt{19}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{11}$
④ $\sqrt{7}$ ⑤ $\sqrt{3}$

[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 3

46. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 60°이고, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$일 때, $|\vec{a}-2\vec{b}|$의 값은?

① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{7}$
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

07 기하

07 평면벡터의내적

02 내적의 성분계산

03 성분과 내적3 (평행 또는 수직)

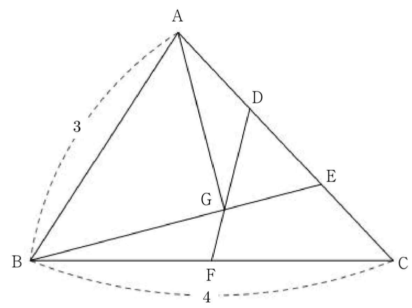
[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 1

47. 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ k)$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직일 때, k의 값은?

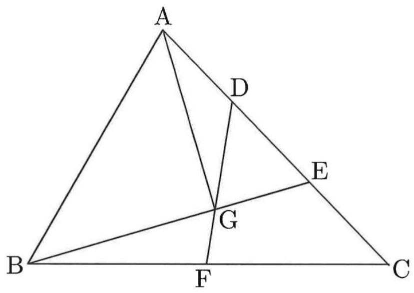
① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 27

48. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$인 삼각형 ABC에서 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점을 D, 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점을 E라 하자. 선분 BC의 중점을 F라 하고, 두 선분 BE, DF의 교점을 G라 하자. $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}}=0$일 때, $\cos(\angle\mathrm{ABC})=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



49. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$인 삼각형 ABC에서 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점을 D, 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점을 E라 하자. 선분 BC의 중점을 F라 하고, 두 선분 BE, DF의 교점을 G라 하자. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=0$일 때, $\cos(\angle ABC)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



07 기하 07 평면벡터의내적

03 내적의 활용

01 활용1 (움직이는 점 조건과 자취)

50. 곡선 $y=\sqrt{1-x^2}\left(\frac{1}{2}\le x\le 1\right)$ 위의 점 X와 선분 $x+\sqrt{3}y=2\ (0\le x\le 2)$ 위의 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{OP}=(\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OY})\overrightarrow{OX}$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 영역의 넓이는?

① $\frac{\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{2}{9}\pi+\frac{\sqrt{3}}{3}$

④ $\frac{2}{9}\pi+\frac{\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\frac{\pi}{3}+\frac{5\sqrt{3}}{6}$

51. $\overline{AB}=2$인 정삼각형 ABC의 내부의 점 P가

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}\le -1$$

을 만족하면서 움직일 때, 점 P가 나타내는 도형의 넓이는?

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{4}$

④ $\frac{\pi}{6}$ ⑤ $\frac{\pi}{8}$

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 30

52. 좌표평면 위의 두 점 A(6, 0), B(6, 5)와 음이 아닌 실수 k에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{OP}=k(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$이고 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}\le 21$이다.
(나) $\lvert\overrightarrow{AQ}\rvert=\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$이고 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}\le 21$

$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

07 기하

07 평면벡터의내적

03 내적의 활용

03 내적의 Mm1 (성분이용)

53. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overline{PQ}=\sqrt{2}$이다. 점 R(2, 3)에 대하여 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값은?

① 141 ② 142 ③ 143

④ 144 ⑤ 145

54. 좌표평면 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 점 P, Q는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이다.
(나) $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}$

점 R(2, 3)에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① 141 ② 142 ③ 43
④ 144 ⑤ 145

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 30

55. 좌표평면 위의 세 점 A(6, 0), B(2, 6), C$(k,\ -2k)(k>0)$과 삼각형 ABC의 내부 또는 변 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $5\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
(나) 점 P가 나타내는 도형의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}$의 최댓값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

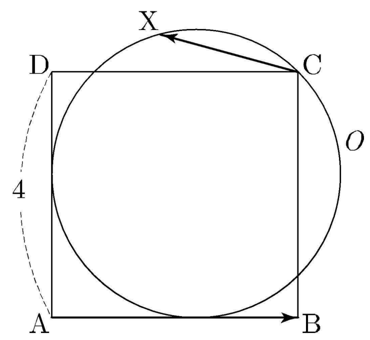
07 기하 07 평면벡터의내적

03 내적의 활용

05 내적의 Mm3 (벡터의 분할)

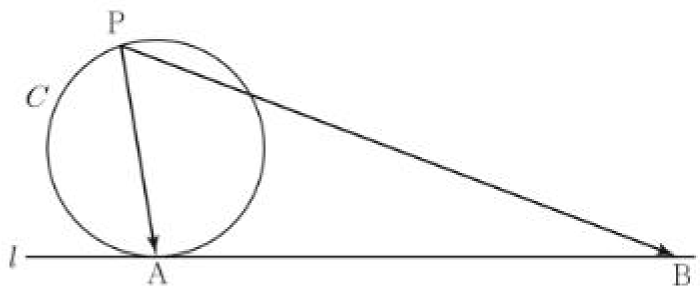
[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 29

56. 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에서 변 AB와 변 AD에 모두 접하고 점 C를 지나는 원을 O라 하자. 원 O 위를 움직이는 점 X에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 최댓값은 $a-b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 자연수이다.)



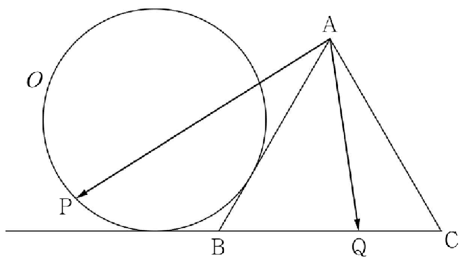
[출처] 2016 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

57. 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원 C와 원 C 위의 점 A에서의 접선 l이 있다. 원 C 위의 점 P와 $\overline{\mathrm{AB}}=24$를 만족시키는 직선 l 위의 점 B에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값을 구하시오.



[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 29

58. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC와 반지름의 길이가 1이고 선분 AB와 직선 BC에 동시에 접하는 원 O가 있다. 원 O 위의 점 P와 선분 BC 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 최댓값과 최솟값의 합은 $a+b\sqrt{3}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이고, 원 O의 중심은 삼각형 ABC의 외부에 있다.)

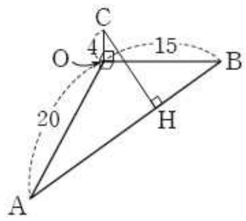


07 기하 09 공간도형

02 삼수선의 정리

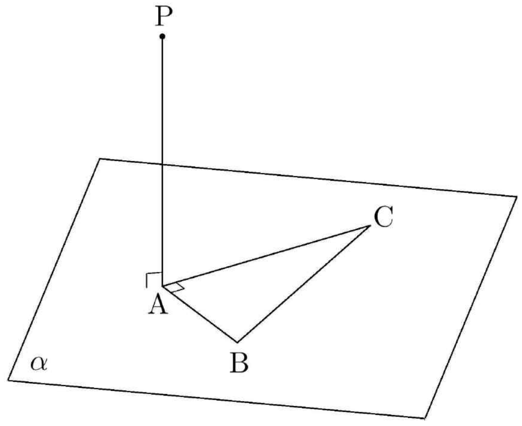
01 삼수선의 정리1 (기본, 길이)

59. 그림과 같이 공간에서 세 선분 OA, OB, OC가 서로 수직으로 만나고, 그 길이가 각각 20, 15, 4이다. 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, $\overline{CH}^2$의 값을 구하시오.



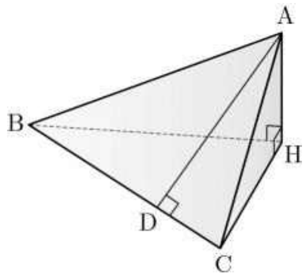
[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 24

60. 그림과 같이 평면 α 위에 $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ 이고 $\overline{AB} = 1$, $\overline{AC} = \sqrt{3}$ 인 직각삼각형 ABC가 있다. 점 A를 지나고 평면 α에 수직인 직선 위의 점 P에 대하여 $\overline{PA} = 2$일 때, 점 P와 직선 BC 사이의 거리는?



① $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{70}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{\sqrt{74}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{19}}{2}$

61. 다음 그림과 같이 점 A에서 직선 BC를 포함한 평면에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. $\overline{AH}=2$, $\overline{AB}=4$, $\overline{BD}=\sqrt{5}$일 때, $\overline{DH}$의 길이는?



① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{7}$ ⑤ 3

07 기하 09 공간도형

02 삼수선의 정리

03 삼수선의 정리3 (넓이와 부피)

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 9

62. 평면 α위에 있는 서로 다른 두 점 A, B와 평면 α위에 있지 않은 점 P에 대하여 삼각형 PAB는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이다. 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 H에 대하여 $\overline{PH}=4$일 때, 삼각형 HAB의 넓이는?

① $3\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{7}$
④ 9 ⑤ $3\sqrt{11}$

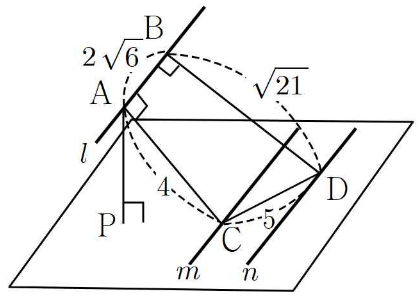
[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 15

63. 평면 α 위에 있는 서로 다른 두 점 A, B와 평면 α 위에 있지 않은 점 P에 대하여 삼각형 PAB는 $\overline{\text{PB}}=4$, $\angle\text{PAB}=\frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이고, 평면 PAB와 평면 α가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다. 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 사면체 PHAB의 부피는?

① $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$
④ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{6}}{6}$

64. 서로 평행한 세 직선 l, m, n에 대하여 직선 l 위의 두 점 A, B, 직선 m 위의 점 C, 직선 n 위의 점 D가 다음 조건을 만족한다.

(가) $\overline{\text{AB}}=2\sqrt{6}$, $\overline{\text{CD}}=5$
(나) $\overline{\text{AC}}\perp l$, $\overline{\text{AC}}=4$
(다) $\overline{\text{BD}}\perp l$, $\overline{\text{BD}}=\sqrt{21}$



이때 점 A에서 두 직선 m, n을 포함하는 평면에 내린 수선의 발을 P라고 할 때, 삼각형 APC의 넓이를 S라 하자. S^2의 값을 구하시오.

07 기하

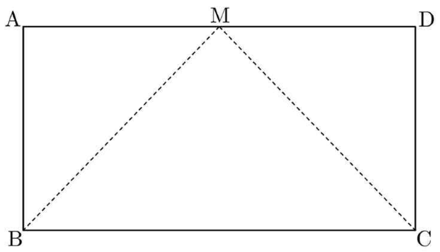
09 공간도형

02 삼수선의 정리

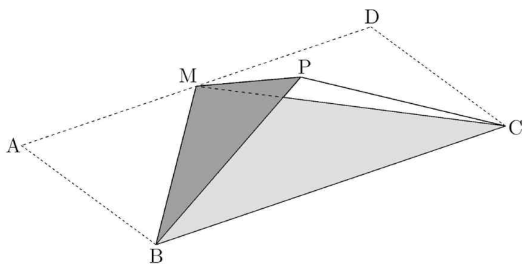
06 이면각1 (이면각 구하기)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 28

65. [그림1]과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{7}$인 직사각형 ABCD 모형의 종이가 있다. 선분 AD의 중점을 M이라 하자. 두 선분 BM, CM을 접는 선으로 하여 [그림2]와 같이 두 점 A, D가 한 점 P에서 만나도록 종이를 접었을 때, 평면 PBM과 평면 BCM이 이루는 각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은?
(단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)



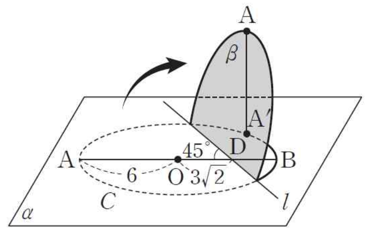
[그림 1]



[그림 2]

① $\frac{17}{27}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{19}{27}$
④ $\frac{20}{27}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

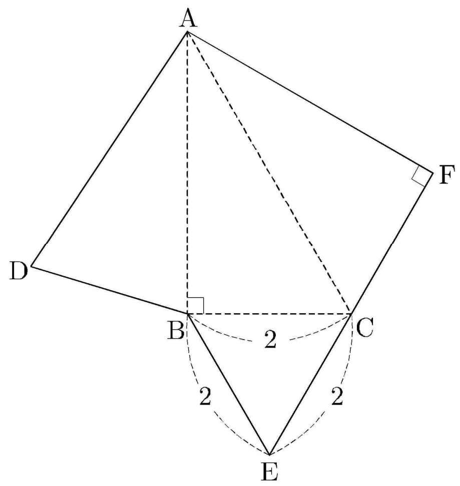
66. 그림과 같이 평면 α 위에 놓인 종이에 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 원 C가 그려져 있다. 선분 OB위에 $\overline{\mathrm{OD}}=3\sqrt{2}$인 점 D를 정하고 점 D를 지나며 선분 AB와 이루는 각의 크기가 45°인 직선 l을 평면 α 위에 그린다. 직선 l을 접는 선으로 하여 점 A를 포함하는 부분을 접을 때, 접힌 도형에서 점 A와 직선 l을 포함하는 평면을 β라 하고, 점 A의 평면 α 위로의 정사영을 A′이라 하자. 점 A′이 원 C 위의 점일 때, 두 평면 α와 β가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은?
(단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)



① $3-2\sqrt{2}$ ② $2-\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{2}-1$
④ $2\sqrt{3}-3$ ⑤ $2-\sqrt{2}$

[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

67. 그림은 어떤 사면체의 전개도이다. 삼각형 BEC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이고, $\angle ABC = \angle CFA = 90^\circ$, $\overline{AC}=4$이다. 이 전개도로 사면체를 만들 때, 두 면 ACF, ABC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은?



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$

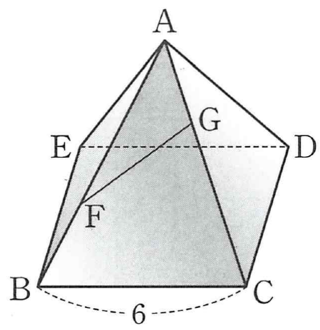
④ $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

07 기하 09 공간도형

03 정사영

02 정사영2 (길이)

68. 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 6인 사각뿔 A-BCDE에서 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 F, 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점을 G라 할 때, 선분 FG의 평면 BCDE 위로의 정사영의 길이는?

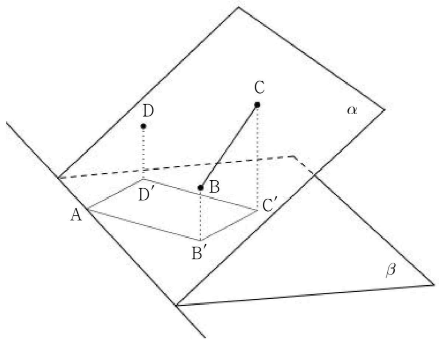


① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 3

④ $\sqrt{10}$ ⑤ $\sqrt{11}$

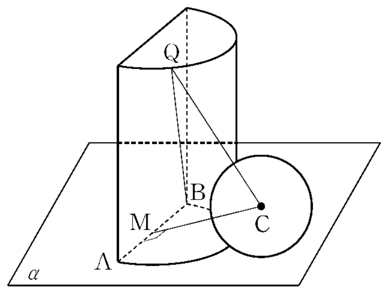
[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 17

69. 그림과 같이 서로 다른 두 평면 α, β의 교선 위에 점 A가 있다. 평면 α 위의 세 점 B, C, D의 평면 β위로의 정사영을 각각 B$'$, C$'$, D$'$이라 할 때, 사각형 AB$'$C$'$D$'$은 한 변의 길이가 $4\sqrt{2}$인 정사각형이고, $\overline{\mathrm{BB'}}=\overline{\mathrm{DD'}}$이다. 두 평면 α와 β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta=\frac{3}{4}$이다. 선분 BC의 길이는? (단, 선분 BD와 평면 β는 만나지 않는다.)



① $\sqrt{35}$ ② $\sqrt{37}$ ③ $\sqrt{39}$
④ $\sqrt{41}$ ⑤ $\sqrt{43}$

70. 그림과 같이 밑면은 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이고 높이가 $5\sqrt{3}$인 기둥 모양의 입체도형이 평면 α위에 놓여 있다. 또한 중심이 C, 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 구가 이 입체도형의 곡면에 접하며 평면 α 위에 놓여 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발이 선분 AB의 중점 M이고, 이 입체도형의 위쪽 밑면의 반원의 호 위의 한 점 Q에 대하여 선분 BQ의 평면 α위로의 정사영의 길이가 $2\sqrt{3}$일 때, 선분 CQ의 길이는?



① $\sqrt{51}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{53}$
④ $3\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{55}$

07 기하

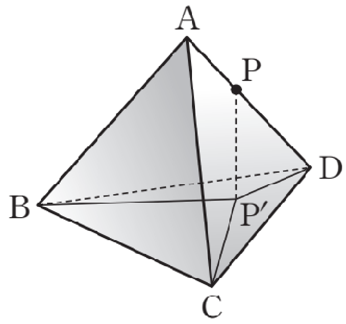
09 공간도형

03 정사영

05 정사영5 (정사영의 넓이 구하기. 이면각이 주어지지 않은 경우)

[출처] 2022 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능특강 레벨3 실력완성

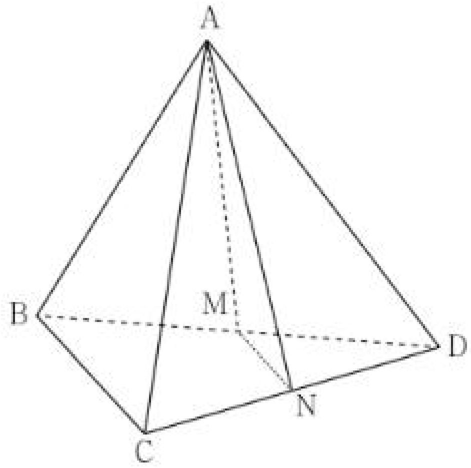
71. 그림과 같이 정사면체 ABCD에서 모서리 AD를 $1:n$으로 내분하는 점을 P라 하자.
점 P의 평면 BCD위로의 정사영을 P′이라 하고 세 삼각형 P′BC, P′CD, P′DB의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자.
$S_1=S_2+2S_3$일 때, 양수 n의 값은?



① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

[출처] 2016 모의_공공 사관학교 고3 07월 15

72. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 12인 정사면체 ABCD에서 두 모서리 BD, CD의 중점을 각각 M, N이라 하자. 사각형 BCNM의 평면 AMN 위로의 정사영의 넓이는?



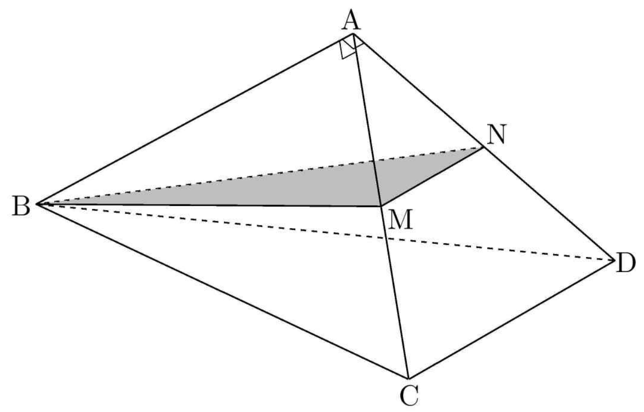
① $\frac{15\sqrt{11}}{11}$ ② $\frac{18\sqrt{11}}{11}$ ③ $\frac{21\sqrt{11}}{11}$
④ $\frac{24\sqrt{11}}{11}$ ⑤ $\frac{27\sqrt{11}}{11}$

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 26

73. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ACD를 한 면으로 하는 사면체 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{BC}=3\sqrt{10}$
>
> (나) $\overline{AB}\perp\overline{AC}$, $\overline{AB}\perp\overline{AD}$

두 모서리 AC, AD의 중점을 각각 M, N이라 할 때, 삼각형 BMN의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자.
$40\times S$의 값을 구하시오.



07 기하

09 공간도형

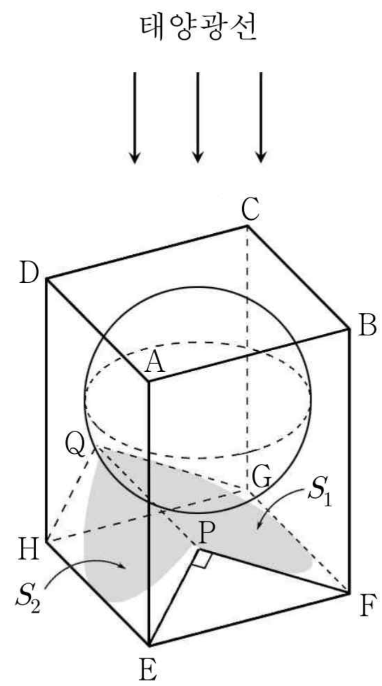
03 정사영

07 정사영7 (그림자의 넓이)

[출처] 2015 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

74. 한 변의 길이가 8인 정사각형을 밑면으로 하고 높이가 $4+4\sqrt{3}$인 직육면체 ABCD−EFGH가 있다. 그림과 같이 이 직육면체의 바닥에 $\angle EPF=90^\circ$인 삼각기둥 EFP−HGQ가 놓여있고 그 위에 구를 삼각기둥과 한 점에서 만나도록 올려놓았더니 이 구가 밑면 ABCD와 직육면체의 네 옆면에 모두 접하였다. 태양광선이 밑면과 수직인 방향으로 구를 비출 때, 삼각기둥의 두 옆면 PFGQ , EPQH에 생기는 구의 그림자의 넓이를 각각 S_1, S_2 $(S_1>S_2)$라

하자. $S_1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}S_2$의 값은?

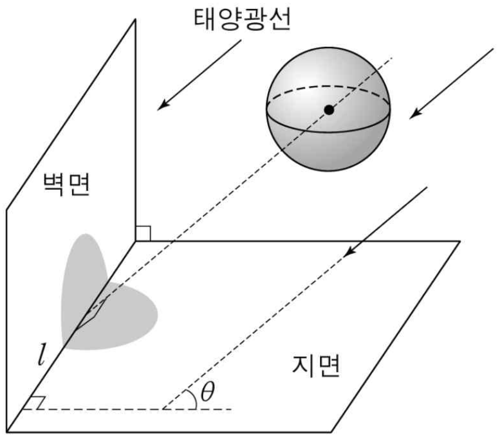


① $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}\pi$ ② $8\sqrt{3}\pi$ ③ $\dfrac{28\sqrt{3}}{3}\pi$

④ $\dfrac{32\sqrt{3}}{3}\pi$ ⑤ $12\sqrt{3}\pi$

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 15

75. 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 구 모양의 공이 공중에 있다. 벽면과 지면은 서로 수직이고, 태양광선이 지면과 크기가 θ인 각을 이루면서 공을 비추고 있다. 태양광선과 평행하고 공의 중심을 지나는 직선이 벽면과 지면의 교선 l과 수직으로 만난다. 벽면에 생기는 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지의 거리의 최댓값을 a라 하고, 지면에 생기는 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지의 거리의 최댓값을 b라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

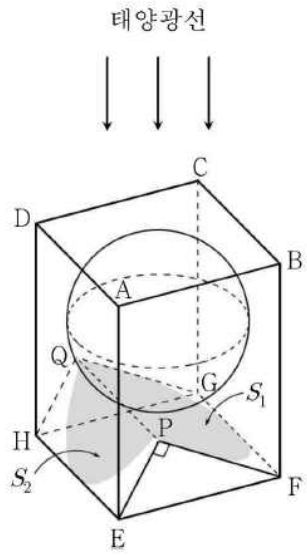
ㄱ. 그림자와 교선 l의 공통부분의 길이는 $2r$이다.

ㄴ. $\theta=60^\circ$ 이면 $a<b$이다.

ㄷ. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{r^2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

76. 한 변의 길이가 8인 정사각형을 밑면으로 하고 높이가 $4+4\sqrt{3}$인 직육면체 ABCD$-$EFGH 가 있다. 그림과 같이 이 직육면체의 바닥에 $\angle\mathrm{EPF}=90^\circ$인 삼각기둥 EFP$-$HGQ가 놓여 있고 그 위에 구를 삼각기둥과 한 점에서 만나도록 올려놓았더니 이 구가 밑면 ABCD와 직육면체의 네 옆면에 모두 접하였다. 태양광선이 밑면과 수직인 방향으로 구를 비출 때, 삼각기둥의 두 옆면 PFGQ, EPQH에 생기는 구의 그림자를 각각 S_1, $S_2(S_1>S_2)$라 하자. $S_1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}S_2$ 의 값은?



① $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}\pi$ ② $\dfrac{32\sqrt{3}}{3}\pi$ ③ $\dfrac{28\sqrt{3}}{3}\pi$
④ $8\sqrt{3}\pi$ ⑤ $12\sqrt{3}\pi$

07 기하 09 공간도형

04 기타

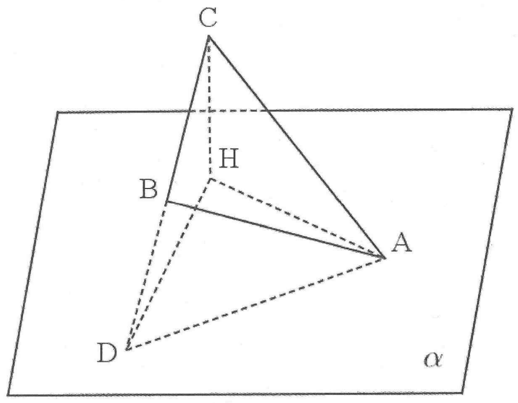
03 교과외3 (공간벡터)

[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 12

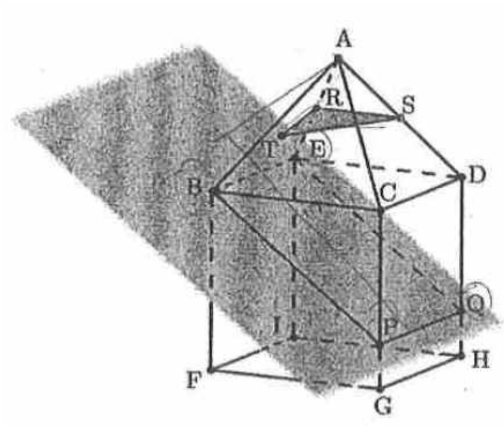
77. 좌표공간에서 점 $(0, a, b)$를 지나고 평면 $x+3y-z=0$에 수직인 직선이 구 $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=1$과 두 점 A, B에서 만난다. $\overline{\mathrm{AB}}=2$일 때, $a+b$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

78. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$, $\overline{\mathrm{CA}}=5$인 삼각형 ABC와 점 A에서만 만나는 평면 α가 직선 BC와 만나는 점을 D라 하자. 점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 ADH의 두 변의 길이가 5이다. 선분 AC를 지름으로 하는 구와 선분 AD를 지름으로 하는 구가 만나서 생기는 원을 C라 할 때, 원 C의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 $p\pi$이다. $9p^2$의 값을 구하시오.
(단, 점 B가 점 C보다 평면 α와 더 가깝다.)



79. 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 4인 정사각뿔 $\mathrm{A-BCDE}$와 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 $\mathrm{BCDE-FGHI}$가 면 BCDE를 공유하고 있다. 선분 CG와 선분 DH를 $3:1$로 내분하는 점을 각각 P, Q라 하고, 선분 AE와 선분 AD의 중점을 각각 R, S, 삼각형 ABE의 무게중심을 T라 할 때, 삼각형 RST의 평면 BPQE 위로의 정사영의 넓이는?



① $\frac{8}{15}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{11}{15}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

07 기하 10 공간좌표

02 분점

01 분점1 (분점의 좌표)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 24

80. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 2,\ -3)$, $\mathrm{B}(6,\ -4,\ 15)$에 대하여 선분 AB 위에 점 C가 있다. 세 점 A, B, C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 A', B', C'이라 하자. $2\overline{\mathrm{A'C'}}=\overline{\mathrm{C'B'}}$일 때, 점 C의 z좌표는?

① -5 ② -3 ③ -1

④ 1 ⑤ 3

81. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -1,\ 1)$, $\mathrm{B}(-2,\ 0,\ 4)$를 이은 선분 AB의 연장선 위에 $2\overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{BC}}$가 되도록 하는 점 C의 좌표를 구하시오.

82. 좌표 공간의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -3,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ -1,\ -2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$라 하자. 삼각형 AOP의 넓이가 $\sqrt{3}$일 때, $\dfrac{n(|a|+|b|+|c|)}{m}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

07 기하

10 공간좌표

02 분점

02 분점2 (분점의 위치)

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 11

83. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 2,\ 1)$, $\mathrm{B}(a,\ b,\ c)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 y축 위에 있다. 직선 AB와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$이다. 양수 b의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

84. 두 점 A$(2,\ -3,\ 1)$, B$(a,\ b,\ c)$에 대하여 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점이 xy평면에 있고 선분 AB를 $3:1$으로 외분하는 점이 z축 위에 있을 때, abc의 값은?

① -2　② $-\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{2}$
④ 2　⑤ 3

85. 두 점 A$(-1,\ 4,\ 2)$, B$(a,\ b,\ c)$에 대하여 zx평면이 선분 AB를 $1:2$로 내분하고, 선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점이 y축 위에 있을 때, abc의 값은?

① -36　② -16　③ 16
④ 36　⑤ 48

07 기하

10 공간좌표

03 구의 방정식

04 구의 방정식4 (현 또는 접선의 길이)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 26

86. 좌표공간에서 중심이 A$(a,\ -3,\ 4)\ (a>0)$인 구 S가 x축과 한 점에서만 만나고 $\overline{\mathrm{OA}}=3\sqrt{3}$일 때, 구 S가 z축과 만나는 두 점 사이의 거리는? (단, O는 원점이다.)

① $3\sqrt{6}$　② $2\sqrt{14}$　③ $\sqrt{58}$
④ $2\sqrt{15}$　⑤ $\sqrt{62}$

87. 좌표공간에서 점 C$(a,\ 0,\ 4)$를 중심으로 하는 구 S가 x축과 두 점 A$(4,\ 0,\ 0)$, B$(-2,\ 0,\ 0)$에서 만나고 z축과 두 점 E, F에서 만난다. 선분 EF의 길이는?

① $4\sqrt{2}$　② $4\sqrt{3}$　③ 8
④ $4\sqrt{5}$　⑤ $4\sqrt{6}$

88. 두 점 $A(2, -1, 4)$, $B(0, 3, 2)$를 지름의 양 끝점으로 하는 구와 z축이 만나는 점을 각각 P, Q라고 할 때, 선분 PQ의 길이는?

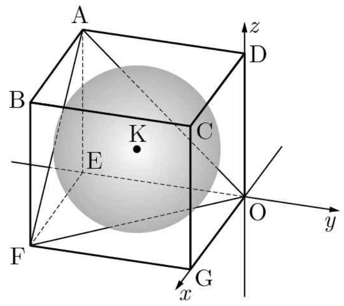
① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

07 기하 10 공간좌표

03 구의 방정식

06 구의 방정식6 (자취 및 활용)

89. 다음 그림과 같이 좌표공간에 구 S와 구 S가 내접하고 있는 정육면체 ABCD−EFGO가 있다. 다음 물음에 답하시오. (단, O는 원점이다.)



(1) 구 S는 점 $P(5, -2, 5)$를 지나고 xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하는 두 구 중 반지름의 길이가 더 작은 구이다. 구 S의 중심 K의 좌표를 구하시오.

(2) (1)에서 찾은 구 S가 평면 AFO에 의해 잘린 단면 T의 넓이를 구하시오. (단, 선분 CE와 평면 AFO가 만나는 점 H는 $\triangle AFO$의 무게중심이다.)

(3) (2)에서 찾은 단면 T의 평면 EFGO 위로의 정사영의 넓이를 구하시오.

90. 좌표공간의 점 A(1, 1, 1)을 중심으로 하는 구 S가 x축, y축, z축과 각각 점 P, Q, R에서 접한다. 삼각형 PQR에 외접하는 원의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는?

① $\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$ ② $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$
④ $\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{18}\pi$

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 29

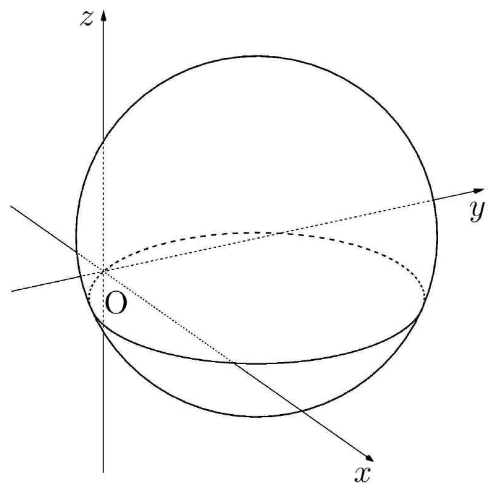
91. 좌표공간에 점 (4, 3, 2)를 중심으로 하고 원점을 지나는 구

$$S : (x-4)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=29$$

가 있다. 구 S위의 점 P(a, b, 7)에 대하여 직선 OP를 포함하는 평면 α가 구 S와 만나서 생기는 원을 C라 하자. 평면 α와 원 C가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 직선 OP와 xy평면이 이루는 각의 크기와 평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기는 같다.
> (나) 선분 OP는 원 C의 지름이다.

$a^2+b^2<25$일 때, 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는 $k\pi$이다. $8k^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



07 기하

10 공간좌표

03 구의 방정식

07 구의 방정식7 (Mm)

[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

92. 좌표공간에서 구 $(x-6)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=16$ 위의 점 P와 yz평면 위에 있는 원 $(y-2)^2+(z-1)^2=9$ 위의 점 Q 사이의 거리의 최댓값을 구하시오.

93. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+(z-1)^2=5$와 xy평면이 만나서 생기는 도형 위의 점 P와 구 $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=1$ 위의 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이의 최솟값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

94. 좌표공간에서 구 $S:(x-3)^2+(y-4)^2+(z-4\sqrt{3})^2=4$와 xy평면 위의 원 $C:x^2+y^2=1$이 있다. 원 C 위의 점 P와 구 S 위의 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이의 최솟값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

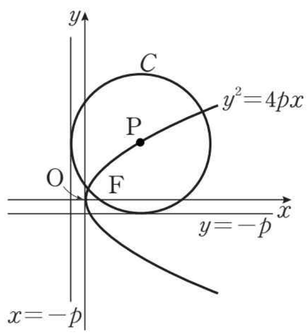
[기하] 사관학교 최근10개년(빠른 정답)

유형별한글 2022.12.16

1. [정답] ④
2. [정답] ⑤
3. [정답] 11
4. [정답] ⑤
5. [정답] 20

6. [정답] ④
7. [정답] ④
8. [정답] ②
9. [정답] ②
10. [정답] **12**

11. [정답] 192
12. [정답] ③
13. [정답] 36
14. [정답] ③
15. [정답] ③



16. [정답] 13
17. [정답] ④
18. [정답] **66**
19. [정답] ②
20. [정답] ②

21. [정답] **4**
22. [정답] ②
23. [정답] **24**
24. [정답] ⑤
25. [정답] **40**

26. [정답] ①
27. [정답] 50
28. [정답] 40
29. [정답] ④
30. [정답] ④

31. [정답] ①
32. [정답] ①
33. [정답] ①
34. [정답] ③
35. [정답] ④

36. [정답] ②
37. [정답] ④
38. [정답] ⑤
39. [정답] ⑤
40. [정답] ②

41. [정답] ④
42. [정답] ①
43. [정답] ③
44. [정답] ③
45. [정답] ④

46. [정답] ③
47. [정답] ④
48. [정답] **37**
49. [정답] **37**
50. [정답] ③

51. [정답] ②
52. [정답] **37**
53. [정답] ③
54. [정답] ③
55. [정답] **7**

56. [정답] **80**
57. [정답] **180**
58. [정답] 40
59. [정답] 160
60. [정답] ⑤

61. [정답] ④
62. [정답] ⑤
63. [정답] ④
64. [정답] **12**
65. [정답] ⑤

66. [정답] ①
67. [정답] ⑤
68. [정답] ④
69. [정답] ④
70. [정답] ③

71. [정답] ③
72. [정답] ⑤

73. [정답] 450
74. [정답] ④
75. [정답] ③

76. [정답] ②
77. [정답] ⑤
78. [정답] 44
79. [정답] ⑤
80. [정답] ⑤

81. [정답] $\left(-4,\ \frac{2}{3},\ 6\right)$
82. [정답] 15
83. [정답] ③
84. [정답] ④
85. [정답] ④

86. [정답] ②
87. [정답] ⑤
88. [정답] ②
89. [정답] (1) $(3,\ -3,\ 3)$ (2) 6π (3) $2\sqrt{3}\pi$
90. [정답] ④

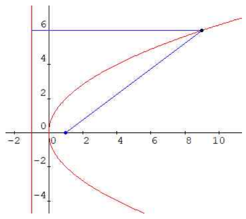
91. [정답] 261
92. [정답] 14
93. [정답] ②
94. [정답] ③

[기하] 사관학교 최근10개년(해설)

유형별한글 2022.12.16

1) [정답] ④

[해설]



F(1, 0), 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면,

$\overline{PF}=\overline{PH}$, 즉 $k=1+a$

P$(a,\ 6)$은 $36=4a$, $a=9$, $k=10$

$\therefore a+k=9+10=19$

2) [정답] ⑤

[해설]

점 A$(2,\ 2\sqrt{2})$가 포물선 $y^2=ax$ 위의 점이므로

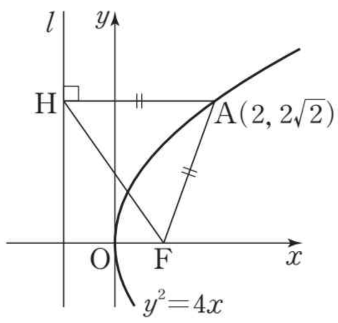
$(2\sqrt{2})^2=2aa=4$

따라서 포물선 $y^2=4x$의

초점은 F(1, 0)이고 준선의

방정식은 $x=-1$이므로

H$(-1,\ 2\sqrt{2})$이고



$\overline{HF}=\sqrt{(1+1)^2+(0-2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$

$\overline{AH}=\overline{AF}=3$

이므로 삼각형 AHF의 둘레의 길이는

$\overline{AH}+\overline{HF}+\overline{AF}=3+2\sqrt{3}+3=6+2\sqrt{3}$

3) [정답] 11

[해설]

초점 F의 좌표는 (2, 0)이고, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2라고 하면 두 점 A, B의 중점의 좌표가 $\left(\frac{7}{2},\ -1\right)$이므로

$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{7}{2}$

즉, $x_1+x_2=7$

두 점 A, B에서 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 A$'$, B$'$이라고 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF}=\overline{AA'}$, $\overline{BF}=\overline{BB'}$

따라서 $\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AA'}+\overline{BB'}$

$=(x_1+2)+(x_2+2)$

$=x_1+x_2+4=11$

4) [정답] ⑤

[해설]

$\overline{BI}=3k$라 하면 $\frac{\overline{BJ}}{\overline{BI}}=\frac{2\sqrt{15}}{3}$에서 $\overline{BJ}=2\sqrt{15}k$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{BI}=\overline{BF}=3k$, $\overline{AF}=\overline{AH}=8\sqrt{5}-3k$

$\overline{JH}=3k$이므로 $\overline{AJ}=8\sqrt{5}-6k$

직각삼각형 ABJ에서

$(8\sqrt{5})^2=(2\sqrt{15}k)^2+(8\sqrt{5}-6k)^2$

$96k^2-96\sqrt{5}k=0$, $96k(k-\sqrt{5})=0$

$k>0$이므로 $k=\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AJ}=2\sqrt{5}$, $\overline{BJ}=10\sqrt{3}$, $\overline{AH}=5\sqrt{5}$이고

$\triangle$ABJ$\backsim\triangle$ACH이므로

$\overline{AJ}:\overline{JB}=\overline{AH}:\overline{HC}$

$2\sqrt{5}:10\sqrt{3}=5\sqrt{5}:\overline{HC}$

$\therefore \overline{HC}=25\sqrt{3}$

5) [정답] 20

[해설]

포물선이 $y^2=16x$의 초점 F(4, 0)을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은 $y=2(x-4)$

$y=2(x-4)$를 $y^2=16x$에 대입하여 정리하면

$$x^2-12x+16=0$$

두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면 이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $x_1+x_2=12$

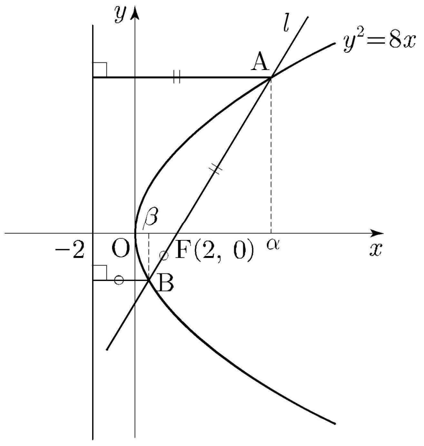
이고, 포물선 $y^2=16x$의 준선의 방정식은 $x=-4$이므로

$$\overline{AH_1}+\overline{BH_2}=\{x_1-(-4)\}+\{x_2-(-4)\}$$
$$=x_1+x_2+8=20$$

6) [정답] ④

[해설]

F(2, 0)이므로 직선 l의 방정식은 $y=m(x-2)$
점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는
직선 $y=m(x-2)$과 포물선 $y^2=8x$와의 교점의 x좌표
이므로 방정식 $m^2(x-2)^2=8x$의 두 근이다.
또한, 포물선의 준선의 방정식이 $x=-2$이므로
$\overline{AF}=\alpha+2$, $\overline{BF}=\beta+2$
$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=\alpha+\beta+4$이므로
$\overline{AB}=14$에서 $\alpha+\beta+4=14$
$\therefore\ \alpha+\beta=10$ …… ㉠



$m^2(x-2)^2=8x$에서 $m^2x^2-4(m^2+2)x+4m^2=0$
위의 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\dfrac{4(m^2+2)}{m^2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\dfrac{4(m^2+2)}{m^2}=10$, $m^2=\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ m=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ($\because\ m>0$)

7) [정답] ④

[해설]

점 B는 초점이므로 $(1, 0)$, 점 P를 (a, b)라 하고

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 $(a, 0)$

$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{BPH}=\dfrac{\pi}{4}$

$\overline{BH}=\overline{PH}=a-1=b$ …… ㉠

(a, b)는 포물선 위의 점이므로 대입하면

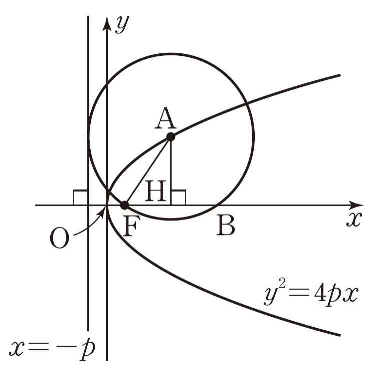
$b^2=4a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $(a, b)=(3+2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2})$

원의 반지름$=\overline{BP}=\sqrt{2}\,\overline{PH}=\sqrt{2}(2+2\sqrt{2})=4+2\sqrt{2}$

8) [정답] ②

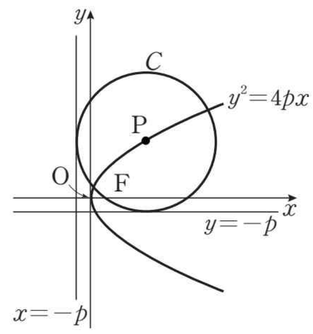
[해설]



$y^2=4px$에서 F$(p, 0)$이고
$\overline{OB}=6\overline{OF}$이므로 B$(6p, 0)$이다.
점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{AF}=\overline{AB}$이므로 점 H는 선분 FB의 중점이다.
따라서 점 A의 x좌표는
$\dfrac{p+6p}{2}=\dfrac{7}{2}p$이므로 점 A에서
준선 $x=-p$까지의 거리는
$\dfrac{7}{2}p+p=\dfrac{9}{2}p$
포물선의 정의에 의하여 선분 AF의 길이는 점 A에서
준선까지의 거리와 같고 $\overline{AF}=3$이므로 $\dfrac{9}{2}p=3$에서 $p=\dfrac{2}{3}$

9) [정답] ②

[해설]



원 C의 반지름의 길이를 r라 하면
원 C가 두 직선 $x=-p$, $y=-p$에 모두 접하므로 점 P의 좌표는
$(r-p, r-p)$이다.
따라서 점 P$(r-p, r-p)$는 포물선
$y^2=4px$ 위의 점이므로
$(r-p)^2=4p(r-p)$
$r^2-2pr+p^2=4pr-4p^2$
$r^2-6pr+5p^2=0$, $(r-p)(r-5p)=0$
이때 $r-p>0$이어야 하므로 $r=5p$
그런데 원 C의 넓이가 25π이므로
$(5p)^2\pi=25\pi$, $p^2=1$
$p=1$
따라서 $\overline{OF}+\overline{PF}=p+r=p+5p=6p=6$

10) [정답] **12**

[해설]

$2x^2+y^2=16$에서 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{16}=1$

따라서 타원의 장축의 길이는 $2\times4=8$이다.

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=8$ …… ㉠

$\dfrac{\overline{\mathrm{PF'}}}{\overline{\mathrm{PF}}}=3$에서 $\overline{\mathrm{PF'}}=3\times\overline{\mathrm{PF}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{\mathrm{PF}}=2$, $\overline{\mathrm{PF'}}=6$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=12$

11) [정답] 192

[해설]

타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=10$이고,

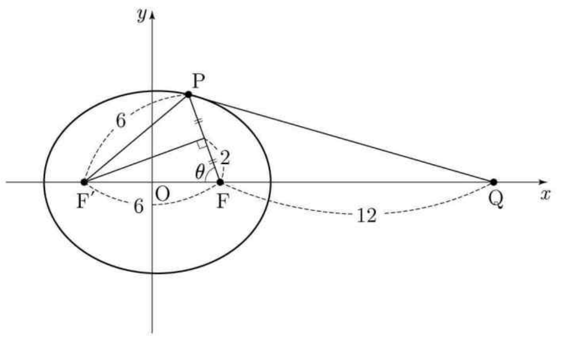
$\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PF'}}=2:3$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=4$, $\overline{\mathrm{PF'}}=6$이다.

또한, $\overline{\mathrm{QF}}:\overline{\mathrm{QF'}}=2:3$에서 $\overline{\mathrm{F'F}}:\overline{\mathrm{FQ}}=1:2$이고

타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{F'F}}=2\times\sqrt{25-16}=6$이므로 $\overline{\mathrm{FQ}}=12$

$\triangle\mathrm{PF'F}$는 이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{PFF'}=\theta$라 하면 $\cos\theta=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$



삼각형 PFQ에서 코사인정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{FQ}}^2-2\overline{\mathrm{PF}}\cdot\overline{\mathrm{FQ}}\cos(\pi-\theta)$

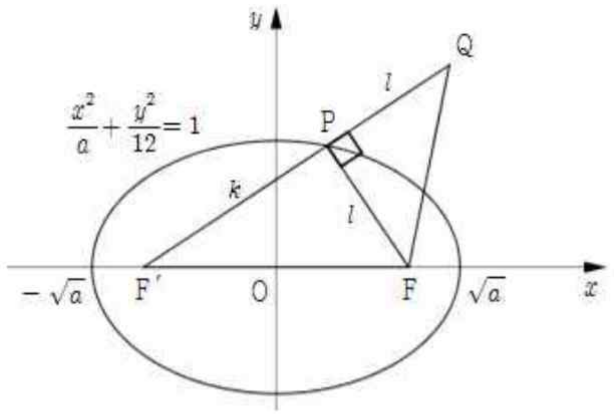
$=4^2+12^2-2\cdot4\cdot12\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

$=192$

12) [정답] ③

[해설]

아래 그림과 같이 놓으면



$k+l=10=2\sqrt{a}$이므로 $a=25$

초점 거리를 $2c$라 하면

$k^2+l^2=4c^2=4(a-12)=52$

$2kl=(k+l)^2-(k^2+l^2)=100-52=48$

P가 제1사분면의 점이므로 $k>l$이다.

이제 k, l을 근으로 하는 이차방정식은

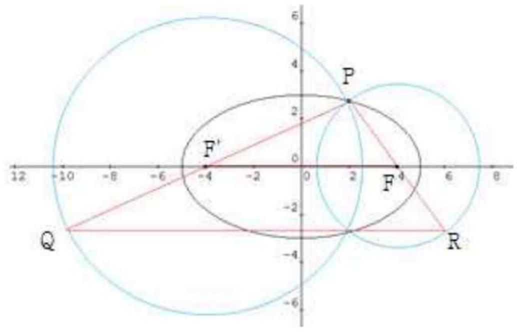
$x^2-10x+24=0$, $(x-6)(x-4)=0$

따라서 $k=6$, $l=4$이고 구하려는 넓이는

$\dfrac{1}{2}kl+\dfrac{1}{2}l^2=12+8=20$

13) [정답] 36

[해설]



그림과 같이 삼각형 PQR의 둘레의 길이는 삼각형 PFF′의 둘레의 길이의 두 배이다.

장축의 길이는 10이고, 초점거리는 8이다.

따라서 구하려는 둘레의 길이는 $2\times(10+8)=36$이다.

14) [정답] ③

[해설]

타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$에서 $9-5=2^2$이므로

두 점 $(2,0)$, $(-2,0)$가 타원의 초점이다.

타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2\times3=6$

따라서 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는 $6+4=10$이다.

15) [정답] ③

[해설]

$9x^2+16y^2=144$의 양변을 144로 나누면 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$

$4^2-3^2=7$이므로 초점의 좌표는

$\mathrm{F}(\sqrt{7},\ 0)$, $\mathrm{F'}(-\sqrt{7},\ 0)$이고 y축

위의 한 꼭짓점 A의 좌표는 $(0,\ 3)$ 또는 $(0,\ -3)$이다.

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AF'}}=4$, $\overline{\mathrm{FF'}}=2\sqrt{7}$이므로 삼각형 FAF′의 둘레의

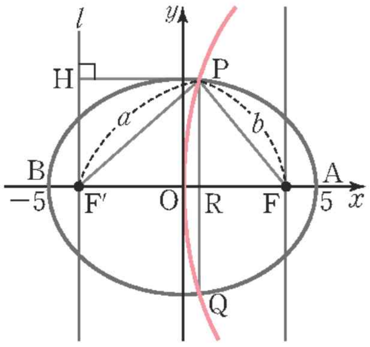
길이는

$\overline{AP}+\overline{AF'}+\overline{FF'}=4+4+2\sqrt{7}=8+2\sqrt{7}$

16) [정답] 13

[해설]

선분PQ와 x축의 교점을 R라 하면



$\overline{PR}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=4\cdots\cdots$❶

$\overline{PF'}=a$, $\overline{PF}=b$라 하면

타원의 정의에 의하여

$a+b=10\cdots\cdots$㉠

직각삼각형 PF′R에서 $\overline{F'R}=\sqrt{a^2-16}$

점 F′을 지나고 x축에 수직인 직선을 l이라 하면 직선 l은 포물선의 준선이고 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{PH}=\overline{PF}$

이때 $\overline{PF}=\overline{PH}=\overline{F'R}=\sqrt{a^2-16}$ 이므로

$b=\sqrt{a^2-16}$ 에서 $b^2=a^2-16\cdots\cdots$❷

㉠에서 $b=10-a$이므로 $b^2=a^2-16$에 대입하면

$(10-a)^2=a^2-16$, 즉 $a=\frac{29}{5}$

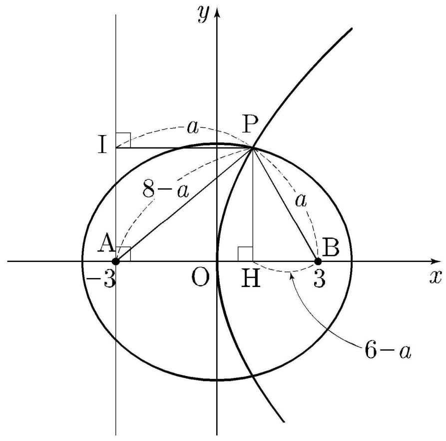
$a=\frac{29}{5}$를 ㉠에 대입하면 $b=\frac{21}{5}$

따라서 $\overline{PF'}-\overline{PF}=\frac{29}{5}-\frac{21}{5}=\frac{8}{5}$

17) [정답] ④

[해설]

초점이 B이고 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선의 준선은 $x=-3$이다.



그림과 같이 점 P를 제1사분면 위의 점으로 정하고 $\overline{PB}=a$라 하자.

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 직선 $x=-3$에 내린 수선의 발을 I라 하면

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PH}=a$이므로

$\overline{BH}=a$이고 $\overline{AH}=6-a$이다.

타원의 정의에 의하여 $\overline{PA}+\overline{PB}=8$이므로 $\overline{PA}=8-a$

직각삼각형 PAH와 PBH에서

$\overline{PA}^2-\overline{AH}^2=\overline{PB}^2-\overline{BH}^2$

$(8-a)^2-a^2=a^2-(6-a)^2$

$\therefore\ a=\frac{25}{7}$

18) [정답] **66**

[해설]

$y^2=16x$의 초점 F(4, 0)이고, 준선의 방정식은 $x=-4$이다. 점 A$(-2,\ 0)$을 지나고 초점이 선분 AF 위에 있으므로 점 A는 꼭짓점이다. 타원과 포물선의 교점 B에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{BH}=\overline{BF}$이다.

그러므로 점 B의 x좌표는 $-4+\frac{21}{5}=\frac{1}{5}$이다.

그러므로 점 B$\left(\frac{1}{5},\ \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

중심의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면 F$(4,\ 0)$이고 중심에서 거리가 $4-a$이므로 F′$(2a-4,\ 0)$, $\overline{BF'}+\overline{BF}$가 장축의 길이이므로 장축의 길이는 $(a+2)\times2$이다.

$\therefore\ \overline{BF'}=2a+4-\frac{21}{5}=2a-\frac{1}{5}$

$\sqrt{\left(2a-4-\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2}=2a-\frac{1}{5}$

$\left(2a-\frac{21}{5}\right)^2+\frac{16}{5}=4a^2-\frac{4}{5}a+\frac{1}{25}$

$4a^2-\frac{84}{5}a+\frac{441}{25}+\frac{80}{25}=4a^2-\frac{4}{5}a+\frac{1}{25}$

$\frac{520}{25}=16a\qquad\therefore\ a=\frac{13}{10}$

$\therefore\ 10k = 20a + 40 = 26 + 40 = 66$

19) [정답] ②

[해설]
삼각형 PQF는 정삼각형이므로

$\overline{PF} = \overline{PQ} = \overline{QF} = \sqrt{6} - 1$

$ax^2 - 4y^2 = a$에서 $x^2 - \dfrac{y^2}{\frac{a}{4}} = 1$이므로 쌍곡선의 주축의 길이는 2이다.

$\therefore \overline{PF'} - \overline{PF} = 2$ …… ㉠

$\overline{PF'} = \overline{PQ} + \overline{QF'}$, $\overline{PF} = \overline{PQ}$이므로 ㉠에 대입하면

$\overline{QF'} = 2$

$\angle PQF = 60°$에서 $\angle FQF' = 120°$이므로 삼각형 QFF′에서 코사인법칙에 의해

$\overline{FF'}^2 = \overline{QF}^2 + \overline{QF'}^2 - 2\overline{QF} \cdot \overline{QF'} \cos 120°$

$= (\sqrt{6}-1)^2 + 2^2 - 2 \cdot (\sqrt{6}-1) \cdot 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$= 9$ …… ㉡

쌍곡선 $x^2 - \dfrac{y^2}{\frac{a}{4}} = 1$에서

$\overline{OF}^2 = 1 + \dfrac{a}{4}$, $\overline{FF'}^2 = 4 + a$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $4 + a = 9$

$\therefore a = 5$

20) [정답] ②

[해설]

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$의 두 초점을

$F(c, 0)$, $F'(-c, 0)(c > 0)$이라 하면 $c^2 = 4 + b^2$ ……㉠

$\overline{PF} = 4$이므로 $\overline{PF'} = k(k > 4)$라 하면 쌍곡선의 주축의 길이가 4이므로 $k - 4 = 4$ $\therefore k = 8 = \overline{PF'}$

$\overline{FF'} = 2c$, $\cos(\angle FPF') = \dfrac{1}{4}$이므로 삼각형 PF′F에서 코사인법칙에 의하여

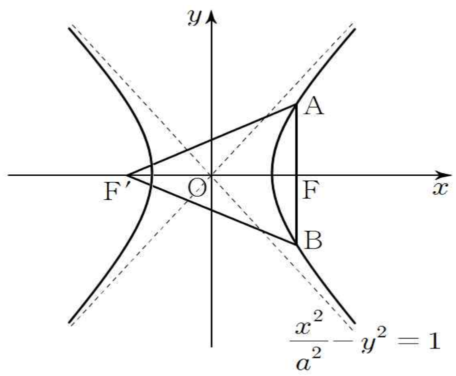
$(2c)^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \times 8 \times 4 \times \dfrac{1}{4}$ $\therefore\ c^2 = 16$

㉠에서

$b^2 = 12$

21) [정답] **4**

[해설]



$\triangle ABF'$의 한 변의 길이를 $2k$라 하면

$\overline{AF} = k$, $\overline{AF'} = 2k$

쌍곡선의 성질에 의하여

$\overline{AF'} - \overline{AF} = k = 2a$

초점 F의 좌표는 $\left(\sqrt{a^2+1},\ 0\right)$이므로

$\triangle ABF'$의 높이의 길이는 $2\sqrt{a^2+1}$

$2\sqrt{a^2+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 4a$

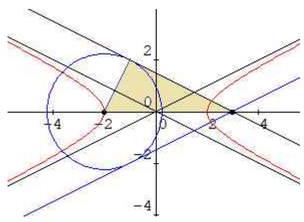
양변을 제곱하면

$4a^2 + 4 = 12a^2$

$8a^2 = 4$

22) [정답] ②

[해설]



점근선 $y = \pm\dfrac{1}{2}x$,

그림의 직각삼각형에서

$r^2 + (2r)^2 = 25$ $\therefore r = \sqrt{5}$

23) [정답] **24**

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$의 주축의 길이는 $2\times\sqrt{4}=4$,

$c=\sqrt{4+12}=4$이므로 $\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-4,\ 0)$

직선 PC는 $\angle \mathrm{F'PF}$의 이등분선이므로 점 $(1,\ 0)$을 Q라 하면

$\overline{\mathrm{PF'}}:\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{F'Q}}:\overline{\mathrm{QF}}$

$\overline{\mathrm{PF'}}:\overline{\mathrm{PF}}=5:3$ ...... ㉠

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=4$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PF}}+4$를 ㉠에 대입하면

$(\overline{\mathrm{PF}}+4):\overline{\mathrm{PF}}=5:3$

$3(\overline{\mathrm{PF}}+4)=5\overline{\mathrm{PF}}$에서 $\overline{\mathrm{PF}}=6$

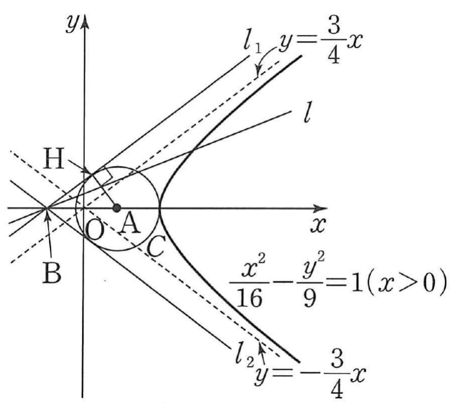
따라서 $\overline{\mathrm{PF'}}=6+4=10$, $\overline{\mathrm{FF'}}=8$이므로 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는 $6+10+8=24$

24) [정답] ⑤

[해설]

원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 중심이 $\mathrm{A}(a,\ 0)$인 원 C가 곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ $(x>0)$ 위의 점 $(4,\ 0)$을 지나야 하므로

$r=4-a$ ......㉠



쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 점근선의 방정식은

$y=-\frac{3}{4}x$, $y=\frac{3}{4}x$

점 $\mathrm{B}(-2,\ 0)$을 지나고 기울기가 $\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{4}$인 직선을 각각 l_1, l_2라 하면

$l_1 : y=\frac{3}{4}(x+2)$, $3x-4y+6=0$

$l_2 : y=-\frac{3}{4}(x+2)$, $3x+4y+6=0$

점 A에서 직선 l_1에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{|3\times a-4\times0+6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$

$=\frac{|3a+6|}{5}$

$=\frac{3a+6}{5}\,(-2<a<4)$ ...... ㉡

점 P와 점 $\mathrm{B}(-2,\ 0)$을 지나는 직선을 l이라 하면 점 P가 곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\,(x>0)$ 위를 움직일 때, 직선 l은 기울기가 $-\frac{3}{4}$과 $\frac{3}{4}$사이의 값을 갖고 점 B를 지나는 직선이다.

이때 직선 l이 원 C와 항상 만나기 위해서는

$r\geq\overline{\mathrm{AH}}$ ...... ㉢

가 성립해야 한다. ㉠, ㉡, ㉢에서

$4-a\geq\frac{3a+6}{5}$, $a\leq\frac{7}{4}$

따라서 a의 최댓값은 $\frac{7}{4}$이다.

25) [정답] 40

[해설]

초점은 $\mathrm{F}(3,0)$, $\mathrm{F}'(-3,0)$ $\therefore a=25$

$\left|\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{PF'}}^2\right|=\left|(\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}})(\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}})\right|=10\times4=40$

26) [정답] ①

[해설]

$\overline{\mathrm{QP}}=c$이다.

타원에서 $6=\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{F'Q}}+2c$

$\overline{\mathrm{F'Q}}=2$이므로 $c=2$

쌍곡선에서 $2b=\overline{\mathrm{F'P}}-\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{F'Q}}$

따라서 $b=1$

타원과 쌍곡선의 초점이 같으므로 $9-a^2=b^2+a^2$

그러므로 $a=2$

$\overline{\mathrm{F'P}}=4$, $\overline{\mathrm{PF}}=2$, $\overline{\mathrm{F'F}}=2\sqrt{5}$

$\therefore\ \angle F'PF=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\ S=\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$

따라서 $a+b+c+S=7$

27) [정답] 50

[해설]

타원의 장축의 길이는

$2a=\overline{PF}+\overline{PF'}=2+8=10,\quad a=5$

한편, 타원과 쌍곡선의 초점이 같으므로

$a^2-b^2=c^2+d^2$

$a^2=b^2+c^2+d^2$

$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2=2a^2=50$

28) [정답] 40

[해설]

직선 AC의 기울기는 -1이고 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$에 접하고

기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y=-x\pm\sqrt{16+4}=-x\pm2\sqrt{5}$

이때 y절편이 양수이므로

$y=-x+2\sqrt{5}\cdots\cdots$㉠

직선 BC의 방정식은

$y=-2\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 점 C의 x좌표는 $2+2\sqrt{5}$

이때 점 B의 좌표는 $(-4,\ -2)$, 점 C의 좌표는

$(2+2\sqrt{5},\ -2)$이므로

$\overline{BC}=2+2\sqrt{5}-(-4)=6+2\sqrt{5}$

따라서 $\triangle$ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(6+2\sqrt{5})^2=28+12\sqrt{5}$

29) [정답] ④

[해설]

접점의 좌표가 $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$이므로 $\overleftrightarrow{AB}$의 방정식은

$\sqrt{3}x+2y-4=0$

$\overleftrightarrow{CD}$는 $\overleftrightarrow{AB}$와 원점에 대하여 대칭이므로, $\overleftrightarrow{CD}$의 방정식은

$\sqrt{3}x+2y+4=0$

평행한 두 직선 $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ 사이의 거리는 $\overline{BC}$이므로

$\therefore\ \overline{BC}=\dfrac{|4-(-4)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{7}}$

$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$의 기울기는 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AD}$의 기울기는

$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$이다. 따라서 접선 $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AD}$의 방정식은 각각

$2x-\sqrt{3}y+\sqrt{19}=0,\ 2x-\sqrt{3}y-\sqrt{19}=0$

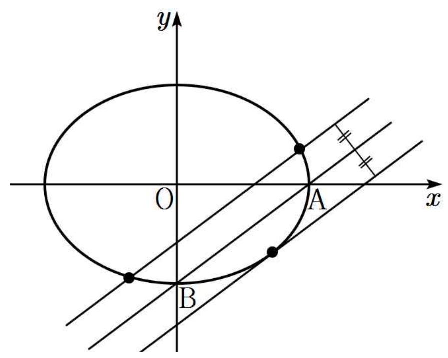
$\therefore\ \overline{AB}=\dfrac{|\sqrt{19}-(-\sqrt{19})|}{\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}}=\dfrac{2\sqrt{19}}{\sqrt{7}}$

따라서 직사각형의 넓이는 $\dfrac{8}{\sqrt{7}}\times\dfrac{2\sqrt{19}}{\sqrt{7}}=\dfrac{16\sqrt{19}}{7}$

$\therefore\ a+b=23$

30) [정답] ④

[해설]



그림과 같이 삼각형 ABP의 넓이가 k인 점 P의 개수가 3개가 되기 위해서는 직선 AB와 평행한 직선이 타원과 접하는 접점이 점 P 중 하나이어야 한다.

직선 AB의 기울기가 $\dfrac{3}{4}$이므로 타원에 접하는 접선의 방정식은

$y=\dfrac{3}{4}x\pm\sqrt{16\times\dfrac{9}{16}+9}=\dfrac{3}{4}x\pm3\sqrt{2}$

그림과 같이 y절편이 음수이어야 하므로

$y=\dfrac{3}{4}x-3\sqrt{2}$

점 A(4, 0)에서 직선 $3x-4y-12\sqrt{2}=0$까지의 거리를 d라 하면

$d=\dfrac{|12-12\sqrt{2}|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{12\sqrt{2}-12}{5}$

$\overline{AB}=5$이므로 삼각형 ABP의 넓이 k는

$k=\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{12\sqrt{2}-12}{5}=\dfrac{6\sqrt{2}-6}{5}$

31) [정답] ①

[해설]

접점 P를 $(x_1,\ y_1)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x-\frac{y_1y}{3}=1$이므로 x절편이 $\frac{1}{3}$이므로 $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$를 지난다.

$\frac{1}{3}x_1=1$, 즉, $x_1=3$이므로 점 $P(3,\ 2\sqrt{6})$ $(\because\ y_1>0)$

초점의 좌표중 양수인 좌표는 $F(2,\ 0)$ $(\because\ c^2=a^2+b^2)$

그러므로 선분 PF의 길이는

$$\sqrt{(3-2)^2+(2\sqrt{6}-0)^2}=\sqrt{1+24}=5$$

32) [정답] ①

[해설]

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$로 놓으면

$a^2+b^2=9$ …… ㉠

점 $P(4,\ p)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{4x}{a^2}-\frac{py}{b^2}=1$ …… ㉡

$y=0$을 ㉡에 대입하면 $x=\frac{a^2}{4}$

$Q\left(\frac{a^2}{4},\ 0\right)$

점 Q는 길이가 6인 선분 $F'F$를 $2:1$로 내분하므로 점 Q의 x좌표는 1이다.

$\frac{a^2}{4}=1$에서 $a^2=4$

$a^2=4$를 ㉠에 대입하면 $b^2=5$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$이다.

점 $P(4,\ p)$는 이 쌍곡선 위의 점이므로

$\frac{4^2}{4}-\frac{p^2}{5}=1$에서 $\frac{p^2}{5}=3$, $p^2=15$

$\therefore p=\sqrt{15}$

33) [정답] ①

[해설]

점 $(2,\ b)$이 쌍곡선 $7x^2-ay^2=20$ 위의 점이므로

$4\cdot 2^2-ab^2=20$

$\therefore\ ab^2=8$ …… ㉠

쌍곡선 $7x^2-ay^2=20$ 위의 점 $(2,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$7(2x)-a(by)=20$ 즉, $14x-aby=20$

직선 $14x-aby=20$이 점 $(0,\ -5)$를 지나므로

$5ab=20$

$\therefore\ ab=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2,\ b=2$ $\therefore\ a+b=4$

[다른 풀이]

점 $(2,\ b)$이 쌍곡선 $7x^2-ay^2=20$ 위의 점이므로

$4\cdot 2^2-ab^2=20$

$\therefore\ ab^2=8$ …… ㉠

$7x^2-ay^2=20$에서 음함수의 미분법에 의하여

$14x-2ay\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{7x}{ay}$

점 $(2,\ b)$에서의 접선의 기울기는 두 점 $(2,\ b)$, $(0,\ -5)$를 지나는 직선의 기울기와 같으므로

$\frac{7\cdot 2}{ab}=\frac{b+5}{2}$

$28=ab^2+5ab=8+ab$ $(\because$ ㉠$)$

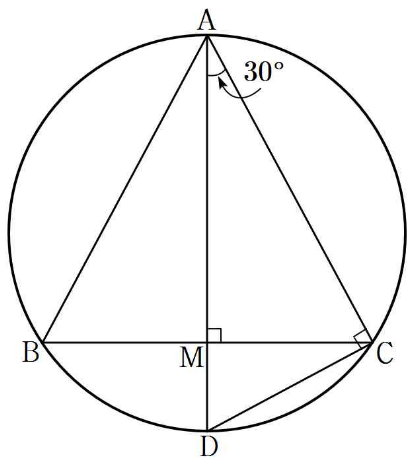
$\therefore\ ab=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2,\ b=2$

$\therefore\ a+b=4$

34) [정답] ③

[해설]



세 점 A, M, D는 일직선 위에 있으므로 $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AM}$

$\angle CAD=30°$ 이므로

$\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{AM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD}$

따라서 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AM}$에서 $k=\dfrac{4}{3}$

또한, $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$이므로

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AM}=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

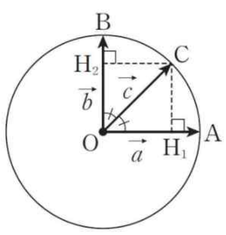
따라서 $m=\dfrac{2}{3}$, $n=\dfrac{2}{3}$이므로 $m+n=\dfrac{4}{3}$

35) [정답] ④

[해설]
선분 AB의 중점을 M이라 하면
$\vec{a}+\vec{b}=2\overrightarrow{OM}$
원의 반지름의 길이를 r이라 하자.
벡터 $\overrightarrow{OM}$은 크기가 $\dfrac{r}{\sqrt{2}}$이고
벡터 $\overrightarrow{OC}$의 크기는 r이므로
$\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a}+\vec{b})$
$\therefore 3m^2+n^2=2$

36) [정답] ②

[해설]
다음 그림과 같이 점 C에서 두 선분 OA, OB에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면



$\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA}\times\cos45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{OH_2}=\overrightarrow{OB}\times\cos45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{b}$

따라서 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH_1}+\overrightarrow{OH_2}$에서

$\vec{c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{b}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

37) [정답] ④

[해설]
원의 중심을 O라 하면
$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP}$$
이고 점 B를 원점으로 설정하면 점 A$(2,\ 2\sqrt{3})$, 점 C$(4,\ 0)$, 점 O$(5,\ \sqrt{3})$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이다.
$$\therefore\ \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BP}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BO})+\overrightarrow{OP}$$
$=(2,\ -2\sqrt{3})+(5,\ \sqrt{3})+\overrightarrow{OP}$
$=(7,\ -\sqrt{3})+\overrightarrow{OP}$
최댓값은 중심을 지나고 일직선에서 반지름의 길이를 더한 값이고,
최솟값은 중심을 지나는 일직선에서 반지름의 길이를 뺀 값이다.
$$\overline{BO}=\sqrt{7^2+(-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{13}$$
그러므로 최댓값은 $2\sqrt{13}+\sqrt{3}$, 최솟값은 $2\sqrt{13}-\sqrt{3}$
$$\therefore\ Mm=(2\sqrt{13}+\sqrt{3})(2\sqrt{13}-\sqrt{3})=52-3=49$$

38) [정답] ⑤

[해설]
정삼각형의 무게중심을 G라고 하면 벡터의 성질에 의해 세 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{CR}$을 각각 $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GP}$, $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GQ}$, $\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GR}$로 나타낼 수 있습니다. 따라서

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}|=|(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GP})+(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GQ})+(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GR})|$

가 성립합니다.

이때, $|\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}|=0$이므로

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}|&=|(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GP})+(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GQ})+(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GR})|\\&=|\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GR}|\end{aligned}$$

내접원의 반지름의 길이가 r이라고 하면 세 벡터 $\overrightarrow{GP}$, $\overrightarrow{GQ}$, $\overrightarrow{GR}$의 크기가 모두 내접원의 반지름의 길이로 같으므로 세 벡터가 모두 같은 방향일 때 $|\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GR}|$의 값은 $3r$로 최대가 됩니다.

따라서 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}|$의 최댓값은 $3\sqrt{3}$입니다.

※ 즉, 세 점 P, Q, R이 같은 위치에 있을 때, $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}|$은 최댓값을 가지게 됩니다.

39) [정답] ⑤

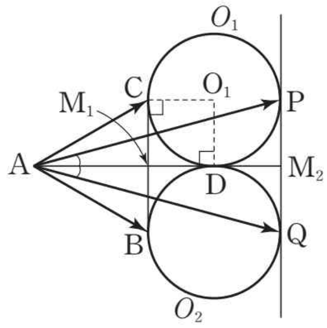
[해설]
두 점 P, Q는 직선 AD에 대하여 대칭이므로 선분 PQ의 중점을 M이라 하면 점 M은 항상 직선 AD 위에 있다.
이때 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AM}$이므로
$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|=|2\overrightarrow{AM}|=2\overline{AM}$
변 BC의 중점을 M_1이라 하면 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로 $\overline{AM_1}=\sqrt{3}$이다.
그림과 같이 점 P가 점 C이고 점 Q가 점 B일 때,

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=\left|2\overrightarrow{AM_1}\right|=2\overline{AM_1}=2\sqrt{3}$

$\overline{AM_1}\le\overline{AM}$이므로

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|$의 최솟값은 $2\sqrt{3}$

이다.



원 O_1의 중심을 O_1이라 하면

사각형 CM_1DO_1은 정사각형

이므로

$\overline{CO_1}=\overline{CM_1}=1$

즉, 원 O_1의 반지름의 길이는 1이고, 마찬가지로 원 O_2의 반지름의 길이도 1이다.

직선 PQ가 두 원 O_1, O_2에 모두 접하고 직선 BC가 아닐 때, 직선 PQ와 직선 AD가 만나는 점을 M_2라 하면 선분 M_1M_2의 길이는 원 O_1, 원 O_2의 지름의 길이와 같으므로

$\overline{M_1M_2}=2$

$\overline{AM}\le\overline{AM_2}=\overline{AM_1}+\overline{M_1M_2}=\sqrt{3}+2$이므로

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|=2\overline{AM}$의 최댓값은

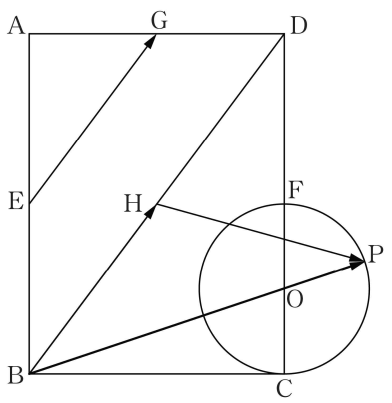
$2(\sqrt{3}+2)=2\sqrt{3}+4$

따라서 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|$의 최댓값과 최솟값의 합은

$(2\sqrt{3}+4)+2\sqrt{3}=4+4\sqrt{3}$

40) [정답] ②

[해설]



$\left|\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}\right|=\left|\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HP}\right|=\left|\overrightarrow{BP}\right|$ 이므로

$\left|\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}\right|$ 의 최댓값은 $\left|\overrightarrow{BP}\right|$ 의 최댓값과 같다.

즉, 원 밖의 한 점 B에서 원 위의 점 P에 이르는 거리의 최댓값이다.

따라서 원의 중심을 O라 하면 $\left|\overrightarrow{BP}\right|$ 의 최댓값은

$\overline{BO}+2=\sqrt{6^2+2^2}+2=2\sqrt{10}+2$

41) [정답] ④

[해설]

점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PQ}=(0,\ 12)\cdot(x,\ y-t)=12(y-t)=0,\ y=t$

$\frac{t}{3}\le\sqrt{x^2+(y-t)^2}\le\frac{t}{2}$

따라서 $y=t,\ \frac{t}{3}\le|x|\le\frac{t}{2},\ 6\le t\le 12$

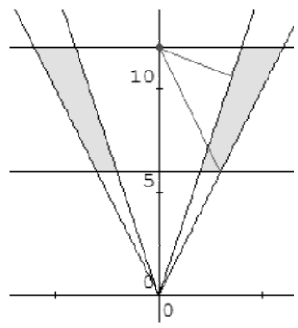
즉 $2|x|\le y\le 3|x|,\ 6\le y\le 12$

이것을 좌표평면에 나타내면 아래그림과 같다.

따라서 구하려는 최솟값은 $A(0,\ 12)$에서 직선 $y=3x$에 이르는 거리 $m=\frac{12}{\sqrt{10}}$

최댓값은 $A(0,\ 12)$에서 $Q(3,\ 6)$의 거리 $M=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$

$\therefore\ \ Mm=\frac{12}{\sqrt{10}}\times 3\sqrt{5}=18\sqrt{2}$

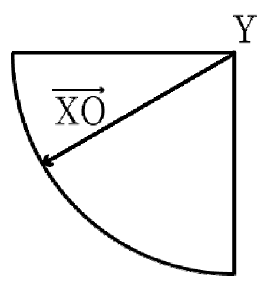


42) [정답] ①

[해설]

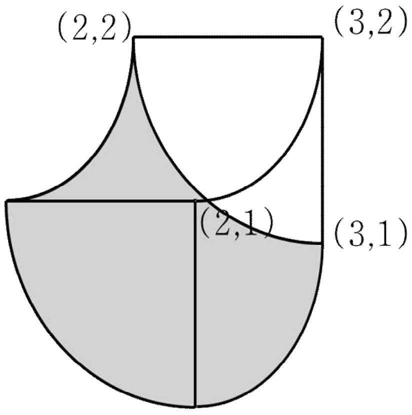
$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OY}+\overrightarrow{XO}$이고, 모든 $\overrightarrow{XO}$의 시점을 점 Y로 평행이동하면

다음 그림과 같이 점 Y를 중심으로 하는 반지름이 1인 사분원이다.



이때 점 Y는 $y=(x-2)^2+1\,(2\le x\le 3)$위를 움직이므로

영역 R은 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



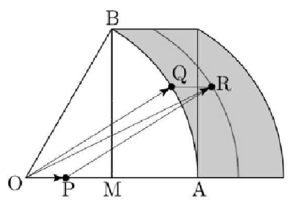
따라서 점 O로부터 거리의 최댓값은 P가 (3, 1)일 때 $M=\sqrt{10}$

최솟값은 원점과 (2, 1)사이의 거리에서 반지름 1을 뺀 $m=\sqrt{5}-1$이다.

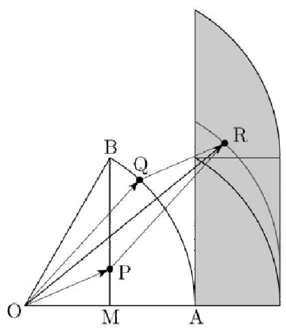
$M^2+m^2=16-2\sqrt{5}$

43) [정답] ③

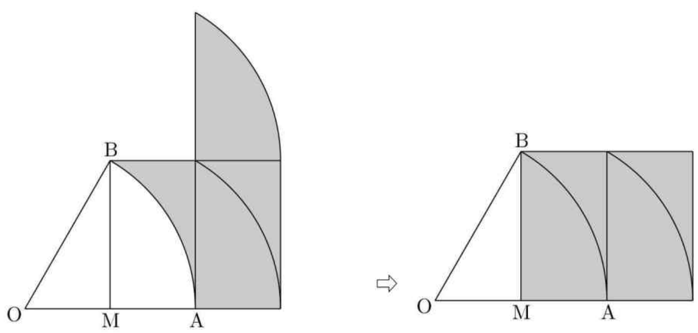
[해설]
점 P가 선분 OM 위를 움직일 때, 점 R이 존재하는 영역은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



점 P가 선분 BM 위를 움직일 때, 점 R이 존재하는 영역은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



따라서 점 R이 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.



위 영역의 넓이는 가로의 길이가 2이고 세로의 길이가 $\sqrt{3}$인 직사각형의 넓이와 같다.
따라서 구하는 넓이는 $2\sqrt{3}$이다.

44) [정답] ③

[해설]

$$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$$
$$=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$이고 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=2\times3\times\frac{1}{2}=3$$

따라서 ㉠은

$$|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$$
$$=2^2-4\times3+4\times3^2$$
$$=4-12+36=28$$

이므로 벡터 $\vec{a}-2\vec{b}$의 크기는 $2\sqrt{7}$이다.

45) [정답] ④

[해설]
$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$=|\vec{a}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos60^\circ+|\vec{b}|^2$
$=9-2\times3\times2\times\frac{1}{2}+2^2$
$=7$
$\therefore |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$

46) [정답] ③

[해설]
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 60°이고, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$이므로
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60^\circ=2\times3\times\frac{1}{2}=3$
$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$
$=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$
$=4-12+36$
$=28$
$\therefore |\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

47) [정답] ④

[해설]

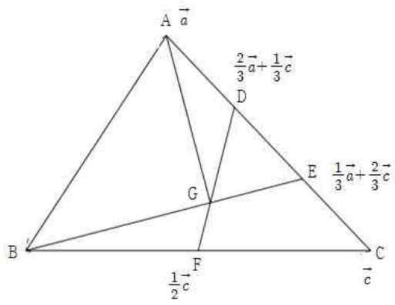
$\vec{a}=(2,\ 1),\ \vec{a}-\vec{b}=(2,\ 1)-(-1,\ k)=(3,\ 1-k)$

$\vec{a}\bullet(\vec{a}-\vec{b})=(2,\ 1)\bullet(3,\ 1-k)=6+1-k=0$

$\therefore\ k=7$

48) [정답] 37

[해설]



그림과 같이

$\overrightarrow{BA}=\vec{a},\ \overrightarrow{BC}=\vec{c}$라 놓으면

$\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c},\quad \overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c},\quad \overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{BG}$는 실수 $t,\ s$에 대하여

$\frac{t}{3}\vec{a}+\frac{2t}{3}\vec{c}=s\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)+(1-s)\left(\frac{1}{2}\vec{c}\right)$

$\frac{t}{3}=\frac{2s}{3},\ \frac{2t}{3}=\frac{s}{3}+\frac{1-s}{2},$

$t=\frac{2}{3},\ s=\frac{1}{3},\ \overrightarrow{BG}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{c},\ \overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BA}=-\frac{7}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{c}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}\bullet\overrightarrow{BE}&=\left(-\frac{7}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{c}\right)\bullet\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{27}(-7\vec{a}+4\vec{c})(\vec{a}+2\vec{c})\\&=\frac{1}{27}\{-7|\vec{a}|^2+8|\vec{c}|^2-10(\vec{a}\bullet\vec{c})\}\\&=\frac{1}{27}\{-63+128-10(\vec{a}\bullet\vec{c})\}=0\end{aligned}$$

따라서 $\vec{a}\bullet\vec{c}=\frac{13}{2},\ \cos\theta=\frac{\vec{a}\bullet\vec{c}}{|\vec{a}\,\|\,\vec{c}|}=\frac{\frac{13}{2}}{3\times4}=\frac{13}{24}=\frac{q}{p}$

$\therefore\ p+q=37$

49) [정답] 37

[해설]

$\overrightarrow{BA}=\vec{a},\ \overrightarrow{BC}=\vec{c}$라 놓으면

$\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c},\ \overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c},\ \overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\vec{c}$

이므로 실수 $t,\ s$에 대하여

$\overrightarrow{BG}=t\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)=s\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)+(1-s)\left(\frac{1}{2}\vec{c}\right)$

이때 $\frac{t}{3}=\frac{2s}{3},\ \frac{2t}{3}=\frac{s}{3}+\frac{1-s}{2}$이므로

$t=\frac{2}{3},\ s=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \overrightarrow{BG}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{c}$

또한 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BA}=-\frac{7}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{c}$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}\bullet\overrightarrow{BE}&=\left(-\frac{7}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{c}\right)\bullet\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{27}(-7\vec{a}+4\vec{c})(\vec{a}+2\vec{c})\\&=\frac{1}{27}\{-7|\vec{a}|^2+8|\vec{c}|^2-10(\vec{a}\bullet\vec{c})\}\\&=\frac{1}{27}\{-63+128-10(\vec{a}\bullet\vec{c})\}=0\end{aligned}$$

$\therefore\ \vec{a}\bullet\vec{c}=\frac{13}{2}$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{\vec{a}\bullet\vec{c}}{|\vec{a}\,\|\,\vec{c}|}=\frac{13}{3\times4}=\frac{13}{24}$

$\therefore\ p+q=24+13=37$

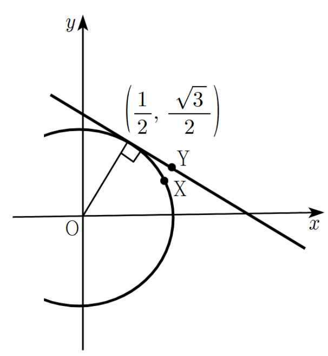
50) [정답] ③

[해설]

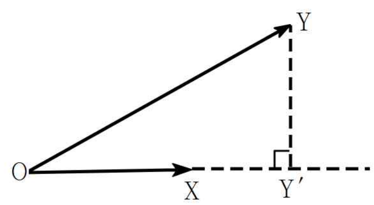
① 곡선 $y=\sqrt{1-x^2}$ 의 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 방정식을 구해보자.

$x^2+y^2=1$이므로

$\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=1$



② $\overrightarrow{OX}\bullet\overrightarrow{OY}$의 의미

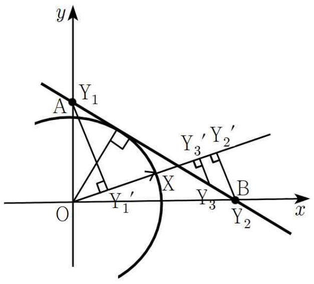


$\overrightarrow{OX}\bullet\overrightarrow{OY}=|\overrightarrow{OX}|\,|\overrightarrow{OY'}|=|\overrightarrow{OY'}|$

점 $\left(0,\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$를 점 A, 점 $(2,\ 0)$을 점 B라 하고 점 A가 Y일 때 $Y=Y_1$, 점 B가 Y일 때 $Y=Y_2$라 하자.

$\overrightarrow{OX}$가 다음 그림과 같을 때 가능한 Y′의 위치는 선분

$Y_1'Y_2'$ 위이다.



$\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OY'}|\overrightarrow{OX}$이고

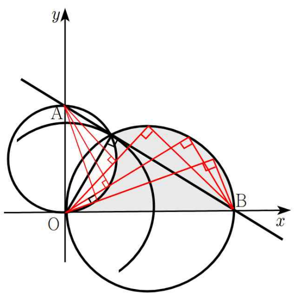
$|\overrightarrow{OX}|=1$이므로 점 P는 직선 OX 위의 점이고 그 위치는 Y'과 같다. $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OY'}$

X가 곡선

$y=\sqrt{1-x^2}\left(\dfrac{1}{2}\le x\le 1\right)$ 위를 움직임에 따라 가능한 Y'이 다르게 나온다.

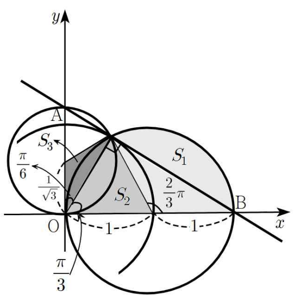
그러나 Y'은 항상 $\angle OY_1'A=\dfrac{\pi}{2}$, Y_2'은 항상 $\angle OY_2'B=\dfrac{\pi}{2}$를 만족시킨다.

따라서 점 Y_1'은 $\overline{OA}$를 지름으로 하는 원 위의 점이고 점 Y_2'은 $\overline{OB}$를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

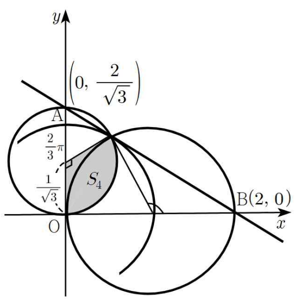


(점 P가 나타내는 영역)

[그림1]



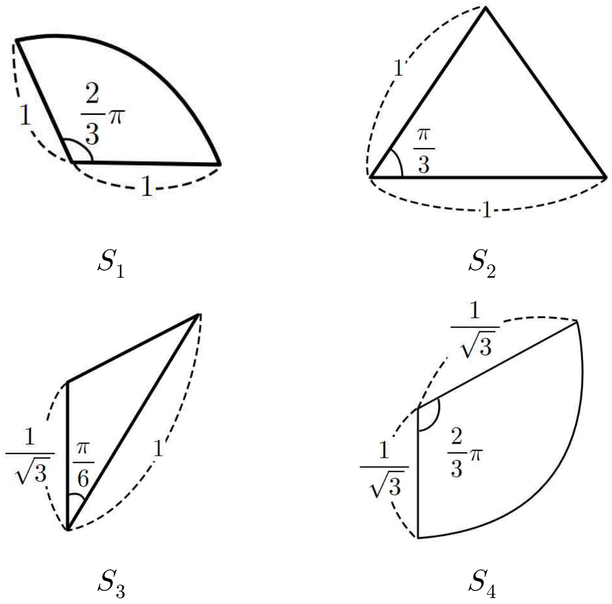
[그림2]



[그림3]

위 그림에서

[그림1]=[그림2]−[그림3]



위 그림에서

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$$

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_3=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4\sqrt{3}}$$

$$S_4=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{9}\pi$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}S_1+S_2+S_3-S_4&=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4\sqrt{3}}-\frac{\pi}{9}\\&=\frac{2}{9}\pi+\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{12}\\&=\frac{2}{9}\pi+\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

51) [정답] ②

[해설]

$\triangle ABC$의 무게중심을 G라고 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}&=(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GP})\cdot(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GP})\\&=(\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB})-(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB})\cdot\overrightarrow{GP}+|\overrightarrow{GP}|^2\end{aligned}$$

마찬가지로 하면,

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$$

$$=(\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB})-(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB})\cdot\overrightarrow{GP}+|\overrightarrow{GP}|^2$$

$$+(\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC})-(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})\cdot\overrightarrow{GP}+|\overrightarrow{GP}|^2$$

$$+(\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA})-(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA})\cdot\overrightarrow{GP}+|\overrightarrow{GP}|^2$$

$$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\cos120^\circ$$
$$=-\frac{2}{3}$$

이고 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$이므로, 정리하면

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}=-2+3|\overrightarrow{GP}|^2=-1$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{GP}|=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

따라서 점 P는 점 G를 중심으로 하고 반지름이 $\frac{1}{\sqrt{3}}$인 원 위의 점이다. 점 P가 나타내는 도형의 넓이는 $\frac{\pi}{3}$이다.

52) [정답] **37**

[해설]

(가) $\overrightarrow{OP}=k(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=k(12,\ 5)$이므로 $\overrightarrow{OP}$는 $(12,\ 5)$와 평행한 벡터이다. $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}\le 21$에서 내적의 정의에서 시점을 일치시키고 다른 벡터에 정사영한 선분의 길이의 곱을 의미하는 것이므로 $\overline{OA}$의 크기가 6이므로 점 P의 x좌표가 $\frac{7}{2}$를 넘을 수 없다.

(나) $|\overrightarrow{AQ}|=|\overrightarrow{AB}|=5$ 즉, 점 Q는 중심을 A로 하고 반지름의 길이가 5인 원 위의 점이다.
$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}\le 21$에서 Q의 x좌표가 $\frac{7}{2}$를 넘을 수 없다.

$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$에서 변수는 x좌표만 움직일 수 있으므로 넓이는 평행이동하여 잘라 붙이면 직사각형 모양으로 된다.
이때 Q의 y좌표의 폭이 높이가 될 수 있으며, P의 x좌표의 변화는 0에서 $\frac{7}{2}$이므로 가로의 길이는 $\frac{7}{2}$이다.
중심이 $(6,\ 0)$이고 반지름이 5인 원에서 y값의 변화가 가장 큰 값은 $x=\frac{7}{2}$일 때이므로

$$\left(\frac{7}{2}-6\right)^2+y^2=25,\ y^2=25-\frac{25}{4}$$

$$y^2=\frac{75}{4},\ y=\pm\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

그러므로 세로의 길이는 $5\sqrt{3}$이다.

따라서 도형의 넓이는 $5\sqrt{3}\times\frac{7}{2}=\frac{35}{2}\sqrt{3}$

즉, $p=2,\ q=35$이므로 $p+q=35+2=37$

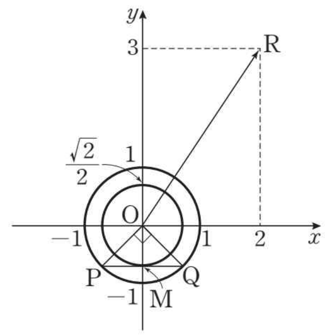
53) [정답] ③

[해설]

원 $x^2+y^2=1$의 중심은 원점 O이고 반지름의 길이는 1이므로 선분 PQ의 중점을 M이라 할 때,

$$\overline{OM}=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

즉, 두 직선 OP, OQ는 서로 수직이다.
또한 점 M이 나타내는 도형은 그림과 같이 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 원이다.



$$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OR})\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OR})$$
$$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}+|\overrightarrow{OR}|^2$$
$$=0-\overrightarrow{OR}\cdot(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})+\left(\sqrt{2^2+3^2}\right)^2$$
$$=13-2\overrightarrow{OR}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}}{2}\right)$$
$$=13-2\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OM}$$

이므로 $\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OM}$이 최소일 때 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$는 최대이고,
$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OM}$이 최대일 때 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$는 최소이다.
$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OM}$은 두 벡터 $\overrightarrow{OR}$와 $\overrightarrow{OM}$이 이루는 각의 크기가 180°일 때 최소이므로 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 최댓값은

$$M=13-2\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OM}$$
$$=13-2|\overrightarrow{OR}||\overrightarrow{OM}|\cos180^\circ$$
$$=13-2\times\sqrt{13}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times(-1)$$
$$=13+\sqrt{26}$$

또 $\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OM}$은 두 벡터 $\overrightarrow{OR}$와 $\overrightarrow{OM}$이 이루는 각의 크기가 0°일 때 최대이므로 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 최솟값은

$$m=13-2\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OM}$$
$$=13-2|\overrightarrow{OR}||\overrightarrow{OM}|\cos0^\circ$$
$$=13-2\times\sqrt{13}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times1$$
$$=13-\sqrt{26}$$

따라서 $M\times m=(13+\sqrt{26})(13-\sqrt{26})=143$

54) [정답] ③

[해설]

원점 O에 대하여

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=1$이고

조건 (나)에 의하여

$$\angle \mathrm{POQ}=90°$$

즉, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$이다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{r}$라 하면

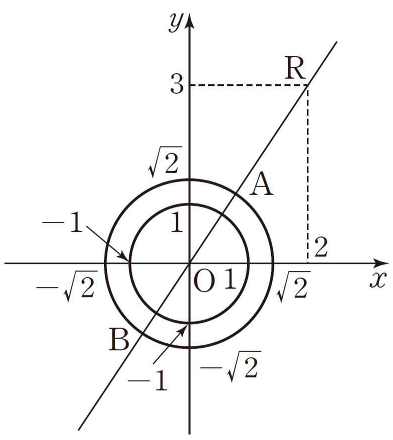
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right)\\&=\left(\vec{p}-\vec{r}\right)\cdot\left(\vec{q}-\vec{r}\right)\\&=\vec{p}\cdot\vec{q}-\vec{p}\cdot\vec{r}-\vec{r}\cdot\vec{q}+\left|\vec{r}\right|^2\\&=-\vec{r}\cdot\left(\vec{p}+\vec{q}\right)+\left(2^2+3^2\right)\\&=13-\vec{r}\cdot\left(\vec{p}+\vec{q}\right)\end{aligned}$$

이때 $\vec{p}+\vec{q}=\vec{a}$라 하면

$$\left|\vec{p}+\vec{q}\right|=\left|\vec{a}\right|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

이므로 벡터 $\vec{a}$의 종점이 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이다.

따라서 $\vec{r}\cdot\left(\vec{p}+\vec{q}\right)$가 최댓값과 최솟값을 갖는 경우는 $\vec{a}$의 종점이 그림과 같이 직선 OR가 원 $x^2+y^2=2$와 만나는 두 점 A, B일 때 각각 최댓값과 최솟값을 갖는다.



즉, $\vec{r}\cdot\left(\vec{p}+\vec{q}\right)$의 최댓값은

$$\sqrt{2^2+3^2}\times\sqrt{2}\cos 0°=\sqrt{26}$$

$\vec{r}\cdot\left(\vec{p}+\vec{q}\right)$의 최솟값은

$$\sqrt{2^2+3^2}\times\sqrt{2}\cos 180°=-\sqrt{26}$$

따라서 $M=13+\sqrt{26}$, $m=13-\sqrt{26}$이므로

$$\begin{aligned}Mm&=\left(13+\sqrt{26}\right)\left(13-\sqrt{26}\right)\\&=169-26\\&=143\end{aligned}$$

55) [정답] 7

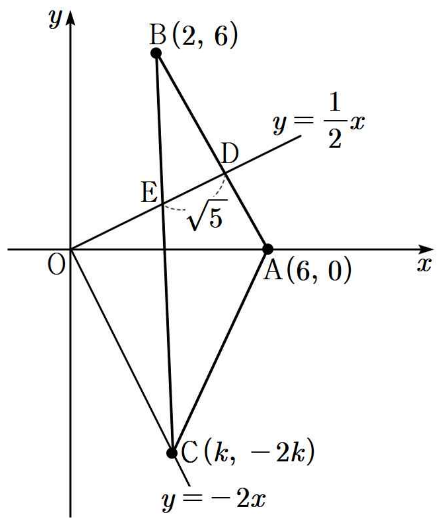
[해설]

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 조건 (가)에서

$5(4,\ -6)\cdot(x,\ y)-(2,\ 6)\cdot(x-6,\ y)=(6,\ 0)\cdot(2,\ 6)$

$20x-30y-2x+12-6y=12$

$\therefore y=\frac{1}{2}x$



위의 그림과 같이 직선 AB와 $y=\frac{1}{2}x$의 교점을 D라 하자.

직선 AB의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}(x-6)=-\frac{3}{2}x+9$

직선 $y=\frac{1}{2}x$와 연립하면 $x=\frac{9}{2}$, $y=\frac{9}{4}$이므로

$\mathrm{D}\left(\frac{9}{2},\ \frac{9}{4}\right)$이다.

직선 BC와 직선 $y=\frac{1}{2}x$의 교점을 E라 하면 점 P의 자취는 선분 DE와 같다.

점 P의 자취의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 $\overline{\mathrm{DE}}=\sqrt{5}$이고, 두 점 D, E를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{E}\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{4}\right)$이다.

세 점 B, E, C가 일직선 위에 있으므로

$$\frac{-2k-6}{k-2}=\frac{-\frac{19}{4}}{\frac{1}{2}},\ k=\frac{10}{3}$$

$$\therefore \mathrm{C}\left(\frac{10}{3},\ -\frac{20}{3}\right)$$

점 $\mathrm{P}\left(a,\ \frac{a}{2}\right)$라 하면 $\frac{5}{2}\le a\le\frac{9}{2}$이고

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}&=(6,\ 0)\cdot\left(a-\frac{10}{3},\ \frac{a}{2}+\frac{20}{3}\right)\\&=6a-20\end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{9}{2}$일 때, $6a-20$의 최댓값은 7이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}$의 최댓값은 7이다.

56) [정답] 80

[해설]

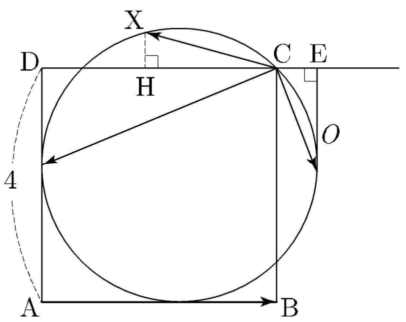
점 X에서 직선 CD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HX}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HX})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}$ ($\because$ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{HX}$)

점 H는 다음 그림의 선분 DE 위에 존재한다.



(ⅰ) 점 H가 점 C의 왼쪽에 위치하는 경우

$\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{CH}$의 방향은 서로 반대이다.

따라서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=-\overline{AB}\cdot\overline{CH}$

(ⅱ) 점 H가 점 C인 경우

$\overrightarrow{CH}=\vec{0}$이므로 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=0$

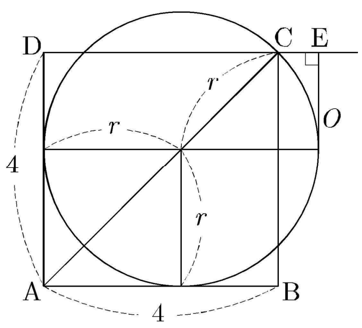
(ⅲ) 점 H가 점 B의 오른쪽에 위치하는 경우

$\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{CH}$의 방향이 같으므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=\overline{AB}\cdot\overline{CH}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 점 H가 점 E와 일치할 때, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}$는

최댓값 $\overline{AB}\cdot\overline{CE}=4\overline{CE}$를 갖는다.



원의 중심을 O, 반지름을 r이라 하면

$\overline{AC}=\overline{AO}+\overline{OC}=(\sqrt{2}+1)r$

사각형 ABCD가 한 변의 길이가 4인 정사각형이므로

$\overline{AC}=4\sqrt{2}$이다.

따라서 $(\sqrt{2}+1)r=4\sqrt{2}$에서

$r=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=8-4\sqrt{2}$

따라서 $\overline{CE}=2r-4=12-8\sqrt{2}$이다.

따라서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CX}$의 최댓값은

$4(12-8\sqrt{2})=48-32\sqrt{2}$

$\therefore\ a=48,\ q=32$

$\therefore\ a+b=80$

57) [정답] 180

[해설]

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}^2-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OP}$

여기서, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=25$, $\overrightarrow{OP}^2=25$ 이고

AB의 중점을 Q라 하면

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OQ}$

$\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OQ}$가 반대방향일 때, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$는 최댓값을 가진다

$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\le 25+25-2(-5\times13)=180$

58) [정답] 40

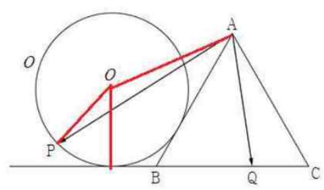
[해설]

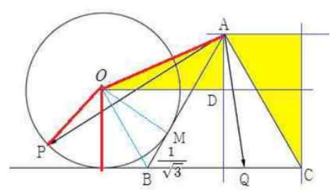
원의 중심을 O라 하면

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}$이므로

$\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{AQ}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})\bullet\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AO}\bullet\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{AQ}$

여기서 $\overrightarrow{AO}\bullet\overrightarrow{AC}\le\overrightarrow{AO}\bullet\overrightarrow{AQ}\le\overrightarrow{AO}\bullet\overrightarrow{AB}$





그림에서 $\overline{BM}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\overline{OD}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$,

$\overline{AD}=\sqrt{3}-1$이므로

$\overrightarrow{AO}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}},\ 1-\sqrt{3}\right)$

$\overrightarrow{AB}=(-1,\ -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AC}=(1,\ -\sqrt{3})$

$\overrightarrow{AO}\bullet\overrightarrow{AC}=2-\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$, $\overrightarrow{AO}\bullet\overrightarrow{AB}=4-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

또, $\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AQ}|\cos\theta$이므로 $-2\le\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{AQ}\le 2$

따라서 최댓값은 $\left(4-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)+2=6-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

최솟값은 $\left(2-\dfrac{4}{3}\sqrt{3}\right)-2=-\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $a+b\sqrt{3}=6-2\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2=36+4=40$

59) [정답] 160

[해설]

직각삼각형 OAB에서

$\overline{AB}=\sqrt{15^2+20^2}=25$

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{OH}\perp\overline{AB}$이고 $\triangle OAB$에서

$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times\overline{OH}\times\overline{AB}$이므로

$\frac{1}{2}\times 20\times 15=\frac{1}{2}\times\overline{OH}\times 25$

$\therefore \overline{OH}=12$

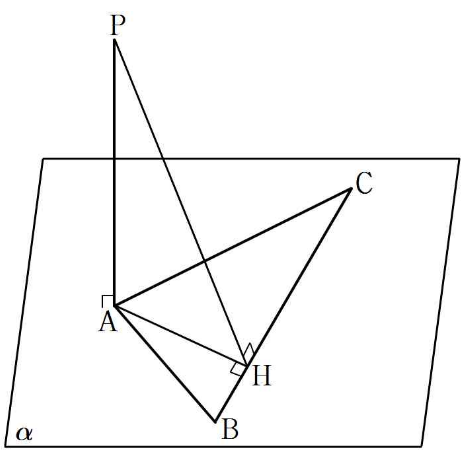
$\overline{CO}\perp\overline{OH}$이므로

$\overline{CH}=\sqrt{4^2+12^2}=4\sqrt{10}$

$\therefore \overline{CH}^2=160$

60) [정답] ⑤

[해설]



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의해 $\overline{PH}\perp\overline{BC}$이다.

삼각형 ABC가 직각삼각형이므로 $\overline{BC}=2$

$\overline{AH}\times\overline{BC}=\overline{AB}\times\overline{AC}$에서

$2\overline{AH}=\sqrt{3}$ $\quad\therefore \overline{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

직각삼각형 PAH에서

$\overline{PH}=\sqrt{2^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{19}}{2}$

61) [정답] ④

[해설]

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BD}^2}=\sqrt{16-5}=\sqrt{11}$

$\overline{AH}\perp$(평면 BCH)이고 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$이므로

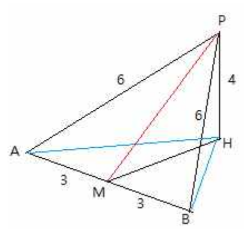
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HD}\perp\overline{BC}$이다.

직각삼각형 ADH에서

$\overline{DH}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{11-4}=\sqrt{7}$

62) [정답] ⑤

[해설]



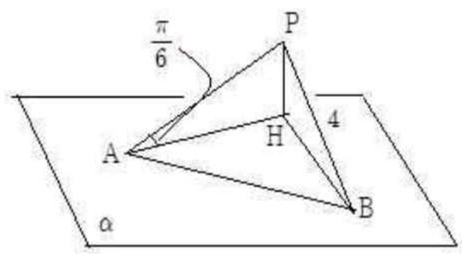
삼수선의 정리와 피타고라스의 정리

$\overline{PM}=3\sqrt{3}$, $\overline{HM}=\sqrt{11}$

$\therefore \frac{1}{2}\times 6\times\sqrt{11}=3\sqrt{11}$

63) [정답] ④

[해설]



직각이등변삼각형 PAB에서 $\overline{PB}=4$, $\overline{AP}=\overline{AB}=2\sqrt{2}$

정사영의 길이에서 $\overline{AH}=\overline{PA}\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{6}$

삼수선의 정리에서 $\angle HAB=\frac{\pi}{2}$이므로

$\triangle ABH=\frac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{AH}=2\sqrt{3}$

그리고 $\overline{PH}=\overline{PA}\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{2}$이다.

따라서 사면체 PHAB의 부피는

$V=\frac{1}{3}(\triangle ABH)\overline{PH}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

64) [정답] **12**

[해설]

점 B에서 평면에 수선을 내렸을 때 만나는 점을

Q라하고,직선l과 평면이 이루는 거리를 x라 하자. 이 때, $2\sqrt{6}$과 5의 길이를 이용하여 직선 m과 직선 n 의 거리를 구하면 1이다. $\overline{PC}$의 길이를 y라 하면 $\overline{QD}$의 길이는 $y+1$이다. 이 때, $x^2+y^2=4^2$ 이고, $x^2+(y+1)^2=(\sqrt{21})^2$ 이므로 연립하면 $x=2\sqrt{3}$, $y=2$

따라서 삼각형의 넓이는 $2\sqrt{3}\times2\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$

$\therefore S^2=12$

65) [정답] ⑤

[해설]

$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{7}$이고, 점 M에서 BC에 내린 수선의 발을 H, 점 A에서 $\overline{\mathrm{BM}}$에 내린 수선의 발을 X라 하면 직선 AX와 $\overline{\mathrm{BH}}$의 교점이 생긴다. 이때 이 점을 Y라 하자.

△AXM과 △MXY, △BXA가 닮음이므로

$$\overline{\mathrm{MY}}=\frac{7}{3}$$

$\overline{\mathrm{AX}}=\overline{\mathrm{XP}}$이므로 $\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{XY}}}{\overline{\mathrm{XP}}}=\frac{\overline{\mathrm{XY}}}{\overline{\mathrm{AX}}}$

△ABX와 △YMX이므로

$$\frac{\overline{\mathrm{XY}}}{\overline{\mathrm{XA}}}=\frac{\overline{\mathrm{MY}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{7}{9}$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{7}{9}$$

66) [정답] ①

[해설]

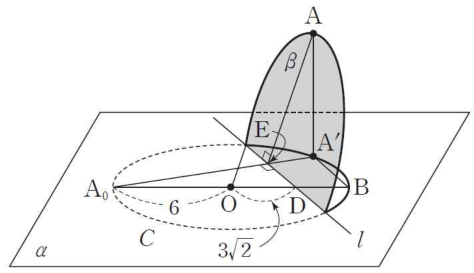
평면 α에서 점 A의 위치를 점 $\mathrm{A_0}$이라 하자.

원 C 위의 점 $\mathrm{A_0}$을 포함하는 호를 직선 l을 접는 선으로 하여 접을 때, 점 A는 직선 l과 수직인 평면 위를 움직인다.

따라서 이 평면을 γ라 하고, 평면 γ와 직선 l의 교점을 E라 하면

$\overline{\mathrm{A_0E}}\perp l$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{AE}}\perp l$ …… ㉡



$\overline{\mathrm{AA'}}\perp\alpha$이므로 ㉡에서 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{A'E}}\perp l$ …… ㉢

따라서 두 평면 α와 β가 이루는 예각의 크기는

$\theta=\angle\mathrm{AEA'}$

한편, 세 점 $\mathrm{A_0}$, E, A′은 한 평면 α위에 있으므로 ㉠, ㉢에서 세 점 $\mathrm{A_0}$, E, A′은 한 직선 위에 있다.

선분 $\mathrm{A_0B}$는 원 C의 지름이므로

$\overline{\mathrm{A_0A'}}\perp\overline{\mathrm{BA'}}$

두 직각삼각형 $\mathrm{A_0DE}$, $\mathrm{A_0BA'}$은 서로 닮은 도형이고

$\overline{\mathrm{OD}}=3\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{A_0D}}:\overline{\mathrm{DB}}=\overline{\mathrm{A_0E}}:\overline{\mathrm{EA'}}$

즉, $(6+3\sqrt{2}):(6-3\sqrt{2})=\overline{\mathrm{A_0E}}:\overline{\mathrm{EA'}}$

따라서 직각삼각형 AEA′에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{EA'}}}{\overline{\mathrm{AE}}}=\frac{\overline{\mathrm{EA'}}}{\overline{\mathrm{A_0E}}}=\frac{6-3\sqrt{2}}{6+3\sqrt{2}}$$
$$=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}$$
$$=3-2\sqrt{2}$$

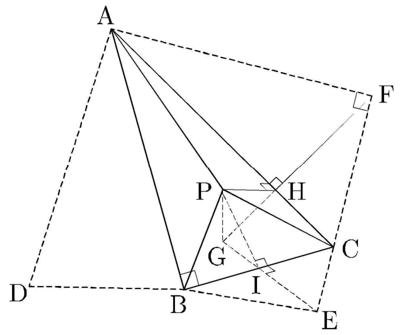
67) [정답] ⑤

[해설]

주어진 전개도로 사면체를 만들 때, 전개도의 점 D, E, F는 일치한다. 사면체에서 이 세 점을 P라 하자.

사면체 PABC의 점 P에서 면 APC와 면 ABC의 교선 AC에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 G라 할 때,

이면각의 정의에 의하여 $\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{HG}}}{\overline{\mathrm{PH}}}$이다.



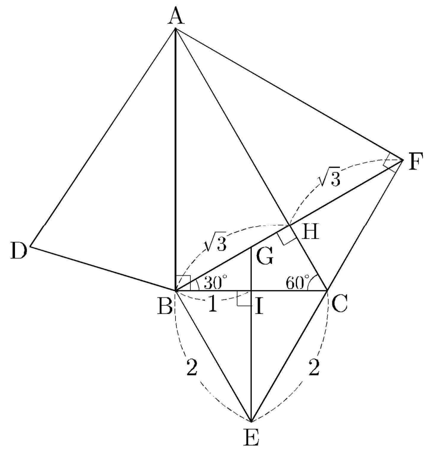
삼각형 PAC와 삼각형 FAC가 합동이므로

$\overline{PH}\perp\overline{AC}$, $\overline{FH}\perp\overline{AC}$

따라서 삼수선의 정리에 의하여 점 G는 직선 FH 위에 존재한다. 점 P에서 면 PBC와 면 ABC의 교선 BC에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼각형 PBC와 삼각형 EBC가 합동이므로

$\overline{PH}\perp\overline{BC}$, $\overline{EH}\perp\overline{BC}$

따라서 삼수선의 정리에 의하여 점 G는 직선 EI 위에 존재한다.



$\overline{CF}=\overline{CE}=2$이므로 직각삼각형 ABC, AFC는 합동이다. 따라서 점 F와 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발은 일치한다. 따라서 직선 FH는 점 B를 지난다.

$\cos(\angle ACB)=\dfrac{1}{2}$이므로

$\angle ACB=60^\circ$,

$\angle CBH=30^\circ$

$\therefore\ \overline{FH}=\overline{BH}=2\sin60^\circ=\sqrt{3}$

$\overline{BG}\cos30^\circ=1$에서

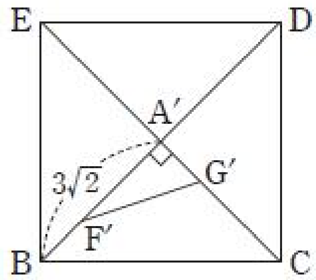
$\overline{BG}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\overline{HG}=\overline{BH}-\overline{BG}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\overline{HG}}{\overline{PH}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$ ($\because$ $\overline{PH}=\overline{FH}$)

68) [정답] ④

[해설]



점 A의 평면 BCDE 위로의 정사영을 A′이라 하면 점 A′은 정사각형 BCDE의 두 대각선의 교점이다.

점 F의 평면 BCDE 위로의 정사영을 F′이라 하면 점 F′은 선분 A′B를 2:1로 내분하는 점이고, 점 G의 평면 BCDE 위로의 정사영을 G′이라 하면 점 G′은 선분 A′C를 1:2로 내분하는 점이며 선분 FG의 평면 BCDE 위로의 정사영은 선분 F′G′이다.

이때 $\overline{A'B}=\overline{A'C}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\times6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$에서

$\overline{A'F'}=2\sqrt{2}$, $\overline{A'G'}=\sqrt{2}$이고 $\angle F'A'G'=90^\circ$이므로

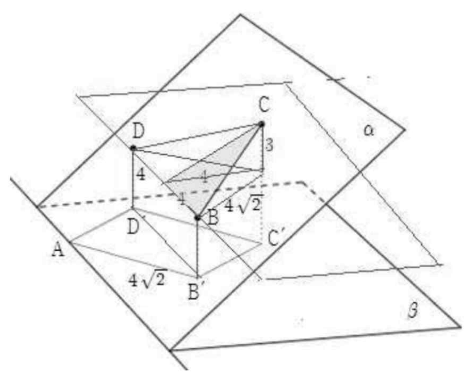
$\overline{F'G'}=\sqrt{\overline{A'F'}^2+\overline{A'G'}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{10}$

따라서 선분 FG의 평면 BCDE 위로의 정사영의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

69) [정답] ④

[해설]

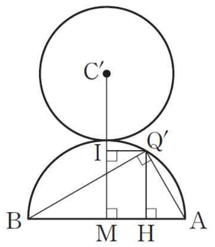
아래 그림과 같이 평면 β를 평행이동하여 $\overline{BD}$를 지나도록 하면



삼각형 BCD의 정사영은 변의 길이가 $4\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, 8인 직각이등변삼각형이다.
이등변삼각형의 성질과 삼수선의 정리에서
$\overline{BC}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$

70) [정답] ③

[해설]



점 Q의 평면 α위로의 정사영 Q′은 밑면의 둘레에 있고,
선분 BQ의 평면 α위로의 정사영의 길이가 $2\sqrt{3}$이므로

$\overline{BQ'}=2\sqrt{3}$

또한 $\angle AQ'B=\dfrac{\pi}{2}$, $\overline{AB}=4$이므로

$\overline{AQ'}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BQ'}^2}$

$=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}$

$=2$

따라서 점 Q′에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AB}\times\overline{Q'H}=\overline{AQ'}\times\overline{BQ'}$

$4\times\overline{Q'H}=2\times2\sqrt{3}$

즉, $\overline{Q'H}=\sqrt{3}$이므로 $\overline{AH}=1$

또한 구와 평면 α의 접점을 C′이라 하면

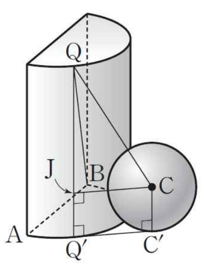
$\overline{C'M}=2+\sqrt{3}$

이므로 점 Q′에서 선분 C′M에 내린 수선의 발 I에 대하여

$\overline{C'I}=\overline{C'M}-\overline{IM}=(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}=2$

$\overline{Q'I}=\overline{AM}-\overline{AH}=2-1=1$

따라서 $\overline{C'Q'}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$



즉, 점 C에서 선분 QQ′에 내린 수선의 발을 J라 하면

$\overline{CJ}=\sqrt{5}$이고 $\overline{QJ}=5\sqrt{3}-\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

이므로

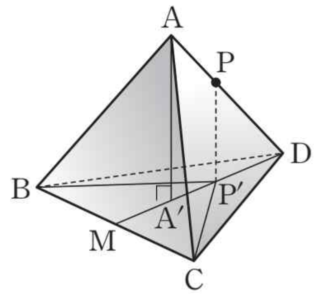
$\overline{CQ}=\sqrt{\overline{CJ}^2+\overline{QJ}^2}$

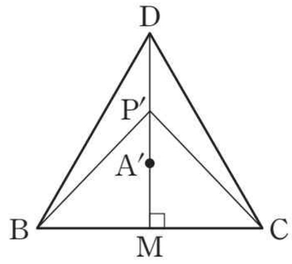
$=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(4\sqrt{3})^2}$

$=\sqrt{53}$

71) [정답] ③

[해설]





점 A의 평면 BCD위로의 정사영을 A′이라 하고, 선분 BC의 중점을 M이라 하면 사면체 ABCD가 정사면체이므로
점 A′은 삼각형 BCD의 무게중심이고 두 점 A′, P′은 선분 DM 위에 있다.
정삼각형 BCD는 직선 DM에 대하여 대칭이므로 두 삼각형 P′CD, P′DB의 넓이는 같다.
즉, $S_2=S_3$이므로

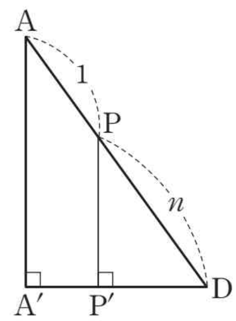
$S_1=S_2+2S_3=S_2+2S_2=3S_2$

$S_2=S_3=\dfrac{1}{3}S_1$

삼각형 P′BM의 넓이는 $\dfrac{1}{2}S_1$이므로

삼각형 DBM에서 두 삼각형 P′BM, P′DB의 넓이의 비는

$\dfrac{1}{2}S_1:S_3=\dfrac{1}{2}S_1:\dfrac{1}{3}S_1=3:2$



따라서 $\overline{P'M}:\overline{P'D}=3:2$이므로

$\overline{P'M}=3a$, $\overline{P'D}=2a(a>0)$이라 하면

$\overline{DM}=\overline{P'M}+\overline{P'D}=5a$

한편, $\overline{DA'}:\overline{A'M}=2:1$이므로

$\overline{DA'}=\dfrac{2}{3}\overline{DM}=\dfrac{2}{3}\times5a=\dfrac{10}{3}a$

$\overline{A'P'}=\overline{DA'}-\overline{P'D}=\dfrac{10}{3}a-2a=\dfrac{4}{3}a$

또한 두 직각삼각형 AA′D, PP′D는 서로 닮은 도형이고
점 P가 선분 AD를 $1:n$으로 내분하는 점이므로

$\overline{A'P'}:\overline{P'D}=\overline{AP}:\overline{PD}=1:n$

$n=\dfrac{\overline{P'D}}{\overline{A'P'}}=\dfrac{2a}{\frac{4}{3}a}=\dfrac{3}{2}$

72) [정답] ⑤

[해설]

MN의 중점을 H, △BCD의 무게중심을 G라 하고

$\triangle AMN$과 $\square BCMN$이 이루는 각$=\angle AHG=\theta$라 하면

$AH=3\sqrt{11}$, $GH=\sqrt{3}$,

$\cos\theta=\dfrac{GH}{AH}=\dfrac{\sqrt{33}}{33}$

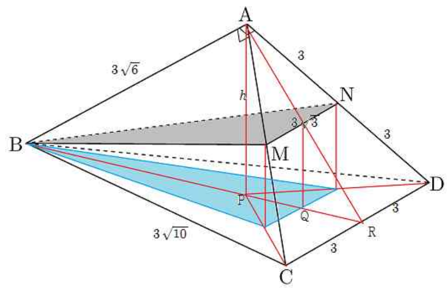
$\square BCMN$ 의 넓이$=\dfrac{3}{4}\times\triangle BCD$

$=\left(\dfrac{3}{4}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 12^2\right)=27\sqrt{3}$

정사영의 넓이$=27\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{33}}{33}=\dfrac{27\sqrt{11}}{11}$

73) [정답] 450

[해설]



그림에서

$\overline{BR}=9$, $\overline{BP}=a$, $\overline{PR}=9-a$

$h^2=(3\sqrt{6})^2-a^2$

$=(3\sqrt{3})^2-(9-a)^2$

따라서 $a=6$, $\overline{PR}=3$

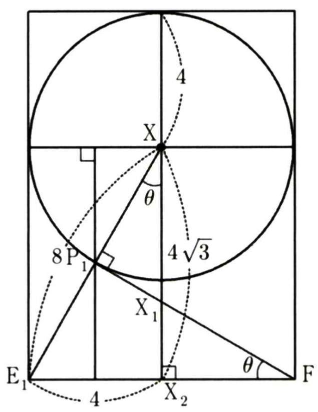
$S=\dfrac{1}{2}\times3\times\left(6+\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{45}{4}$

$\therefore 40S=450$

74) [정답] ④

[해설]

구의 중심을 지나고 평면 AEFB에 평행하게 절단하면 구가 밑면 ABCD와 직육면체의 네 옆면에 모두 접하므로 구의 반지름은 4이고 구의 중심을 X라 하면 구의 중심에서 평면 EFGH에 이르는 거리는 $(4+4\sqrt{3})-4=4\sqrt{3}$이다.



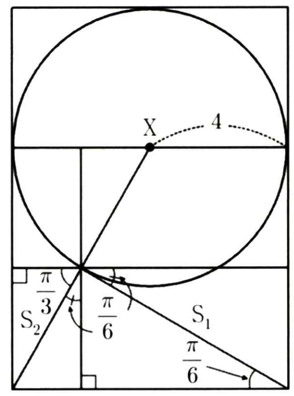
구와 삼각기둥과 한 점에서 만나므로 그 점은 두 점 P, Q의 중점 P_1이 된다.

이때 두 점 F, G의 중점을 F_1, 두 점 E, H의 중점을 E_1, 구의 중심 X에서 태양광선에 평행하게 연장하였을 때, 평면 EFGH와 교점을 X_2라 하면 삼각형 XX_2E_1과 $F_1P_1E_1$는 직각과 맞꼭짓각을 공유하는 AA닮음 관계의 삼각형이 되므로

$\angle X_2XE_1=\theta$라 하면 $\tan\theta=\dfrac{4}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{6}$

이때 삼각기둥에 그림자는 구의 중심을 지나고 직육면체의 밑면에 평행한 평면과의 교원의 넓이는 $\pi\cdot4^2=16\pi$이므로



$S_2\cos\dfrac{\pi}{3}+S_1\cos\dfrac{\pi}{6}=16\pi$

$\dfrac{S_2+\sqrt{3}\ S_1}{2}=16\pi$

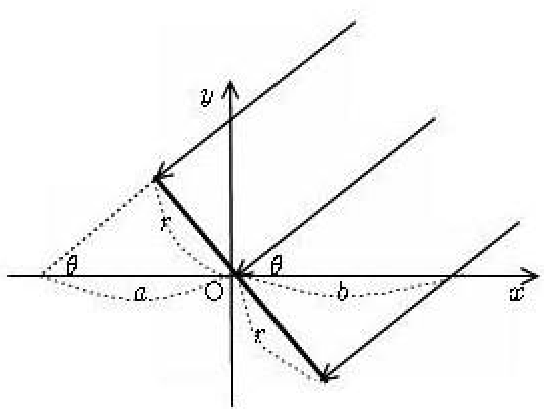
따라서 양변에 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$을 곱하면

$S_1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}S_2=\dfrac{32\sqrt{3}\pi}{3}$

75) [정답] ③

[해설]

ㄱ. 구의 지름 중 구의 중심을 지나고 교선 l과 평행한 지름의 정사영의 길이는 변치 않으므로 그림자와 교선 l의 공통부분의 길이는 $2r$ 이다 (참)
또, 구의 중심을 교선l위에 오도록 평행이동하고 구면 위의 원 중에서 태양광선에 수직인 원의 지름을 xy평면에서 생각하면 그림과 같다



이때 $a\cos\theta=r$, $b\sin\theta=r$ 이므로

ㄴ. $a\cos60^\circ=b\sin60^\circ$에서 $a=\sqrt{3}b$

즉 $a>b$ (거짓)

ㄷ. $\cos\theta=\frac{r}{a}$, $\sin\theta=\frac{r}{b}$ 이므로

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 에 대입하면 $\frac{r^2}{a^2}+\frac{r^2}{b^2}=1$

즉 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{r^2}$ (참)

76) [정답] ②

[해설]

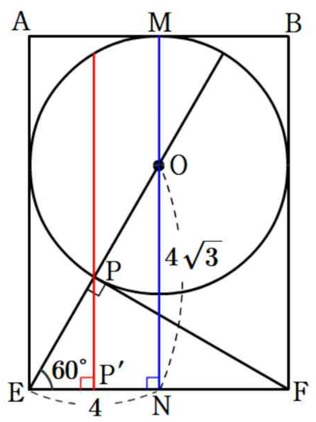
평면 AEFB를 정면에서 바라보면 아래 그림과 같다.

$\overline{\mathrm{ON}}=4\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{EN}}=4$이므로 $\overline{\mathrm{OE}}=8$, $\angle\mathrm{OEN}=60^\circ$ 이다.

$\overline{\mathrm{PE}}=4$이므로 $\overline{\mathrm{EP'}}=2$

또한 $\overline{\mathrm{EF}}=8$, $\overline{\mathrm{PE}}=4$이므로 $\angle\mathrm{EPF}=90^\circ$ 이다.

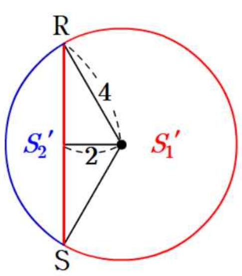
따라서 구와 삼각기둥의 접점은 모서리 PQ의 중점이 된다,



평면 PFGQ에 생기는 그림자는 아래 그림에서

활꼴 S_1'에 의해서 생기고 평면 PQHE에

생기는 그림자는 활꼴 S_2'에 의해서 생긴다.



부채꼴의 중심각의 크기가 120° 이므로

$S_2'=\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}$, $S_1'=\frac{32\pi}{3}+4\sqrt{3}$

$S_1=\frac{S_1'}{\cos30^\circ}=\frac{64}{3\sqrt{3}}\pi+8$,

$S_2=\frac{S_2'}{\cos60^\circ}=\frac{32}{3}\pi-8\sqrt{3}$

그러므로 $S_1+\frac{1}{\sqrt{3}}S_2=\frac{32\sqrt{3}}{3}\pi$이다.

77) [정답] ⑤

[해설]

구의 지름의 길이가 2이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로

선분 AB는 구의 중심 $(-1, 0, 2)$를 지난다.

평면의 법선벡터가 직선 AB의 방향벡터이므로

직선 AB의 방정식은 $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-1}$인데, 이것이 점

$(0, a, b)$를 지난다.

따라서 $1=\frac{a}{3}=\frac{b-2}{-1}$

$a=3$, $b=1$

$\therefore\ a+b=4$

78) [정답] 44

[해설]

<조건 '삼각형 ADH의 두 변의 길이가 5이다.'에 대한 해석>

선분 AH는 선분 AC의 평면 α로의 정사영이므로 길이가 5 미만일 수 밖에 없다. 따라서 $\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{DA}}=5$이다.

(참고) 만약 선분 AH의 길이도 5이려면 점 C 역시 평면 α 위의 점이어야 하는데 이는 문제 조건에 의하여 모순이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$, $\overline{\mathrm{CA}}=5$인 삼각형 ABC는 피타고라스의 정리를 만족시키므로 $\angle\mathrm{CBA}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형인데,

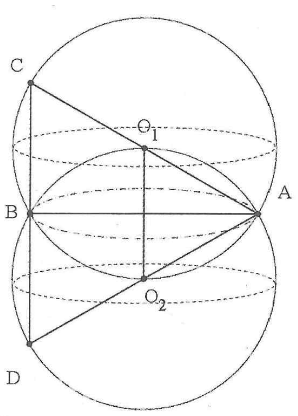
$\overline{\mathrm{DA}}=5$ 이므로 삼각형 ACD는 $\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{DA}}=5$인 이등변삼각형이다.

점 B가 점 A에서 선분 CD에 내린 수선의 발이므로, 따라서 이 점은 선분 CD의 중점이 된다. (이등변삼각형 성질)

즉, $\angle\mathrm{ABD}=\frac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{BD}}=3(=\overline{\mathrm{BC}})$임을 알 수 있다.

선분 AC를 지름으로 하는 구와 선분 AD를 지름으로 하는 구는 동시에 A를 지나고 있으며 $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ABD}=\frac{\pi}{2}$을 지름의 원주각으로 생각한다면 두 구는 동시에 B를 지나고 있다는 사실 역시 알 수 있다.

이는 두 구의 교선인 원 C 위에 점 A, B가 있다는 말과 같다.



선분 AC를 지름으로 하는 구의 중심을 O_1, 선분 AD를 지름으로 하는 구의 중심을 O_2라 하자. 그리고 O_1, O_2는 각각 두 선분 AC, AD의 중점이기도 하므로 $\overrightarrow{O_1O_2}$와 $\overrightarrow{CD}$는 평행하다.

또한 두 구의 위치관계에 의하여 교선 C는 $\overrightarrow{O_1O_2}$에 수직한 평면 β 위에 있게 된다. 평면 β의 법선벡터는 $\overrightarrow{O_1O_2}$와 평행한 $\overrightarrow{CD}$로 생각한다면, 교선 C가 평면 α와 이루는 사이각은 두 벡터 $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CH}$ (α의 법선벡터)가 이루는 각과 같게 된다.

또한 교선 C는 선분 AB를 지름으로 하는 원이므로, C의 평면 α로의 정사영의 넓이는

$4\pi\times\cos(\angle\mathrm{DCH})=\dfrac{2\sqrt{11}}{3}\pi$이다.

(삼각형 CDH에서 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{11}$)

따라서 $9p^2=44$이다.

79) [정답] ⑤

[해설]

주어진 도형을 좌표공간에 놓고, E(0, 0, 0), B(4, 0, 0), D(0, 4, 0), P(4, 4, -3), Q(0, 4, -3) 이라 하자.

평면 BPQE의 방정식은 $3y+4z=0$ (평면 α 라 하자) 이다.

삼각형 RST를 지나는 평면은 평면 RBCS(평면 β라 하자)와 같고, 평면의 방정식을 $ax+by+cz=d$라 두고

B(4, 0, 0), C(4, 4, 0), R(1, 1, $\sqrt{2}$), S(1, 3, $\sqrt{2}$)를 각각 대입하여 구하면,

β : $\sqrt{2}x+3z-4\sqrt{2}=0$이다.

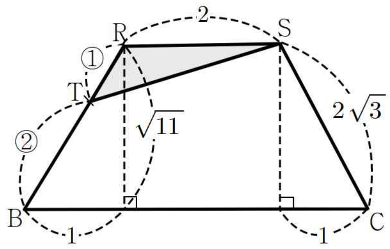
평면 α와 평면 β가 이루는 예각을 θ라 하면,

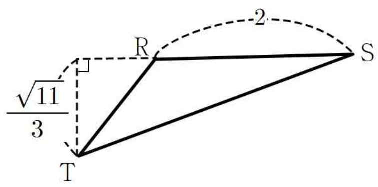
각각의 법선벡터가 (0, 3, 4), $(\sqrt{2}, 0, 3)$이고

$\cos\theta=\dfrac{12}{5\sqrt{11}}$

또한, 평면 α위의 삼각형 RST의 넓이를 구하면

그림과 같이





$\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{\sqrt{11}}{3}=\dfrac{\sqrt{11}}{3}$

따라서, 삼각형 RST의 평면 BPQE 위로의 정사영의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{11}}{3}\times\dfrac{12}{5\sqrt{11}}=\dfrac{4}{5}$

80) [정답] ⑤

[해설]

$2\overline{\mathrm{A'C'}}=\overline{\mathrm{C'B'}}$이므로 점 C′은 선분 A′B′의 1 : 2내분점이다.

즉, 점 C는 선분 AB의 1 : 2 내분점이므로 점 Cz의 좌표는

$\dfrac{(-3)\times2+15\times1}{1+2}=3$

81) [정답] $\left(-4,\ \dfrac{2}{3},\ 6\right)$

[해설]

$2\overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:2$

따라서 점 C는 두 점 A, B를 1 : 2로 내분한 점 또는 5 : 2로 외분한 점이다.

이때, 선분 AB의 연장선 위에 있는 점은 선분 AB의 외분점이므로 점 C의 좌표를 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$이라고 하면

$$x_1=\frac{5\times(-2)-2\times1}{5-2}=-4$$

$$y_1=\frac{5\times0-2\times(-1)}{5-2}=\frac{2}{3},$$

$$z_1=\frac{5\times4-2\times1}{5-2}=6$$

이므로 점 R의 좌표는 $\left(-4,\ \frac{2}{3},\ 6\right)$

82) [정답] 15

[해설]

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{14}$

$\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$

이므로 삼각형 AOB는 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$인 이등변삼각형이다.

선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$\mathrm{M}\left(\frac{1+3}{2},\ \frac{-3+(-1)}{2},\ \frac{2+(-2)}{2}\right)$,

즉 M(2, -2, 0)이므로

$\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{2^2+(-2)^2+0^2}=2\sqrt{2}$

또한

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-1)^2+\{-1-(-3)\}^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{6}$

따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{2}=4\sqrt{3}$

삼각형 AOP의 넓이를 S_1, 삼각형 BOP의 넓이를 S_2라 하면 $S_2=4\sqrt{3}-\sqrt{3}=3\sqrt{3}$이므로

$S_1:S_2=\sqrt{3}:3\sqrt{3}=1:3$

즉, $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:3$이므로 $m:n=1:3$

또한 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}\left(\frac{1\times3+3\times1}{1+3},\ \frac{1\times(-1)+3\times(-3)}{1+3},\ \frac{1\times(-2)+3\times2}{1+3}\right)$

즉, $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2},\ 1\right)$

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{5}{2}$, $c=1$이고 $\frac{n}{m}=3$이므로

$\frac{n(|a|+|b|+|c|)}{m}=3\times\left(\left|\frac{3}{2}\right|+\left|-\frac{5}{2}\right|+|1|\right)=15$

83) [정답] ③

[해설]

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{a+4}{3},\ \frac{b+4}{3},\ \frac{c+2}{3}\right)$$

이 점이 y축 위에 있으므로

$$\frac{a+4}{3}=0,\ \frac{c+2}{3}=0$$

따라서 $a=-4$, $c=-2$이므로 B$(-4, b, -2)$

두 점 A, B를 xy평면에 정사영시킨 점을 각각 A$'$, B$'$이라 하면

$$\mathrm{A}'(2,2,1),\ \mathrm{B}'(-4,b,-2)$$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{36+(b-2)^2+9}$, $\overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{36+(b-2)^2+9}$이고,

$\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$에서 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta=\overline{\mathrm{A'B'}}$에서

$$\sqrt{(b-2)^2+45}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\sqrt{(b-2)^2+45}$$

$$\therefore b=8\ (\because\ b>0)$$

84) [정답] ④

[해설]

선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점이 xy평면에 있으므로 z좌표는 0이다.

$\frac{c+3}{1+3}=0$, $c=-3$

선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점이 z축 위에 있으므로 x좌표, y좌표는 0이다.

$\frac{3a-2}{3-1}=0$, $a=\frac{2}{3}$

$\frac{3b+3}{3-1}=0$, $b=-1$

$\therefore abc=2$

85) [정답] ④

[해설]

$\overline{\mathrm{AB}}$를 1:2로 내분하는 점을 P라고 하면 점 P는 zx평면 위에 있으므로 y의 좌표가 0이다.

$\frac{1\times b+2\times0}{1+2}=0$이므로 $b=-8$

$\overline{AB}$를 2:3으로 외분하는 점을 Q라고 하면 점 Q는 y축 위에 있으므로 x의 좌표와 z의 좌표가 0이다.

$\frac{2\times a-3\times(-1)}{2-3}=0$이므로 $a=-\frac{3}{2}$

$\frac{2\times c-3\times 2}{2-3}=0$이므로 $c=3$

따라서 $abc=36$

86) [정답] ②

[해설]

구가 x축과 만나는 한 점의 좌표를 H라 하면 점 H$(a,\ 0,\ 0)$이다. 이때 선분 AH의 길이가 반지름이므로

$\overline{AH}=\sqrt{0+(-3)^2+4^2}=5$

$\overline{OA}=3\sqrt{3}$이므로

$\overline{OA}=\sqrt{a^2+3^2+4^2}=\sqrt{a^2+25}=\sqrt{27}$

$\therefore\ a=\sqrt{2}\ (\because\ a>0)$

z축에 수선의 발을 내린 점을 G라 하면 G$(0,\ 0,\ 4)$이고

$\overline{AG}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-3)^2+0}=\sqrt{11}$

z축에서 만나는 두 점을 Q, Q$'$라 하면 $\overline{QQ'}=2\overline{GQ}$이고

$\overline{GQ}^2=\overline{AQ}^2-\overline{AG}^2=25-11=14$이므로

$\overline{GQ}=\sqrt{14}$

따라서 두 점 사이의 거리는 $2\sqrt{14}$

87) [정답] ⑤

[해설]

점 C의 y좌표가 0이므로 점 C는 zx평면 위에 놓인다.

선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

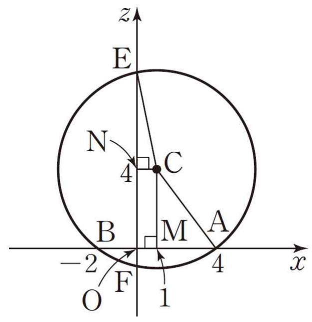
M$\left(\frac{4+(-2)}{2},\ \frac{0+0}{2},\ \frac{0+0}{2}\right)$

즉, M$(1,\ 0,\ 0)$

점 M을 지나고 xy평면에 수직인 직선이 구의 중심 C를 지나므로 두 점 C, M의 x좌표는 서로 같다.

$a=1$

구 S와 zx평면이 만나서 생기는 원은 다음 그림과 같다.



직각삼각형 CAM에서

$\overline{AM}=4-1=3,\ \overline{CM}=4$이므로

$\overline{CA}=\sqrt{\overline{AM}^2+\overline{CM}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

따라서 구 S는 중심이 C$(1,\ 0,\ 4)$이고 반지름의 길이가 5이므로 구 S의 방정식은

$(x-1)^2+y^2+(z-4)^2=25$ ……㉠

선분 EF의 중점을 N이라 하면 $\overline{CN}=1$이므로

두 점 E, F 중 z좌표가 양수인 점을 E라 하면 직각삼각형 CEN에서

$\overline{EN}=\sqrt{\overline{CE}^2-\overline{CN}^2}=\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}$

따라서 $\overline{EF}=2\overline{EN}=2\times2\sqrt{6}=4\sqrt{6}$

88) [정답] ②

[해설]

선분 AB를 지름으로 하는 구는 선분 AB의 중점 $(1,1,3)$이 중심이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$이다.

따라서 구의 방정식은

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=6$

구와 z축이 만나는 생기는 교점을 구하면

$x=y=0$을 대입하면 $(z-3)^2=4$

따라서 교점의 좌표는 $(0,0,5)$, $(0,0,1)$이므로

$\overline{PQ}=4$

89) [정답] (1) $(3,\ -3,\ 3)$ (2) 6π (3) $2\sqrt{3}\pi$

[해설]

(1) 구 S는 점 P$(5,\ -2,\ 5)$를 지나고 xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하므로 구 S의 중심의 좌표를 $(r,\ -r,\ r)$이라 하면 구의 방정식은

$(x-r)^2+(y+r)^2+(z-r)^2=r^2$

점 P의 좌표를 구의 방정식에 대입하면

$r^2-12r+27=0$

$r=3$ 또는 $r=9$

따라서 구 S의 중심 K의 좌표는 $(3,\ -3,\ 3)$이다.

(2) $A(0,\ -6,\ 6)$, $F(6,\ -6,\ 0)$, $O(0,\ 0,\ 0)$에서 점 H의 좌표는 $(2,\ -4,\ 2)$이므로

$\overline{HK}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

따라서 단면 T의 반지름의 길이는

$\sqrt{3^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$이므로 단면 T의 넓이는 6π이다.

(3) $\triangle AFO=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(6\sqrt{2})^2=18\sqrt{3}$

$\triangle EFO=18$

삼각형 AFO의 평면 EFGO 위로의 정사영이 삼각형 EFO이므로 단면 T와 평면 EFGO가 이루는 각을 θ라 하면

$\cos\theta=\dfrac{\triangle EFO}{\triangle AFO}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 단면 T의 평면 EFGO 위로의 정사영의 넓이는

$6\pi\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}\pi$

90) [정답] ④

[해설]

점 $A(1,\ 1,\ 1)$에서 x축, y축, z축에 내린 수선의 발이 각각 P, Q, R이므로

$P(1,\ 0,\ 0)$, $Q(0,\ 1,\ 0)$, $R(0,\ 0,\ 1)$

삼각형 PQR은 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정삼각형이므로

$\triangle PQR=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\triangle OPQ=\dfrac{1}{2}\times1^2=\dfrac{1}{2}$

삼각형 PQR과 xy평면이 이루는 각을 θ라 하면

$\cos\theta=\dfrac{\triangle OPQ}{\triangle PQR}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

정삼각형 PQR에 외접하는 원의 반지름의 길이는

$r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

따라서 이 원의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는

$\pi r^2\times\cos\theta=\dfrac{2}{3}\pi\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi$

91) [정답] 261

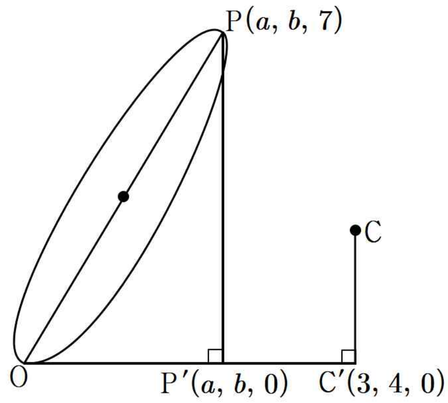
[해설]

점 $P(a,\ b,\ 7)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 P′이라 하면 $P'(a,\ b,\ 0)$

구의 중심 $(4,\ 3,\ 2)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 C′이라 하면 $C'(4,\ 3,\ 0)$

$a^2+b^2<25$이므로 P′인 C′보다 원점에서 더 가깝다.

원점과 두 점 P′, C′을 지나는 직선을 가로축으로 하고, z축을 세로축으로 하여 그림을 그리면 다음과 같다.



점 P는 구 위의 점이므로

$(a-4)^2+(b-3)^2+25=29$, $(a-4)^2+(b-3)^2=4$

$\therefore \overline{P'C'}=\sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2}=2$

$\overline{PP'}=7$이고, $\overline{OC'}=5$에서 $\overline{OP'}=3$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{7^2+3^2}=\sqrt{58}$

선분 OP는 원 C의 지름이므로 원 C의 반지름은 $\dfrac{\sqrt{58}}{2}$이고,

원 C와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{58}}$이다.

따라서 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는

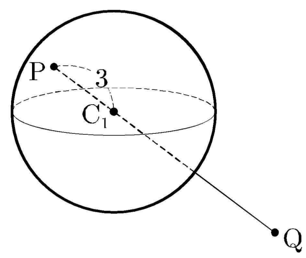
$\pi\left(\dfrac{\sqrt{58}}{2}\right)^2\times\dfrac{3}{\sqrt{58}}=\dfrac{3}{4}\sqrt{58}\pi$

따라서 $k=\dfrac{3}{4}\sqrt{58}$이므로 $8k^2=261$이다.

92) [정답] 14

[해설]

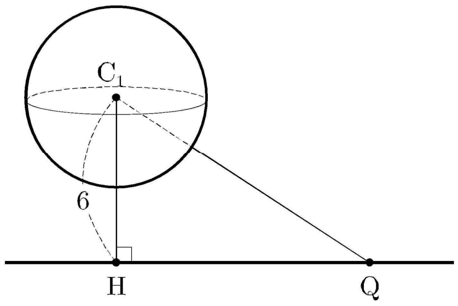
구 $(x-6)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=16$는 중심이 $(6,\ -1,\ 5)$이고 반지름이 4이다. 원 $(y-2)^2+(z-1)^2=9$는 중심이 $(0,\ 2,\ 1)$이고 반지름이 3이다. 구의 중심을 $C_1(6,\ -1,\ 5)$, 원의 중심을 $C_2(0,\ 2,\ 1)$라 하고 C_1에서 yz평면에 내린 수선의 발을 $H(0,\ -1,\ 5)$라 하자.



원위를 움직이는 점 Q를 고정시킬 때, 점 Q에 대하여 $\overline{PQ}$가 최대가 되도록 하는 점 P는 직선 C_1Q 위에 놓인다.

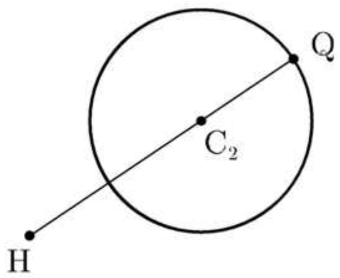
이때, $\overline{PQ}$의 최댓값은 $\overline{PC_1}+\overline{C_1Q}=4+\overline{C_1Q}$이다.

따라서 $\overline{C_1Q}$가 최대일 때, $\overline{PQ}$가 최대가 된다.



$\overline{C_1Q}=\sqrt{\overline{C_1H}^2+\overline{HQ}^2}=\sqrt{6^2+\overline{HQ}^2}$

따라서 $\overline{HQ}$가 최대일 때, $\overline{C_1Q}$가 최대가 된다.



$\overline{HQ}$가 최대가 되도록 하는 점 Q는 직선 HC_2 위에 놓인다.
이때, 최댓값은

$\overline{HC_2}+\overline{C_2Q}=\sqrt{0^2+3^2+(-4)^2}+3=8$

따라서 $\overline{C_1Q}$의 최댓값은

$\sqrt{6^2+\overline{HQ}^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

따라서 $\overline{PQ}$의 최댓값은

$4+\overline{C_1Q}=14$

93) [정답] ②

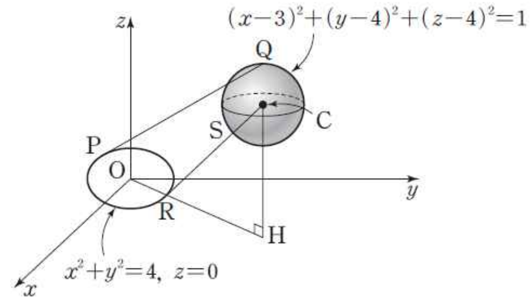
[해설]

구 $x^2+y^2+(z-1)^2=5$에 $z=0$을 대입하면

$$x^2+y^2+(0-1)^2=5$$

$$x^2+y^2=4$$

따라서 구 $x^2+y^2+(z-1)^2=5$와 xy평면이 만나서 생기는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 xy평면 위의 원이다.



구 $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=1$의 중심은 C(3, 4, 4)이고 반지름의 길이는 1이다.

점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 (3, 4, 0)이다.

선분 OH와 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 xy평면 위의 원이 만나는 점을 R라 하고, 선분 CR와 구 $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=1$이 만나는 점을 S라 하자.

선분 PC와 구 $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=1$이 만나는 점을 Q′이라 하면

$\overline{PQ}\geq\overline{PQ'}=\overline{PC}-1$ … ㉠

한편,

$\overline{PC}=\sqrt{\overline{CH}^2+\overline{PH}^2}\geq\sqrt{\overline{CH}^2+\overline{RH}^2}$ … ㉡

㉠, ㉡에서

$$\overline{PQ}\geq\sqrt{\overline{CH}^2+\overline{RH}^2}-1$$

즉 점 P가 점 R이고 점 Q가 점 S일 때, 선분 PQ의 길이는 최소이다.

이때 $\overline{OH}=\sqrt{3^2+4^2+0}=5$, $\overline{OR}=2$이므로 $\overline{RH}=3$

또 직각삼각형 CRH에서 $\overline{CH}=4$이므로

$$\overline{CR}=\sqrt{\overline{CH}^2+\overline{RH}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

따라서 $\overline{RS}=\overline{RC}-\overline{SC}=5-1=4$이므로 구하는 최솟값은 4이다.

94) [정답] ③

[해설]
구 S의 중심을 D라 하면 D$(3, 4, 4\sqrt{3})$이고, 점 D에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 H(3, 4, 0)이다.
원점 O에 대하여 선분 OH와 원 C의 교점을 A라 하면
$\overline{OH}=\sqrt{3^2+4^2}=5$
$\overline{AH}=\overline{OH}-\overline{OA}=5-1=4$
$\overline{OA}:\overline{AH}=1:4$
점 A는 선분 OH를 1:4으로 내분하는 점이므로

$A\left(\frac{3}{1+4},\ \frac{4}{1+4},\ 0\right)=A\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ 0\right)$

$\overline{DA}=\sqrt{\left(3-\frac{3}{5}\right)^2+\left(4-\frac{4}{5}\right)^2+(4\sqrt{3})^2}=8$

선분 DA와 구 S가 만나는 점을 B라 하면

점 Q가 점 B, 점 P가 점 A에 있을 때

선분 PQ의 길이는 최소이다.

$\overline{PQ} \geq \overline{AB}=\overline{DA}-\overline{DB}=8-2=6$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 6이다.