공부하다

박수칠 수학

기본서

학습 자료

☆이 자료는 EBS 연계 교재에 수록된 문제 가운데 고난도 유형을 선별하고, 그에 관련된 수능/모평/학평 기출 문제를 추가해서 쉽게, 자세하게, 그리고 다양한 방법으로 풀이한 것입니다. 따라서 각 문제를 푼 다음, 해설까지 정독하면 실력 향상에 많은 도움이 될 것입니다.

☆이 자료는 인터넷을 통해 무료로 배포되며, 유료 판매를 절대 금합니다.

EBS 수능특강+기출문제

미적분과 통계 기본 3강~5강

1 2016학년도 수능 대비 수능특강 미통기 p.34 #1

다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(3,0)$을 지날 때 $\lim_{h\to 0}\frac{|f(3+h^2)|-|f(3-h^2)|}{h^2}$ 의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

2 2008학년도 수능 6월 모평(가형) #9

함수 $f(x)$에 대해 아래에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$이면 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이다.
ㄴ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$이면 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$이다.
ㄷ. $f(x)=|x-1|$일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3 2016학년도 수능 대비 수능특강 미통기 p.34 #2

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$x-f(x)\le g(x)\le x+f(x)$$

를 만족시킨다. $f(0)=0$일 때, $g'(0)$의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

4 2007학년도 수능 6월 모평(가형) #9

세 다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 아래에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $f(0)=0$이면 $f'(0)=0$이다.
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(-x)$이면 $g'(0)=0$이다.
ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $|h(2x)-h(x)|\le x^2$이면 $h'(0)=0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

5 2016학년도 수능 대비 수능특강 미통기 $p.34$ #3

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x-2) & (x \geq 1) \\ f(x+2) & (x<1) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능할 때, $f'(1)$의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2
④ 2 ⑤ 4

6 2010학년도 10월 학평(가형) #7

삼차식 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} 3 & (x<-1) \\ f(x) & (-1 \leq x \leq 1) \\ -1 & (x>1) \end{cases}$$

로 정의하자. 함수 $g(x)$가 모든 실수에서 미분가능할 때, 옳은 것만을 아래에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $g'(-1)=g'(1)$
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g'(x) \leq 0$
ㄷ. 함수 $g'(x)$의 최솟값은 -2이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7 2016학년도 수능 대비 수능특강 미통기 $p.34$ #4

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음을 만족시킨다.

(가) 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫은 $g(x)$이다.
(나) 다항식 $g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 4이다.
(다) $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-g(x)}{x-2}=3$

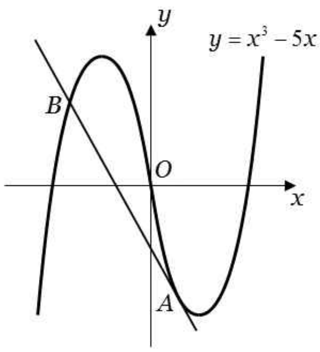
$f(1)$의 값을 구하시오.

8 2016학년도 수능 대비 수능특강 미통기 p.46 #1

곡선 $f(x)=x^3-3x+2$ 위의 점 $P(m, f(m))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$의 교점 중에서 점 P가 아닌 점을 $Q(n, f(n))$이라 하자. $m+n=2$일 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 구하시오. (단, 점 O는 원점이고, $m \neq 0$이다.)

9 2013학년도 수능 6월 모평(나형) #17

곡선 $y=x^3-5x$ 위의 점 $A(1, -4)$에서의 접선이 점 A가 아닌 점 B에서 곡선과 만난다. 선분 AB의 길이는? [4점]



① $\sqrt{30}$ ② $\sqrt{35}$ ③ $2\sqrt{10}$
④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

10 2016학년도 수능 대비 수능특강 미통기 p.46 #2

네 점 $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(2, 2)$, $C(2, 2)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형의 내부를 T라 하자. 곡선 $f(x)=x^3-3ax^2+3$의 일부가 T를 지나고, T를 지나는 구간에서 함수 $f(x)$가 감소할 때, 양수 a의 최솟값은?

① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

11 2014학년도 수능 9월 모평(A형) #21

사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$$

이다. 함수 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty, 0)$에서 감소하고 구간 $(2, \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 a^2+b^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값은? [4점]

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{43}{8}$ ③ $\frac{11}{2}$
④ $\frac{45}{8}$ ⑤ $\frac{23}{4}$

12 2016학년도 수능 대비 수능특강 미통기 $p.46$ #3

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

(가) $g(0)=g'(0)=0$
(나) 함수 $\left\vert g(x)-\frac{1}{3}\right\vert$은 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① $\frac{4}{3}$ ② 2 ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ 4

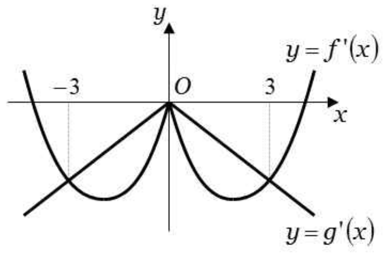
13 2010학년도 수능 6월 모평(가형) #24

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\frac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
(나) 함수 $\vert f(x)-f(1)\vert$은 오직 $x=a$ $(a>2)$에서만 미분가능하지 않다.

14 2016학년도 수능 대비 수능특강 기벡 p.46 #4

그림과 같이 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 도함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프가 모두 y축에 대하여 대칭이고, x좌표가 -3, 0, 3인 세 점에서만 만난다.



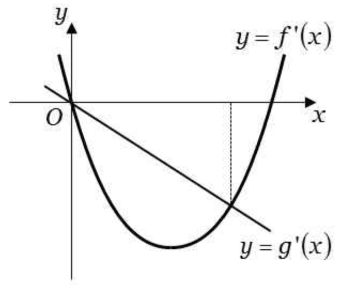
함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때, 아래에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x \geq 0$일 때, 도함수 $f'(x)$는 이차함수, 도함수 $g'(x)$는 일차함수다.)

ㄱ. $-3<x<3$에서 함수 $h(x)$는 감소한다.
ㄴ. 함수 $h(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은 0이다.
ㄷ. $h(-3)h(3)>0$이면 방정식 $h(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

15 2012학년도 수능 6월 모평(나형) #19

삼차함수 $f(x)$의 도함수의 그래프와 이차함수 $g(x)$의 도함수의 그래프가 그림과 같다. 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자. $f(0)=g(0)$일 때, 옳은 것만을 아래에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



ㄱ. $0<x<2$에서 $h(x)$는 감소한다.
ㄴ. $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16 2016학년도 수능 대비 수능특강 미통기 $p.58$ #1

닫힌 구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x) = -2x^3 + 3ax^2 - a^2$의 최댓값을 $g(a)$라 할 때, 아래에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a > 0$)

> ㄱ. $g(1) = 0$
> ㄴ. 함수 $g(a)$는 $a = 2$에서 미분가능하다.
> ㄷ. 함수 $g(a)$의 최댓값은 20이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17 2011학년도 수능 9월 모평(가형) #16

함수 $f(x) = -3x^4 + 4(a-1)x^3 + 6ax^2$ $(a > 0)$과 실수 t에 대하여 $x \le t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 a의 최댓값은? [4점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

18 2016학년도 수능 대비 수능특강 미통기 $p.58$ #2

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y = f'(x)$는 $x = 1$에서 최솟값을 갖고, 방정식

$$|f(x) - f(1)| = f(5) - f(1)$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, $f'(5)$의 값을 구하시오.

19 2016학년도 수능 대비 수능특강 미통기 $p.58$ #3

사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 최솟값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.)

(가) $f'(1)=20$ (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$이다.

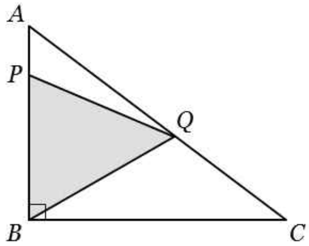
20 2015학년도 수능(A형) #21

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은? [4점]

(가) $f(x)$의 최고차항 계수는 1이다. (나) $f(0)=f'(0)$ (다) $x \geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$ 이다.

① 28 ② 33 ③ 38 ④ 43 ⑤ 48

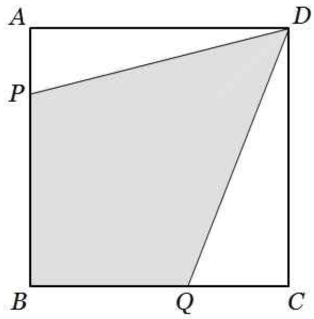
21 2016학년도 수능 대비 수능특강 미통기 $p.58$ #4



그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$, $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 점 P는 점 A에서 출발하여 변 AB 위를 매초 1씩 움직여서 점 B까지 가고, 점 Q는 점 C에서 출발하여 변 CA 위를 매초 2씩 움직여서 점 A까지 간다. 두 점 P, Q가 각각 두 점 A, C에서 동시에 출발한 후 1초가 되는 순간, 삼각형 BQP의 넓이의 시간에 대한 변화율은 $-\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 시간의 단위는 초이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

22 2008학년도 7월 학평(가형) #20

그림과 같이 한 변의 길이가 20인 정사각형 $ABCD$에서 점 P는 A에서 출발하여 변 AB 위를 매초 2씩 움직여 B까지, 점 Q는 B에서 P와 동시에 출발하여 변 BC 위를 매초 3씩 움직여 C까지 간다. 이때, 사각형 $DPBQ$의 넓이가 정사각형 $ABCD$의 넓이의 $\frac{11}{20}$이 되는 순간의 삼각형 PBQ의 넓이의 시간(초)에 대한 순간변화율을 구하시오 [3점]



EBS 수능특강+기출문제 미통기 3강~5강

1 ③

★미분계수의 정의를 이용해서 절댓값이 포함된 함수의 극한을 계산하는 문제

[첫 번째 풀이] 주어진 극한을 미분계수의 정의에 맞게 변형하면

$$\lim_{h\to0}\frac{|f(3+h^2)|-|f(3-h^2)|}{h^2}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{|f(3+h^2)|-|f(3)|\}-\{|f(3-h^2)|-|f(3)|\}}{h^2}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{|f(3+h^2)|-|f(3)|}{h^2}+\frac{|f(3-h^2)|-|f(3)|}{-h^2}\right\}$$

이 되고, $h\to0$일 때 $h^2\to+0$이므로

$\lim\limits_{h\to0}\frac{|f(3+h^2)|-|f(3)|}{h^2}$, $\lim\limits_{h\to0}\frac{|f(3-h^2)|-|f(3)|}{-h^2}$은 각각 함수 $y=|f(x)|$의 $x=3$에서의 우미분계수와 좌미분계수를 의미한다.

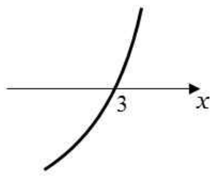
다음으로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(3,0)$을 어떻게 지나는지에 따라 다음 네 경우로 나눠서 우미분계수, 좌미분계수를 계산할 수 있다.

$i)$ 함수 $y=f(x)$가 증가하면서 점 $(3,0)$을 지날 때
함수 $y=|f(x)|$의 $x=3$ 주변에서의 함수식이

$$y=\begin{cases}-f(x) & (x<3)\\ f(x) & (x\geq3)\end{cases}$$

이므로 도함수는 다음과 같다.

$$y=\begin{cases}-f'(x) & (x<3)\\ f'(x) & (x>3)\end{cases}$$



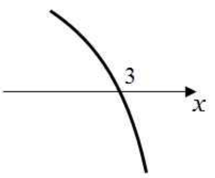
따라서 $x=3$에서의 우미분계수와 좌미분계수가 각각 $f'(3)$, $-f'(3)$이므로 합은 0이다.

$ii)$ 함수 $y=f(x)$가 감소하면서 점 $(3,0)$을 지날 때
함수 $y=|f(x)|$의 $x=3$ 주변에서의 함수식이

$$y=\begin{cases}f(x) & (x<3)\\ -f(x) & (x\geq3)\end{cases}$$

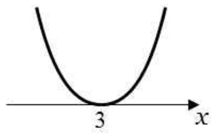
이므로 도함수는 다음과 같다.

$$y=\begin{cases}f'(x) & (x<3)\\ -f'(x) & (x>3)\end{cases}$$

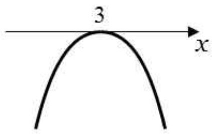


따라서 $x=3$에서의 우미분계수와 좌미분계수가 각각 $-f'(3)$, $f'(3)$이므로 합은 0이다.

$iii)$ 함수 $y=f(x)$가 점 $(3,0)$에서 극소일 때
함수 $y=|f(x)|$의 $x=3$ 주변에서의 함수식이 $y=f(x)$이므로 도함수가 $y'=f'(x)$이다. 따라서 우미분계수와 좌미분계수 모두 $f'(3)=0$, 합도 0이다.



$iv)$ 함수 $y=f(x)$가 점 $(3,0)$에서 극대일 때
함수 $y=|f(x)|$의 $x=3$ 주변에서의 함수식이 $y=-f(x)$이므로 도함수가 $y'=-f'(x)$이다. 따라서 우미분계수와 좌미분계수 모두 $-f'(3)=0$, 합도 0이다.



$i)$~$iv)$로부터 주어진 극한의 값은 0이다.

[두 번째 풀이] 처음 풀이는 함수 $y=|f(x)|$에 대한 미분계수의 정의를 이용하기 때문에 과정이 상당히 복잡하다. 대신 함수 $y=f(x)$에 대한 미분계수의 정의를 이용하기 위해 절댓값 기호 안에 $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$의 꼴을 만들어보자.

함수 $y=f(x)$가 점 $(3,0)$을 지나므로 $f(3)=0$이 성립하며, 주어진 극한은 다음과 같이 변형된다.

$$\lim_{h\to0}\frac{|f(3+h^2)|-|f(3-h^2)|}{h^2}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{|f(3+h^2)-f(3)|-|f(3-h^2)-f(3)|}{|h^2|}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{|f(3+h^2)-f(3)|}{|h^2|}-\frac{|f(3-h^2)-f(3)|}{|-h^2|}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\left|\frac{f(3+h^2)-f(3)}{h^2}\right|-\left|\frac{f(3-h^2)-f(3)}{-h^2}\right|\right\}$$

또한 $h\to0$일 때 $h^2\to+0$이므로

$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(3+h^2)-f(3)}{h^2}$, $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(3-h^2)-f(3)}{-h^2}$은 각각 함수 $y=f(x)$의 $x=3$에서의 우미분계수와 좌미분계수를 의미하고, 다항함수 $y=f(x)$가 $x=3$일 때 미분가능하므로 두 극한은 $f'(3)$과 일치한다. 따라서 주어진 극한은

$$\lim_{h\to0}\left\{\left|\frac{f(3+h^2)-f(3)}{h^2}\right|-\left|\frac{f(3-h^2)-f(3)}{-h^2}\right|\right\}$$
$$=|f'(3)|-|f'(3)|$$
$$=0$$

[세 번째 풀이] 함수 $y=f(x)$가 점 $(3,0)$을 지나므로 $f(3)=0$이 성립하며, $f(x)=(x-3)g(x)$(단, $g(x)$는 다항식)으로 나타낼 수 있다. 따라서 주어진 극한은 다음과 같이 변형된다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(3+h^2)|-|f(3-h^2)|}{h^2}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h^2g(3+h^2)|-|h^2g(3-h^2)|}{|h^2|}$$
$$=\lim_{h\to 0}\{|g(3+h^2)|-|g(3-h^2)|\}$$
$$=|g(3)|-|g(3)|=0$$

★첫 번째 풀이는 두 번째, 세 번째 풀이에 비해 상당히 길다. 그렇다고 해서 건너뛰지 말고, 주어진 극한을 첫 번째 풀이와 같이 변형했을 때 어떤 과정을 거쳐야 정답에 도달할 수 있는지 익혀두도록 하자.

2 ⑤

ㄱ. 미분계수의 정의에 따라 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$이 $f'(1)=0$임을 의미하므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고, $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이 성립한다. (참)

ㄴ. ㄱ과 마찬가지로 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$는 $f'(1)=0$임을 의미한다. 따라서 결론의 좌변을 미분계수 $f'(1)$의 정의에 맞게 변형하면 다음과 같다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\frac{1}{2}+\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\times\frac{1}{2}\right\}$$
$$=f'(1)\times\frac{1}{2}+f'(1)\times\frac{1}{2}=f'(1)=0$$

(참)

ㄷ. 주어진 극한에 $f(x)=|x-1|$을 바로 적용하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|(1+h)-1|-|(1-h)-1|}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|h|}{2h}=0$$

(참)

★ㄴ처럼 $f'(1)$의 값이 존재하면 $\Delta y=f(1+h)-f(1-h)$, $\Delta x=(1+h)-(1-h)=2h$로 보고

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=f'(1)$$

이라고 할 수 있다. 그러나 ㄷ처럼 $f'(1)$의 값이 존재하지 않으면 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$의 값이 존재할 수도 있고, 존재하지 않을 수도 있기 때문에 일일이 계산해야 한다.

3 ③

★'함수의 극한과 부등식'을 이용해서 부등식으로 정의된 함수의 미분계수를 구하는 문제

미분계수의 정의에 의해

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$
$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$

이며, 문제에 주어진 부등식에 $x=0$을 대입하면

$$-f(0)\le g(0)\le f(0)$$
$$0\le g(0)\le 0$$
$$g(0)=0$$

이므로

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}$$

이 된다.

따라서 $g'(0)$을 구하려면 문제에 주어진 부등식을 x로 나눠야 하며, $x\to 0$이기 때문에 $x>0$일 때와 $x<0$일 때로 구분해야 한다.

i) $x>0$일 때
부등식의 양변을 x로 나누면

$$1-\frac{f(x)}{x}\le\frac{g(x)}{x}\le 1+\frac{f(x)}{x}$$

이며, $x\to +0$이면

$$1-f'(0)\le g'(0)\le 1+f'(0) \quad \cdots\cdots ①$$

가 성립한다.

ii) $x<0$일 때
부등식의 양변을 x로 나누면

$$1+\frac{f(x)}{x}\le\frac{g(x)}{x}\le 1-\frac{f(x)}{x}$$

이며, $x\to -0$이면

$$1+f'(0)\le g'(0)\le 1-f'(0) \quad \cdots\cdots ②$$

가 성립한다.

마지막으로 ①, ②를 변변 더하면

$$2\le 2g'(0)\le 2$$
$$1\le g'(0)\le 1$$
$$g'(0)=1$$

4 ⑤

ㄱ. $f(0)=0$이면 다항식 $f(x)$가 x를 인수로 가지므로

$f(x)=xg(x)$ (단, $g(x)$는 다항식)

$f'(x)=g(x)+xg'(x)$

로 나타낼 수 있다. 따라서 $f'(0)=g(0)$이 성립하지만, $g(x)$의 정의에 따라 $g(0)=0$일 수도 있고, 아닐 수도 있다.

(거짓)

ㄴ. 도함수의 정의에 따라

$$g'(-x)=\lim_{h\to0}\frac{g(-x+h)-g(-x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{g(x-h)-g(x)}{h}$$
$$=-\lim_{h\to0}\frac{g(x-h)-g(x)}{-h}=-g'(x)$$

$\therefore g'(-x)=-g'(x)$

가 성립하며, $x=0$을 대입하면

$g'(0)=-g'(0)\Rightarrow g'(0)=0$ (참)

[ㄴ의 다른 방법] 합성함수의 미분법에 따라 $g(-x)=g(x)$의 양변을 x에 대해 미분하면 다음과 같다

$g'(-x)\cdot(-1)=g'(x)\Rightarrow g'(-x)=-g'(x)$

여기에 $x=0$을 대입하면

$g'(0)=-g'(0)\Rightarrow g'(0)=0$ (참)

ㄷ. $x\neq0$으로 가정하고 주어진 부등식을 미분계수의 정의에 따라 변형하면 다음과 같다.

$|h(2x)-h(x)|\le x^2$

$-x^2\le h(2x)-h(x)\le x^2$

$-x^2\le\{h(2x)-h(0)\}-\{h(x)-h(0)\}\le x^2$

$$-x\le\frac{h(2x)-h(0)}{x}-\frac{h(x)-h(0)}{x}\le x$$

$$-x\le\frac{h(2x)-h(0)}{2x}\times2-\frac{h(x)-h(0)}{x}\le x$$

여기에 $x\to0$을 적용하면

$$\frac{h(2x)-h(0)}{2x}\to h'(0)$$

$$\frac{h(x)-h(0)}{x}\to h'(0)$$

$-x\to0$

이므로

$0\le2h'(0)-h'(0)\le0$

$h'(0)=0$

이 성립한다. (참)

[ㄷ의 다른 방법] 함수 $h(x)$가 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 따라서

$$\lim_{x\to0}\frac{h(2x)-h(x)}{x}=h'(0)$$

이 성립함을 이용해서 다음과 같이 풀 수도 있다.

$x\neq0$으로 가정하고 주어진 부등식을 변형하면

$|h(2x)-h(x)|\le x^2$

$-x^2\le h(2x)-h(x)\le x^2$

$$-x\le\frac{h(2x)-h(x)}{x}\le x$$

이며, 여기에 $x\to0$을 적용하면

$$\frac{h(2x)-h(x)}{x}\to h'(0)$$

$-x\to0$

이므로 다음이 성립한다.

$0\le h'(0)\le0$

$h'(0)=0$ (참)

5 ②

★구간별로 정의된 함수에 대하여 구간 경계에서 미분가능하기 위한 조건을 찾는 문제

[첫 번째 풀이] $f(x-2)$, $f(x+2)$가 다항식이므로 함수

$$g(x)=\begin{cases}f(x-2) & (x\ge1)\\ f(x+2) & (x<1)\end{cases}$$

는 구간 $(-\infty,1)$, $[1,\infty)$에서 연속이고, 구간 $(-\infty,1)$, $(1,\infty)$에서 미분가능하다. 따라서 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하려면 $x=1$에서 미분가능하면 된다.

먼저 $x=1$에서 연속이려면

$f(-1)=f(3)$ …… ①

이 성립해야 하고, 함수 $g(x)$의 도함수가

$$g'(x)=\begin{cases}f'(x-2) & (x>1)\\ f'(x+2) & (x<1)\end{cases}$$

이므로 $x=1$에서 미분가능하려면

$f'(-1)=f'(3)$ …… ②

이 성립해야 한다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$로 가정하면 ①에 의해

$-1+a-b+c=27+9a+3b+c$

$2a+b=-7$

이고, $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 ②에 의해

$3-2a+b=27+6a+b$

$a=-3,\ b=-1$

이 성립한다. 따라서

$f'(x)=3x^2-6x-1$

$f'(1)=-4$

★다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$가

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & (x<a)\\ g(x) & (x\ge a)\end{cases}$$

로 정의될 때, 함수 $h(x)$의 $x\neq a$일 때의 도함수는

$$h'(x)=\begin{cases}f'(x) & (x<a)\\ g'(x) & (x>a)\end{cases}$$

이고, 함수 $h(x)$가 $x=a$에서 미분가능하려면 다음을 모두 만족해야 한다.

$f(a)=g(a)\Rightarrow x=a$에서 연속

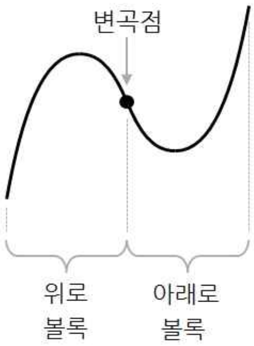
$f'(a)=g'(a)\Rightarrow$ 좌·우미분계수 일치

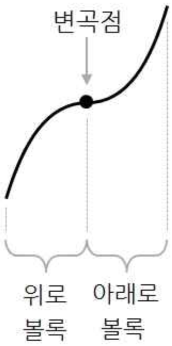
[두 번째 풀이] 수학Ⅱ에서 배우는 변곡점을 이용해서 다음과

같이 풀 수도 있다.

★삼차함수의 변곡점

(1) 삼차함수의 그래프에서 아래로 볼록, 위로 볼록의 경계가 되는 점을 삼차함수의 변곡점이라 한다.





(2) 삼차함수 $f(x)$의 그래프에서 변곡점의 x좌표는 일차방정식 $f''(x)=0$의 근이다. (단, $f''(x)$는 $f(x)$를 두 번 미분한 것) 따라서 모든 삼차함수의 그래프에는 단 1개의 변곡점이 존재한다.

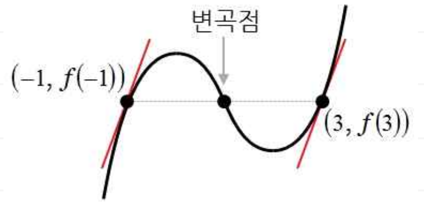
(3) 삼차함수의 그래프는 변곡점에 대해 대칭이다. 따라서 삼차함수 그래프 위의 서로 다른 두 점에서 미분계수가 같으면 그 두 점은 변곡점에 대해 대칭이다.

첫 번째 풀이와 마찬가지로

$f(-1)=f(3)$ …… ①

$f'(-1)=f'(3)$ …… ②

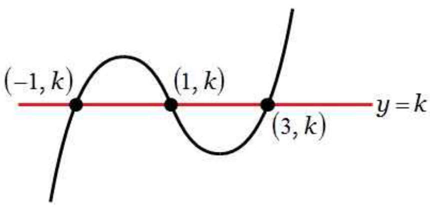
이 성립해야 하며, 삼차함수의 그래프가 변곡점에 대해 대칭이기 때문에 두 점 $(-1, f(-1))$, $(3, f(3))$을 이은 선분의 중점이 변곡점과 일치해야 한다.



$f(-1)=f(3)=k$로 두면 변곡점의 좌표는 $(1, k)$가 되며, 삼차함수 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 $x=-1,\ 1,\ 3$에서 만나기 때문에 함수 $f(x)$의 함수식을 다음과 같이 둘 수 있다.

$f(x)-k=(x+1)(x-1)(x-3)$

$f(x)=(x+1)(x-1)(x-3)+k$



따라서

$f'(x)=(x-1)(x-3)+(x+1)(x-3)+(x+1)(x-1)$

$f'(1)=-4$

6 ②

ㄱ. 함수 $g(x)$의 도함수가

$$g'(x)=\begin{cases} 0 & (x<-1) \\ f'(x) & (-1<x<1) \\ 0 & (x>1) \end{cases}$$

이므로 $x=-1$에서

(좌미분계수)$=0$, (우미분계수)$=f'(-1)$

이다. 그리고 함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로

$g'(-1)=f'(-1)=0$ …… ①

마찬가지로 $x=1$에서

(좌미분계수)$=f'(1)$, (우미분계수)$=0$

이고, 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$g'(1)=f'(1)=0$ …… ②

따라서 $g'(-1)=g'(1)$ (참)

ㄴ. ①, ②로부터 $f'(-1)=f'(1)=0$이므로

$f'(x)=a(x+1)(x-1)=ax^2-a$

$f(x)=\dfrac{a}{3}x^3-ax+C$

로 나타낼 수 있다. 또한 함수 $g(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 연속이므로 $f(-1)=3$, $f(1)=-1$이 성립함을 이용하면 다음과 같이 $f'(x)$를 구할 수 있다.

$f(-1)=-\dfrac{a}{3}+a+C=3 \Rightarrow \dfrac{2}{3}a+C=3$

$f(1)=\dfrac{a}{3}-a+C=-1 \Rightarrow -\dfrac{2}{3}a+C=-1$

$C=1,\ a=3$

$f'(x)=3x^2-3$

따라서 도함수 $g'(x)$는

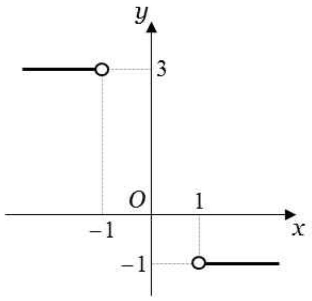
$$g'(x)=\begin{cases} 0 & (x<-1) \\ 3x^2-3 & (-1\le x\le 1) \\ 0 & (x>1) \end{cases}$$

이며, 모든 실수 x에 대해 $g'(x)\le 0$이 성립한다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 얻은 도함수 $g'(x)$의 정의에 따라 최솟값은 $x=0$일 때의 -3이다. (거짓)

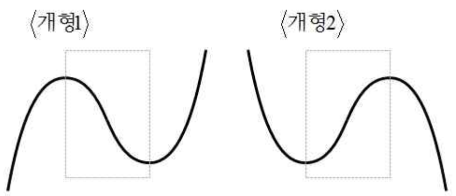
[ㄴ, ㄷ의 다른 방법] 다음과 같이 $g'(x)$를 구하지 않고, 그래프를 이용한 직관적인 방법으로 풀 수도 있다.

ㄴ. 구간 $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$에서 함수 $g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같이 x축에 평행한 두 직선이 나타난다.

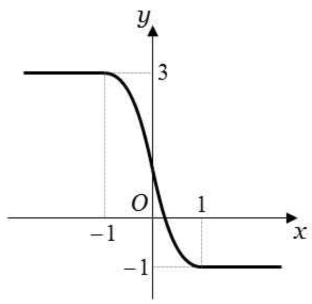


이제 두 직선을 삼차함수 $f(x)$의 그래프로 이어보자.

함수 $g(x)$가 모든 실수에서 미분가능하므로 $x=-1$, 1에서도 미분가능하며, 이를 위해서는 $g'(-1)=g'(1)=0$이 성립해야 한다. 따라서 구간 $[-1, 1]$을 채워줄 삼차함수 $f(x)$는 $f'(-1)=f'(1)=0$을 만족해야 하므로 $x=-1$, 1에서 극점을 가지며, 이를 만족하는 $f(x)$의 그래프 개형은 다음 두 가지가 있다.

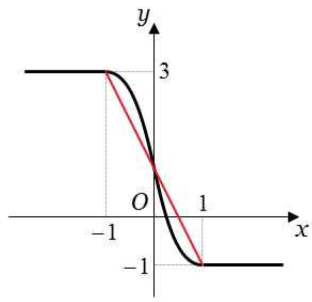


이때, 두 극점의 좌표가 $(-1, 3)$, $(1, -1)$이므로 구간 $(-1, 1)$에서 감소하는 〈개형1〉이 함수 $g(x)$ 그래프의 구간 $(-1, 1)$에 들어가야 한다.



그러므로 함수 $g(x)$는 함숫값이 일정하거나 감소하는 구간만 갖기 때문에 $g'(x) \le 0$를 만족한다.

ㄷ. 함수 $g(x)$의 그래프는 두 점 $(-1, 3)$, $(1, -1)$을 지나며, 두 점을 이은 직선의 기울기는 -2이다. 또한 함수 $g(x)$의 그래프에 두 점 $(-1, 3)$, $(1, -1)$을 이은 선분을 추가하면 다음과 같다.



따라서 함수 $g(x)$의 그래프에 접선 기울기가 -2보다 작은 점이 존재한다. (거짓)

7 5

★다항식의 나눗셈에 대한 항등식, 나머지 정리, 미분계수의 정의를 이용하는 문제

다항식을 이차식으로 나눈 나머지는 일차 이하의 식이므로 조건 (가)의 나머지를 $ax+b$로 두면

$$f(x)=(x-1)^2g(x)+ax+b \qquad \cdots\cdots ①$$

가 성립하고, 조건 (나)에 나머지 정리를 적용하면

$$g(2)=4$$

가 된다.

조건 (다)에서는 극한이 수렴하고, (분모)→0이므로 (분자)→0이어야 한다.

$$f(2)-g(2)=0$$
$$f(2)=g(2)=4$$

이를 이용하기 위해 ①에 $x=2$를 대입하면 다음과 같이 a, b에 대한 식이 나타난다.

$$f(2)=g(2)+2a+b$$
$$2a+b=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

또한 조건 (다)의 식을 미분계수의 정의에 맞게 변형하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}&=\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)-f(2)\}-\{g(x)-g(2)\}}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\frac{g(x)-g(2)}{x-2}\right\}\\&=f'(2)-g'(2)=3\end{aligned}$$

이를 이용하기 위해 ①의 양변을 x에 대해 미분하면

$$f'(x)=2(x-1)g(x)+(x-1)^2g'(x)+a$$

이며, 여기에 $x=2$를 대입하면

$$f'(2)=2g(2)+g'(2)+a$$
$$a=f'(2)-g'(2)-2g(2)=-5$$

이고, ②에 의해

$$b=10$$

이 된다.

따라서

$f(1)=a+b=5$

8 54

★도함수로 접선의 방정식을 구하는 문제

곡선 $f(x)=x^3-3x+2$의 도함수가 $f'(x)=3x^2-3$이므로 점 $P(m, f(m))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=(3m^2-3)(x-m)+m^3-3m+2$$
$$y=(3m^2-3)x-2m^3+2$$

곡선 $y=f(x)$와 접선의 교점을 구하기 위해 두 방정식을 연립하고 y를 소거해서 풀면

$$x^3-3x+2=(3m^2-3)x-2m^3+2$$
$$x^3-3m^2x+2m^3=0$$
$$(x-m)^2(x+2m)=0$$
$$x=m \text{ 또는 } -2m$$

이므로 점 Q의 x좌표는 $-2m(=n)$이다. 따라서

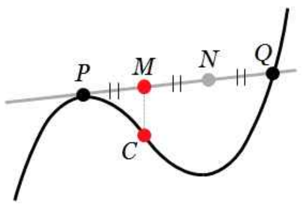
$$m+n=-m=2$$
$$m=-2,\ n=4$$
$$f(m)=f(-2)=0,\ f(n)=f(4)=54$$

이며, 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(-2, 0)$, $(4, 54)$이다.

그러므로 $\triangle OPQ=\frac{1}{2}\times2\times54=54$

[다른 풀이] 수학Ⅱ의 심화 개념인 변곡점의 성질을 이용하면 미정계수 m, n의 값을 쉽게 구할 수 있다.

★삼차함수의 그래프와 한 직선이 점 P에서 접하고, 점 Q에서 한 번 더 만나면 선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점 M은 삼차함수의 변곡점 C와 x좌표가 같다.



함수 $f(x)=x^3-3x+2$의 도함수가 $f'(x)=3x^2-3$, 이계도함수가 $f''(x)=6x$이므로 변곡점의 x좌표는 0이다. 또한 선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점의 x좌표는 $\frac{2m+n}{3}$이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{2m+n}{3}=0 \Rightarrow 2m+n=0$$

이 식을 문제에 주어진 식 $m+n=2$와 연립해서 풀면

$$m=-2,\ n=4$$
$$f(m)=f(-2)=0,\ f(n)=f(4)=54$$

이므로 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(-2, 0)$, $(4, 54)$이다.

그러므로 $\triangle OPQ=\frac{1}{2}\times2\times54=54$

9 ④

곡선 $y=x^3-5x$의 도함수가 $y'=3x^2-5$이므로 곡선 위의 점 $A(1, -4)$에서의 접선 기울기는 $y'_{x=1}=-2$, 접선 방정식은

$$y=-2(x-1)-4 \Rightarrow y=-2x-2$$

이다. 다음으로 곡선과 접선의 방정식을 연립해서 y를 소거하면

$$x^3-5x=-2x-2$$
$$(x-1)^2(x+2)=0$$
$$x=1,\ -2$$

이므로 점 B의 좌표는 $(-2, 2)$이다.

따라서 선분 AB의 길이는 다음과 같다.

$$\sqrt{3^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$$

[다른 풀이] 변곡점의 성질을 이용하면 접선의 방정식 없이 점 B의 좌표를 구할 수 있다.

곡선 $y=x^3-5x$의 도함수, 이계도함수는 각각 $y'=3x^2-5$, $y''=6x$이며, 방정식 $y''=0$의 근이 $x=0$이므로 변곡점의 좌표가 $(0, 0)$이다.

점 B의 x좌표를 b로 두면 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 x좌표가 변곡점의 x좌표와 일치하므로

$$\frac{1\times b+2\times1}{1+2}=0 \Rightarrow b=-2$$

이가 된다.

따라서 점 B의 좌표는 $(-2, 2)$이며, 선분 AB의 길이는 다음과 같다.

$$\sqrt{3^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$$

10 ⑤

★미정계수가 포함된 삼차함수의 그래프 개형을 이용하는 문제

함수 $f(x)=x^3-3ax^2+3$의 도함수가

$$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)\ (a>0)$$

이므로 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	$-4a^3+3$	↗

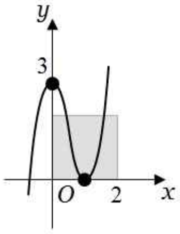
여기서 (극댓값)$=3>0$이고, (극솟값)$=-4a^3+3$은 양수일 수도 있고 음수일 수도 있다.

만일 (극솟값)$=0$이면

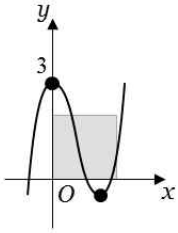
$$-4a^3+3=0 \Rightarrow a^3=\frac{3}{4} \Rightarrow a=\sqrt[3]{\frac{3}{4}}<1$$

이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 〈그림1〉과 같다. 그리고 a값이 점점 증가하면 극소점이 오른쪽 아래로 이동하면서 함수 $f(x)$의 그래프가 〈그림2〉, 〈그림3〉과 같이 변한다.

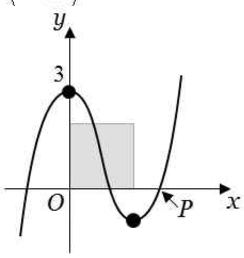
〈그림1〉



〈그림2〉



〈그림3〉



〈그림1〉, 〈그림2〉에서는 영역 T에 함수 $f(x)$가 증가하는 구간이 나타나지만, 〈그림3〉에서는 나타나지 않는다. 그리고 영역 T에 함수 $f(x)$가 증가하는 구간이 나타나지 않는 것은 함수 $f(x)$와 x축의 교점 가운데 가장 오른쪽에 위치한 점 P가 점 A와 일치할 때부터다.

이때의 a값을 구하기 위해 점 A의 좌표 $(2, 0)$을 $y=f(x)$에 대입하면

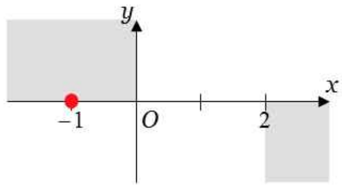
$$0=8-12a+3 \Rightarrow a=\frac{11}{12}$$

가 되며, 이것이 함수 $f(x)$가 영역 T에서 감소하기 위한 a의 최솟값이다.

11 ③

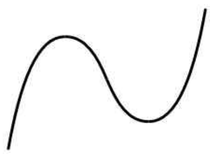
$f'(-1)=0$이므로 도함수 $f'(x)$의 그래프는 점 $(-1, 0)$을 지난다. 또한 구간 $(-\infty, 0)$에서 함수 $f(x)$가 감소하므로 같은 구간에서 $f'(x) \le 0$이고, 구간 $(2, \infty)$에서 함수 $f(x)$가 증가하므로 같은 구간에서 $f'(x) \ge 0$이 성립한다.

따라서 도함수 $f'(x)$의 그래프는 아래 그림의 빨간 점을 지나고, 회색 영역을 지날 수 없다.

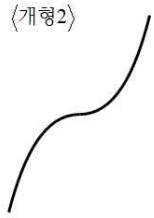


다음으로 삼차함수 $f'(x)$의 그래프 개형은 다음 두 가지가 있으며, 〈개형2〉는 빨간 점을 지나면서 회색 영역을 지나지 않는 것이 불가능하지만, 〈개형1〉은 가능하다.

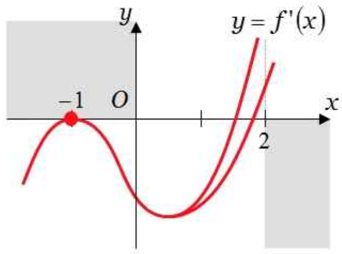
〈개형1〉



〈개형2〉



〈개형1〉이 빨간 점을 지나면서 회색 영역을 지나지 않도록 그리면 다음과 같다.



여기서 도함수 $f'(x)$가 다음을 만족함을 알 수 있다.

i) $x=-1$일 때 그래프가 x축에 접하므로 $f'(x)$은 $(x+1)^2$을 인수로 가지며, x^2+ax+b는 $x+1$을 인수로 가져야 한다. 따라서

$$\left[x^2+ax+b\right]_{x=-1}=1-a+b=0$$

$$b=a-1$$

ii) 원점 위쪽을 지날 수 없으므로

$$f'(0)=b=a-1 \le 0$$

$$a \le 1$$

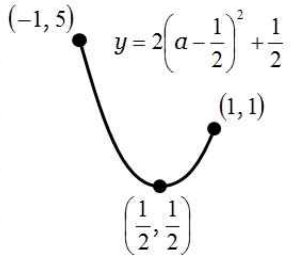
iii) 점 $(2, 0)$의 아래쪽을 지날 수 없으므로

$$f'(2)=4+2a+b=4+2a+(a-1)=3a+3 \ge 0$$

$$a \ge -1$$

i)~*iii*)으로부터 $b=a-1$, $-1 \le a \le 1$이 성립하므로 a^2+b^2의 최댓값, 최솟값은 다음과 같이 이차함수의 최대· 최소로 구할 수 있다.

$$a^2+b^2=a^2+(a-1)^2=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$



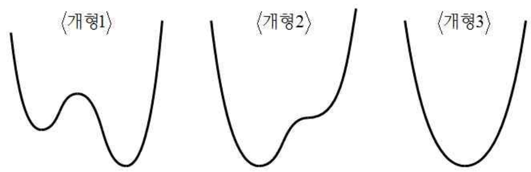
그러므로 a^2+b^2의 최댓값은 $5(=M)$, 최솟값은 $\frac{1}{2}(=m)$, $M+m=\frac{11}{2}$이다.

12 ③

★사차함수의 그래프 개형 몇 가지에 주어진 조건을 적용해서 만족하는 것을 찾는 문제

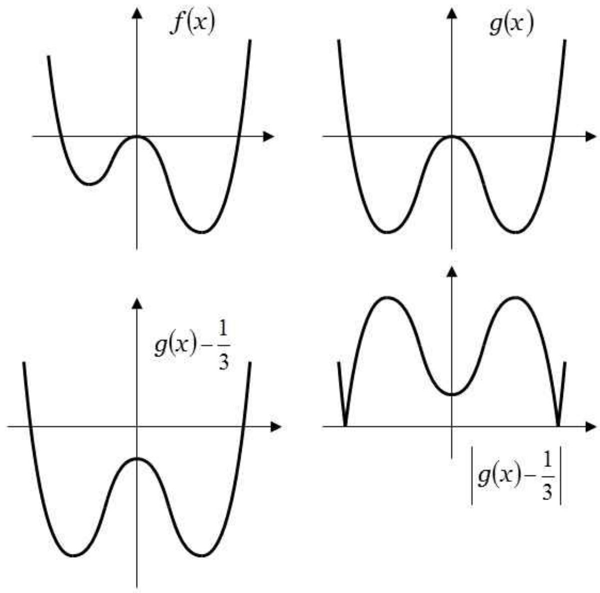
$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$에 의해 함수 $g(x)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프에서 y축 오른쪽만 그대로 두고, 다시 그것을 y축에 대해 대칭복사한 것과 같다.

그리고 주어진 조건을 만족하는 함수 $g(x)$를 찾으려면 다음과 같은 사차함수 $f(x)$의 그래프 개형에 좌표축을 잡아 위 방법대로 함수 $g(x)$의 그래프를 그려서 조사하면 된다.

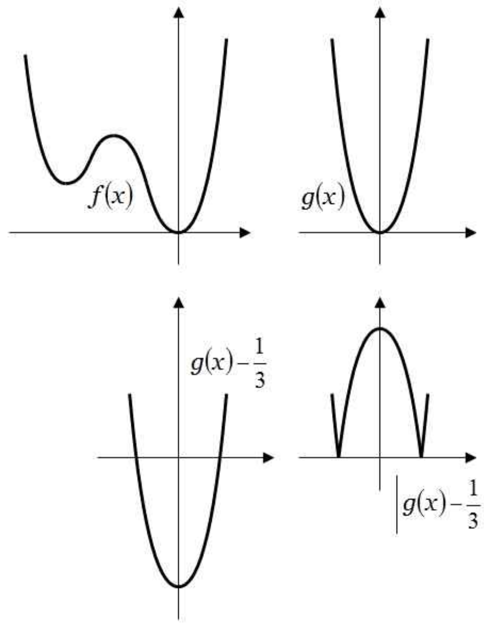


이때, 조건 (가)에 의해 함수 $g(x)$의 그래프가 원점에서 x축에 접하기 때문에 〈개형1〉~〈개형3〉의 극대점, 극소점 또는 미분계수가 0인 점을 원점으로 잡아야 한다.

i) 〈개형1〉의 극대점이 원점일 때
좌표축을 잡고 함수 $g(x)$, $g(x)-\frac{1}{3}$, $\left|g(x)-\frac{1}{3}\right|$의 그래프를 그리면 다음과 같으며, 함수 $\left|g(x)-\frac{1}{3}\right|$가 미분불가능점을 가짐을 알 수 있다.



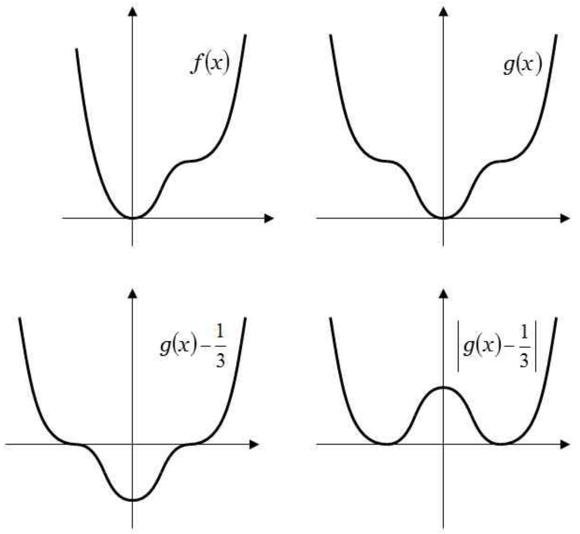
ii) 〈개형1〉의 극소점 가운데 오른쪽 것이 원점일 때
좌표축을 잡고 함수 $g(x)$, $g(x)-\frac{1}{3}$, $\left|g(x)-\frac{1}{3}\right|$의 그래프를 그리면 다음과 같으며, 함수 $\left|g(x)-\frac{1}{3}\right|$가 미분불가능점을 가짐을 알 수 있다.



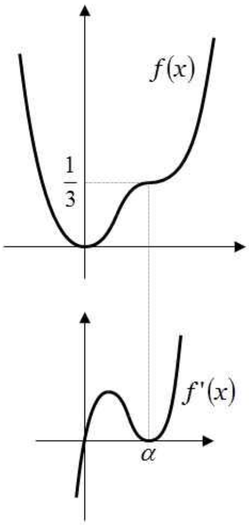
마찬가지로 〈개형1〉의 극소점 가운데 왼쪽 것, 〈개형2〉에서 극점이 아니면서 미분계수가 0인 점, 〈개형3〉의 극소점이 원점일 때도 함수 $\left|g(x)-\frac{1}{3}\right|$은 미분불가능점을 갖는다.

iii) 〈개형2〉의 극소점이 원점일 때
좌표축을 잡고 함수 $g(x)$의 그래프를 그린다. 그리고 조건 (나)가 성립하도록 만들기 위해 함수 $g(x)-\frac{1}{3}$의 그래프가 극점이 아니면서 미분계수가 0인 점에서 x축에 접하도록 하면

함수 $\left|g(x)-\frac{1}{3}\right|$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 만들 수 있다.



사차함수 $f(x)$의 그래프 개형으로부터 도함수 $f'(x)$의 그래프 개형을 그리면 오른쪽과 같으므로



$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x(x-\alpha)^2 \\ &= 4x(x^2-2\alpha x+\alpha^2) \\ &= 4x^3-8\alpha x^2+4\alpha^2 x \end{aligned}$$

로 둘 수 있으며, 이를 적분하면

$$f(x)=x^4-\frac{8\alpha}{3}x^3+2\alpha^2x^2+C$$

가 된다. 또한 $f(x)$가 원점에서 접하려면 x^2을 인수로 가져야 하므로

$$C=0$$

$$f(x)=x^4-\frac{8\alpha}{3}x^3+2\alpha^2x^2$$

이고, 극점이 아니면서 미분계수가 0인 점에서의 함숫값이 $\frac{1}{3}$이므로

$$f(\alpha)=\alpha^4-\frac{8}{3}\alpha^4+2\alpha^4=\frac{1}{3}\alpha^4=\frac{1}{3}$$

$$\alpha=1$$

이다. 따라서

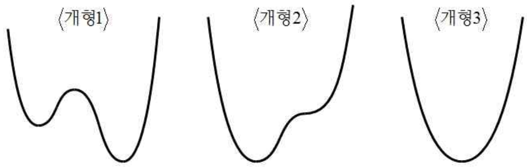
$$f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3+2x^2$$

$$f(2)=16-\frac{64}{3}+8=\frac{8}{3}$$

13 12

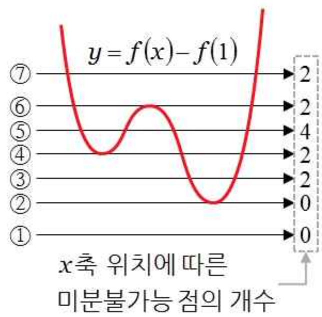
사차식 $f(x)$를 직접 구하기에는 문제에 주어진 조건이 부족하다. 그래서 앞의 문제와 마찬가지로 사차함수 $f(x)$ 그래프의 대표적인 개형 가운데 주어진 조건을 만족하는 것을 찾아보도록 하자.

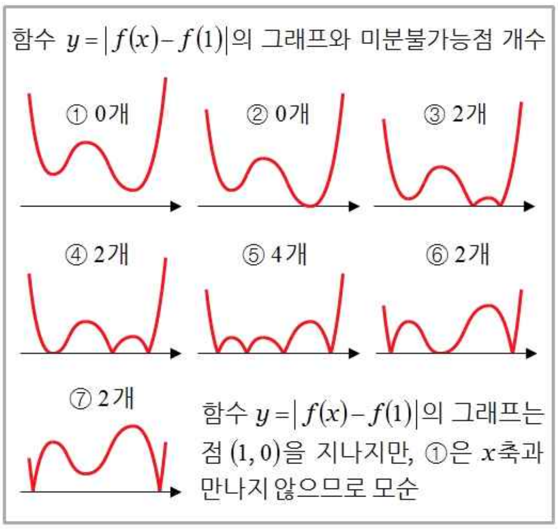
먼저 사차함수 $f(x)$의 그래프 개형은 다음 세 경우로 나눌 수 있다.



함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축 방향으로 $-f(1)$만큼 평행이동하면 함수 $y=f(x)-f(1)$의 그래프가 되고, 다시 x축 아랫부분만 x축 대칭이동하면 함수 $y=|f(x)-f(1)|$의 그래프가 된다. 함수 $y=f(x)-f(1)$도 사차함수이므로 위의 〈개형1〉~〈개형3〉을 함수 $y=f(x)-f(1)$의 그래프로 보고 접근해보자.

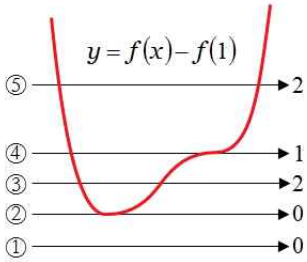
$i)$ 함수 $y=f(x)-f(1)$이 극대점, 극소점을 모두 가질 때
x축을 〈개형1〉의 아래쪽에서 위쪽으로 이동시키면서 ①~⑦의 위치에 그리고, 함수 $y=|f(x)-f(1)|$의 미분불가능점 개수를 조사하면 다음과 같다.





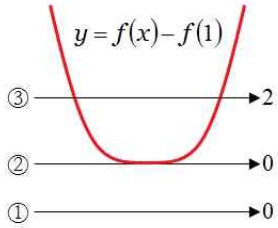
따라서 미분불가능점이 1개인 경우는 없다.

$ii)$ 함수 $y=f(x)-f(1)$이 극소점과 미분계수 0이면서 극점 아닌 점을 가질 때
x축을 〈개형2〉의 아래쪽에서 위쪽으로 이동시키면서 ①~⑤의 위치에 그리고, 함수 $y=|f(x)-f(1)|$의 미분불가능점 개수를 조사하면 다음과 같다.



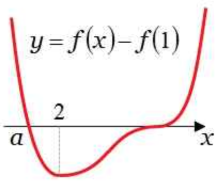
따라서 미분불가능점이 1개인 경우는 x축이 ④에 위치할 때다.

iii) 함수 $y=f(x)-f(1)$이 극소점만 가질 때
x축을 <개형3>의 아래쪽에서 위쪽으로 이동시키면서 ①~③의 위치에 그리고, 함수 $y=|f(x)-f(1)|$의 미분불가능점 개수를 조사하면 다음과 같다.



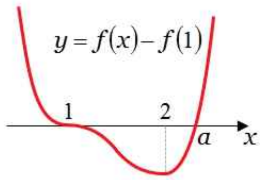
따라서 미분불가능점이 1개인 경우는 없다.

i)~*iii*)으로부터 함수 $y=|f(x)-f(1)|$의 그래프에서 미분불가능점이 1개 뿐인 경우는 <개형2>에서 x축이 ④에 위치할 때이다. 그리고 미분불가능점의 x좌표가 a, 극소점의 x좌표가 2이므로 이를 함수 $y=|f(x)-f(1)|$의 그래프에 표시하면 다음과 같다.



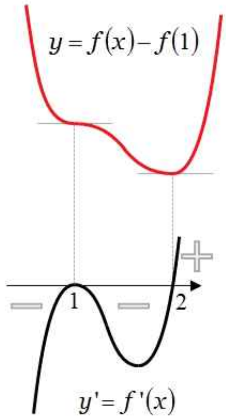
그런데 $a<2$이므로 조건 (나)와 모순이다. 그렇다면 조건을 모두 만족하는 경우가 없는 걸까?

이 모순은 다음과 같이 <개형2>를 좌우로 대칭이동해서 얻은 그래프로 해결할 수 있다.



이때, 함수 $y=f(x)-f(1)$은 $x=1$일 때 $y=0$이므로 그래프가 점 $(1, 0)$을 지나며, 이 점은 미분계수가 0이면서 극점이 아닌 점과 일치해야 한다.

함수 $y=f(x)-f(1)$의 도함수는 $y'=f'(x)$이며, 다음과 같은 도함수의 그래프로부터 방정식 $f'(x)=0$이 이중근 1과 실근 2를 가짐을 알 수 있다.



그러므로

$$f'(x)=k(x-1)^2(x-2)$$

로 나타낼 수 있으며, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$의 값은 다음과 같다.

$$\frac{f'(5)}{f'(3)}=\frac{48k}{4k}=12$$

14 ⑤

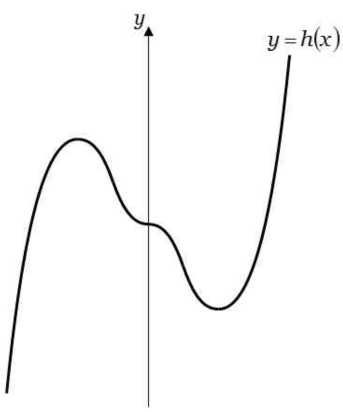
★도함수의 그래프로부터 함수의 증가, 감소를 파악하는 문제

ㄱ. 함수 $h(x)$의 도함수가 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로 함수 $h(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$h(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $-3<x<3$일 때 감소한다. (참)

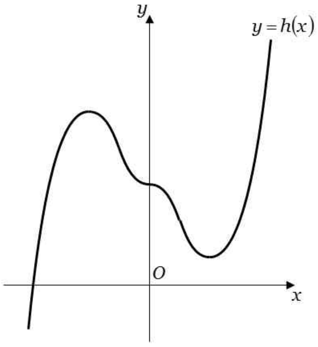
ㄴ. 위 증감표에 따라 함수 $h(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다. 그런데 함수 $h(x)$의 함숫값을 유추할 수 있는 조건이 없기 때문에 x축의 위치를 알 수 없으며, 두 극값의 합도 알 수 없다. (거짓)



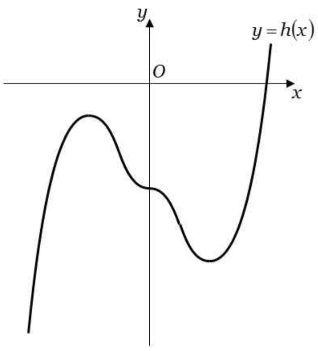
ㄷ. $h(-3)h(3)>0$이면 함수 $h(x)$의 극댓값 $h(-3)$과 극솟값 $h(3)$의 부호가 일치한다. 이때, x축의 위치는 다음 두

경우로 나눌 수 있다.

i) $h(-3)>0$, $h(3)>0$일 때



ii) $h(-3)<0$, $h(3)<0$일 때



또한 i), ii) 모두에서 함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서만 만나기 때문에 방정식 $h(x)=0$은 단 하나의 실근을 갖는다. (참)

15 ③

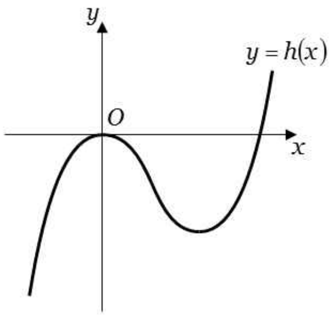
ㄱ. 함수 $h(x)$의 도함수가 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로 함수 $h(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	0	↘	극소	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $0<x<2$일 때 감소한다. (참)

ㄴ. 위 증감표에 따라 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄷ. 위 증감표에 따라 함수 $h(x)$의 그래프 개형을 그리면 다음과 같다.



따라서 함수 $h(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나고, 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 근을 갖는다. (거짓)

16 ⑤

★주어진 함수로부터 새로운 함수를 정의하고 그 함수의 특성을 묻는 문제

함수 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)=-6x^2+6ax=-6x(x-a)$이고, 방정식 $f'(x)=0$의 실근은 $x=0$, a이다. 이때, 실근 a가 구간 $[0,2]$에 포함될 수도 있고, 포함되지 않을 수도 있으므로 함수 $f(x)$의 최댓값을 구하려면 두 경우를 구분해야 한다.

i) $0<a<2$일 때
함수 $f(x)$의 증감표가

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$		↗	최대	↘	

와 같으므로 최댓값은 $f(a)=a^3-a^2$이다. 따라서

$$g(a)=a^3-a^2$$

ii) $a\geq 2$일 때
함수 $f(x)$의 증감표가

x	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$		↗	최대

와 같으므로 최댓값은 $f(2)=-a^2+12a-16$이다. 따라서

$$g(a)=-a^2+12a-16$$

i), ii)로부터 얻은 결과를 정리하면 다음과 같다.

$$g(a)=\begin{cases} a^3-a^2 & (0<a<2) \\ -a^2+12a-16 & (a\geq 2) \end{cases}$$

ㄱ. $g(1)=0$ (참)

ㄴ. 함수 $g(a)$의 $a=2$에서의 함숫값과 우극한은

$$\left[-a^2+12a-16\right]_{a=2}=4$$

이고, 좌극한은

$$\left[a^3-a^2\right]_{a=2}=4$$

이다. 두 값이 일치하므로 함수 $g(a)$는 $a=2$에서 연속이다.
또한 함수 $g(a)$의 $a\neq 2$일 때의 도함수가

$$g'(a)=\begin{cases}3a^2-2a & (0<a<2)\\ -2a+12 & (a>2)\end{cases}$$

이고, $a=2$에서의 우미분계수와 좌미분계수는 각각

$$\left[-2a+12\right]_{a=2}=8,\ \left[3a^2-2a\right]_{a=2}=8$$

이다. 두 값이 일치하므로 함수 $g(a)$는 $a=2$에서 미분가능하다. (참)

ㄷ. ㄴ으로부터 함수 $g(a)$의 도함수가

$$g'(a)=\begin{cases}a(3a-2) & (0<a<2)\\ -2(a-6) & (a\geq 2)\end{cases}$$

이므로 함수 $g(a)$의 증감표는 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	6	$\cdots$
$g'(a)$	(0)	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(a)$	(0)	↘		↗	20	↘

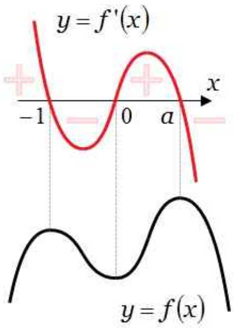
따라서 함수 $g(a)$의 최댓값은 20이다. (참)

17 ①

함수 $f(x)$의 도함수가

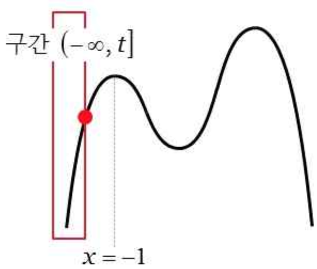
$$f'(x)=-12x^3+12(a-1)x^2+12ax$$
$$=-12x(x+1)(x-a)$$

이므로 방정식 $f'(x)=0$의 근은 -1, 0, a이고, 함수 $f(x)$의 증감과 그래프 개형은 오른쪽과 같다.



그리고 구간 $(-\infty, t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $g(t)$이므로 t값의 변화에 따른 $g(t)$값의 변화를 조사하면 다음과 같다.

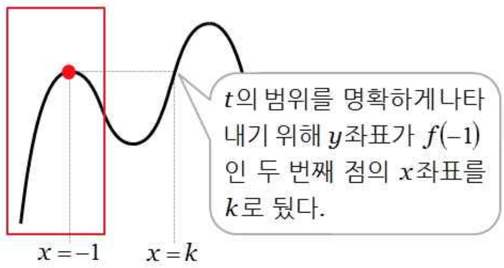
i) $t<-1$일 때



구간 $(-\infty, t]$의 오른쪽 끝에서 함수 $f(x)$가 최대이므로

$$g(t)=f(t)$$

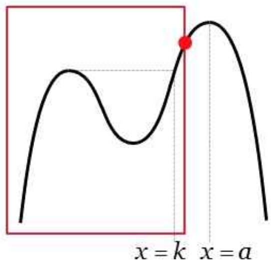
ii) $-1\leq t<k$일 때



구간 $(-\infty, t]$에 포함된 함수 $f(x)$의 극대점에서 함수 $f(x)$가 최대이므로

$$g(t)=f(-1)$$

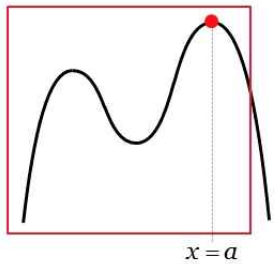
iii) $k\leq t<a$일 때



구간 $(-\infty, t]$의 오른쪽 끝에서 함수 $f(x)$가 최대이므로

$$g(t)=f(t)$$

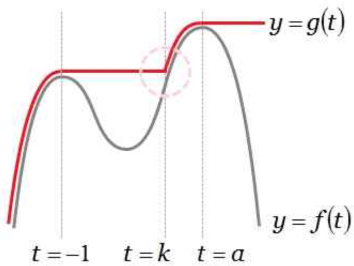
iv) $t\geq a$일 때



구간 $(-\infty, t]$의 두 번째 극대점에서 함수 $f(x)$가 최대이므로

$$g(t)=f(a)$$

i), *ii)*로부터 구간 $(-\infty, -1)$, $[k, a)$에서는 함수 $g(t)$의 그래프가 함수 $f(t)$의 그래프와 일치하고, 구간 $[-1, k)$, $[a, \infty)$에서는 함수 $g(t)$가 $f(t)$의 최댓값 $f(a)$를 함숫값으로 하는 상수함수다.

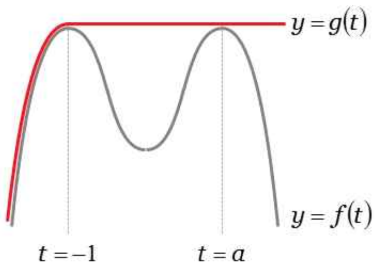


따라서 함수 $g(t)$의 그래프는 위와 같고, $t=k$ (점선 부분)에서 뾰족한 모양이 나타나기 때문에 미분불가능한 점을 갖

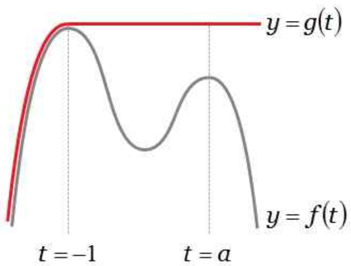
는다.

그럼 함수 $g(t)$를 미분가능하게 만들려면 무엇을 더 고려해야 할까? 바로 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면서 고려하지 않았던, 두 극댓값 $f(-1)$, $f(a)$의 대소관계다. $f(-1)<f(a)$인 경우는 앞에서 따졌으므로 $f(-1)=f(a)$일 때와 $f(-1)>f(a)$일 때를 생각해보자.

⟨$f(-1)=f(a)$일 때⟩



⟨$f(-1)>f(a)$일 때⟩



위와 같이 두 경우 모두 함수 $g(t)$가 미분가능하므로 $f(-1)\ge f(a)$가 성립하면 된다. 그러므로

$$f(-1)\ge f(a)$$
$$2a+1\ge a^4+2a^3$$
$$(a+1)^3(a-1)\le 0$$

이고, $a>0$로부터 $(a+1)^3>0$이므로 양변을 $(a+1)^3$으로 나누면 다음과 같다.

$$a-1\le 0$$
$$a\le 1$$

그러므로 a의 최댓값은 1

18 36

★방정식의 실근 개수를 그래프의 교점 개수와 연결시키고, 삼차함수의 그래프 개형을 이용하는 문제

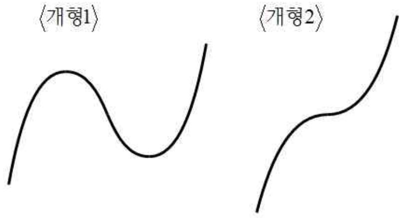
삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 이차함수이며, $f(x)$의 삼차항 계수가 1이므로 $f'(x)$의 이차항 계수는 3이다. 또한 $f'(x)$가 $x=1$일 때 최소이므로

$$f'(x)=3(x-1)^2+q$$
$$f(x)=(x-1)^3+qx+C \qquad \cdots\cdots ①$$

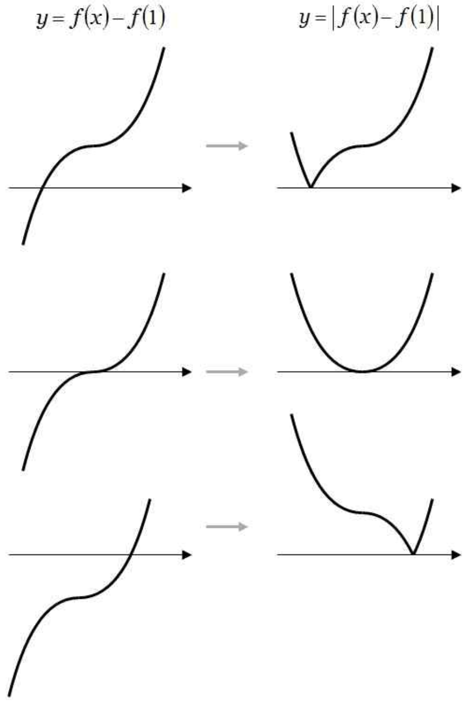
로 둘 수 있다.

방정식 $|f(x)-f(1)|=f(5)-f(1)$이 서로 다른 네 개의 실근을 갖는다는 것은 두 함수 $y=|f(x)-f(1)|$, $y=f(5)-f(1)$의 그래프가 서로 다른 네 점에서 만난다는 의미다. 그리고 함수 $y=|f(x)-f(1)|$의 그래프는 함수 $y=f(x)-f(1)$의 그래프에서 x축 아랫부분만 x축에 대해 대칭이동한 것과 같다.

여기서 함수 $y=f(x)-f(1)$이 삼차함수이므로 문제에 주어진 조건이 성립하는 경우를 찾으려면 다음과 같은 삼차함수의 대표적인 개형 두 가지에서 시작해야 한다.



만일 함수 $y=f(x)-f(1)$의 그래프가 ⟨개형2⟩처럼 극점을 갖지 않는다면 함수 $y=|f(x)-f(1)|$의 그래프는 아래와 같이 나타나고, x축에 평행한 직선 $y=f(5)-f(1)$과 네 점에서 만날 수 없다.

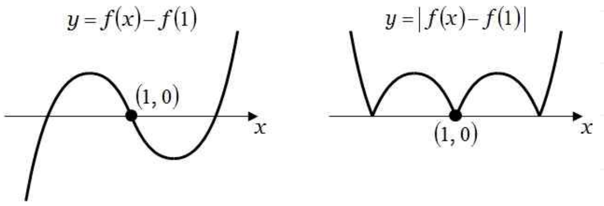


따라서 함수 $y=f(x)-f(1)$의 그래프는 ⟨개형1⟩과 같이 극점을 가져야 한다.

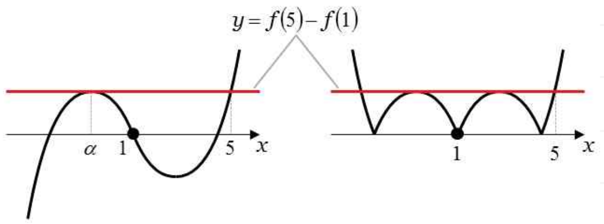
①에 의해 $f(x)-f(1)=(x-1)^3+qx+C-f(1)$이며, 여기에 $x=1$을 대입하면 $C-f(1)=-q$이므로

$$f(x)-f(1)=(x-1)^3+q(x-1)$$

이 된다. 여기서 함수 $y=f(x)-f(1)$은 기함수 $y=x^3+qx$를 x축 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그래프가 점 $(1,0)$에 대해 대칭이다. 따라서 함수 $y=f(x)-f(1)$과 $y=|f(x)-f(1)|$의 그래프는 다음과 같이 그려진다.



그리고 x축에 평행한 직선 $y=f(5)-f(1)$이 함수 $y=|f(x)-f(1)|$의 그래프와 서로 다른 네 점에서 만나려면 아래 오른쪽과 같이 그려져야 한다. 이때, 직선 $y=f(5)-f(1)$과 함수 $y=f(x)-f(1)$은 서로 다른 두 점에서 만나고, 접점이 아닌 교점의 x좌표는 5가 된다.



또한 $y=f(5)-f(1)$과 함수 $y=f(x)-f(1)$의 접점의 x좌표를 α라 하면 $f'(\alpha)=0$과 $f(\alpha)=f(5)$가 성립하므로

$$3(\alpha-1)^2+q=0$$
$$(\alpha-1)^3+q\alpha+C=64+5q+C$$

가 되고, q를 소거하면 다음과 같다.

$$(\alpha-1)^3-3(\alpha-1)^2\alpha=64-15(\alpha-1)^2$$
$$(\alpha+1)(\alpha-5)^2=0$$
$$\alpha=-1,\ q=-12$$

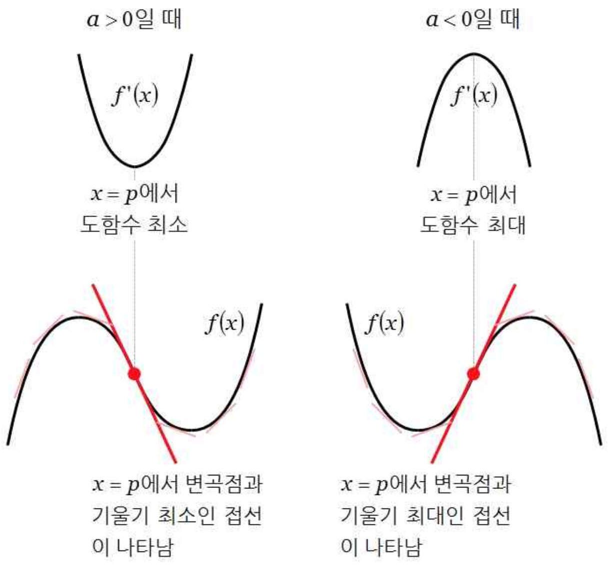
따라서

$$f'(x)=3(x-1)^2-12$$
$$f'(5)=36$$

[다른 풀이] 첫 번째 풀이의 핵심은 함수 $y=f(x)-f(1)$의 그래프가 점 $(1, 0)$에 대해 대칭임을 파악하는 것이다. 그런데 수학Ⅱ에서 배우는 변곡점을 이용하면 이를 쉽게 알아낼 수 있다.

★삼차함수 그래프의 접선 가운데 기울기가 최소 또는 최대인 것은 변곡점에서의 접선이다.

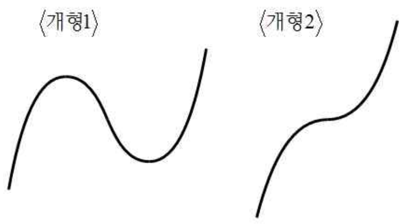
∵삼차함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=a(x-p)^2+q$일 때, $f''(x)=2a(x-p)$이므로 $x=p$일 때 변곡점이 나타나며, 이것은 도함수 $f'(x)$가 최소 또는 최대일 때와 x값이 같다.



방정식 $|f(x)-f(1)|=f(5)-f(1)$이 서로 다른 네 개의 실근을 갖는다는 것은 두 함수 $y=|f(x)-f(1)|$, $y=f(5)-f(1)$의 그래프가 서로 다른 네 점에서 만난다는 것을 의미한다. 그리고 함수 $y=|f(x)-f(1)|$의 그래프는 함수 $y=f(x)-f(1)$의 그래프에서 x축 아랫부분만 x축에 대해 대칭이동한 것과 같다.

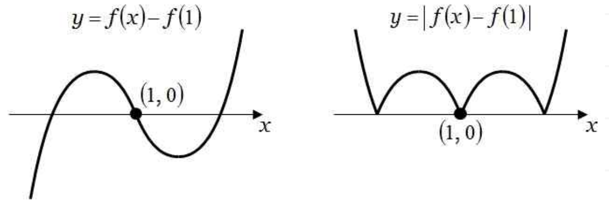
함수 $y=f(x)-f(1)$의 도함수와 이계도함수는 각각 $y'=f'(x)$, $y''(x)=f''(x)$이며, 함수 $f'(x)$가 $x=1$에서 최솟값을 가지므로 $f''(1)=0$이 성립한다. 따라서 함수 $y=f(x)-f(1)$의 변곡점의 x좌표는 1, $x=1$일 때 $y=0$이므로 변곡점의 좌표는 $(1, 0)$이며, 함수 $y=f(x)-f(1)$의 그래프가 이 점에 대해 대칭이 된다.

함수 $y=f(x)-f(1)$는 최고차항 계수가 1인 삼차함수이므로 그래프 개형은 다음 두 가지가 가능하다.

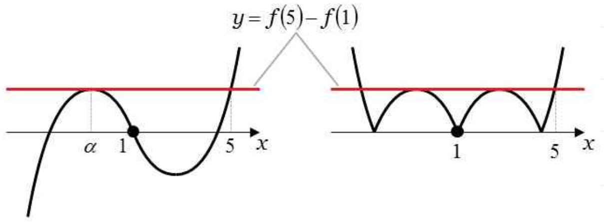


함수 $y=f(x)-f(1)$의 그래프가 〈개형2〉와 같다면 함수 $y=|f(x)-f(1)|$의 그래프와 x축에 평행한 직선 $y=f(5)-f(1)$이 서로 다른 네 점에서 만날 수 없다. 따라

서 함수 $y=f(x)-f(1)$은 <개형1>과 같은 그래프를 가져야 한다. 또한 함수 $y=f(x)-f(1)$의 최고차항 계수가 1이고 변곡점이 $(1,0)$이므로 두 함수 $y=f(x)-f(1)$과 $y=|f(x)-f(1)|$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 x축에 평행한 직선 $y=f(5)-f(1)$이 함수 $y=|f(x)-f(1)|$의 그래프와 서로 다른 네 점에서 만나려면 아래 오른쪽과 같이 그려져야 한다. 이때, 직선 $y=f(5)-f(1)$과 함수 $y=f(x)-f(1)$은 서로 다른 두 점에서 만나고, 접점이 아닌 교점의 x좌표는 5가 된다.



두 함수 $y=f(x)-f(1)$과 $y=f(5)-f(1)$의 접점의 x좌표를 α라 하면

$$\{f(x)-f(1)\}-\{f(5)-f(1)\}=(x-5)(x-\alpha)^2$$
$$f(x)=(x-5)(x-\alpha)^2+f(5)$$
$$f'(x)=(x-\alpha)^2+(x-5)\times 2(x-\alpha)$$
$$f''(x)=2(x-\alpha)+2(x-\alpha)+2(x-5)$$

가 성립하며, $f''(1)=0$을 적용하면

$$f''(1)=4(1-\alpha)-8=0 \Rightarrow \alpha=-1$$

이므로 도함수 $f'(x)$와 미분계수 $f'(5)$의 값은 다음과 같이 계산된다.

$$f'(x)=(x+1)^2+2(x-5)(x+1)$$
$$f'(5)=36$$

19 25

★부등식이 성립하기 위한 조건을 함수의 그래프로 찾는 문제

주어진 사차함수의 도함수가 $f'(x)=4x^3+2ax$이므로 ㈎에 의해

$$f'(1)=4+2a=20 \Rightarrow a=8$$

이다. 또한 ㈏에 의해

$$f(x)-f'(x)=(x^4+8x^2+b)-(4x^3+16x)$$
$$=x^4-4x^3+8x^2-16x+b \ge 0$$

이 성립하고 $g(x)=x^4-4x^3+8x^2-16x+b$로 두면 도함수

$$g'(x)=4x^3-12x^2+16x-16$$
$$=4(x-2)(x^2-x+2)$$

로부터 함수 $g(x)$의 증감표가 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	↘	극소	↗

여기서 함수 $g(x)$의 최솟값은 $g(2)=b-16$이며, ㈏가 성립할 조건은 다음과 같다.

$$g(2)=b-16 \ge 0 \Rightarrow b \ge 16$$

따라서 $f(1)=b+9$의 최솟값은 $b=16$일 때 25이다.

20 ⑤

조건 ㈎에 따라

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

로 두면 도함수가

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

이다. 여기에 조건 ㈏를 적용하면 $b=c$가 되고, 조건 ㈐에 의해 다음 부등식이 성립한다.

$$x^3+ax^2+bx+b \ge 3x^2+2ax+b$$
$$x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x \ge 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

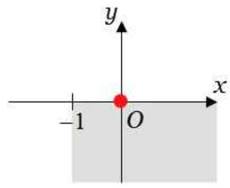
(단, $x \ge -1$일 때)

부등식 ①이 성립하기 위한 a, b의 조건을 찾기 위해 좌변으로부터 함수

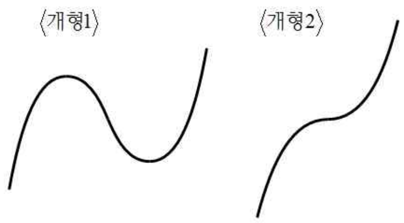
$$g(x)=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x \qquad \cdots\cdots ②$$

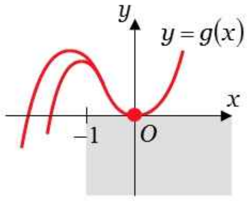
를 만들고 그래프 개형을 그려보자.

$g(0)=0$이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 원점을 지나고, ①에 의해 $x \ge -1$일 때 $g(x) \ge 0$이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 아래 그림의 색칠된 영역에 존재할 수 없다.



여기에 삼차함수 그래프의 대표적인 개형 두 가지를 맞춰보면 <개형2>는 조건을 만족할 수 없지만, <개형1>은 다음 그림과 같이 조건을 만족하는 경우가 나타난다.





따라서 함수 $g(x)$는 다음을 만족해야 한다.

i) $x=0$일 때 그래프가 x축에 접하므로
$g(x)$가 x^2을 인수로 가지며, ②에서 x항이 없어져야 한다. 따라서

$$b-2a=0 \Rightarrow b=2a$$
$$g(x)=x^3+(a-3)x^2$$

ii) $g(-1)\geq 0$이 성립해야 하므로

$$g(-1)=a-4\geq 0 \Rightarrow a\geq 4$$

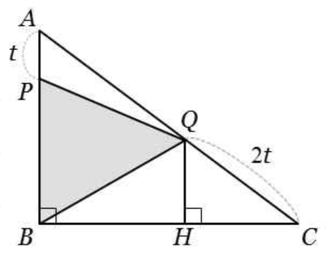
i), ii)로부터

$$f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$$
$$f(2)=8+10a\geq 48\ (\because a\geq 4)$$

21 19

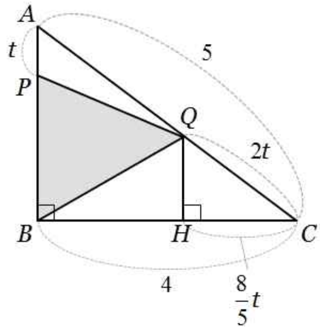
★도형의 넓이를 시각 t에 대한 함수로 나타낸 다음, 넓이의 변화율을 구하는 문제

먼저 출발점을 떠난지 t초 후 두 점 P, Q의 위치를 나타내면 다음과 같다.



이때, 점 Q에서 밑변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle CQH \backsim \triangle CAB$이므로

$$\overline{CQ}:\overline{CA}=\overline{CH}:\overline{CB}$$
$$2t:5=\overline{CH}:4$$
$$\overline{CH}=\frac{8}{5}t$$

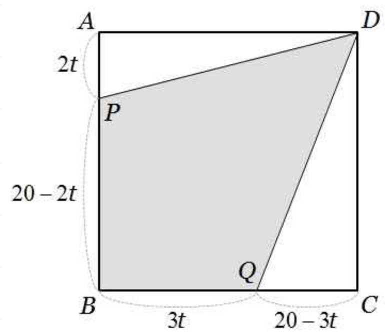


t초 후 삼각형 BPQ의 넓이를 $S(t)$라 하면 $t=1$일 때의 변화율은 다음과 같이 계산된다.

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{PB}\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times(3-t)\times\left(4-\frac{8}{5}t\right)$$
$$S'(t)=\frac{1}{2}\times(-1)\times\left(4-\frac{8}{5}t\right)+\frac{1}{2}\times(3-t)\times\left(-\frac{8}{5}\right)$$
$$S'(1)=-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}=-\frac{14}{5}$$
$$\therefore p+q=19$$

22 18

출발점을 떠난지 t초 후 두 점 P, Q의 위치를 나타내면 다음과 같다.



이를 이용하면 사각형 $DPBQ$의 넓이가 사각형 $ABCD$ 넓이의 $\frac{11}{20}$이 되는 순간은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\square DPBQ=\frac{11}{20}\square ABCD$$
$$\triangle DPB+\triangle DQB=\frac{11}{20}\times 20\times 20$$
$$\frac{1}{2}\times(20-2t)\times 20+\frac{1}{2}\times 3t\times 20=220$$
$$t=2$$

또한 두 점 P, Q가 출발점을 떠난지 t초 후 삼각형 PBQ의 넓이를 $S(t)$라 하면 $t=2$일 때 넓이 $S(t)$의 순간변화율은 다음과 같다.

$$S(t)=\frac{1}{2}\times(20-2t)\times 3t=-3t^2+30t$$
$$S'(t)=-6t+30$$
$$S'(2)=18$$