

제 2 교시는 낮잠

수학 영역

1

5지선다형

21. 자연수 n 에 대하여 x 에 대한 부등식

$$(x-n)(2^x-k) < 0$$

을 만족시키는 자연수 x 의 개수가 1이 되도록 하는 모든

자연수 k 의 개수를 a_n 이라고 하자. $\sum_{n=1}^6 a_n$ 의 값은? [4점]

- ① 259 ② 267 ③ 275 ④ 283 ⑤ 291

[정답과 해설]

정답 : ④

먼저 $(x-n)(2^x-k)$ 의 부호를 알기 위해 부등식을 이루고 있는 두 항 $x-n$ 과 2^x-k 이 0이 되는 값을 찾아보면 $x=n$ 일 때 $(x-n)$ 의 값은 0이 되고, $x=\log_2 k$ 일 때 (2^x-k) 의 값이 0이 됩니다.

따라서 $x=n$, $x=\log_2 k$ 일 때를 기준으로 $(x-n)(2^x-k)$ 의 부호가 달라짐을 알 수 있습니다.

이때, n 과 $\log_2 k$ 의 대소 관계가 정해져 있지 않으므로 다음과 같이 세 가지 경우로 나눌 수 있습니다.

i) $n < \log_2 k$ 일 때 : 부등식 $(x-n)(2^x-k) < 0$ 을 만족하는 x 의 범위는 $n < x < \log_2 k$ 입니다.

ii) $n = \log_2 k$ 일 때 : $(x-n)(2^x-k) < 0$ 을 만족하는 x 가 존재하지 않습니다.

iii) $n > \log_2 k$ 일 때 : 부등식 $(x-n)(2^x-k) < 0$ 을 만족하는 x 의 범위는 $\log_2 k < x < n$ 입니다.

먼저 $n < \log_2 k$ 을 만족하는 경우를 생각해 봅시다.

$n=1$: $1 < x < \log_2 k$ 이고 이 부등식을 만족하는 자연수 x 의 개수가 1이 되기 위한 자연수 k 의 값의 범위는

$$2^2 \leq k < 2^3 \Rightarrow 2^2 \text{ 개}$$

$n=2$: $2 < x < \log_2 k$ 이고 이 부등식을 만족하는 자연수 x 의 개수가 1이 되기 위한 자연수 k 의 값의 범위는

$$2^3 \leq k < 2^4 \Rightarrow 2^3 \text{ 개}$$

$n=3$: $3 < x < \log_2 k$ 이고 이 부등식을 만족하는 자연수 x 의 개수가 1이 되기 위한 자연수 k 의 값의 범위는

$$2^4 \leq k < 2^5 \Rightarrow 2^4 \text{ 개}$$

.....

같은 방식으로 $n < \log_2 k$ 을 만족할 때, $(x-n)(2^x-k) < 0$ 을 만족하는 k 의 개수는 2^{n+1} 이란 사실을 알 수 있습니다.

두 번째로, $n > \log_2 k$ 을 만족할 경우를 생각해 봅시다.

$n=1$: $\log_2 k < x < 1$ 이고 이 부등식을 만족하는 자연수 x 의 개수가 1이 되기 위한 자연수 k 의 값은 존재하지 않습니다.

$n=2$: $\log_2 k < x < 2$ 이고 이 부등식을 만족하는 자연수 x 의 개수가 1이 되기 위한 자연수 k 의 값은 $k=2^0=1$ 이 유일합니다.

$n=3$: $\log_2 k < x < 3$ 이고 이 부등식을 만족하는 자연수 x 의 개수가 1이 되기 위한 자연수 k 의 값의 범위는

$$2^1 \leq k < 2^2 \Rightarrow 2^1 \text{ 개}$$

$n=4$: $\log_2 k < x < 4$ 이고 이 부등식을 만족하는 자연수 x 의 개수가 1이 되기 위한 자연수 k 의 값의 범위는

$$2^2 \leq k < 2^3 \Rightarrow 2^2 \text{ 개}$$

.....

같은 방식으로 $n > \log_2 k$ 을 만족할 때, $(x-n)(2^x-k) < 0$ 을 만족하는 k 의 개수는 2^{n-2} (단, n 은 2이상의 자연수)란 사실을 알 수 있습니다.

따라서 위 사실들을 종합하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^6 a_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_5 + a_6 \\ &= 2^2 + (2^3 + 2^0) + (2^4 + 2^1) + (2^5 + 2^2) + (2^6 + 2^3) + (2^7 + 2^4) \\ &= 283 \end{aligned}$$

※ 문제 출처 : 2016학년도 포카칩 모의평가 예비시행 (5월)

해설 : 페나이