수학 하의 잔재

1. 함수의 이동

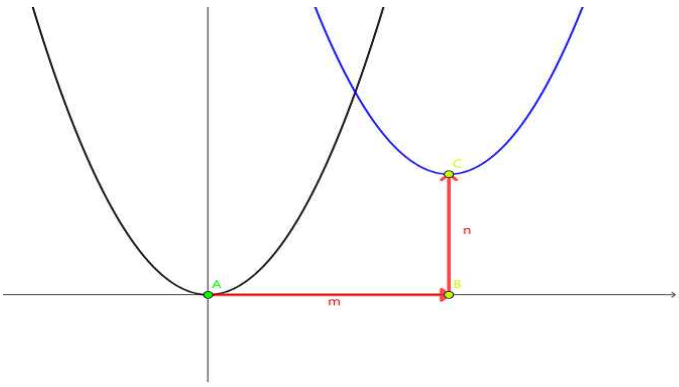
1-1 평행이동

- 함수는 축 위에 그려질 수 있다. 그림과 같은 함수는 영상처럼 자유롭게 이동할 수 있다. 이러한 형태의 이동을 우리는 수식으로 '$f(x \pm m) \pm n$'으로 나타낸다.

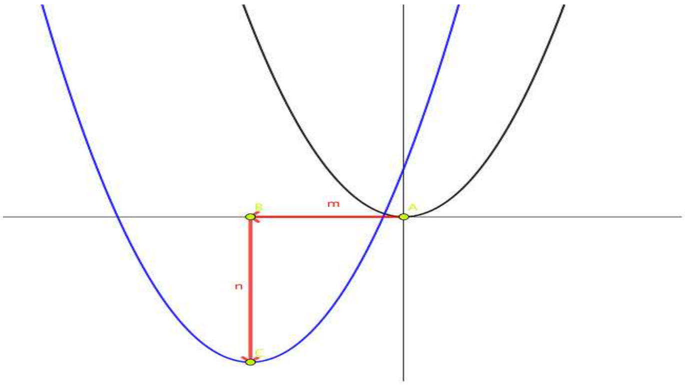
i) 우선 m은 x축 방향에서의 이동이다. 이동은 ±와 반대로 움직인다.
+n은 함수가 **왼쪽**으로 이동한 것이며,-n은 함수가 **오른쪽**으로 이동한 것이다.

ii) m은 함수가 y축 방향으로 이동한 것이다. n과 마찬가지로 ±와 반대로 움직인다.

예시) $f(x-m)+n$ (단, m과 n은 자연수이다)

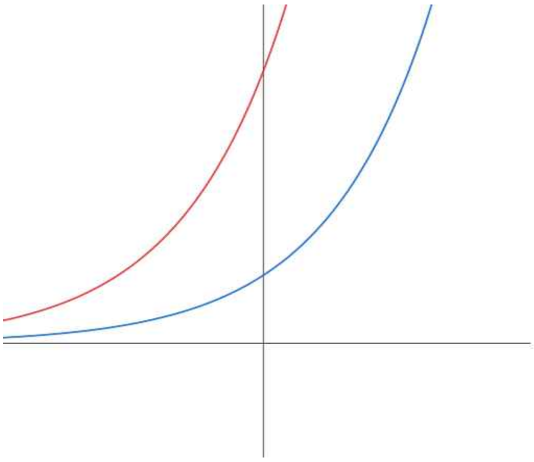


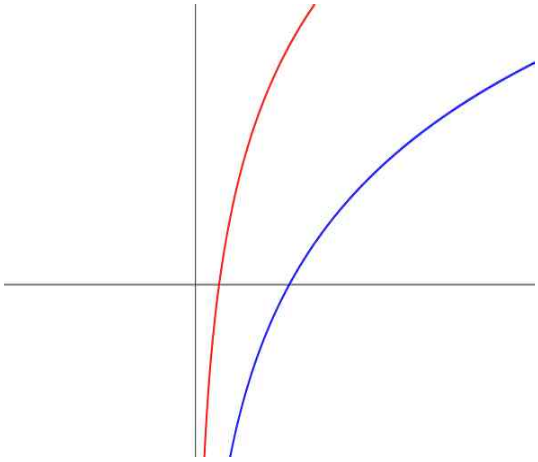
예시) $f(x+m)-n$ (단, m과 n은 자연수이다.)



- 함수의 이동은 영상이다. 문제에서의 적용을 위해서 우리는 다양한 움직임 중 조건에 그리고 상황에 맞는 특이점을 찾아내야 한다.

- 다항함수가 아닌 **지수와 로그함수**의 경우 평행이동이 숨겨져 있는 상황들이 있다. 이에 조심해서 문제에 적용하자.





* 2^x → 4×2^x 처럼 정리하면 $f(x+2)$ 가 된다. (로그함수 역시 마찬가지)

● *<u>Practice</u>*

다음 문제를 해결해보자.

1. $f(x)=x^2+3x+2$ 일때, $f(x-2)+2$ 를그리시오.

2. $f(x)=x^3-3x+2$ 일때, $f(x-3)+2$ 를 그리시오.

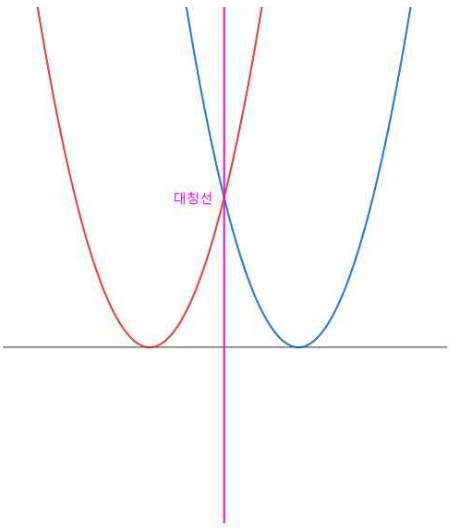
* 그래프를 그릴 때, 근이나 극값 같은 **특이점**을 위주로 그리자.

1-2 대칭이동 feat. 절댓값

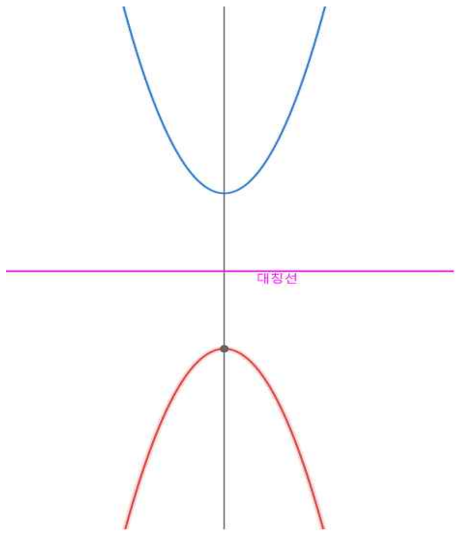
- 평행이동은 단순한 좌우, 상하 이동인 반면 대칭이동은 **축**을 기준으로 **반사**되어 이동하는 과정으로 이해를 해야 한다.

- 이러한 이동을 수식으로 우리는 $f(-x)$와 $-f(x)$로 나타낸다. 전자의 경우 함수가 x축 기준으로 대칭 이동한 것이며, 후자의 경우 함수가 y축 기준으로 대칭된 것이다.

x축 대칭

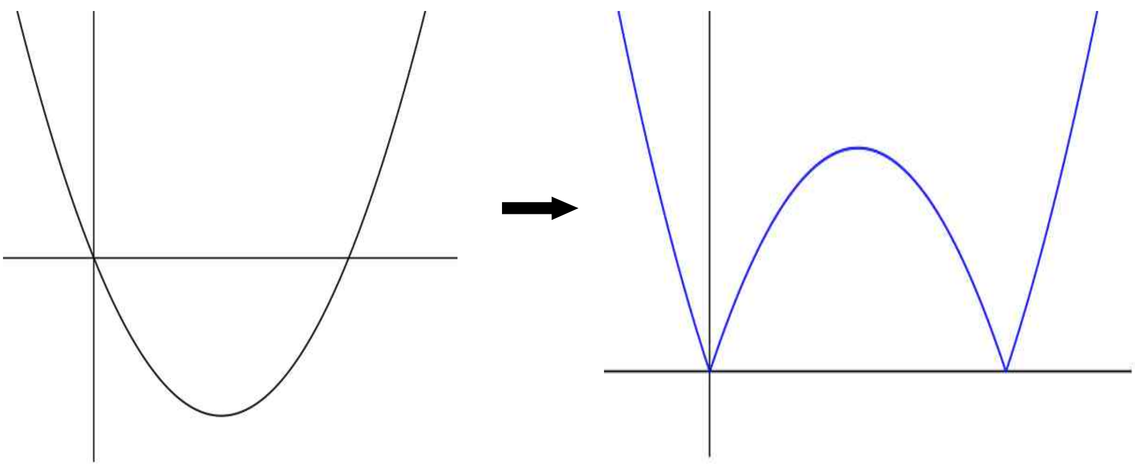


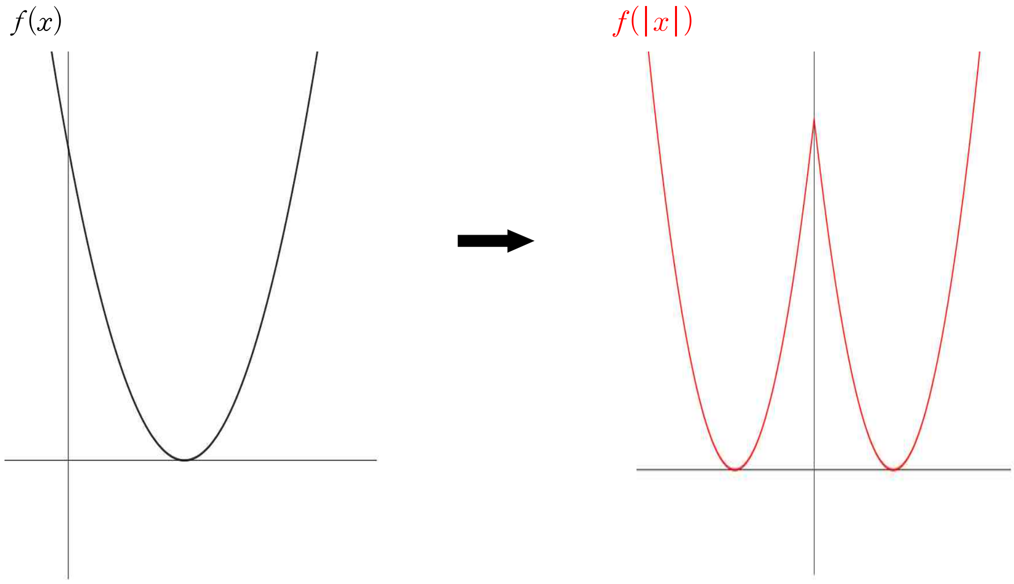
y축 대칭



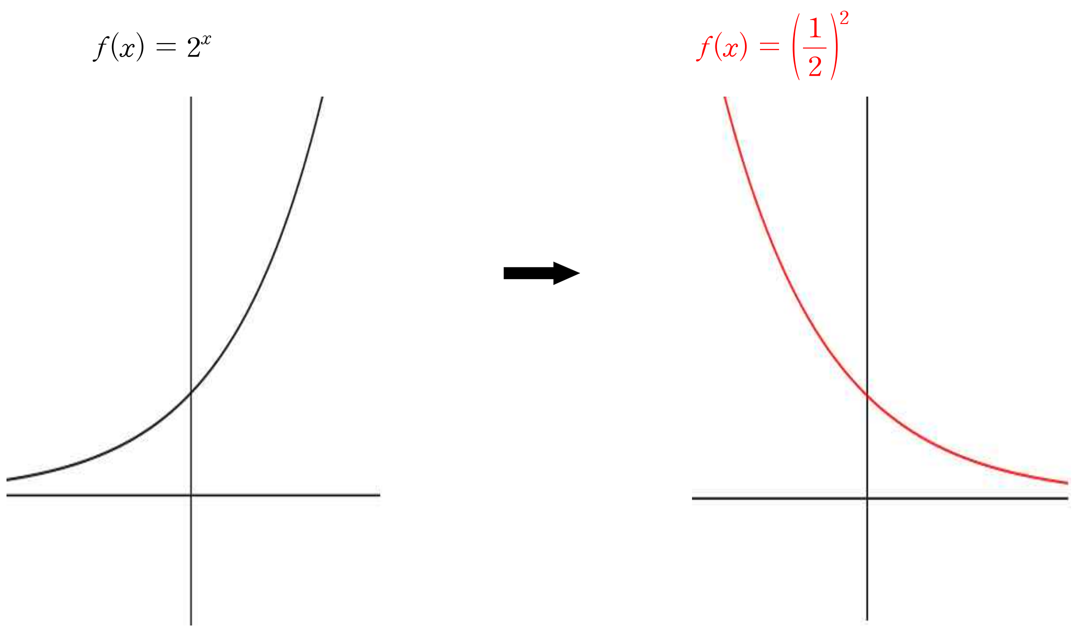
- 절댓값의 경우 부분적으로 대칭이 되었다고 보면 된다. 즉, x축과 y축 중 **음수**가 **양수**로 바뀌었다고 생각하면 된다. 이를 우리는 수식으로 $|f(x)|$를 우리는 x축 아래 부분의 대칭, $f(|x|)$를 y축 기준으로 왼쪽 부분이 대칭된 것으로 이해하면 된다.

$f(x)$ $|f(x)|$





- 지수와 로그함수는 대칭이동이 숨겨져 있을 수 있다. 이를 항상 조심하자.



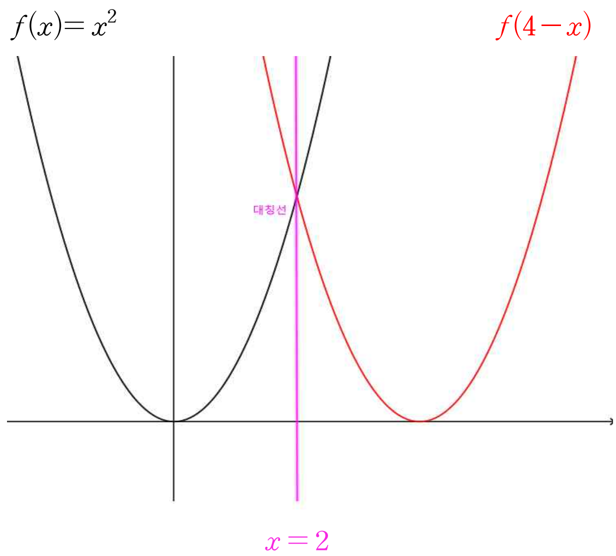
- 추가로 다양한 함수의 이동이 섞여서 나올 수 있다. 조심하자. 예시를 풀어보면서 다양한 상황에 대비해보자. 스스로 그려보면서 함수에 익숙해지자.

2. 대칭성과 주기성

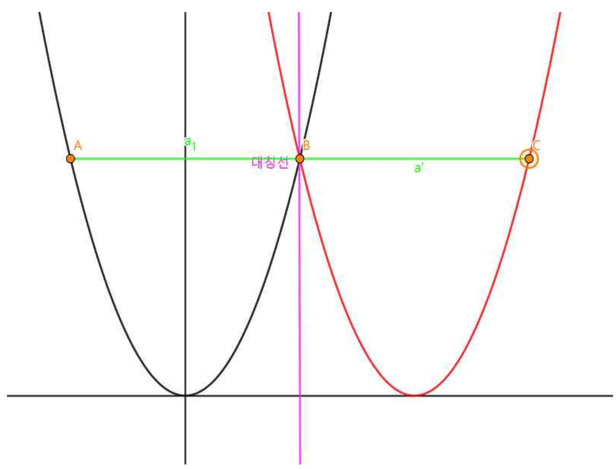
2-1 대칭성

- 대칭은 크게 **점대칭**과 **선대칭**이 있다. 위에서 살펴본 대칭성과 유사성이 매우 깊다. 아니 사실상 같은 내용이라고 봐도 무방하다. 위에서는 x축과 y축이라는 한정된 대칭만 살펴보았다면 우리는 이제부터 더 다양한 대칭을 살펴볼 것이다.

- '$x=a$' 에 대하여 대칭된 함수를 우리는 '$f(a-x)=f(a+x)$' or '$f(x)=f(2a-x)$' 로 표현할 수 있다. 이는 선대칭이다.

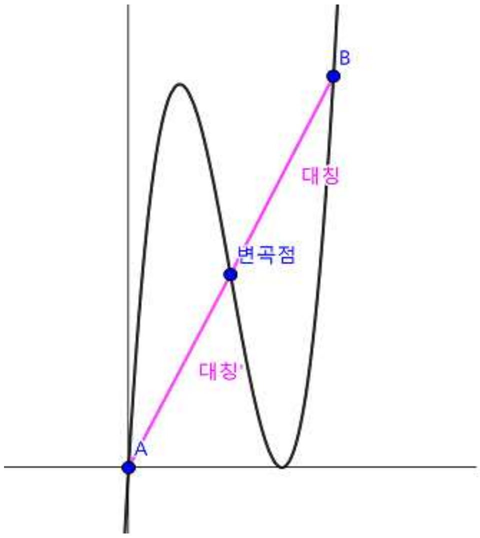


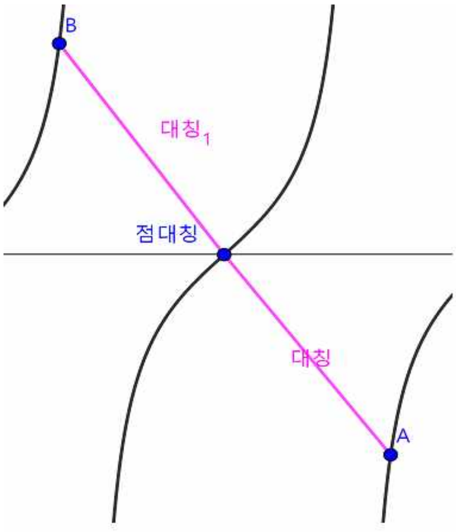
* 선대칭이 생기면 **'등차중항'** 을 활용해서 좌표를 구할 수 있다.



*a와 a' 의 거리는 항상 같다. 대칭선을 기준으로 모든 점이 이러하다.

- '(a, b)' 라는 점에 대하여 대칭된 함수를 우리는 '$f(a-x)+f(a+x)=2b$' 로 표현할 수 있다. 이를 점대칭이라고 부른다.



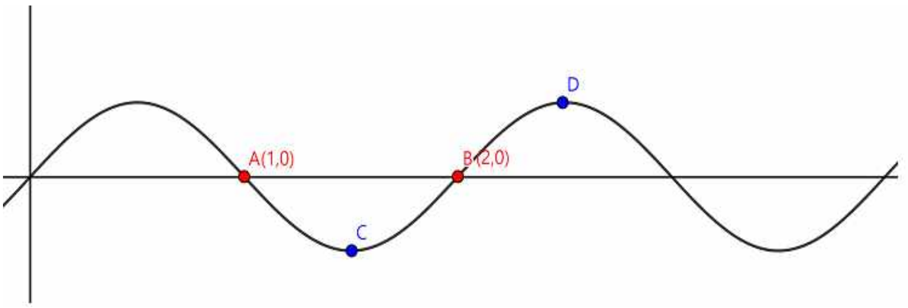


* 위의 두 그래프인 3차 함수의 **변곡점**, tan **함수**의 x절편들이 전형적인 **대칭점**이다.

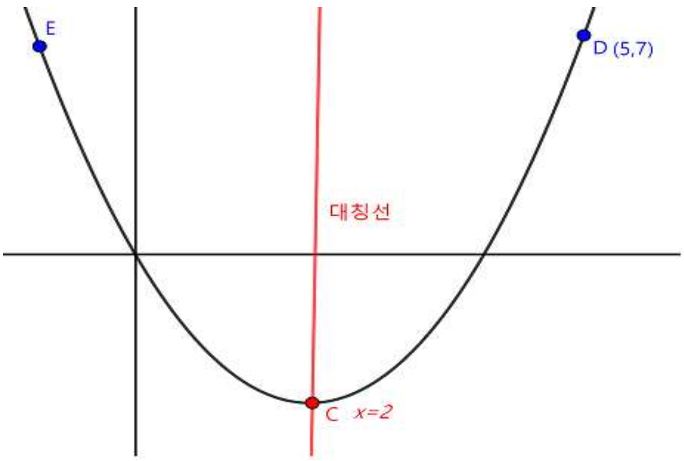
● *Practice*

다음 점들의 좌표를 구하시오.

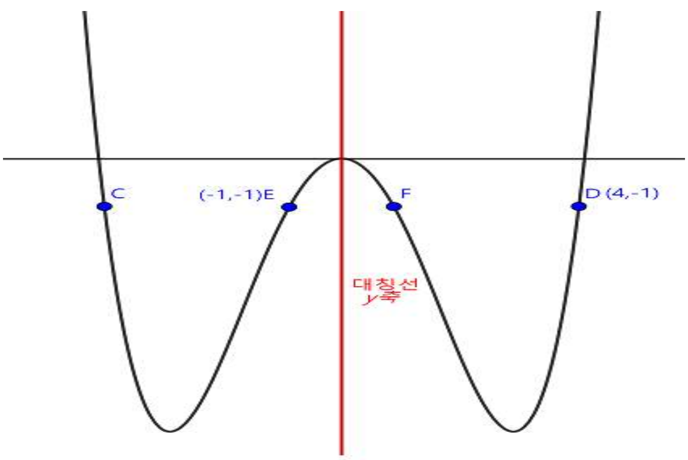
1.



2.



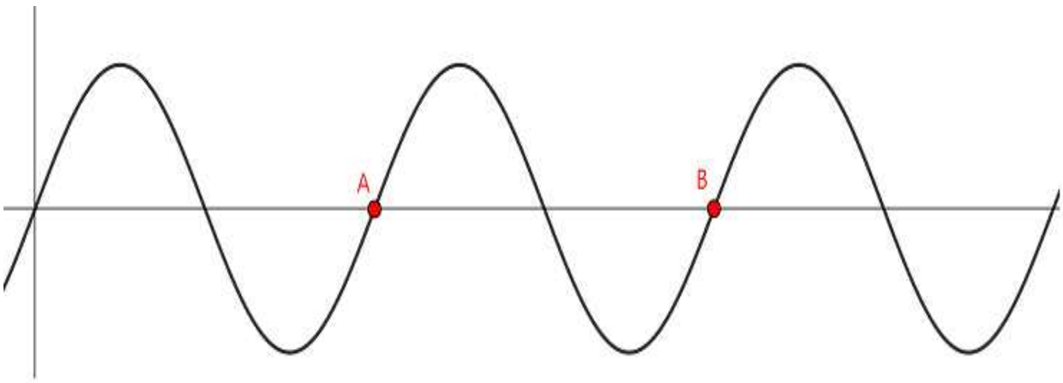
3.



- 2-2 주기성

- **주기성**은 ‘무한히 많이 반복돼서 나온다’ 라고 이해하면 편할 것이다. 대표적인 예로 삼각함수들이 있다. 하지만 이 외에도, 임의로 주기함수를 만들 때도 있으니 이에 주의하자.

- 주기가 a 인가 함수를 우리는 ‘$f(x)=f(x\pm a)$’ 로 표현할 수 있다. 이는 $x=a$ 의 간격만큼 같은 함수가 무한히 나온다는 말이다.

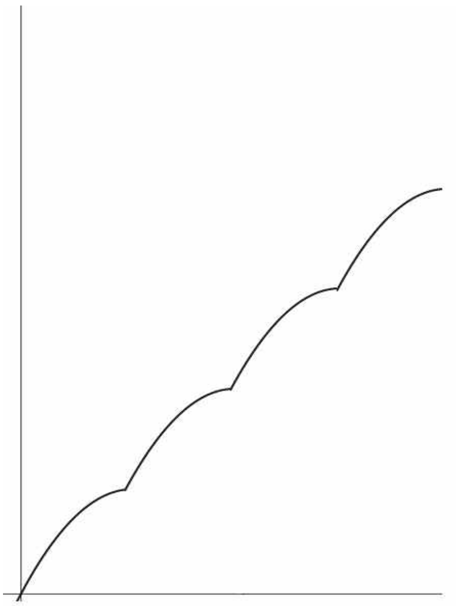


- 주기 중에는 **증가**하거나 **감소**하면서 주기가 생기는 함수가 있다.

- 이를 우리는 수식으로 ‘$f(x)=f(x\pm a)\pm b$’ 으로 표현할 수 있다.

(가) $f(x) = -x(x-2)$ $(0 \le x \le 1)$

(나) $f(x) = f(x+1)+1$



20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x)=x$이다.
(나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$이다.

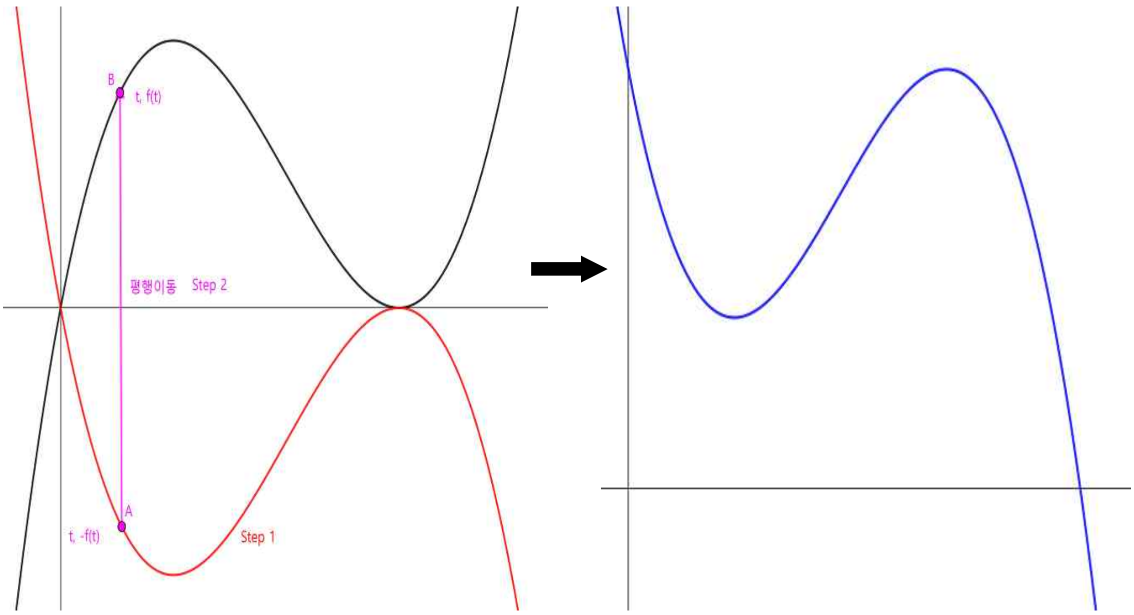
* 구간별로 새로운 함수가 **주기**를 가지며 생성되는 문제가 나올 수도 있다 (22수능 20번).

3. 다양한 함수들

- 준킬러부터 킬러까지 정말 다양하게 함수의 이동을 표현할 수 있다. 평가원에서 너무너무 중요하게 출제하는 부분이므로 많이 연습하고 빨리 익숙해지자.

예시)

I) '$f(x)=2f(t)-f(x)$' → $y=f(t)$ 에 대칭된 함수



* Step을 따라가며 천천히 이해해보자.

기출예시)

*2306 22번

최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x < t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라

*2210 11번

닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \sin x & \left(0 \leq x \leq \dfrac{k}{6}\pi\right) \\ 2\sin\left(\dfrac{k}{6}\pi\right)-\sin x & \left(\dfrac{k}{6}\pi < x \leq 2\pi\right) \end{cases}$$