지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

https://orbi.kr/00043463424

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

https://atom.ac/books/9395

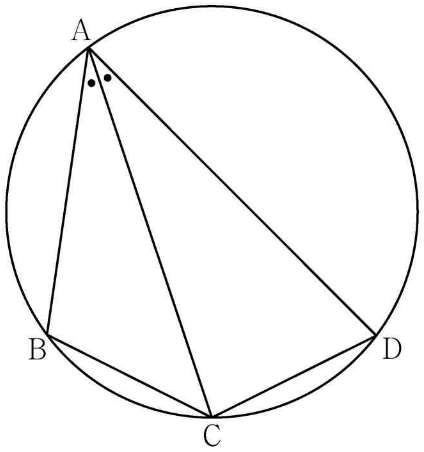
입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex
공통

1. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$$\overline{\mathrm{AB}}=5,\ \overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{5},\ \overline{\mathrm{AD}}=7,\ \angle \mathrm{BAC}=\angle \mathrm{CAD}$$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는? 〔2023학년도 수능 11〕

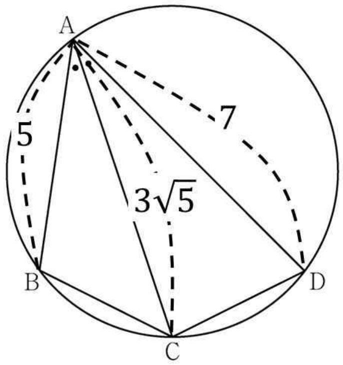


① $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$
④ $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$

1. 정답 ① 〔2023학년도 수능 11〕

1) 그림 있으면 그림 보면서,

조건을 표시하면



이렇게 되네요. 이때 원의 반지름 r을 구하랍니다.

일단 삼각형 ABC와 ACD가 있는데 변 AC를 공유하고 있죠? 거기에 $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$이구요. 이 두 삼각형의 관계에 초점을 맞추고 가야겠어요.

일단 두 삼각형 모두 같은 삼각형에 내접하고 있으니까 사인법칙을 생각할 수 있어요. $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\mathrm{BAC}}=2r$인데 $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\mathrm{CAD}}=2r$이므로 $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\mathrm{BAC}}=\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\mathrm{CAD}}$입니다. 이때 $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$이니까 $\sin\mathrm{BAC}=\sin\mathrm{CAD}$이죠? 따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}$입니다.

그러면 두 삼각형에서 두 변의 길이와 한 각이 나온 셈이니까 코사인법칙을 사용하면 $\cos\mathrm{BAC}=\dfrac{5^2+(3\sqrt{5})^2-\overline{\mathrm{BC}}^2}{2\times5\times3\sqrt{5}}=\dfrac{70-\overline{\mathrm{BC}}^2}{30\sqrt{5}}$이고 $\cos\mathrm{CAD}=\dfrac{7^2+(3\sqrt{5})^2-\overline{\mathrm{CD}}^2}{2\times7\times3\sqrt{5}}=\dfrac{94-\overline{\mathrm{CD}}^2}{42\sqrt{5}}$입니다.

이때 $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$이니까 $\cos\mathrm{BAC}=\cos\mathrm{CAD}$이고, $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}=k$라 하면 $\dfrac{70-k^2}{30\sqrt{5}}=\dfrac{94-k^2}{42\sqrt{5}}$이고 정리하면 $k^2=10$, $k=\sqrt{10}$입니다.

이때 $\cos\mathrm{BAC}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$이므로 $\cos^2+\sin^2=1$에 의하여 $\sin\mathrm{BAC}^2=1-\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{1}{5}$이고

$\sin \mathrm{BAC} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 입니다. 따라서 반지름의 길이는 $\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin \mathrm{BAC}} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{1}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 5\sqrt{2} = 2r$에서 $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ 입니다. 답은

①번이네요.

2. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$n-1 \le x < n$일 때, $\lvert f(x) \rvert = \lvert 6(x-n+1)(x-n) \rvert$이다. (단, n은 자연수이다.)

열린구간 $(0,\ 4)$에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt - \int_x^4 f(t)dt$$

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)dx$의 값은?

〔2023학년도 수능 12〕

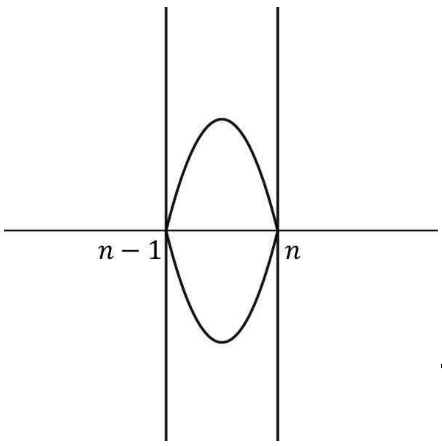
① $-\frac{3}{2}$　② $-\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{5}{2}$

2. 정답 ② 〔2023학년도 수능 12〕

1) 정적분의 위끝과 아래끝에 변수가 있는 경우, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속인데 $n-1 \le x < n$에서 $|f(x)|=|6(x-n+1)(x-n)|$이라고 합니다. 모든 자연수 n에 대하여 그렇다고 해석할게요. 그러면 $f(x)=6(x-n+1)(x-n)$ 이거나 $f(x)=-6(x-n+1)(x-n)$이죠?

거기에 $n-1 \le x < n$에서인데 x축과 만나는 점도 $x=n-1$, $x=n$입니다. 이차함수의 모양이니까



에서 위쪽을 택하거나 아래쪽을 택해야 합니다. 도중에 바꾸는 건 안 되겠죠? $f(x)$는 연속이니까요. $n-1 \le x < n$의 범위 안에서는 계속 $f(x)=6(x-n+1)(x-n)$ 이거나 계속 $f(x)=-6(x-n+1)(x-n)$이어야 합니다.

이때 $0<x<4$에서 $g(x)=\int_0^x f(t)dt-\int_x^4 f(t)dt$인데 $x=2$에서 최솟값 0을 가진답니다.

일단 $g(2)=0$인 거니까 $\int_0^2 f(t)dt=\int_2^4 f(t)dt$입니다. 0부터 2까지의 정적분 값이랑 2부터 4까지의 정적분 값이 같아야 한다는 거죠.

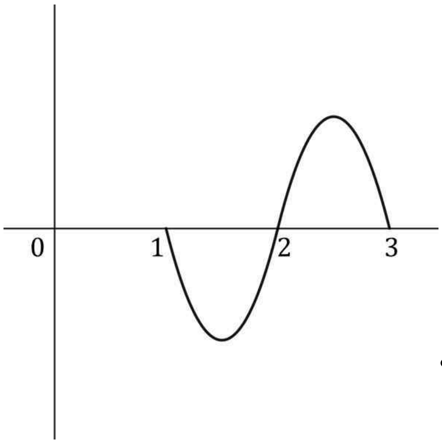
그리고 정적분의 위끝과 아래끝에 모두 변수가 있네요? $-\int_x^4 f(t)dt=\int_4^x f(t)dt$이죠? 따라서

$g(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_4^x f(t)dt$를 미분하면 $g'(x)=2f(x)$가 됩니다.

여기서 $x=2$에서 "최솟값"을 갖는다는 의미에 대해서 생각해볼게요. $x=a$에서 최소가 되려면 도함수는 어떻게 되어야 할까요? 다항함수에서 최소가 된다는 건 결국 감소하다가 증가하게 되는 그 지점을 말하는 거잖아요?

그러면 도함수는 x축 아래에 있다가 x축 위로 올라오게 되는 그 지점이겠네요.

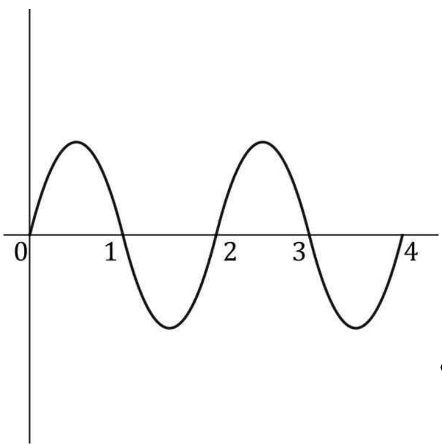
그런데 도함수는 $g'(x)=2f(x)$입니다. $x=2$에서 왼쪽에서는 x축 아래에 있다가 오른쪽에서는 x축 위로 올라오게 하려면 $g'(x)=2f(x)$의 그래프는 결국



이렇게 되어야 하죠. 따라서 $1 \le x < 2$에서 $f(x)=6(x-1)(x-2)$이고 $2 \le x < 3$에서 $f(x)=-6(x-2)(x-3)$입니다.

이때 $\int_0^2 f(t)dt=\int_2^4 f(t)dt$이잖아요? 만약에 $0 \le x < 1$에서 $f(x)=6x(x-1)$이라면?

$\int_0^2 f(t)dt=\int_2^4 f(t)dt$가 불가능합니다. 왜냐하면 $\int_0^2 f(t)dt=-2$인데 이미 $\int_2^3 f(t)dt=1$이기 때문에 아무리 작아도 0이 되거든요. 따라서



이렇게 되어야겠네요.

2) 이차함수와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이, 정적분 관찰

이제 $\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)dx$를 구해야 합니다. 구간 별 함수는 사실상 평행이동과 대칭이동 관계이니까 x축과 둘러싸인

부분의 넓이는 모두 같습니다. 따라서 $\int_{1}^{3} f(t)dt = 0$입니다. $\int_{3}^{4} f(t)dt$는 x축과 둘러싸인 부분의 넓이를 부호만 반대로 한 값이에요. 따라서 이차함수와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 공식에 의하여 $\frac{6}{6}(4-3)^3 = 1$입니다. 부호를 반대로 하면 -1이네요.

마지막으로 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt$는 0부터 1에서 $f(x)$가 $x=\frac{1}{2}$ 대칭이므로 절반만 딱 떼어내면 되니까 $\frac{1}{2}$입니다.

따라서 구하는 값은 $\frac{1}{2}+0-1=-\frac{1}{2}$입니다. 답은 ②번이네요.

3. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\begin{cases} x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ f(x) & (-1 \le x \le 1) \end{cases}$$

함수 $h(x)=\lim_{t\to 0+} g(x+t)\times \lim_{t\to 2+} g(x+t)$에 대하여
〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
〔2023학년도 수능 14〕

<보 기>

ㄱ. $h(1)=3$
ㄴ. 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$이면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

3. 정답 ① 〔2023학년도 수능 14〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$f(x)$는 다항함수인데 $g(x)=\begin{cases} x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ f(x) & (-1 \le x \le 1) \end{cases}$ 라고 합니다. 개형은 대충 그려지네요.

이때 $h(x)=\lim_{t \to 0+} g(x+t) \times \lim_{t \to 2+} g(x+t)$이랍니다. 표현을 살짝 바꾸면 $h(x)=g(x+) \times g(x+2+)$이죠?

$g(x+)$는 $g(x)$보다 x값이 큰 부분에서의 함숫값이고, $g(x+2+)$는 $g(x+2)$보다 x값이 큰 부분에서의 함숫값입니다.

ㄱ에서 $h(1)=3$이냐고 묻네요. $h(1)=g(1+) \times g(3+)$이죠? 일단 $g(1+)$의 경우 $x>1$에서 $g(x)=x$이므로 $g(1+)=1$입니다. $g(3+)$의 경우도 마찬가지니까 $g(3+)=3$입니다. 따라서 $h(1)=1 \times 3=3$ 맞네요.

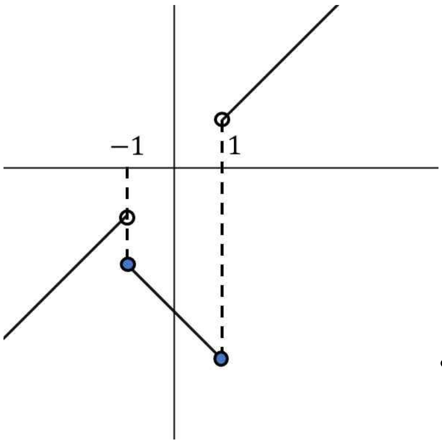
ㄴ에서 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이냐고 묻네요. 일단 $h(x)=g(x+) \times g(x+2+)$에서 $g(x)$는 다항함수의 조합으로 이루어져 있어요. 다시 말하면 함수가 바뀌는 지점이 아니면 무조건 연속이라는 거죠. 일단

$g(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 함수가 바뀌죠? 따라서 이 지점에서만 확인하면 됩니다. 그런데 $h(x)=g(x+) \times g(x+2+)$이므로 우리가 확인해야 할 부분은 $x=-3$, $x=-1$, $x=1$입니다.

$x=-3$의 경우 좌극한값은 $-3 \times -1=3$인데 함숫값과 우극한값은 $-3 \times f(-1)$입니다. 음..?
$x=-1$의 경우 좌극한값은 $f(-1) \times f(1)$이고 함숫값과 우극한값은 $f(-1) \times 1=f(-1)$입니다.
$x=1$의 경우 좌극한값은 $f(1) \times 3=3f(1)$이고 함숫값과 우극한값은 $1 \times 3=3$입니다.
이게 연속이 되려면 $f(-1)=-1$이고 $f(1)=1$이어야 하는데 그렇다는 보장이 없죠? ㄴ은 맞지 않습니다.

ㄷ에서 $g(x)$가 $[-1,\ 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$이면 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖냐고 물어보네요. 일단 $-1 \le x \le 1$에서 $g(x)=f(x)$이잖아요? 그러니까 사실상 $-1 \le x \le 1$에서 $g(x)=f(x)$가 감소하는 거네요.

그리고 $g(-1)=f(-1)=-2$입니다. 이걸 그래프로 대충 표현하면



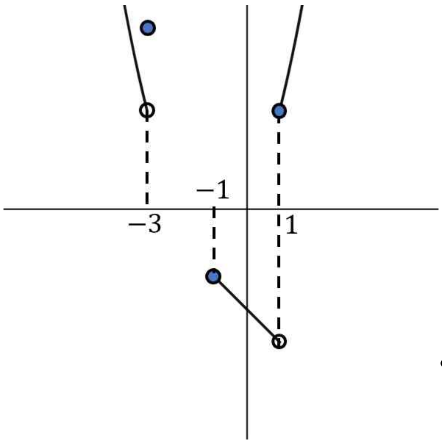
이렇게 되는 거죠?($-1 < x < 1$에서 $g(x) = f(x)$는 일차함수가 아닐 수 있습니다! 그냥 아무렇게나 그린 거예요!)

이때 $h(-3-) = h(1) = 3$이고, $x < -3$보다 작을 때는 $h(x) = x(x+2)$이니까 함수가 꾸준히 감소하므로 $x = -3$일 때가 최소이고, $x > 1$일 때는 $h(x) = x(x+2)$이니까 함수가 꾸준히 증가하므로 $x = 1$일 때가 최소입니다. 그러니까 우리의 관건은 $-3 \le x \le 1$의 범위에서 $h(-3-) = h(1) = 3$보다 작아지는 부분이 나오는가네요.

먼저 $-3 \le x < -1$일 때 $h(x) = xf(x+2)$입니다. $h(-3) = 6$인데 $h(x) = xf(x+2)$에서 $(-)$인 $f(x+2)$에 $(-)$인 x가 곱해진 형태니까 곱하면 무조건 양수가 됩니다.

$-1 \le x < 1$일 때는 $h(x) = (x+2)f(x)$이구요. $h(-1) = f(-1) = g(-1) = -2$입니다. 이때 $(-)$인 $f(x)$와 $(+)$인 $x+2$가 곱해진 형태니까 무조건 음수이고, $h(x) = (x+2)f(x)$를 미분하면 $h'(x) = f(x) + (x+2)f'(x)$인데 음수인 $f(x)$와 음수인 $(x+2)f'(x)$를 더했으니까 음수입니다. 따라서 감소합니다.

결국 최소가 되는 부분은 $-1 \le x < 1$에 있겠네요. 여기 빼고는 전부 양수니까요. 이때 $-1 \le x < 1$에서 계속 감소하니까 $x = 1$ 부근을 확인해보면 됩니다. 문제는 $-1 \le x < 1$에서 $h(x) = (x+2)f(x)$의 범위에 $x = 1$이 포함되어 있지 않다는 거예요. 그러니까 $h(x) = (x+2)f(x)$는 $x = 1$에서 좌극한값만 존재하고 함수값이 정의되지 않습니다.



이런 느낌이 되는 거죠. $-1 \le x < 1$의 범위에서 $x=1$에서 좌극한값만 존재하고 텅 비어 있죠? 따라서 최솟값은 존재하지 않습니다. ㄷ은 옳지 않네요. 따라서 옳은 것은 ㄱ이고 답은 ①번입니다.

4. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? 〔2023학년도 수능 15〕

> (가) $a_7 = 40$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1}\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \dfrac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$
> 이다.

① 216 ② 218 ③ 220 ④ 222 ⑤ 224

4. 정답 ⑤ 〔2023학년도 수능 15〕

1) 조건해석, 자연수 보이면 숫자 넣기

모든 항이 자연수이고 조건을 만족시키는 a_9의 최댓값과 최솟값의 합을 구하랍니다.

(가)조건에서 $a_7 = 40$이고 (나)조건에서 $a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$ 이라네요.

일단 핵심은 3의 배수인지 아닌지의 여부에요. 천천히 숫자 넣어봅시다. 우리가 아는 건 a_7이고 구해야 하는 건 a_9에요. 앞으로 나가면 된다는 거죠.

$n = 6$을 넣으면 $a_8 = \begin{cases} a_7 + a_6 & (a_7\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_7 & (a_7\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$ 입니다. 그런데 $a_7 = 40$이니까 3의 배수가 아니잖아요? 따라서 $a_8 = a_6 + 40$입니다. a_8을 알기 위해서는 a_6을 알아야 해요. $n = 5$를 넣어보죠.

$40 = a_7 = \begin{cases} a_6 + a_5 & (a_6\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_6 & (a_6\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$ 입니다. 여기서 경우가 나뉘네요.

2) 케이스 분류

2-1) a_6이 3의 배수일 때

만약 a_6이 3의 배수라면? $40 = \frac{1}{3}a_6$이고 $a_6 = 120$입니다. 그러면 $a_8 = 160$이고 3의 배수가 아니게 되니까 $a_9 = a_8 + a_7 = 200$이 되네요. 일단 하나 구했어요.

2-2) a_6이 3의 배수가 아닐 때

a_6이 3의 배수가 아니라면? $a_7 = 40 = a_6 + a_5$입니다. 이러면 $a_8 = a_6 + 40$와 연립해서 $a_8 = 80 - a_5$가 되네요.

또다시 a_5를 확인해야겠어요. $a_6 = \begin{cases} a_5 + a_4 & (a_5\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_5 & (a_5\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$ 입니다.

2-2-1) a_5가 3의 배수일 때

a_5가 3의 배수라면 $a_6=\frac{1}{3}a_5$이죠. $a_5=3a_6$인 건데 $40=a_6+a_5$이니까 $a_6=10$, $a_5=30$이고 $a_8=50$이고, 3의 배수가 아니니까 $a_9=a_8+a_7=90$입니다.

2-2-2) a_5가 3의 배수가 아닐 때

a_5가 3의 배수가 아니라면? $a_6=a_5+a_4$이고 $40=a_6+a_5$이니까 $40=2a_5+a_4$이고, $a_8=80-a_5$이므로 $-20+\frac{1}{2}a_4=-a_5$이고 $a_8=60+\frac{1}{2}a_4$입니다.

2-2-2-1) a_4가 3의 배수일 때

$a_5=\frac{1}{3}a_4$이고 $3a_5=a_4$인데 $a_6=4a_5$이고 $40=5a_5$이므로 $a_5=8$입니다. $a_4=24$이고

$a_8=60+\frac{1}{2}a_4=72$이네요. a_8이 3의 배수이므로 $a_9=\frac{1}{3}a_8=24$입니다.

2-2-2-2) a_4가 3의 배수가 아닐 때

$a_5=a_4+a_3$입니다. 여기서 주목해야 하는 부분이 있어요. 바로 $a_7(=40)$, a_6, a_5, a_4가 연속으로 3의 배수가 아니라는 점이죠. 3의 배수가 아니라면 가능성은 두 개입니다. 먼저 $3k+1$의 형태로 표현되든가, $3k+2$의 형태로 표현되는가 하는 거죠.

여기서 만약 $a_6=3k+1$의 형태라면, $40=a_6+a_5$에 의해 $a_5=39-3k=3(13-k)$로 a_5가 3의 배수가 되어버립니다. 따라서 불가능하죠. 따라서 $a_6=3k+2$입니다.

그러면 $a_5=38-3k$이고 $a_6=a_5+a_4$이므로 $a_4=6k-36=3(2k-12)$로 a_4가 3의 배수가 되어버립니다. 모순이 발생하는 거죠. 따라서 이 경우는 애초부터 불가능합니다.

구하는 a_9의 최댓값은 200, 최솟값은 24이므로 합은 224입니다. 답은 ⑤번이네요.

5. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \left|3^{x+2}-n\right| & (x<0) \\ \left|\log_2(x+4)-n\right| & (x\geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.
〔2023학년도 수능 21〕

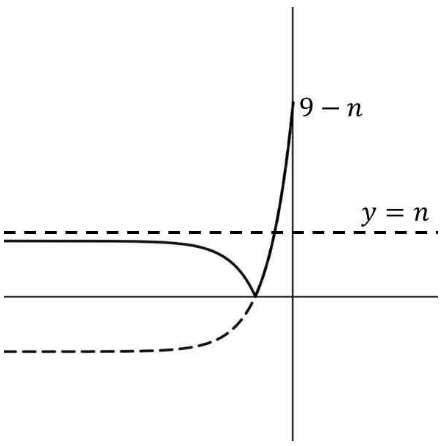
5. 정답 33 〔2023학년도 수능 21〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 자연수 보이면 숫자 넣기, 절댓값 함수

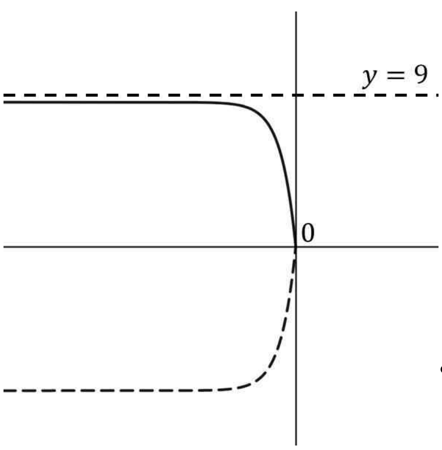
n이 자연수인데 $f(x)=\begin{cases} |3^{x+2}-n| & (x<0) \\ |\log_2(x+4)-n| & (x \ge 0) \end{cases}$ 가 있답니다. 이때 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 $g(t)$인데 $g(t)$의 최댓값이 4가 되게 하는 n을 구하랍니다.

이건 결국 $y=f(x)$과 $y=t$가 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값이 4가 되게 하는 n의 값을 구하라는 거죠? 일단 $y=f(x)$의 그래프부터 알아야겠어요.

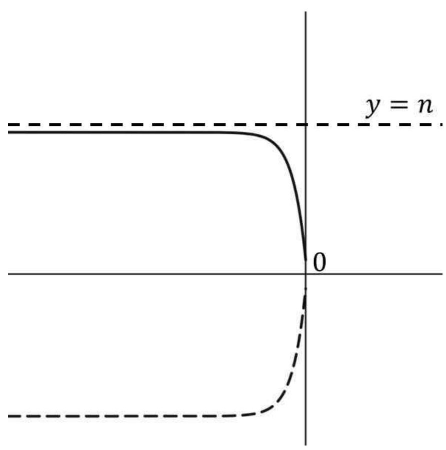
일단 $x<0$ 부분에서는 $f(x)=|3^{x+2}-n|$입니다. 일단 점근선이 $y=0$이고 $(0,\ 9)$를 지나는 3^{x+2}를 n만큼 아래로 내린 함수를 절댓값을 씌워 접어 올린 함수입니다. 그러니까 점근선은 $y=n$이 되겠네요.



그런데 한 가지 문제가 있어요. 만약에 $n=9$이 되어 원점을 지난다면?

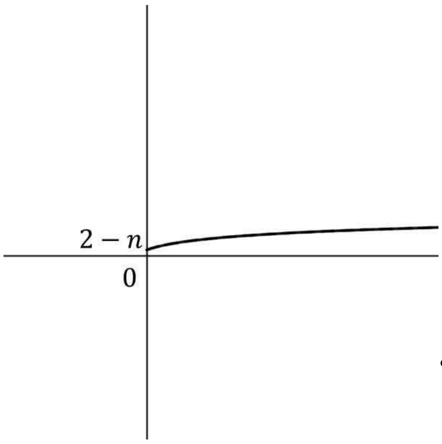


이렇게 되고 $n>9$면



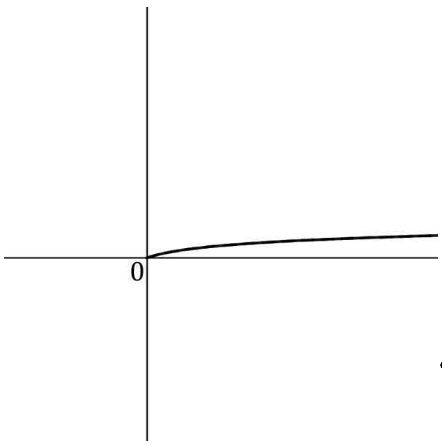
이렇게 됩니다. 일단 이거 하나 조심해야겠어요.

이제 $x \geq 0$ 부분도 확인해봅시다. $f(x) = \left|\log_2(x+4) - n\right|$인데 이건 점근선이 $x = -4$이고 $(-3,\ 0)$, $(0,\ 2)$을 지나는 $\log_2(x+4)$를 n만큼 아래로 내리고 절댓값으로 접어 올린 함수입니다. 그래프로 보면

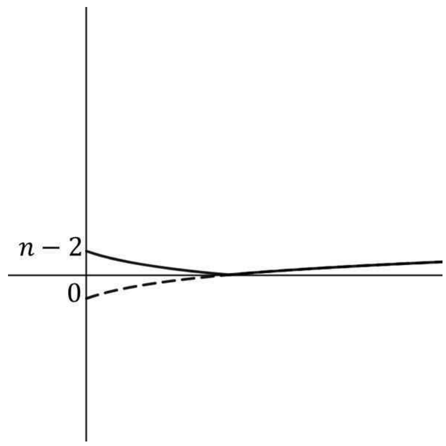


이렇게 되는 거죠.

그런데 이것도 마찬가지로 원점을 지나게 되는 $n = 2$가 되면



이렇게 되고 $n > 2$이면



이렇게 됩니다.

아까 $y = t$와 만나는 점의 개수의 최댓값이 4가 되어야 한다고 했었죠? 지금 $x = 0$을 기준으로 왼쪽과 오른쪽의 함수는 각각 최대 2개까지 만날 수 있어요. 바로 함수가 접혀 올라갈 때이죠. 왼쪽은 $n < 9$일 때, 오른쪽은 $n > 2$일 때 가능합니다. 이 두 조건이 겹칠 때 $2 + 2 = 4$가 되겠네요. 따라서 n은 $2 < n < 9$이어야 하고 모든 n의 합은 $3+4+5+6+7+8 = 33$입니다.

6. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. 〔2023학년도 수능 22〕

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.
(나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\dfrac{5}{2}$이다.
(다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

6. 정답 13 〔2023학년도 수능 22〕

1) 조건해석

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 $g(x)$는 연속함수이라고 하네요. $f(4)$의 값을 구하랍니다.

(가)조건에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$라고 합니다. 일단 식 해석이 필요할 것 같네요.

먼저 $x=1$이 반복적으로 제시되고 있죠? $f(1)$도 있고, $(x-1)$도 있어요. $x=1$이 핵심이라는 말이에요. 또한 $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$는 항등식이에요. 양변에 같은 걸 더하고 빼도, 곱하고 나눠도 같다는 말이죠. 미분해도 같지만, 합성함수는 함부로 미분하지 않는 게 좋아요.

가장 익숙한 형태로 바꿔야 합니다. $x=1$이 반복적으로 있으니까 $x=1$과 관련한 애들끼리 모아볼까요? $f(1)$을 왼쪽으로 보내고 양변을 $(x-1)$로 나누면 $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(g(x))\,(x\neq 1)$이 됩니다.

일단 해석부터 해볼게요. 왼쪽의 식은 점 $(1,\ f(1))$과 점 $(x,\ f(x))$의 평균변화율(기울기)이죠? 오른쪽의 식은 $x=g(x)$에서의 접선의 기울기이구요. 이 둘이 모두 같다고 합니다. 일단 좀 더 조건을 봐야겠어요.

그리고 $f'(x)$와 $g(x)$ 모두 연속이죠? $x\neq 1$이니까 $x=1$에서의 극한값을 구해보고 싶지 않나요? 가보죠. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=f'(g(1))$입니다. $g(1)=1$일수도 있지만? 문제는 $f'(x)$는 이차함수라서 대칭축에 반대부분에 또다른 값이 있을 수 있어요.

예를 들어 $g(x)=(x-1)(x-2)$와 $y=2$가 만난다고 할 때 $g(0)=2$이지만 $g(3)=2$이잖아요? $g(x)=2$를 만족시키는 x값이 두 개일 수 있는 거죠. 마찬가지로 $f'(1)=k$라 할 때 $f'(x)=k$를 만족시키는 건 $x=1$도 있을 수 있지만 대칭축 반대부분에 있는 값(가령 $x=m$)도 가능할 수 있습니다.

(나)조건에서 $g(x)$의 최솟값이 $\dfrac{5}{2}$라고 합니다. $g(1)=1$는 절대로 안 되네요. 그러면 $g(1)$은 1과 대칭축에 대하여 서로 대칭되는 부분에 있는 값입니다. 대칭축을 $x=a$라 하면 $g(1)=2a-1\geq\dfrac{5}{2}$이고 $a\geq\dfrac{7}{4}$이네요.

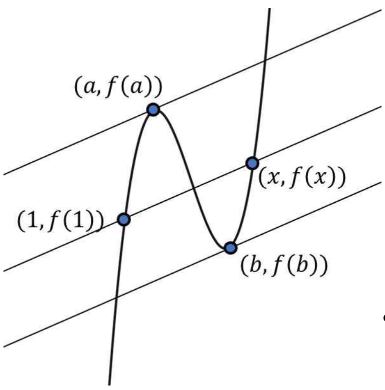
(다)조건에서 $f(0)=-3,\ f(g(1))=6$이라고 하네요. 여기서 생각해볼게요. 먼저 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)$를 만족시키는 c가 $1<c<x$ 혹은 $x<c<1$에 있어야 합니다.($x>1$일 수도 있고 $x<1$일 수도 있으니까요.)

그런데 문제는 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)=f'(g(x))$이라는 거죠. 아까 전과 마찬가지로 $g(x)=c$일 수도 있지만 반대편에 있는 $g(x)=2a-c$일 수도 있습니다. 그래프를 그려서 이해해볼까요?

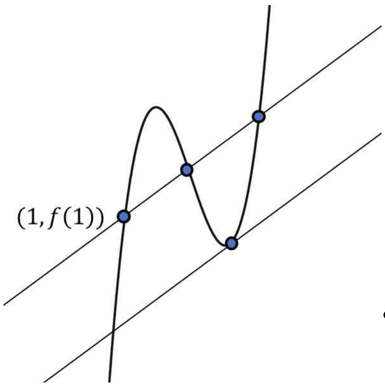
2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

일단 무조건 $x=1$이 대칭축의 x좌표인 $x=a$(변곡점의 x좌표이기도 하죠)보다 왼쪽에 있어야 합니다. 그 이유는 (나)조건 보면서 확인했었죠? 개형은 지렁이 모양으로 잡아볼게요.

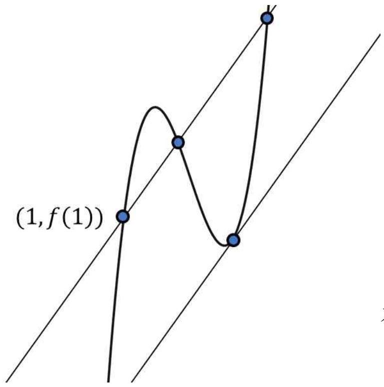


이렇게 $(1,\ f(1))$과 $(x,\ f(x))$를 잡아보면 만족시키는 x값이 두 개가 나옵니다. 그런데 $(a,\ f(a))$는 불가능해요. 왜냐하면 우리는 무조건 변곡점의 x좌표보다 큰 부분에 있는 x값을 설정해야 하거든요. 아까 $x=1$에서의 극한값을 구할 때 대칭축 반대편에 있는 $2a-1$를 $g(x)$로 설정했잖아요? 이때 $g(x)$는 연속이므로 값이 갑자기 확 변해서는 안 됩니다. 다시 말하면 대칭축 반대편에 있는 특성이 계속 유지되어야 한다는 거죠. 여기서 $(a,\ f(a))$도 가능하게 되면 $g(x)$의 값이 두 개가 되어서 불연속이 되기도 하구요.

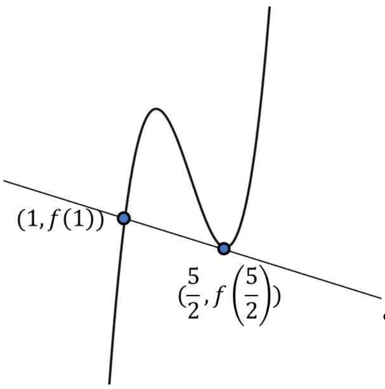
그러니까 위에서 말한 것처럼 $g(x)$는 1과 x 사이에 있는 c가 아니라 대칭축 반대편에 있는 $2a-c$가 되어야 합니다. 이제 점 $(x,\ f(x))$을 막 조정해보세요. 언제가 최소일까요?



이렇게도 해보고,



저렇게도 해보면 결국



이렇게 될 때가 최소가 됩니다. 결국 $x=\frac{5}{2}$에서의 접선은 $x=1$에서 만나야 하는 거죠.

이때 삼차함수의 비율관계에 의하여 변곡점의 x좌표는 $x=1$과 $x=\frac{5}{2}$의 $2:1$내분점이므로 $x=2$입니다.

$a=2$이네요. 그러면 $g(1)=3$이고 $f(3)=6$입니다.

일단 $x=\frac{5}{2}$에서의 접선은 $y=f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)$이죠? 따라서 차함수에 의하여

$f(x)-f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)-f\left(\frac{5}{2}\right)=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$이고 $f(x)=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)$입니다.

이때 $f(0)=-3$이니까 $f(0)=-\frac{25}{4}-\frac{5}{2}f'\left(\frac{5}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)=-3$이고 $f(3)=6$이니까

$f(3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f'\left(\frac{5}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)=6$입니다. 둘을 연립하면 $f'\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{4}$이고 $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{41}{8}$입니다. 정리하면

$f(x)=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(x-\frac{5}{2}\right)+\frac{41}{8}$이고 $f(4)=13$입니다.

확통

7. 앞면에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있고 뒷면에는 모두 0이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드가 그림과 같이 6 이하의 자연수 k에 대하여 k번째 자리에 자연수 k가 보이도록 놓여 있다.

이 6장의 카드와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k이면 k번째 자리에 놓여 있는 카드를 한 번 뒤집어 제자리에 놓는다.

위의 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수일 때, 주사위의 1의 눈이 한 번만 나왔을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)
〔2023학년도 수능 확통 29〕

7. 정답 49 〔2023학년도 수능 확통 29〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

그림이 있는데 그림과 같이 앞면에는 1부터 6까지의 자연수가 각 자리에 있고, 뒷면에는 모두 0이 적혀 있다고 하네요. 이때 k번째 자리에 자연수 k가 보이도록 놓여 있어요.

이때 주사위를 던져서 k가 나오면 k번째 자리의 카드를 한 번 뒤집는다고 합니다. 이걸 3번 반복해서 6장의 카드에 보이는 수의 합이 짝수일 때, 1의 눈이 한 번만 나왔을 확률을 구하라네요. 일단 구하는 확률은 $\dfrac{\text{1의 눈 한 번만}}{\text{시행 3번 모든 수의 합 짝수}}$ 이죠?

일단 분모부터 구해볼게요. 합이 짝수가 되려면 어떻게 해야 할까요? 지금 홀수는 1, 3, 5로 3개, 짝수는 2, 4, 6으로 3개입니다. 합이 짝수가 되려면 홀수는 짝수개 있어야 합니다. 짝수는 어차피 상관없어요.

근데 지금은 모두 앞면인 상태잖아요? 그러니까 홀수를 홀수 번 뒤집어야 한다는 거죠. 따라서 가능한 경우는 뒤집는 횟수를 기준으로 홀1짝2이거나 홀3입니다.

먼저 홀1짝2의 경우 뒤집고 순서만 조정해주면 됩니다. 홀수를 고를 확률은 $\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$이고 짝수를 고를 확률도 마찬가지이므로 확률은 ${}_3C_1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{3}{8}$이네요.

홀3의 경우 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$입니다. 따라서 분모는 $\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2}$이네요.

이제 분자를 구해봅시다. 1의 눈이 한 번만 나와야 해요. 바로 위에서 봤었던 각각의 경우에 대하여 1의 눈이 한 번만 나오도록 해보죠.

먼저 홀1짝2의 경우 뒤집는 홀수는 무조건 1이 되어야 합니다. 이건 확률이 $\dfrac{1}{6}$이네요. 따라서 구하는 확률은 ${}_3C_1\times\left(\dfrac{1}{6}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{8}$입니다.

홀3의 경우는 뒤집는 홀수는 1 하나랑, 나머지 2번은 3, 5 중에서 고르면 됩니다. 따라서

${}_3C_1 \times \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{1}{18}$입니다. 따라서 분자는 $\frac{1}{8}+\frac{1}{18}=\frac{13}{72}$이네요. 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{13}{72}}{\frac{1}{2}}=\frac{13}{36}$입니다.

$p=36,\ q=13$이므로 $p+q=49$입니다.

8. 집합 $X=\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오.
〔2023학년도 수능 확통 30〕

(가) 9 이하의 모든 자연수 x에 대하여 $f(x) \le f(x+1)$이다. (나) $1 \le x \le 5$일 때 $f(x) \le x$이고, $6 \le x \le 10$일 때 $f(x) \ge x$이다. (다) $f(6)=f(5)+6$

8. 정답 100 〔2023학년도 수능 확통 30〕

1) 조건해석

$X=\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$인데 조건을 만족시키는 $f: X \rightarrow X$의 개수를 구하랍니다.

(가)조건에서 9 이하의 모든 자연수에 대하여 $f(x) \leq f(x+1)$라고 하네요. 그러면
$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5) \leq f(6) \leq f(7) \leq f(8) \leq f(9) \leq f(10)$이네요? 일단 이것만 보면 중복조합이 떠올라요. 중복을 허용해서 골라만 놓으면 자동으로 작은 순서대로 $f(1)$, $f(2)$, $\cdots$가 되는 거죠.

(나)조건에서 $1 \leq x \leq 5$일 때 $f(x) \leq x$이고, $6 \leq x \leq 10$일 때 $f(x) \geq x$이라고 합니다. 그러니까
$f(1) \leq 1$, $f(2) \leq 2$, $f(3) \leq 3$, $f(4) \leq 4$, $f(5) \leq 5$이고
$f(6) \geq 6$, $f(7) \geq 7$, $f(8) \geq 8$, $f(9) \geq 9$, $f(10) \geq 10$이라는 거죠? $f(1)=1$, $f(10)=10$은 확정이네요.

일단 조건을 봤을 때 1, 2, 3, 4, 5랑 6, 7, 8, 9, 10이 나뉘네요? 각각 따로 생각해야겠어요.

(다)조건에서 $f(6)=f(5)+6$이라고 합니다. 여기가 핵심이네요. 1, 2, 3, 4, 5랑 6, 7, 8, 9, 10의 분기점인 5, 6에 대한 조건을 줬어요. 그러면 당연히 얘네 둘을 기준으로 잡고 가야겠죠?

일단 $f(6)$이 10을 넘을 수는 없으니까 가능한 경우는 $f(5)=4$, $f(5)=3$, $f(5)=2$, $f(5)=1$ 이렇게 4가지네요. 각각 가봅시다.

2) 케이스 분류

2-1) $f(5)=4$

$f(6)=10$입니다. $1 \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq 4 \leq 10 \leq f(7) \leq f(8) \leq f(9) \leq 10$이죠? 일단
$f(7)=f(8)=f(9)=10$입니다. $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 조합만 신경 쓰면 되겠네요.

문제는 $f(2) \leq 2$, $f(3) \leq 3$, $f(4) \leq 4$도 만족시켜야 한다는 거예요. 이러면 그냥 일일이 조합을 찾는 게 더 낫겠어요. 가봅시다. $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 순서대로
111, 112, 113, 114, 122. 123, 124, 133, 134, 222, 223, 224, 233, 234
이렇게 총 14개입니다.

2-2) $f(5)=3$

$f(6)=9$입니다. $1 \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq 3 \leq 9 \leq f(7) \leq f(8) \leq f(9) \leq 10$이네요. 여기부터는

$f(7)$, $f(8)$, $f(9)$의 조합도 신경 써줘야 합니다.

$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$부터 해보면 111, 112, 113, 122, 123, 133, 222, 223, 233 이렇게 9개이고,

$f(7)$, $f(8)$, $f(9)$은 999, 9910, 91010, 101010 이렇게 4개입니다. 따라서 $9 \times 4 = 36$이네요.

2-3) $f(5) = 2$

$f(6) = 8$이고 $1 \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq 2 \leq 8 \leq f(7) \leq f(8) \leq f(9) \leq 10$입니다. 그런데 이거는 사실상 2-2)를 반대로 뒤집은 경우 아닌가요? 따라서 경우의 수는 36입니다.

2-4) $f(5) = 1$

$f(6) = 7$이고 $1 \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq 1 \leq 7 \leq f(7) \leq f(8) \leq f(9) \leq 10$입니다. 이 역시 2-1)를 반대로 뒤집은 경우가 됩니다. 따라서 14입니다.

함수의 개수는 $14 + 36 + 36 + 14 = 100$이네요.