수학 영역

KSM

제 2 교시

5지선다형

1. $2^{\frac{7}{3}} \times 16^{\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

$2^{\frac{7}{3}} \times 2^{\frac{8}{3}} = 2^5$

2. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_7 - a_2$의 값은? [2점]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

$5d = 15$

3. $\log_{81} 12 - \log_{81} 4$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

$\log_{81} 3 = \frac{1}{4}$

4. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$2x+1 \le f(x) \le (x+1)^2$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x\to 0}(x+5)f(x)$의 값은? [3점]

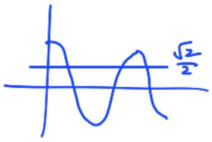
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$5 \times 1 = 5$

5. $0 \le x \le 3\pi$일 때, 방정식 $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$의 모든 해의 합은? [3점]

① $\frac{15}{4}\pi$ ② 4π ③ $\frac{17}{4}\pi$ ④ $\frac{9}{2}\pi$ ⑤ $\frac{19}{4}\pi$

$c = \frac{\sqrt{2}}{2}$



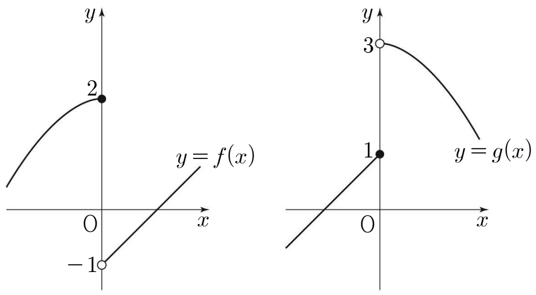
$\frac{\pi}{4} + \frac{7}{4}\pi + \frac{9}{4}\pi = \frac{17}{4}\pi$

6. 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 3$일 때, $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 1}{\{f(x)\}^2 + 3x^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{\frac{f^2}{x^2} + 3} = \frac{2}{9+3} = \frac{1}{6}$

7. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0} \{f(x) + kg(x)\}$의 값이 존재할 때, 상수 k의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$0^- \to 2 + k$

$0^+ \to -1 + 3k$ ⇒ $2k = 3$, $k = \frac{3}{2}$

8. 함수 $f(x)=\log_a(3x+1)+2$가 닫힌구간 $[0, 5]$에서 최솟값 $\frac{2}{3}$를 가질 때, a의 값은? (단, a는 1이 아닌 양의 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{32}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 2 ⑤ 8

$a>1$

$0 \to \log_a 1 + 2 = 2$ (×)

$0<a<1$

$5 \to \log_a 16 + 2 = \frac{2}{3}$

$\log_a 16 = -\frac{4}{3}$

$a^{-\frac{4}{3}} = 16 = 2^4$, $a = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

9. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x-1)f(x) = \sqrt{x^2+3}+a$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

$x=1 \to 0 = 2+a$, $a=-2$

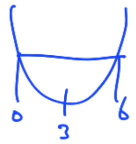
$x \neq 1 \to f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$

연속 $\Rightarrow f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

10. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 6까지 변할 때의 평균변화율이 0일 때, $f'(4)$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10



$f = (x-3)^2 + k$

$f' = 2(x-3)$, $f'(4) = 2$

11. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}=6$일 때, $\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}$의 값은? [3점]

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

$2f'(1)=6,\ f'(1)=3$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times(x^2+x+1)=3f'(1)=9$

12. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=1$, $a_{10}=4$이고 $\sum_{k=1}^{9}(a_k+a_{k+1})=25$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}$

$+\ )\ a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}$

$25+1+4=2\sum_{k=1}^{10}a_k=30$

$\sum_{k=1}^{10}a_k=15$

13. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{P}(a, b)$, $\mathrm{Q}(a^2, -2b^2)\,(a>0,\ b>0)$이 있다. 두 동경 OP, OQ가 나타내는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하자. $\tan\theta_1+\tan\theta_2=0$일 때, $\sin\theta_1$의 값은?
(단, O는 원점이고, x축의 양의 방향을 시초선으로 한다.) [3점]

① $\frac{2}{5}$　② $\frac{\sqrt{5}}{5}$　③ $\frac{\sqrt{6}}{5}$　④ $\frac{\sqrt{7}}{5}$　⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

$\left(\begin{array}{l}\tan\theta_1=\frac{b}{a}\\ \tan\theta_2=\frac{-2b^2}{a^2}\end{array}\right)$　$\frac{ab-2b^2}{a^2}=0$

$b(a-2b)=0$

$a=2b\ (\because b>0)$

$P(2b, b)$

$\sin\theta_1=\frac{b}{\sqrt{5}b}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

14. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-4 & (a_n\geq 0) \\ a_n{}^2 & (a_n<0) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{22} a_k$의 값은? [4점]

① 50　② 54　③ 58　④ 62　⑤ 66

$a_1=1$
$a_2=-3$
$a_3=9$
$a_4=5$　12
$a_5=1$

$12\times5+1-3$
$=58$

15. 모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{20} a_k + \sum_{k=1}^{10} a_{2k} = 0$$

이 성립한다. $a_3 + a_4 = 3$일 때, a_1의 값은? [4점]

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

$$\frac{a(r^{20}-1)}{r-1} + \frac{ar((r^2)^{10}-1)}{r^2-1} = 0$$

$$\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}\left(1 + \frac{r}{r+1}\right) = 0, \quad \frac{r}{r+1} = -1, \quad r = -\frac{1}{2}$$

$$a_3 + a_4 = \frac{1}{4}a - \frac{1}{8}a = 3$$

$$a = 24$$

16. $3\sin^2\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = 8\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$일 때, $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$의 값은? [4점]

t

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

$$3\sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{3} + \pi\right) = 8\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$3\sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 8\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$3(1-t^2) = 8t, \quad 3t^2 + 8t - 3 = 0$$

$$(3t-1)(t+3) = 0$$

$$t = \frac{1}{3} \quad (\because -1 \le t \le 1)$$

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2-2x+2)f(x)$$

라 하자. $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-1}{2f(x)-1}=-2$일 때, $g'(2)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

$g(2)=2f(2)$

if) $g(2)-1\neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{g(x)-1}{2f(x)-1}=1\neq -2$

$\therefore g(2)=1=2f(2)$

$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{2f(x)-2f(2)}=\frac{g'(2)}{2f'(2)}=-2$

$g'(2)=-4f'(2)$

$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x+2)f'(x)$

$g'(2)=2f(2)+2f'(2)=-4f'(2)$

$1=-6f'(2),\quad f'(2)=-\frac{1}{6}$

$g'(2)=-4f'(2)=\frac{2}{3}$

18. 1이 아닌 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$를

$f(x)=2^{\frac{1}{\log_2 x}}$이라 하자.

다음은 방정식 $8\times f(f(x))=f(x^2)$의 모든 해의 곱을 구하는 과정이다.

> $x\neq 1$인 모든 양의 실수 x에 대하여
>
> $f(f(x))=2^{\frac{1}{\log_2 f(x)}}$에서
>
> $8\times f(f(x))=2^{\left(\boxed{(가)}+\frac{1}{\log_2 f(x)}\right)}$이고, 3
>
> $f(x)=2^{\frac{1}{\log_2 x}}$에서 $\log_2 f(x)=\frac{1}{\boxed{(나)}}$이다. $\log_2 x$
>
> 방정식 $8\times f(f(x))=f(x^2)$에서
>
> $2^{\left(\boxed{(가)}+\boxed{(나)}\right)}=2^{\frac{1}{2\log_2 x}}$
>
> $\boxed{(가)}+\boxed{(나)}=\frac{1}{2\log_2 x}$
>
> 그러므로 방정식 $8\times f(f(x))=f(x^2)$의 모든 해는
>
> 방정식 $\left(\boxed{(가)}+\boxed{(나)}\right)\times 2\log_2 x=1$의
>
> 모든 해와 같다.
>
> 따라서 방정식 $8\times f(f(x))=f(x^2)$의 모든 해의 곱은
>
> $\boxed{(다)}$이다. $\frac{1}{8}$

위의 (가), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (나)에 알맞은 식을 $g(x)$라 할 때, $p\times q\times g(4)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

$(3+\log_2 x)(2\log_2 x)=1,\quad \log_2 x=t$

$2t^2+6t-1=0$

$\log_2\alpha+\log_2\beta=-3$

$\log_2\alpha\beta=-3,\quad \alpha\beta=2^{-3}=\frac{1}{8}$

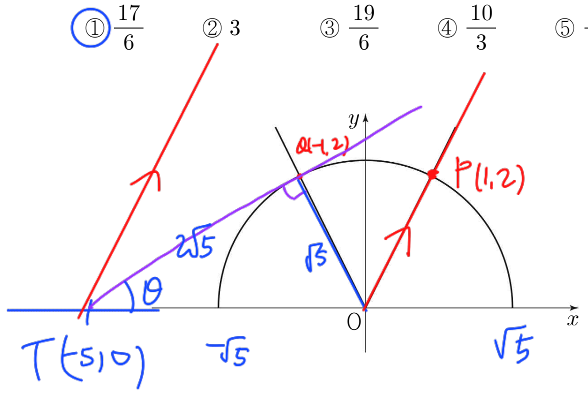
$\Rightarrow 3\times\frac{1}{8}\times\log_2 4=\frac{3}{4}$

19. 두 집합

$$A=\{(x,\ y)\ |\ x^2+y^2=5,\ y\geq 0\},$$
$$B=\{(x,\ y)\ |\ y=2|x|\}$$

에 대하여 좌표평면에서 집합 $A\cup B$가 나타내는 도형을 S라 하자. 양의 실수 m에 대하여 직선 $y=m(x+5)$가 도형 S와 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 할 때, 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(m)$은 $m=\alpha_1,\ m=\alpha_2,\ m=\alpha_3$에서만 불연속이다. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$의 값은? [4점]

① $\frac{17}{6}$ ② 3 ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{7}{2}$



$x^2+4x^2=5$ $x=1,-1$
$y=2,2$

P(1,2) Q(-1,2)

$\tan\theta=\frac{1}{2}$, T에서 S에 그은 접선의 접점: Q

TP 기울기 $=\frac{1}{3}$
TQ 기울기 $=\frac{1}{2}$
OP기울기 $=2$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2=\frac{17}{6}$

$$f(m)=\begin{cases}4 & (0<m<\frac{1}{3})\\ 3 & (m=\frac{1}{3})\\ 4 & (\frac{1}{3}<m<\frac{1}{2})\\ 2 & (\frac{1}{2}\leq m<2)\\ 1 & (m\geq 2)\end{cases}$$

20. 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원 C에 내접하는 삼각형 ABC에 대하여 ∠BAC의 이등분선이 원 C와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하고, 두 선분 BC, AD의 교점을 E라 하자. $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{3}$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

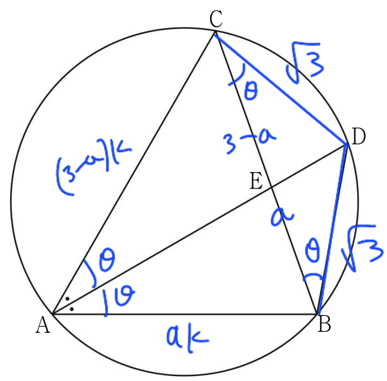
〈보 기〉

ㄱ. $\sin(\angle\mathrm{DBE})=\frac{1}{2}$

ㄴ. $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}+9$

ㄷ. 삼각형 ABC의 넓이가 삼각형 BDE의 넓이의 4배가 되도록 하는 모든 $\overline{\mathrm{BE}}$의 값의 합은 $\frac{9}{4}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



ㄱ. $\frac{\sqrt3}{\sin\theta}=2\sqrt3$, $\sin\theta=\frac{1}{2}$, $\theta=30°$, $\angle CBD=120°$

ㄴ. $\triangle BCD\rightarrow BC^2=3+3-2\cdot\sqrt3\cdot\sqrt3\cdot(-\frac{1}{2})=9$, $BC=3$

$\triangle ABC\rightarrow 9=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos60°$

$9=AB^2+AC^2-AB\cdot AC$, $AB^2+AC^2=AB\times AC+9$

ㄷ. $BE=a$, $CE=3-a$, $AB=ak$, $AC=(3-a)k$

(ㄴ) ⇒ $a^2k^2+(3-a)^2k^2=a(3-a)k^2+9$

$k^2(3a^2-9a+9)=9$, $k^2(a^2-3a+3)=3$

$\triangle ABC=5\times\triangle BDE$, $\cancel{\frac{1}{2}}a(3-a)k^2\times\frac{\cancel{\sqrt3}}{2}=4\times\cancel{\frac{1}{2}}\times\cancel{\sqrt3}a\times\frac{1}{2}$

$(3-a)k^2=4$, $\frac{1}{k^2}=\frac{3-a}{4}$

$a^2-3a+3=\frac{9-3a}{4}$, $4a^2-12a+12=9-3a$

$4a^2-9a+3=0$

$\alpha+\beta=\frac{9}{4}$ (>0)

21. 공차가 음수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

> $|a_m|=2|a_{m+2}|$이면서
> S_m, S_{m+1}, S_{m+2} 중에서 가장 큰 값이 460이고
> 가장 작은 값이 450이 되도록 하는 자연수 m이 존재한다.
> (단, S_n은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.)

① 144 ② 148 ③ 152 ④ 156 ⑤ 160

$d<0$ S_m, S_m+a_{m+1}, $S_m+a_{m+1}+a_{m+2}$

i) S_m S_{m+1} S_{m+2}
460, $460+a_{m+1}$, $460+a_{m+1}+a_{m+2}$ = 450, $a_{m+1}+a_{m+2}=-10$

$a_{m+1}<0$, $a_{m+2}<0$, $a_m<0$ 이면 $|a_m|\neq 2|a_{m+2}|$
$\therefore a_m>0$ $a_m=-2a_{m+2}$
$a_m=-2(a_m+2d)$, $3a_m=-4d$
$a_m+d+a_m+2d=-10$
$3a_m+3d=-10$, $d=10$ (×)

ii) S_m S_{m+1} S_{m+2}
$460-a_{m+1}$ 460 $460+a_{m+2}$
$a_{m+1}>0$, $a_{m+2}<0 \Rightarrow a_m>0$, $a_m=-2a_{m+2}$
$a_m=-2(a_m+2d)$, $3a_m=-4d$
$a_{m+1}=a_m+d=-\frac{d}{3}$ $a_m=-\frac{4}{3}d$
$a_{m+2}=-\frac{1}{2}a_m=\frac{2}{3}d$ $460+\frac{d}{3}>\underbrace{460+\frac{2d}{3}}_{=450}$
$d=-15$, $a_m=20$
$a+(m-1)(-15)=20$, $a-15m=5$, $a=15m+5$
$S_{m+1}=\frac{(m+1)(2a+md)}{2}=\frac{(m+1)(30m+10-15m)}{2}=460$
$=(m+1)(15m+10)=920$
$=(m+1)(3m+2)=184$, $m=7$
$\boxed{a_1=110}$

단답형

22. 함수 $f(x)=x^3-5x+8$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f'=3x^2-5$ $\boxed{7}$
$f'(2)=7$

23. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=2$, $a_6=9$일 때, $a_3\times a_5$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{18}$ $=a_2\times a_6=18$

iii) S_m S_{m+1} S_{m+2}
$\underbrace{460-a_{m+1}-a_{m+2}}_{450}$ $460-a_{m+2}$ 460
$a_{m+1}+a_{m+2}=10$, $a_{m+1}>0$, $a_{m+2}>0 \rightarrow a_m>0$
$\therefore$ $a_m=2a_{m+2}$
$a_m=2(a_m+2d)$, $a_m=-4d$
$(-4d+d)+(-4d+2d)=10$, $d=-2$
$a+(m-1)(-2)=8$
$a=2m+6$
$S_{m+2}=\frac{(m+2)(2a+(m+1)d)}{2}=460$
$\frac{(m+2)(2m+10)}{2}=460$, $(m+2)(m+5)=460$
20 23, $m=18$
$\boxed{a_1=42}$
$\therefore 110+42=152$

24. 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=\log_2(4x-b)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

$\boxed{14}$

$y=2^{x-a}+3$

역→ $2^{y-a}=x-3$

$y=\log_2(x-3)+a$

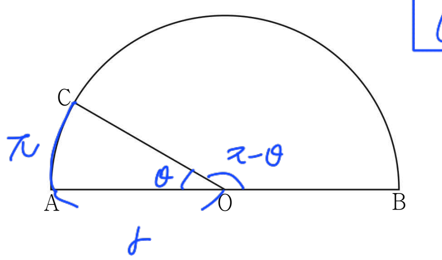
$=\log_2(4x-b)=\log_2 4\left(x-\frac{b}{4}\right)$

$=\log_2\left(x-\frac{b}{4}\right)+2$

$\frac{b}{4}=3,\ a=2,\ b=12$

25. 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 호 AC의 길이가 π이고 부채꼴 OBC의 넓이가 15π이다. 선분 OA의 길이를 구하시오. (단, 점 C는 점 A도 아니고 점 B도 아니다.) [3점]

$\boxed{6}$



$\begin{cases} \pi=r\theta \\ \frac{1}{2}r^2(\pi-\theta)=15\pi \end{cases}$

$r^2\pi-r^2\theta=30\pi,$

$r^2\pi-r\pi=30\pi$

$r^2-r-30=0$

$(r+5)(r-6)=0,\ r=6$

26. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $S_n=\dfrac{n}{2n+1}$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{a_k}$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{358}$

$a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$

$=\dfrac{n}{2n+1}-\dfrac{n-1}{2n-1}$

$=\dfrac{(2n^2-n)-(2n^2-n-1)}{(2n+1)(2n-1)}=\dfrac{1}{4n^2-1}$

$a_1=S_1=\frac{1}{3}\quad \therefore a_n=\dfrac{1}{4n^2-1}\ (n\geq 1)$

$\dfrac{1}{a_n}=4n^2-1$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(4k^2-1)=4\cdot\frac{6\cdot 7\cdot 13}{6}-6=358$

27. 일차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to-3}\frac{f(x)g(x)}{(x+3)^2}=4,\ \lim_{x\to-3}\frac{f(x)+g(x)}{x+3}=-4$$

일 때, $g(2)-f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{25}$

$f(x)=ax\sim$ $g(x)=x^2\sim$

$f(-3)g(-3)=0$
$f(-3)+g(-3)=0$ $\Rightarrow f(-3)=g(-3)=0$

$f(x)=a(x+3)$

$g(x)=(x+3)(x+b)$

$\lim_{x\to-3}\frac{a(x+3)(x+b)}{(x+3)^2}=a(-3+b)=4$

$\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x+b+a)}{x+3}=-3+b+a=-4$

$a+b=-1$

$a(-3-a-1)=4$

$-a^2-4a=4,\ a^2+4a+4=0$

$a=-2,\ b=1$

$g(x)=(x+3)(x+1),\ g(2)=15$

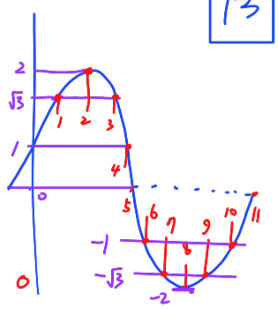
$f(x)=-2(x+3),\ f(2)=-10$

$g(2)-f(2)=25$

28. 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[0, n]$에서 함수 $y=2\sin\left\{\frac{\pi}{6}(x+1)\right\}$의 최댓값을 $f(n)$, 최솟값을 $g(n)$이라 할 때, 부등식 $2<f(n)-g(n)<4$를 만족시키는 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

$\boxed{13}$

주기 12



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$f(n)$	$\sqrt{3}$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	…
$g(n)$	1	1	1	1	0	-1	$-\sqrt{3}$	-2	-2	-2	…

$n=6,7$ $6+7=13$

29. 두 자연수 a, b에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x+5 & (x<5) \\ |2x-a| & (x \ge 5) \end{cases},$$

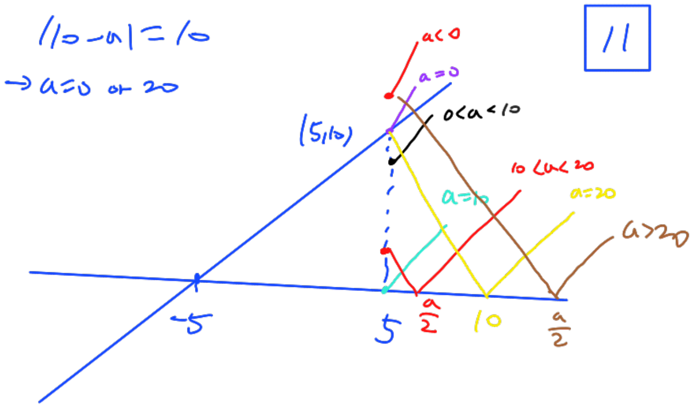
$$g(x)=(x-5)(x-b)$$

라 하자. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. [4점]

$\boxed{11}$

$|10-a|=10$

$\rightarrow a=0$ or 20



$a=10 \Rightarrow b=5$

$0<a<10 \Rightarrow b=5$

$a=20 \Rightarrow b=10$

11개

30. 양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 2^x+2^{-a}-2 & (x<a) \\ 2^{-x}+2^a-2 & (x \ge a) \end{cases}$$

라 할 때, 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 a의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

> 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 양수 k는 오직 하나뿐이다.

$2^{M+m}=p+\sqrt{q}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 자연수이다.) [4점]

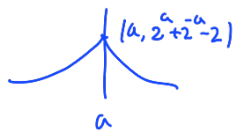
$\boxed{4}$

$a>0$ $\quad 2^{-a}<1 \rightarrow 2^{-a}-2<-1$

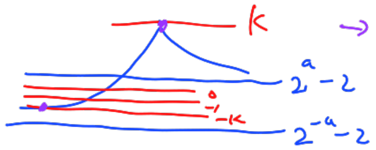
$2^a>1 \rightarrow$ $a>1 \rightarrow 2^a-2>0$, $a=1 \rightarrow 2^a-2=0$, $0<a<1 \rightarrow -1<2^a-2<0$

$f(x)=k$, $f(x)=-k$

$2^a+2^{-a}-2 \ge 0$



i) $a>1$

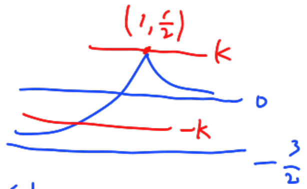


$\rightarrow 2^a+2^{-a}-2=k$

2=k, 0, -2=-k

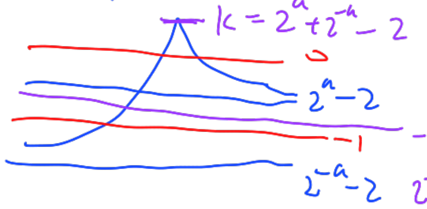
k는 따라서 존재 (x)

ii) $a=1$



$k=\frac{1}{2}$

iii) $0<a<1$



$2^{-a}-2<-k\le 2^a-2$

$2-2^a \le k < 2-2^{-a}$

$\quad\ \ \shortparallel$

$2^a+2^{-a}-2$

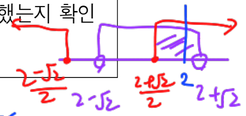
$2^a=t\ (t>0)$, $0<t<2$

$2-t \le t+\frac{1}{t}-2 < 2-\frac{1}{t}$

$2t+\frac{1}{t}-4\ge 0 \rightarrow 2t^2-4t+1\ge 0$, $t\le\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, $t\ge\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

$t+\frac{2}{t}-4<0 \rightarrow t^2-4t+2<0 \rightarrow 2-\sqrt{2}<t<2+\sqrt{2}$

$\frac{2\sqrt{2}}{2}$



$\therefore \frac{2+\sqrt{2}}{2}\le t<2$, $\frac{2+\sqrt{2}}{2}\le 2^a<2$

$\log_2\frac{2+\sqrt{2}}{2}\le a<1$

$M=1$, $m=\log_2\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

$2^{M+m}=2^{\log_2(2+\sqrt{2})}$

$=2+\sqrt{2}$, $p=2, q=2$

$p+q=4$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.