수학 영역

KSM

5지선다형

1. 두 다항식

$$A = x^2 + 2xy - 1,\ B = -2x^2 + xy + 1$$

에 대하여 $A+B$는? [2점]

① $-x^2-2xy$ ② $-x^2+3xy$ ③ $-x^2+3xy+2$
④ $x^2+2xy+1$ ⑤ x^2+3xy

2. 두 집합 $A=\{1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$에 대하여 $n(A-B)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 복소수 $z=2+i$의 켤레복소수가 $\bar{z}$일 때, $z+i\bar{z}$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [2점]

① $1-3i$ ② $1+i$ ③ $1+3i$
④ $3-i$ ⑤ $3+3i$

$\bar{z}=2-i$, $2+i+i(2-i)$

$= 2+i+2i+1 = 3+3i$

4. 부등식 $|x-2| \le 3$을 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

$-3 \le x-2 \le 3$

$-1 \le x \le 5$ 7개

5. 좌표평면 위의 두 점 $(-2, 5)$, $(1, 1)$을 지나는 직선의 y절편은? [3점]

① 2 ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

$기 = \frac{1-5}{1-(-2)} = -\frac{4}{3}$

$y = -\frac{4}{3}(x-1)+1$

$(0, \frac{7}{3})$

6. 등식 $2x^2+ax+1=(bx+1)(x+1)$이 x에 대한 항등식일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$bx^2+(b+1)x+1$

$b=2$

$a=b+1=3$

7. 연립부등식

$$\begin{cases} 2x-6 \geq 0 \\ x^2-8x+12 \leq 0 \end{cases}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은? [3점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ (x-2)(x-6) \leq 0, \quad 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

$3 \leq x \leq 6 \to 3+4+5+6=18$

8. 집합 $X=\{0,2,4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & (x<2)\\ x^2+ax+b & (x\geq 2)\end{cases}$$

가 상수함수일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

$0 \to 2$

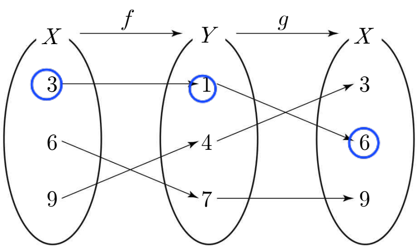
$2 \to 4+2a+b=2$

$- \quad 4 \to 16+4a+b=2$

$-12-2a=0$, $a=-6$

$b=10$

9. 그림은 두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$를 나타낸 것이다.



$(g\circ f)(3)+(g\circ f)^{-1}(9)$의 값은? [3점]

① 6　　② 9　　③ 12　　④ 15　　⑤ 18

$g(f(3))=g(1)=6$

$(g\circ f)^{-1}(9)=k$

$(g\circ f)(k)=9$, $k=6$

$6+6=12$

10. 좌표평면에서 두 점 $(-3,0)$, $(1,0)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원과 직선 $kx+y-2=0$이 오직 한 점에서 만나도록 하는 양수 k의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$　　② $\frac{2}{3}$　　③ 1　　④ $\frac{4}{3}$　　⑤ $\frac{5}{3}$

중심 $(-1,0)$

반지름 $r=2$

$d=r$

$\frac{|-k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$, $(k+2)^2=4(k^2+1)$

$3k^2-4k=0$

$k=\frac{4}{3}$

11. 삼차방정식 $x^3+(k+1)x^2+(4k-3)x+k+7=0$은 서로 다른 세 실근 1, α, β를 갖는다. $|\alpha-\beta|$의 값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

$x=1 \to 1+k+1+4k-3+k+7=0$

$6k+6=0,\ k=-1$

$x^3-7x+6=0$

$(x-1)(x^2+x-6)=0$

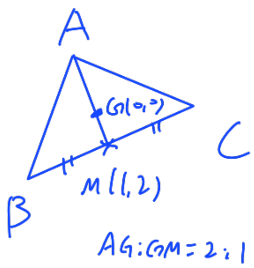
$(x-1)(x+3)(x-2)=0$

$x=1,\ \underbrace{-3,\ 2}_{\alpha,\ \beta}$

$|\alpha-\beta|=5$

12. 좌표평면 위의 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심이 원점이고 선분 BC의 중점의 좌표가 $(1,\ 2)$이다. 점 A의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a\times b$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14



$AG:GM=2:1$

$A(-2,-4)$

13. 실수 x에 대한 두 조건

$p : x^2-6x+9 \le 0,$
$q : |x-a| \le 2$

에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 실수 a의 최댓값과 최솟값의 합은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$p:\ (x-3)^2 \le 0 \rightarrow x=3$

$|3-a| \le 2$

$-2 \le a-3 \le 2$

$1 \le a \le 5$ 大:5 小:1) 6

14. 5 이하의 두 자연수 m, n에 대하여 복소수 z를

$z=(m-n)+(m+n-4)i$라 하자. z^2이 실수가 되도록 하는 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는? (단, $i=\sqrt{-1}$) [4점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

$z=a+bi$, z^2이 실수 $\Rightarrow$ $a=0$ or $b=0$

$m-n=0$ or $m+n-4=0$

$\Downarrow$ $m=n$: (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)) 5

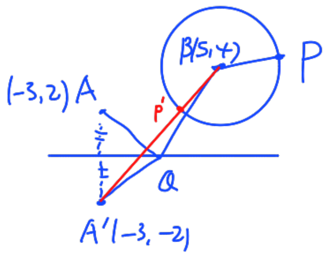
$\Downarrow$ $m+n=4$: (1, 3), (2, 2), (3, 1)) 3

(2, 2) 중복

$5+3-1=7$

15. 좌표평면 위에 두 점 A$(-3, 2)$, B$(5, 4)$가 있다. $\overline{\mathrm{BP}}=3$인 점 P와 x축 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}$의 최솟값은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9



$\overline{AQ}+\overline{QP} = \overline{A'Q}+\overline{QP}$

$\ge \overline{A'P'} = \overline{A'B}-3$

$= \sqrt{64+36}-3$

$= 7$

16. x에 대한 다항식 $(x-1)(x-4)(x-5)(x-8)+a$가 $(x+b)^2(x+c)^2$으로 인수분해될 때, 세 정수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은? [4점]

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

$(\underbrace{x^2-9x}_{A}+8)(\underbrace{x^2-9x}_{A}+20)+a$

$= A^2+28A+160+a$, $14^2=196=160+a$

$a=36$

$= (A+14)^2$

$= (x^2-9x+14)^2$

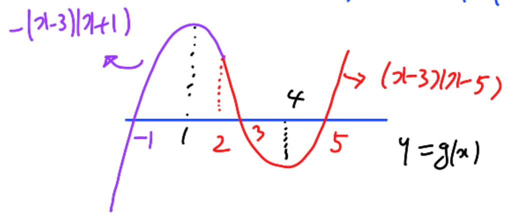
$= (x-2)^2(x-7)^2$ $b+c=-9$ $a+b+c=27$

17. 함수 $f(x)=x-3$에 대하여 $-1 \le x \le 5$에서 함수 $f(x)\times f(|x-2|)$의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

$g(x)$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$g(x)=\begin{cases} x\ge 2 \to f(x)\times f(x-2) = (x-3)(x-5) \\ x<2 \to f(x)\,f(-x+2) = (x-3)(-x-1) = -(x-3)(x+1) \end{cases}$$



大 ⇒ $g(1)=4$
小 ⇒ $g(4)=-1$) 3

18. 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [4점]

> (가) 다항식 $f(x+3)-f(x)$는 $(x-1)(x+2)$로 나누어떨어진다. 2차
> (나) 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 -3이다.

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

(나) $f(2)=-3$

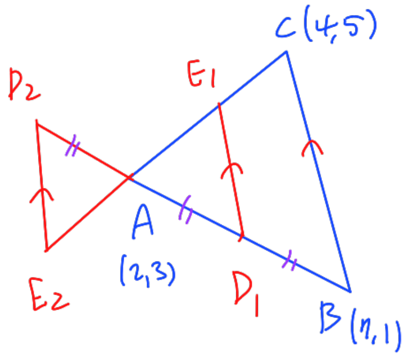
(가) $f(x+3)-f(x) = a(x-1)(x+2)$

$x=1 \to f(4)-f(1)=0$
$x=-2 \to f(1)-f(-2)=0$) $f(4)=f(1)=f(-2)$

$f(x)=(x-1)(x-4)(x+2)+k$
$f(2)=-8+k=-3,\ k=5$
$f(x)=(x-1)(x-4)(x+2)+5$
$f(0)=8+5=13$

19. 좌표평면 위에 세 점 A(2, 3), B(7, 1), C(4, 5)가 있다.
직선 AB 위의 점 D에 대하여 점 D를 지나고 직선 BC와 평행한 직선이 직선 AC와 만나는 점을 E라 하자.
삼각형 ABC와 삼각형 ADE의 넓이의 비가 4 : 1이 되도록 하는 모든 점 D의 y좌표의 곱은? (단, 점 D는 점 A도 아니고 점 B도 아니다.) [4점]

① 8 ② $\frac{17}{2}$ ③ 9 ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ 10



△ABC ∽ △ADE (넓이비 4:1, 길이비 2:1)

$P_1(\frac{9}{2}, 2)$

$P_2(-\frac{1}{2}, 4)$

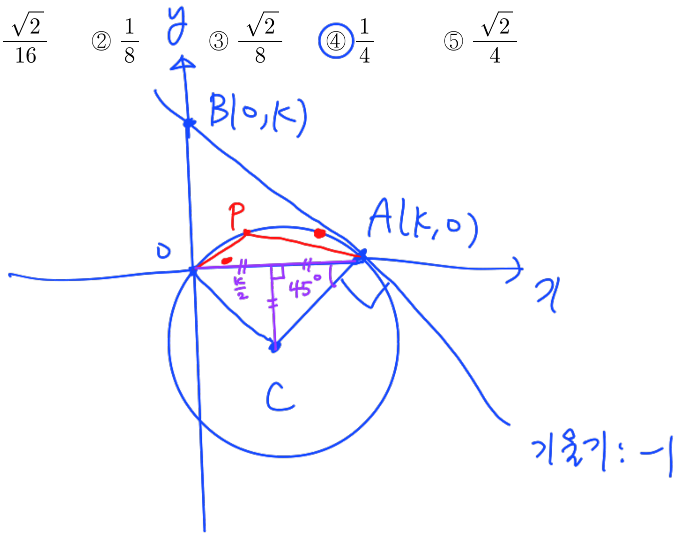
$2 \times 4 = 8$

20. 양수 k에 대하여 좌표평면 위에 두 점 A(k, 0), B(0, k)가 있다.
삼각형 OAB의 내부에 있으며 ∠AOP = ∠BAP를 만족시키는 점 P에 대하여 점 P의 y좌표의 최댓값을 $M(k)$라 하자.
다음은 $M(k)$를 구하는 과정이다. (단, O는 원점이고, ∠AOP < 180°, ∠BAP < 180°이다.)

> 원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 이 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.
> 그러므로 점 O를 지나고 직선 AB와 점 A에서 접하는 원을 C라 할 때, 삼각형 OAB의 내부에 있으며 ∠AOP = ∠BAP를 만족시키는 점 P는 원 C 위의 점이다.
> 원 C의 중심을 C라 하면 ∠OAC = 45°이므로
> 점 C의 좌표는 $\left(\frac{k}{2}, \boxed{\text{(가)}}\right)$이고 원 C의 반지름의 길이는 $-\frac{k}{2}$
> $\boxed{\text{(나)}}$이다. $\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}k$
> 점 P의 y좌표는 ∠PCO = 45°일 때 최대이므로
> $M(k) = \left(\boxed{\text{(다)}}\right) \times k$이다. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

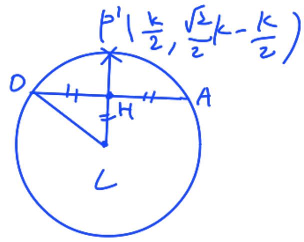
위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p) + g\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{4}$



$C\left(\frac{k}{2}, -\frac{k}{2}\right)$

$\overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2}k$



$M(k) = \overline{P'H} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)k$

$f\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}$

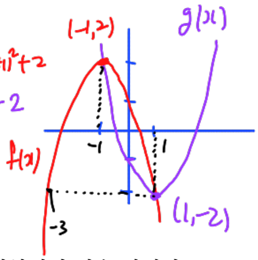
21. 두 실수 a, b와 두 함수

$$f(x)=-x^2-2x+1, \quad = -(x+1)^2+2$$
$$g(x)=x^2-2x-1 \quad = (x-1)^2-2$$

에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ g(x+b) & (x \geq a) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이 되도록 하는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)만을 원소로 하는 집합을 A라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

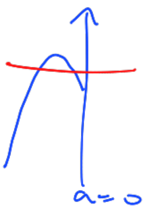


〈보 기〉

ㄱ. $(0, k) \in A$를 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다.
ㄴ. $(-1, 4) \in A$
ㄷ. 집합 $\{m+b \mid (m, b) \in A$이고 m은 정수$\}$의 모든 원소의 합은 $5+\sqrt{3}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

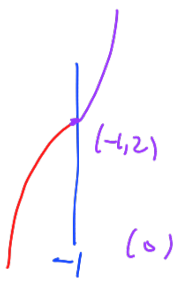
ㄱ.



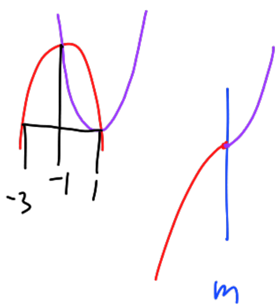
$1-1$ 대응 X

존재 X ⇒ O

ㄴ. $a=-1$, $b=4$ $\quad h(x)=\begin{cases} -(x+1)^2+2 & (x<-1) \\ (x+3)^2-2 & (x \geq -1) \end{cases}$



ㄷ. $m \leq -1$ $\quad h(x)=\begin{cases} -(x+1)^2+2 & (x<m) \\ (x+b-1)^2-2 & (x \geq m) \end{cases}$



$-3 \leq m \leq -1$, $b \geq 4$

i) $m=-1 \rightarrow \boxed{b=4}$ (by ㄴ)

ii) $m=-2 \rightarrow -(-2+1)^2+2=(-2+b-1)^2-2$

$1=(b-3)^2-2$, $b-3=\pm\sqrt{3}$

$b=3+\sqrt{3}, 3-\sqrt{3}$

$\boxed{\therefore b=3+\sqrt{3}}$

iii) $m=-3 \rightarrow -(-3+1)^2+2=(-3+b-1)^2-2$

$(b-4)^2-2=-2$, $\boxed{b=4}$

$m+b=-1+4, -2+3+\sqrt{3}, -3+4$

$\rightarrow 3+(1+\sqrt{3})+1=5+\sqrt{3}$

단답형

22. 좌표평면 위의 점 $(2, -1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(4, b)$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점] $\boxed{6}$

$(2+a, 4) = (4, b)$ $\quad a=2$, $b=4$

23. 이차함수 $y=x^2+4x+k$의 그래프와 직선 $y=-2x+1$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 자연수 k의 최댓값을 구하시오. $\boxed{9}$ [3점]

$x^2+6x+k-1=0$

$D/4=9-k+1>0$

$k<10$

24. 연립방정식

$$\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ 4x^2-6y+3=0 \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha\times\beta$의 값을 구하시오. [3점]

$y=2x-1$ $\boxed{3}$

$4x^2-6(2x-1)+3=0$

$4x^2-12x+9=0$

$(2x-3)^2=0$ $x=\frac{3}{2}=\alpha$, $y=2=\beta$ $\alpha\times\beta=3$

25. 두 양의 실수 a, b에 대하여 두 일차함수

$$f(x)=\frac{a}{2}x-\frac{1}{2},\ g(x)=\frac{1}{b}x+1$$

이 있다. 직선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 서로 평행할 때, $(a+1)(b+2)$의 최솟값을 구하시오. [3점]

$\frac{a}{2}=\frac{1}{b}$, $ab=2$ $\boxed{8}$

$a>0$
$b>0$

$ab+2a+b+2$

$=4+2a+b$

$\geq 4+2\sqrt{2ab}$

$=4+4=8$

26. 사차방정식 $(x^2+kx+2)(x^2+kx+6)+3=0$이 실근과 허근을 모두 갖도록 하는 자연수 k의 값을 구하시오. [4점]

$x^2+kx=A$ $\boxed{4}$

$(A+2)(A+6)+3$

$=A^2+8A+15=(A+3)(A+5)=0$

$A=-3,-5$

$x^2+kx+3=0$, $x^2+kx+5=0$

$D_1=k^2-12$ $D_2=k^2-20$

k 자연수, $D_2<D_1$

실근 허근 모두 가짐 $\Rightarrow$ $D_2<0$, $D_1\geq 0$

$k=4$

27. 집합 $X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$가 역함수가 존재하고 다음 조건을 만족시킨다.

일대일 대응

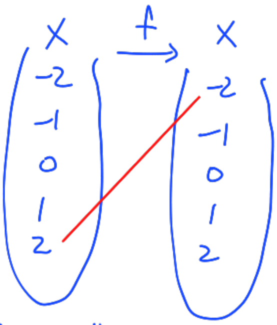
> (가) $(f \circ f)(-1)+f^{-1}(-2)=4$
> (나) $k=0,\ 1$일 때, $f(k)\times f(k-2)\leq 0$이다.

$6f(0)+5f(1)+2f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{13}$

(가) $f(f(-1))=2$, $f^{-1}(-2)=2$ → $f(2)=-2$

(나) $f(0)f(-2)\leq 0$
$f(1)f(-1)\leq 0$



$f(-1)$로 케이스 분류

i) $f(-1)=-1 \to f(f(-1))=-1$ (×)

ii) $f(-1)=0 \to f(0)=2$, $f(0)f(-2)\leq 0$이므로 $f(-2)=-1$
나머지 $f(1)=1$

iii) $f(-1)=1 \to f(1)=2 \to f(-1)f(1)=2$ (×)

iv) $f(-1)=2 \to f(2)=2$ (×)

∴ ii)만 가능

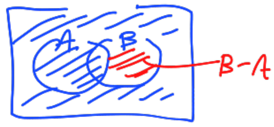
$6f(0)+5f(1)+2f(2)=12+5-4=13$

28. 전체집합 $U=\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 집합 $A\cup B^C$의 모든 원소의 합은 집합 $B-A$의 모든 원소의 합의 6배이다. $6k$ k
> (나) $n(A\cup B)=5$

집합 A의 모든 원소의 합의 최솟값을 구하시오.
(단, $2\leq n(B-A)\leq 4$) [4점]

$\boxed{22}$



$1+2+4+8+16+32=63$

$6k+k=63$, $k=9$

B-A 원소합: 9
$2\leq n(B-A)\leq 4$

$1+8=9$, $n(A\cup B)^c=1$

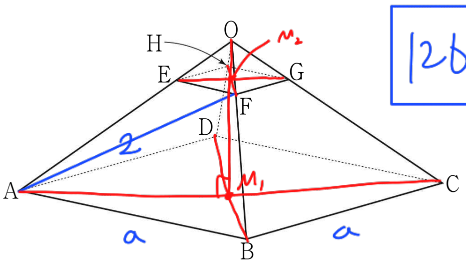
$B-A=\{1, 8\}$, A 원소합 최소 ⇒ $(A\cup B)^c=\{32\}$

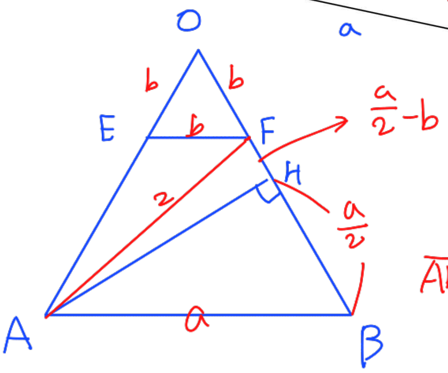
$A=\{2, 4, 16\}$

$2+4+16=22$

29. 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 a인 정사각뿔 O$-$ABCD가 있다. 네 선분 OA, OB, OC, OD 위의 네 점 E, F, G, H를 $\overline{\mathrm{OE}}=\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OG}}=\overline{\mathrm{OH}}=b$가 되도록 잡는다.
두 정사각뿔 O$-$ABCD, O$-$EFGH의 부피의 합이 $2\sqrt{2}$이고 선분 AF의 길이가 2일 때, 사각형 ABFE의 넓이를 S라 하자.
$32\times S^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 $a>b>0$인 상수이다.) [4점]

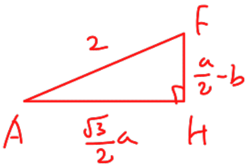
$\boxed{126}$





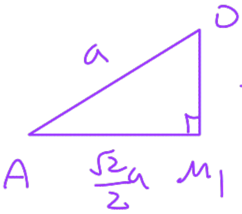
△OAB : 정△,

$\overline{AH}=\frac{\sqrt3}{2}a$, $\overline{FH}=\frac{a}{2}-b$

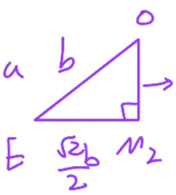


$\frac{a^2}{4}+b^2-ab+\frac{3}{4}a^2=4$

$a^2-ab+b^2=4$



$\to OM_1=\frac{\sqrt2}{2}a$



$\to OM_2=\frac{\sqrt2}{2}b$

$\frac13\times a^2\times\frac{\sqrt2}{2}a+\frac13\times b^2\times\frac{\sqrt2}{2}b=2\sqrt2$

$\to a^3+b^3=12$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=12$, $a+b=3$

$S=\frac{\sqrt3}{4}a^2-\frac{\sqrt3}{4}b^2=\frac{\sqrt3}{4}(a+b)(a-b)$

$a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab=9-3ab=4$, $ab=\frac53$

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=9-\frac{20}{3}=\frac73$, $a-b=\frac{\sqrt{21}}{3}$

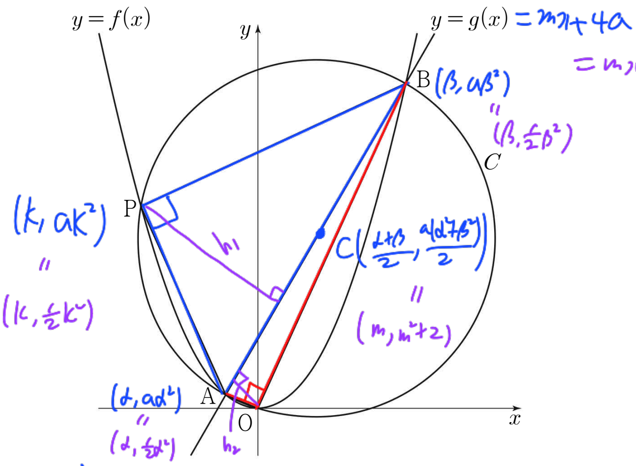
$S=\frac{\sqrt3}{4}\times3\times\frac{\sqrt{21}}{3}=\frac{\sqrt{63}}{4}$, $\therefore 32S^2=32\times\frac{63}{16}=126$

30. 두 양수 a, m에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=ax^2,$$
$$g(x)=mx+4a$$

라 하자. 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 만나는 두 점을 A, B라 할 때, 선분 AB를 지름으로 하고 원점 O를 지나는 원 C가 있다. 원 C와 곡선 $y=f(x)$는 서로 다른 네 점에서 만나고, 원 C와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 네 점 중 O, A, B가 아닌 점을 P$(k, f(k))$라 하자. 삼각형 ABP의 넓이가 삼각형 AOB의 넓이의 5배일 때, $f(k)\times g(-k)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{48}$



$ax^2=mx+4a$, $ax^2-mx-4a=0$ 근: α, β

$\alpha+\beta=\frac{m}{a}$, $\alpha\beta=-4$, $C\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{a(\alpha^2+\beta^2)}{2}\right)$

$\overline{CA}=\overline{CO} \Rightarrow \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{a(\alpha^2-\beta^2)}{2}\right)^2=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{a(\alpha^2+\beta^2)}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \alpha\beta+a^2\alpha^2\beta^2=0$, $-4+16a^2=0$, $a=\frac12$, $\alpha+\beta=2m$, $\alpha^2+\beta^2=4m^2+8$

$f(x)=\frac12x^2$, $g(x)=mx+2$, $C(m, m^2+2)$

$mx-y+2=0$, $h_1=\frac{|mk-\frac12k^2+2|}{\sqrt{m^2+1}}$, $h_2=\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$, $k<0$, $m>0$

$5h_2=h_1 \Rightarrow mk-\frac12k^2=-12$,

AP 기 $\times BP$ 기 $=-1 \Rightarrow \frac{\frac12(k^2-\alpha^2)}{k-\alpha}\times\frac{\frac12(k^2-\beta^2)}{k-\beta}=\frac14(k+\alpha)(k+\beta)=-1$

$k^2+(\alpha+\beta)k+\alpha\beta=-4$, $k^2+2mk=0$, $k=-2m$

$-2m^2-2m^2=-12$, $m=\sqrt3$, $k=-2\sqrt3$

$f(k)\times g(-k)=\frac12k^2(-mk+2)=6\times8=48$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.