제 2 교시

수학 영역 KSM

홀수형

5지선다형

1. $\left(\dfrac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$\left(2^{2-\sqrt{2}}\right)^{2+\sqrt{2}} = 2^2 = 4$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\dfrac{1+3}{1}$

3. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_2+a_4=30,\quad a_4+a_6=\frac{15}{2}$$

$\times r^2$

를 만족시킬 때, a_1의 값은? [3점]

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

$r^2=\frac{1}{4},\ r=\frac{1}{2}\ (\because r>0)$

$\frac{1}{2}a+\frac{1}{8}a=30$

$\frac{5}{8}a=30,\quad a=48$

4. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=x^2f(x)$$

라 하자. $f(2)=1,\ f'(2)=3$일 때, $g'(2)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$

$g'(2)=4f(2)+4f'(2)$

$=4+12=16$

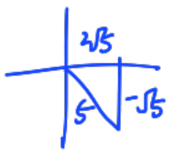
5. $\tan\theta < 0$이고 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$-\sin\theta = \frac{\sqrt5}{5}$

$\sin\theta = -\frac{\sqrt5}{5}$

$s<0$, $t<0$) → 4사분면



$\cos\theta = \frac{2\sqrt5}{5}$

6. 함수 $f(x)=2x^3-9x^2+ax+5$는 $x=1$에서 극대이고, $x=b$에서 극소이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

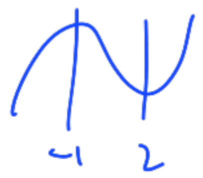
$f' = 6x^2-18x+a$

$f'(1) = 6-18+a=0$

$a=12$

$f' = 6x^2-18x+12$

$= 6(x-1)(x-2)$

f  $b=2$ $a+b=14$

7. 모든 항이 양수이고 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=2$$

를 만족시킬 때, a_4의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$a=d$

$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{-d}\left(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}\right)$

$= -\frac{1}{d}\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_{16}}\right)$, $a_{16}=a+15d=16a$

$= -\frac{1}{a}\left(\sqrt{a}-4\sqrt{a}\right)$

$= \frac{3}{a}\sqrt{a} = \frac{3}{\sqrt{a}}=2$, $a=\frac{9}{4}$

$a_4=a+3d=4a=9$

8. 점 $(0,\ 4)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 그은 접선의 x절편은? [3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

$y=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t+2$
4 0

$4=-3t^3+t+t^3-t+2$

$2t^3=-2,\ t=-1$

$y=2(x+1)+2$

$y=2x+4$

$x=-2$

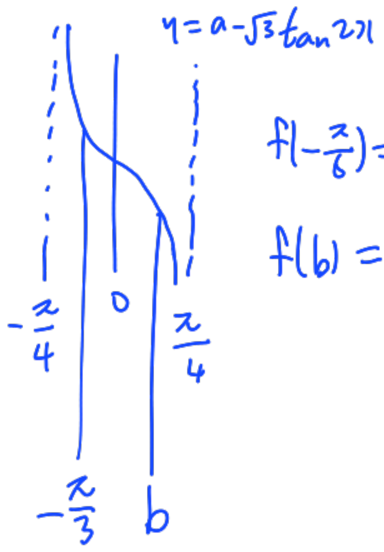
9. 함수

$$f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$$

가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $a\times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

주기 $\frac{\pi}{2}$



$f(-\frac{\pi}{6})=a+3=7,\ a=4$

$f(b)=4-\sqrt{3}\tan 2b=3$

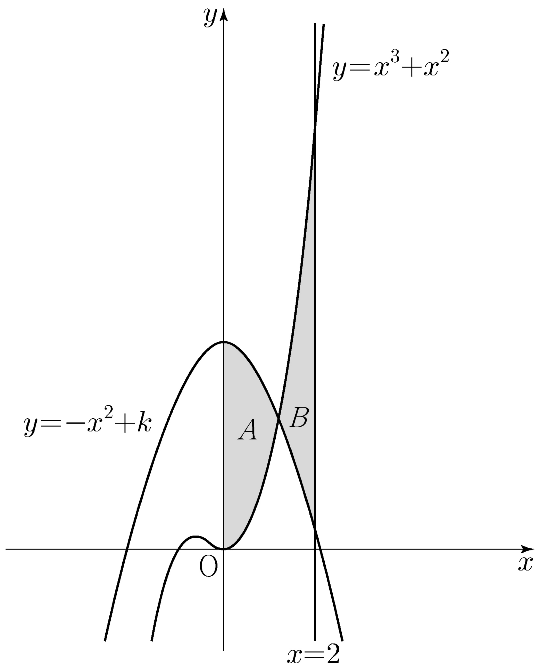
$\tan 2b=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$2b=\frac{\pi}{6},\ b=\frac{\pi}{12}$

$a\times b=\frac{\pi}{3}$

10. 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, 상수 k의 값은? (단, $4<k<5$) [4점]

① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$



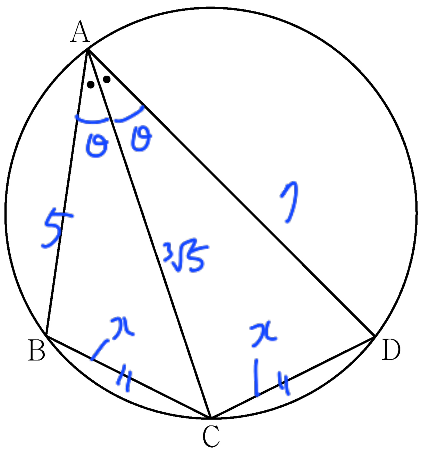
$\int_0^2 (x^3+2x^2-k)dx=0$

$4+\frac{16}{3}-2k=0,\ k=\frac{14}{3}$

11. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$$\overline{\mathrm{AB}}=5,\ \overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{5},\ \overline{\mathrm{AD}}=7,\ \angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는? [4점]



① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$　② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$　③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$　④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$　⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

$\cos\theta = \frac{25+45-x^2}{2\cdot 3\sqrt{5}\cdot 5} = \frac{45+49-x^2}{2\cdot 3\sqrt{5}\cdot 7}$

$7(70-x^2) = 5(94-x^2)$

$490-7x^2 = 470-5x^2$

$x=\sqrt{10}$

$\cos\theta = \frac{70-10}{30\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{x}{\sin\theta} = 2R = \frac{\sqrt{10}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 5\sqrt{2}$

$R = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$n-1 \le x < n$일 때, $\lvert f(x)\rvert = \lvert 6(x-n+1)(x-n)\rvert$이다. (단, n은 자연수이다.)

열린구간 $(0, 4)$에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \int_x^4 f(t)\,dt$$

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)\,dx$의 값은? [4점]

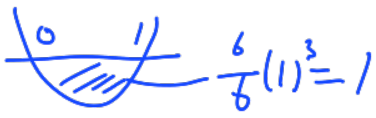
① $-\frac{3}{2}$　② $-\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{5}{2}$

$0\le x<1 \rightarrow |f(x)| = |6x(x-1)|$

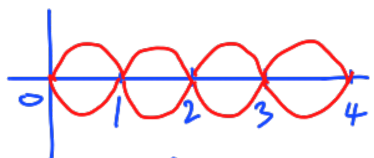
$1\le x<2 \rightarrow |f(x)| = |6(x-1)(x-2)|$

⋮

$3\le x<4 \rightarrow |f(x)| = |6(x-3)(x-4)|$



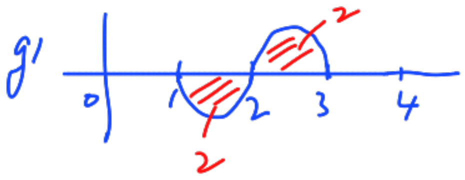
$\frac{6}{6}(1)^3 = 1$



$g(0) = -\int_0^4 f(t)dt,\ g(4) = \int_0^4 f(t)dt,$

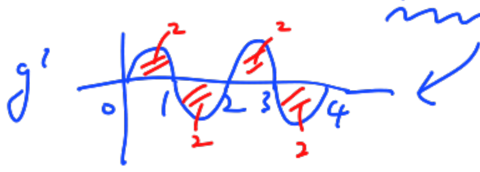
$\int_0^1 |f| = 1$, $2\int_0^1 |f| = 2$

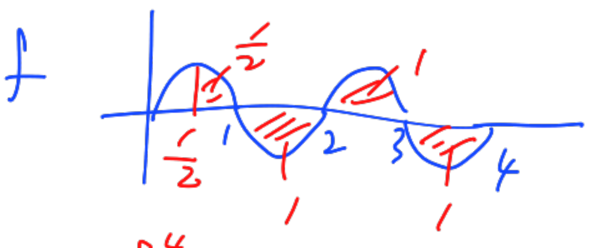
$g'(x) = f(x)+f(x) = 2f(x)$



$g(x)$가 $x=2$ 최소 ⇒ g' ⊖ 2 ⊕　1~2 ⊖, 2~3 ⊕

$g(2) = \int_0^2 f - \int_2^4 f = 0 \rightarrow \int_0^2 f = \int_2^4 f$





$\int_{\frac{1}{2}}^{4} f = \frac{1}{2} - 1 + 1 - 1 = -\frac{1}{2}$

13. 자연수 $m(m \ge 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f(m)$의 값은? [4점]

① 37 ② 42 ③ 47 ④ 52 ⑤ 57

$x^n = m^{12}$, $x = m^{\frac{12}{n}}$, $n \ge 2$

$m = 2, 3, 5, 6, 7 \Rightarrow n = 2, 3, 4, 6, 12$ 5개

$m = 4 \to x = 2^{\frac{24}{n}} \to n = 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ 7개

$m = 9 \to x = 3^{\frac{24}{n}} \to$ 7개

$m = 8 \to x = 2^{\frac{36}{n}} \to n = 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$ 8개

$5 \times 5 + 7 + 7 + 8 = 47$

14. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x) = \begin{cases} x & (x < -1 \text{ 또는 } x > 1) \\ f(x) & (-1 \le x \le 1) \end{cases}$$

함수 $h(x) = \lim_{t \to 0+} g(x+t) \times \lim_{t \to 2+} g(x+t)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

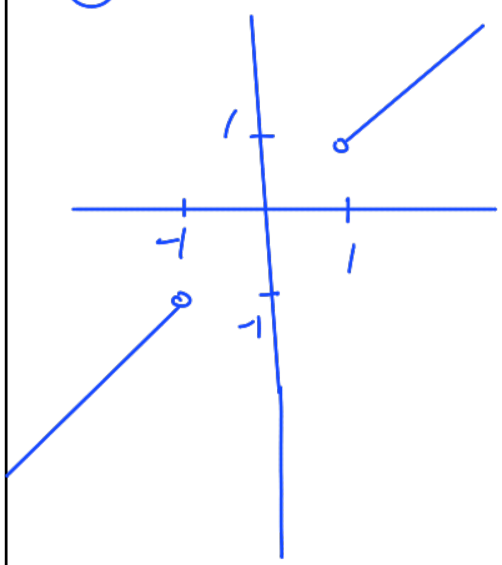
<보 기>

ㄱ. $h(1) = 3$

ㄴ. 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 감소하고 $g(-1) = -2$이면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

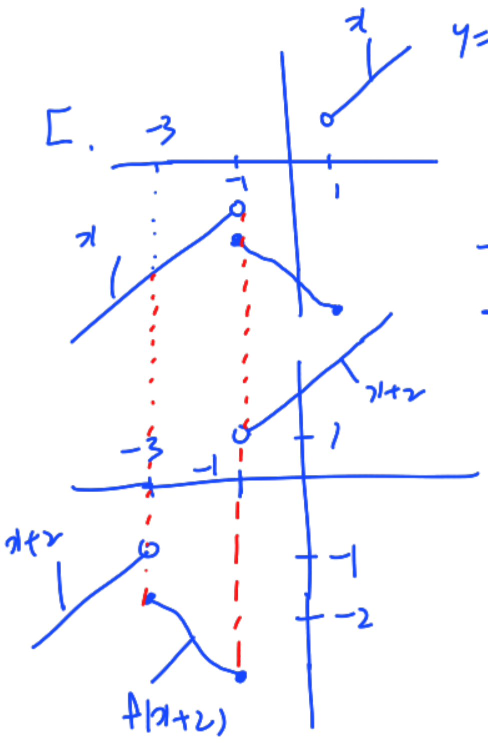


$h(x) = g(x^+) \times g(x+2^+)$

ㄱ. $h(1) = g(1^+) \times g(3^+) = 1 \times 3 = 3$

ㄴ. $f(x) = -x \Rightarrow h(-1^-) = -3$, $h(1) = 3$ / 불연속

ㄷ.



$y = g(x)$

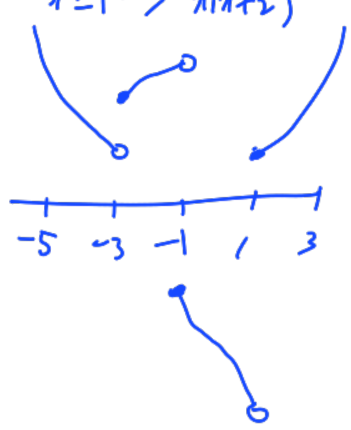
$h(x)$

$x < -3 \to x(x+2)$

$-3 \le x < -1 \to x f(x+2)$ (+)

$-1 \le x < 1 \to (x+2) f(x)$ (−)

$x \ge 1 \to x(x+2)$



최솟값 X

15. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

> (가) $a_7=40$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{ 의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{ 의 배수인 경우}) \end{cases}$$
>
> 이다.

① 216 ② 218 ③ 220 ④ 222 ⑤ 224

$a_7=40 \Rightarrow a_8=40+a_6$

大 ⇒

a_6	a_7	a_8	a_9
120	40	160	200

$M=200$

小 ⇒ $a_8=40+a_6$이 3의 배수가 되는 순간

a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
	38	2	40	42	14
	35	5			

$a_6=a_4+a_5$이므로 $a_6>a_5$

a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
6	17	23	40		
12	14	26			
18	11	29			
24	8	32	40	72	24

$\frac{a_4}{3}=a_5$ (×)

$m=24$

$\frac{a_4}{3}=a_5$ (ok)

$M+m=224$

단답형

16. 방정식

$$\log_2(3x+2)=2+\log_2(x-2)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{10}$

$x>2$

$3x+2=4x-8$

$x=10$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=4x^3-2x$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{15}$

$f(x)=x^4-x^2+3$

$f(2)=16-4+3=15$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55, \quad \sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}b_k$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{22}$

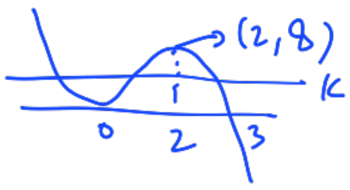
$\sum_{1}^{5}a_k=10$

$\sum_{1}^{5}b_k=22$

19. 방정식 $2x^3-6x^2+k=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. [3점]

$\boxed{7}$

$k=-2x^3+6x^2=-2x^2(x-3)$



$0<k<8$

7개

20. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0\le t\le 2$일 때, $v(t)=2t^3-8t$이다.
>
> (나) $t\ge 2$일 때, $a(t)=6t+4$이다.

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [4점]

$\boxed{17}$

$0\le t\le 2$

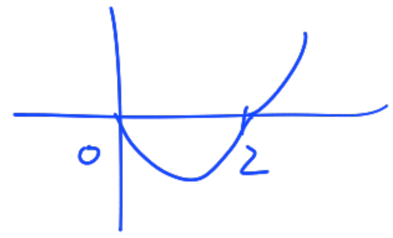
$v(t)=2t(t+2)(t-2)$

$v(2)=0$

$t\ge 2$

$v(t)=3t^2+4t-20\ (v(2)=0)$

$=(3t+10)(t-2)$



$\int_0^3|v(t)|dt=-\int_0^2(2t^3-8t)dt+\int_2^3(3t^2+4t-20)dt$

$=-\frac{1}{2}t^4+4t^2\Big|_0^2+t^3+2t^2-20t\Big|_2^3$

$=8+(27+18-60)-(8+8-40)$

$=8-15+24=17$

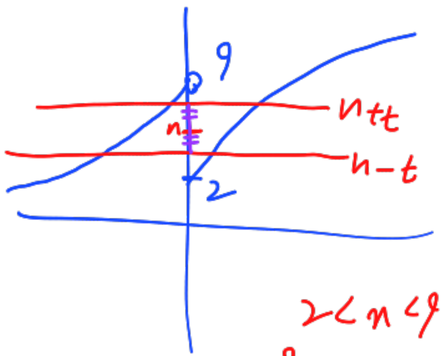
21. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |3^{x+2}-n| & (x<0) \\ |\log_2(x+4)-n| & (x\ge 0)\end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

$|3^{x+2}-n|=t \to 3^{x+2}=n+t$ or $n-t$ $\boxed{33}$

$|\log_2(x+4)-n|=t \to \log_2(x+4)=n+t$ or $n-t$



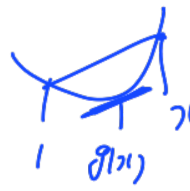
$2<n<9$

$\sum_{n=3}^{8} n=\frac{6(3+8)}{2}=33$

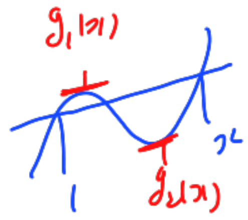
22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{13}$

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.
>
> (다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

$x\ne1$ $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(g(x))$

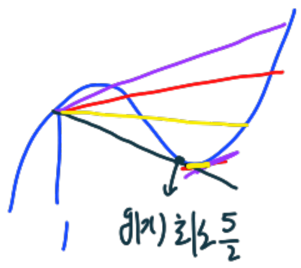


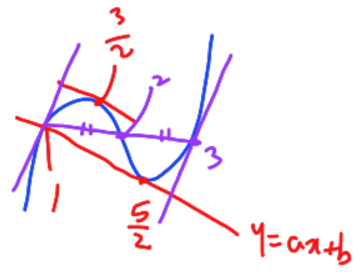
$g(x)$ 최솟값 $\frac52$ & $g(x)$는 연속함수 $g(x)>1$



$g(x)<1$ (×)

$g(x)$가 연속이려면
$g(x)=g_2(x)$가 되야함.





$f(x)=(x-1)(x-\frac52)^2+ax+b$

$f(0)=-\frac{25}{4}+b=-3$, $b=\frac{13}{4}$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}f'(g(x))$, $f'(1)=f'(g(1))$

$g(1)=3$

$f(g(1))=f(3)=6$

$2\cdot\frac14+3a+b=6$, $3a=\frac94$, $a=\frac34$

$f(x)=(x-1)(x-\frac52)^2+\frac34x+\frac{13}{4}$

$f(4)=3\cdot\frac94+3+\frac{13}{4}=13$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. 다항식 $(x^3+3)^5$ 의 전개식에서 x^9 의 계수는? [2점]

① 30 ② 60 ③ 90 ④ 120 ⑤ 150

$_5C_3\, x^9 \cdot 3^2$

$90x^9$

24. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 4000 이상인 홀수의 개수는? [3점]

① 125 ② 150 ③ 175 ④ 200 ⑤ 225

4 — — 1, 3, 5 $5^2 \times 3 = 75$

5 — — 1, 3, 5 75

150

25. 흰색 마스크 5개, 검은색 마스크 9개가 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 3개의 마스크를 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 마스크 중에서 적어도 한 개가 흰색 마스크일 확률은? [3점]

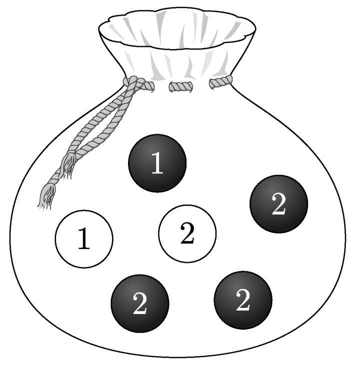
① $\frac{8}{13}$ ② $\frac{17}{26}$ ③ $\frac{9}{13}$ ④ $\frac{19}{26}$ ⑤ $\frac{10}{13}$

$1 - \frac{{}_9C_3}{{}_{14}C_3} = 1 - \frac{12\cdot 7}{14\cdot 13\cdot 2}$

$= 1 - \frac{3}{13} = \frac{10}{13}$

26. 주머니에 1이 적힌 흰 공 1개, 2가 적힌 흰 공 1개, 1이 적힌 검은 공 1개, 2가 적힌 검은 공 3개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 3개의 공 중에서 흰 공이 1개이고 검은 공이 2개인 사건을 A, 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수를 모두 곱한 값이 8인 사건을 B라 할 때, $\mathrm{P}(A \cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{20}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{13}{20}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{3}{4}$



${}_6C_3 = 20$, $2\times2\times2 = 8$

$P(A) = \frac{{}_2C_1 \times {}_4C_2}{20} = \frac{12}{20}$

$P(B) = \frac{{}_4C_3}{20} = \frac{4}{20}$

$P(A\cap B) = \frac{1\times {}_3C_2}{20} = \frac{3}{20}$

$\frac{12+4-3}{20} = \frac{13}{20}$

27. 어느 회사에서 생산하는 샴푸 1개의 용량은 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 16개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $746.1 \le m \le 755.9$이다. 이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 n개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구하는 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$일 때, $b-a$의 값이 6 이하가 되기 위한 자연수 n의 최솟값은? (단, 용량의 단위는 mL이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 70 ② 74 ③ 78 ④ 82 ⑤ 86

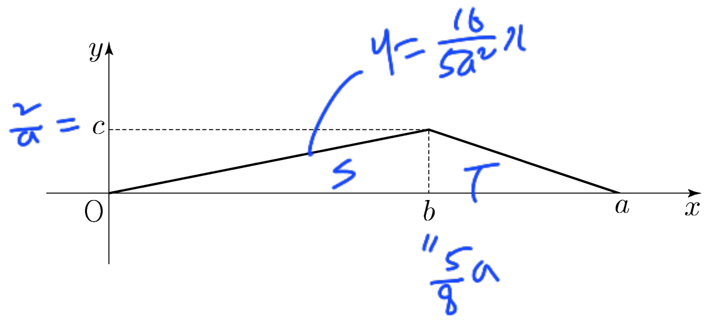
$9.8 = 3.92 \cdot \frac{\sigma}{4}$, $\sigma = 10$

$b-a = 5.16 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \le 6$

$\sqrt{n} \ge 8.6$

$n \ge 73.96$ $\underline{74}$

28. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le a$이고, X의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같다.



$\mathrm{P}(X \le b) - \mathrm{P}(X \ge b) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X \le \sqrt{5}) = \frac{1}{2}$일 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

$S - T = \frac{1}{4}$
$S + T = 1$
$S = \frac{5}{8}$, $T = \frac{3}{8}$

$S : T = 5 : 3$, $b = \frac{5}{8}a$

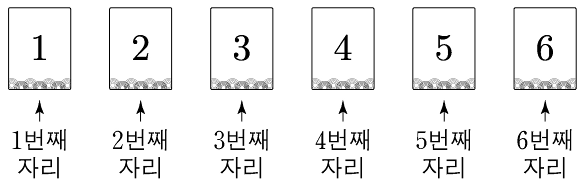
$\frac{1}{2} \times ac = 1$, $c = \frac{2}{a}$

$P(X \le \sqrt{5}) = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{16}{5a^2}\sqrt{5} = \frac{8}{a^2} = \frac{1}{2}$

$a = 4$
$b = \frac{5}{2}$
$c = \frac{1}{2}$
7

단답형

29. 앞면에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있고 뒷면에는 모두 0이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드가 그림과 같이 6 이하의 자연수 k에 대하여 k번째 자리에 자연수 k가 보이도록 놓여 있다.



이 6장의 카드와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k이면 k번째 자리에 놓여 있는 카드를 한 번 뒤집어 제자리에 놓는다.

위의 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수일 때, 주사위의 1의 눈이 한 번만 나왔을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$1\sim6$ 합 : 15, $3\times3^2+3\times2^2=39$ $\boxed{49}$

짝 홀

$3\ 0 \to 8$

$2\ 1 \to 22 \to 3\times3\times3^2=81$

$1\ 2 \to 8$

$0\ 3 \to 22 \to 3^3=27$

$\frac{39}{81+27}=\frac{39}{108}=\frac{13}{36}=\frac{q}{p}$

$p+q=49$

30. 집합 $X=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) 9 이하의 모든 자연수 x에 대하여 $f(x)\le f(x+1)$이다.
>
> (나) $1\le x\le 5$일 때 $f(x)\le x$이고, $6\le x\le 10$일 때 $f(x)\ge x$이다.
>
> (다) $f(6)=f(5)+6$

$\boxed{100}$

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le\cdots\le f(10)$

$f(6)=f(5)+6$, $f(1)\le1\to f(1)=1$

$f(10)\ge10\to f(10)=10$

i) 10 4 $1\times14=14$

ii) 9 3 $4\times9=36$ } 50

8 2 $\to$ 36

7 1 $\to$ 14 } 50 } 100

i) 1 2 3 4 5

1 1 1 1~4 4

1 2 2~4

1 3 3~4

2 2 2~4

2 3 3~4 } 14개

ii) 1 2 3 4 5

1 1 1 1~3 3

1 2 2~3

1 3 3

2 2 2~3

2 3 3 } 9개

6 7 8 9 10

9 9 9 9 10

9 9 10

9 10 10

10 10 10 } 4개

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}(\sqrt{x+4}+2)$

$=4$

24. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{13}{9}$ ③ $\frac{14}{9}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

$1+\frac{3k}{n}\to x$

$\frac{3}{n}\to dx$

$\frac{1}{3}\int_1^4\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4=\frac{2}{9}(8-1)=\frac{14}{9}$

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=3$일 때, a_2의 값은? [3점]

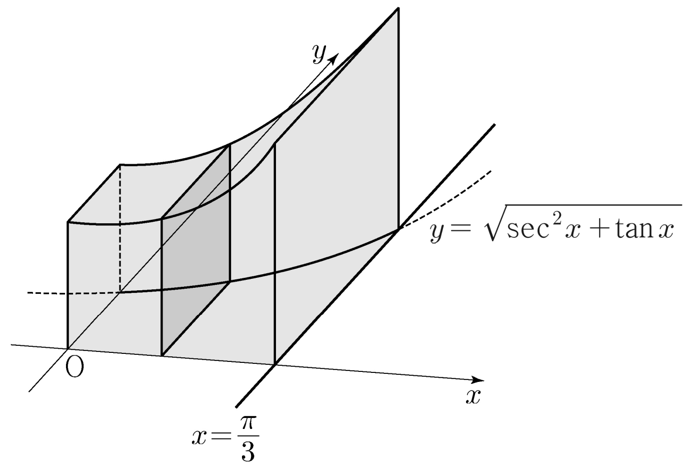
① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

$a_n = a\cdot 4^n$

$\frac{a}{\frac{1}{2}} = 3,\ a = \frac{3}{2}$

$a_2 = \frac{3}{2}\times 16 = 24$

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\sec^2 x+\tan x}\left(0\le x\le\frac{\pi}{3}\right)$와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\ln 2}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln 2$ ③ $\sqrt{3}+\frac{\ln 2}{2}$

④ $\sqrt{3}+\ln 2$ ⑤ $\sqrt{3}+2\ln 2$

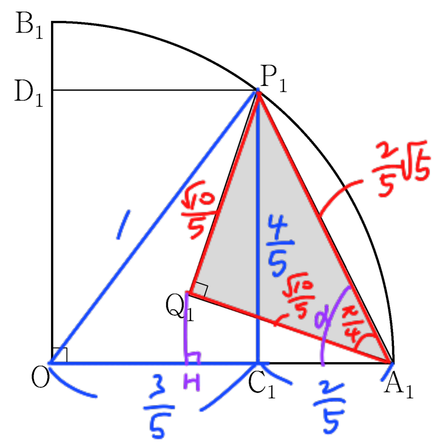
$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 x+\tan x)\,dx$

$= \left[\tan x - \ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= \sqrt{3}+\ln 2$

27. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1B_1이 있다. 호 A_1B_1 위에 점 P_1, 선분 OA_1 위에 점 C_1, 선분 OB_1 위에 점 D_1을 사각형 $OC_1P_1D_1$이 $\overline{OC_1}:\overline{OD_1}=3:4$인 직사각형이 되도록 잡는다.
부채꼴 OA_1B_1의 내부에 점 Q_1을 $\overline{P_1Q_1}=\overline{A_1Q_1}$, $\angle P_1Q_1A_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 이등변삼각형 $P_1Q_1A_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2와 선분 OB_1 위의 점 B_2를 $\overline{OQ_1}=\overline{OA_2}=\overline{OB_2}$가 되도록 잡고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{OQ_1}$, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 점 P_2, C_2, D_2, Q_2를 잡고, 이등변삼각형 $P_2Q_2A_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1

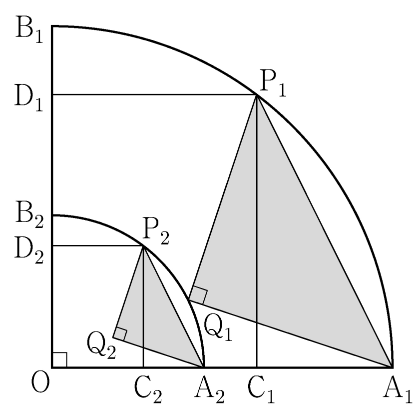


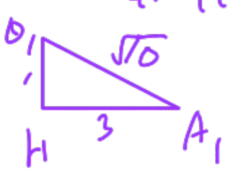
$S_1=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{5}=\frac{1}{5}$

$\tan\alpha=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}}=2$

$\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{2-1}{1+2\cdot1}=\frac{1}{3}$

R_2



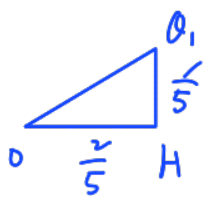


$A_1H=\frac{3}{5}$

$Q_1H=\frac{1}{5}$

$OH=\frac{2}{5}$

⋮　　　　⋮



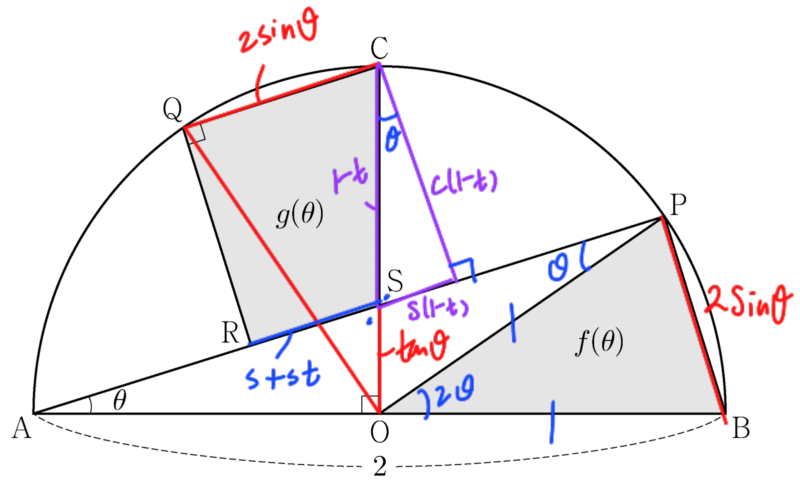
$OQ_1=\frac{\sqrt{5}}{5}$

① $\frac{9}{40}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{11}{40}$　④ $\frac{3}{10}$　⑤ $\frac{13}{40}$

l　$1:\frac{\sqrt{5}}{5}$

S　$1:\frac{1}{5}$　　$\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$

28. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 $\angle AOC=\frac{\pi}{2}$인 점 C가 있다. 호 BC 위에 점 P와 호 CA 위에 점 Q를 $\overline{PB}=\overline{QC}$가 되도록 잡고, 선분 AP 위에 점 R를 $\angle CQR=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡는다. 선분 AP와 선분 CO의 교점을 S라 하자. $\angle PAB=\theta$일 때, 삼각형 POB의 넓이를 $f(\theta)$, 사각형 CQRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\sin2\theta=sc$, $\overline{RS}=2s-s(1-t)=s+st$

$g(\theta)=\frac{1}{2}(3s+st)\times c(1-t)=\frac{1}{2}(3s+st)(c-s)$

$3f-2g=3sc-(3sc-3s^2+s^2-s^2t)$

$=3s^2-s^2+s^2t=2s^2+s^2t$

$\lim_{\theta\to0+}\frac{2s^2+s^2t}{\theta^2}=2+0=2$

단답형

29. 세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+6}{e^{x}}=1$

(나) $f(\ln 2)=0$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_{0}^{14}g(x)dx=p+q\ln 2$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

$\boxed{26}$

$-x=t$, $\lim_{t\to\infty}\frac{ae^{-2t}+be^{-t}+c+6}{e^{-t}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{a+be^{t}+(c+6)e^{2t}}{e^{t}}=1$, $c=-6$, $b=1$

$f(x)=ae^{2x}+e^{x}-6$, $f(\ln 2)=4a+2-6=0$, $a=1$

$\therefore f(x)=e^{2x}+e^{x}-6$, $f^{-1}(x)=g(x)$

$f(\ln 2)=0 \to g(0)=\ln 2$

$f(\ln 4)=14 \to g(14)=\ln 4$

$\int_{0}^{14}g(x)dx$ $\quad x=f(t)$, $dx=f'(t)dt$

$\int_{\ln 2}^{\ln 4}g(f(t))f'(t)dt$

$=\int_{\ln 2}^{\ln 4}tf'(t)dt=[tf(t)]_{\ln 2}^{\ln 4}-\int_{\ln 2}^{\ln 4}f(t)dt$

$=14\ln 4-\left[\frac{1}{2}e^{2x}+e^{x}-6x\right]_{\ln 2}^{\ln 4}$

$=28\ln 2-((8+4-6\ln 4)-(2+2-6\ln 2))$

$=28\ln 2+6\ln 2-8$

$=34\ln 2-8$, $p=-8$, $q=34$ $\quad p+q=26$

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=e^{\sin \pi x}-1$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)=g(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.

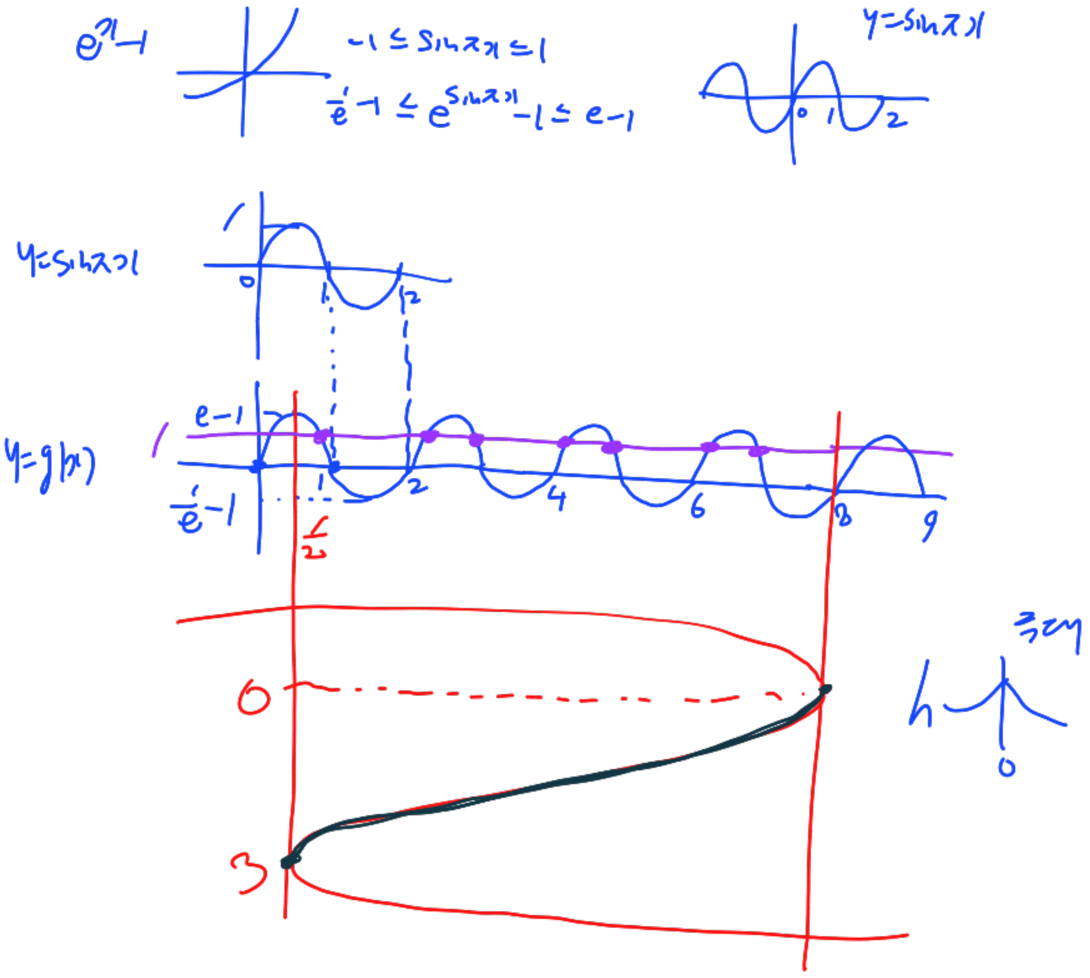
(나) 열린구간 $(0, 3)$에서 방정식 $h(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

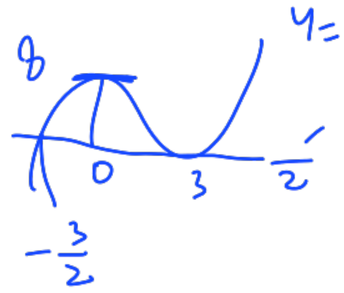
$f(3)=\frac{1}{2}$, $f'(3)=0$일 때, $f(2)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{31}$

$e^{x}-1$ $\quad -1\le \sin \pi x\le 1$

$e^{-1}-1\le e^{\sin \pi x}-1\le e-1$





$\frac{a}{2}(3-0)^{3}=\frac{15}{2}$, $a=\frac{15}{27}=\frac{5}{9}$

$f(x)=\frac{5}{9}\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-3)^{2}+\frac{1}{2}$

$f(2)=\frac{5}{9}\times\frac{7}{2}+\frac{1}{2}$

$=\frac{35+9}{18}=\frac{44}{18}=\frac{22}{9}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

홀수형

5지선다형

23. 좌표공간의 점 A$(2,\ 2,\ -1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하자. 점 C$(-2,\ 1,\ 1)$에 대하여 선분 BC의 길이는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$B(2, -2, 1)$

$\sqrt{16+9} = 5$

24. 초점이 F$\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$이고 준선이 $x=-\frac{1}{3}$인 포물선이 점 $(a,\ 2)$를 지날 때, a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$y^2 = \frac{4}{3}x \quad (a, 2)$

$4 = \frac{4}{3}a,\ a = 3$

25. 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$일 때, 이 타원의 두 초점 사이의 거리는? (단, a, b는 양수이다.) [3점]

① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{7}$

$\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$

$\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{y}{b^2}=1$, 기 $=\dfrac{-2b^2}{a^2}=-\dfrac{1}{2}$

$a^2=4b^2$, $a=2b$

$\dfrac{4}{4b^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{2}{b^2}=1$, $b^2=2$, $b=\sqrt{2}$

$a=2\sqrt{2}$

$c^2=8-2=6$ $c=\sqrt{6}$

$2c=2\sqrt{6}$

26. 좌표평면에서 세 벡터

$$\vec{a}=(2,\ 4),\quad \vec{b}=(2,\ 8),\quad \vec{c}=(1,\ 0)$$

에 대하여 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$가

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0,\quad \vec{q}=\frac{1}{2}\vec{a}+t\vec{c}\ (t\text{는 실수})$$

를 만족시킬 때, $|\vec{p}-\vec{q}|$의 최솟값은? [3점]

① $\dfrac{3}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

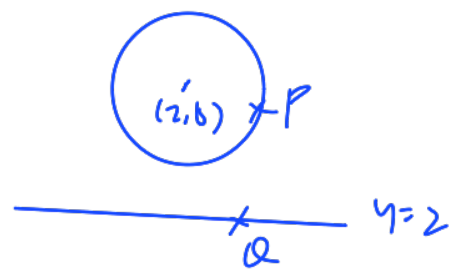
(2,4), (2,8) 지름 양끝 원, r=2

$(x-2)^2+(y-6)^2=4$

$\vec{q}=\frac{1}{2}(2,4)+t(1,0)=(1+t,2)$

⇓

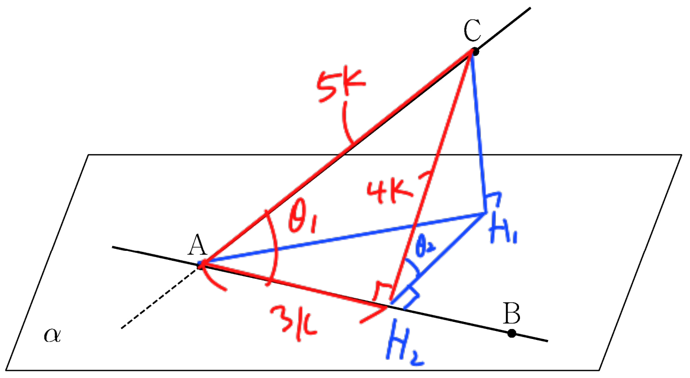
y=2 위의 점



최소: 4-2=2

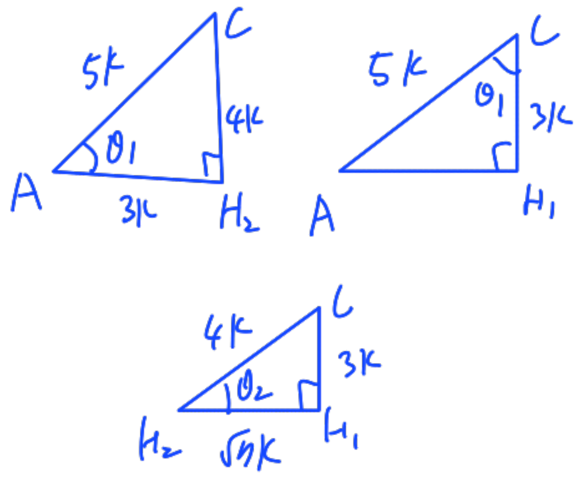
27. 좌표공간에 직선 AB를 포함하는 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 C에 대하여 직선 AB와 직선 AC가 이루는 예각의 크기를 θ_1이라 할 때 $\sin\theta_1 = \frac{4}{5}$이고, 직선 AC와 평면 α가 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2} - \theta_1$이다. 평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ_2라 할 때, $\cos\theta_2$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{6}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{8}$



$\sin\theta_1 = \frac{4}{5}$

$\cos\theta_1 = \frac{3}{5}$



$CH_1 = 5k\cos\theta_1$
$= 3k$

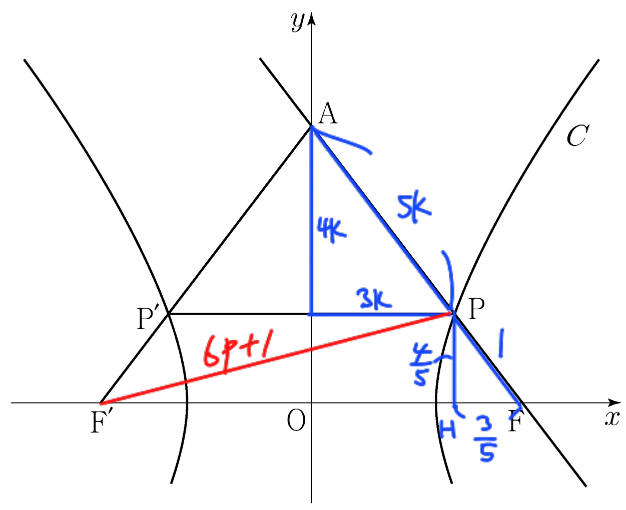
$\cos\theta_2 = \frac{\sqrt{7}}{4}$

28. 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)\,(c > 0)$인 쌍곡선 C와 y축 위의 점 A가 있다. 쌍곡선 C가 선분 AF와 만나는 점을 P, 선분 AF′과 만나는 점을 P′이라 하자.
직선 AF는 쌍곡선 C의 한 점근선과 평행하고

$$\overline{AP} : \overline{PP'} = 5 : 6, \quad \overline{PF} = 1$$

일 때, 쌍곡선 C의 주축의 길이는? [4점]

① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{29}{12}$ ⑤ $\frac{5}{2}$



$y = \pm\frac{b}{a}x$, $-\frac{b}{a} = \frac{-4k}{3k}$, $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$

$a : b = 3 : 4$

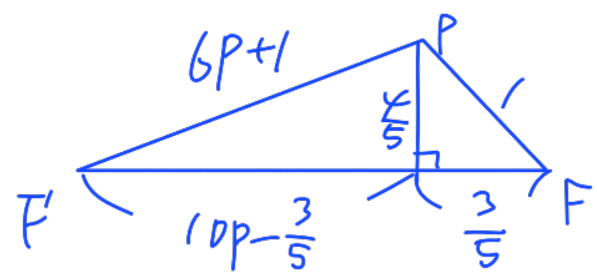
$PH = \frac{4}{5}$
$FH = \frac{3}{5}$

$a = 3p$
$b = 4p$
$c = 5p$

$2a = 6p$

$PF' = 6p + 1$

$F(5p, 0)$
$F'(-5p, 0)$



$36p^2 + 1 + 12p = 100p^2 + \frac{9}{25} - 12p + \frac{16}{25}$

$64p^2 - 24p = 0$, $p = \frac{3}{8}$

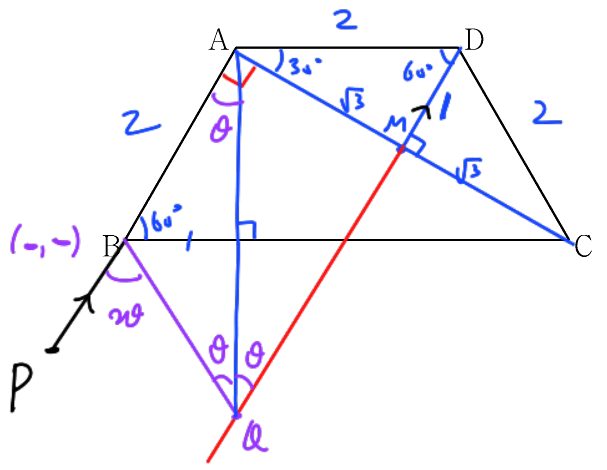
$6p = \frac{9}{4}$

단답형

29. 평면 α 위에 $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{AD}=2$, $\angle ABC=\angle BCD=\frac{\pi}{3}$ 인 사다리꼴 ABCD가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{DQ}$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $\overrightarrow{AC}=2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BP})$
>
> (나) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PQ}=6$
>
> (다) $2\times\angle BQA=\angle PBQ<\frac{\pi}{2}$

$\boxed{12}$



$\vec{BP} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AD} = \vec{DA} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{DM}$, $|\vec{BP}| = 1$

$\vec{AC}\cdot\vec{PQ} = \vec{AC}\cdot(\vec{AQ}-\vec{AP}) = \vec{AC}\cdot\vec{AQ} - \underbrace{\vec{AC}\cdot\vec{AP}}_{0}$

$= \vec{AC}\cdot\vec{AQ} = |\vec{AC}||\vec{AQ'}| = 2\sqrt3|\vec{AQ'}| = 6$

$\therefore |\vec{AQ'}| = \sqrt3$

$2\times\angle BQA = \angle PBQ$

$\underset{2\theta}{\angle PBQ} = \underset{\theta}{\angle BQA} + \underset{\theta}{\angle BAQ}$ $\quad\therefore \overline{AB} = \overline{BQ} = 2$, $\theta = 30°$

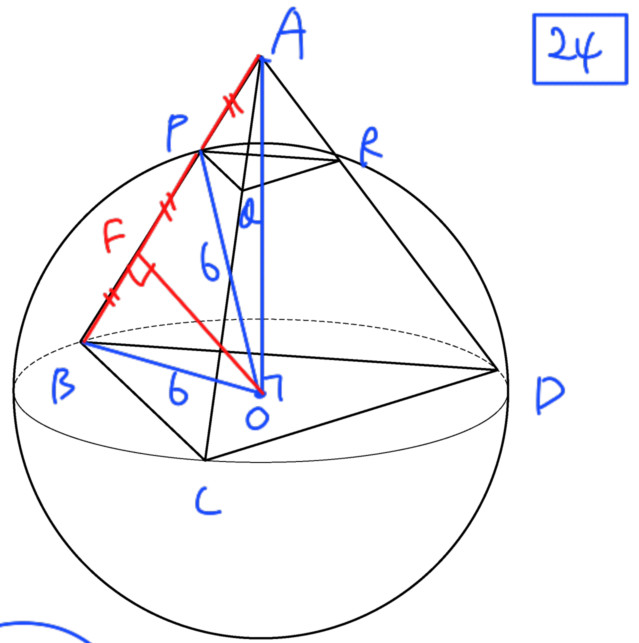
$B(0,0) \to C(4,0)$, $D(3,\sqrt3)$, $Q(1,-\sqrt3)$, $P(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt3}{2})$

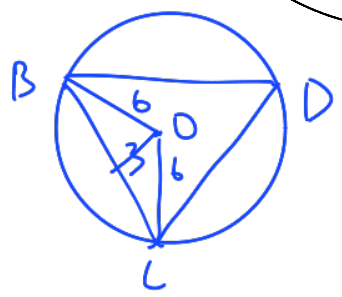
$\vec{CP}\cdot\vec{DQ} = (-\frac{9}{2},-\frac{\sqrt3}{2})\cdot(-2,-2\sqrt3)$

$= 9+3 = 12$

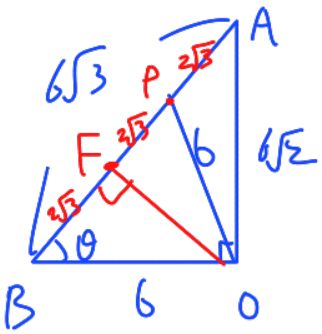
30. 좌표공간에 정사면체 ABCD가 있다. 정삼각형 BCD의 외심을 중심으로 하고 점 B를 지나는 구를 S라 하자. 구 S와 선분 AB가 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P, 구 S와 선분 AC가 만나는 점 중 C가 아닌 점을 Q, 구 S와 선분 AD가 만나는 점 중 D가 아닌 점을 R라 하고, 점 P에서 구 S에 접하는 평면을 α라 하자. 구 S의 반지름의 길이가 6일 때, 삼각형 PQR의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 k이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{24}$





$\overline{BC} = 6\sqrt3$, $\overline{OA} = \frac{\sqrt6}{3}\times6\sqrt3 = 6\sqrt2$



$\tan\theta = \frac{\sqrt2}{3}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt3} = \frac{\overline{BF}}{6}$

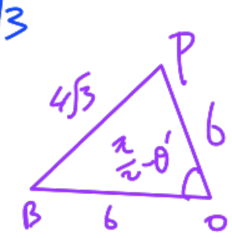
$\overline{BF} = 2\sqrt3 = \overline{PF}$

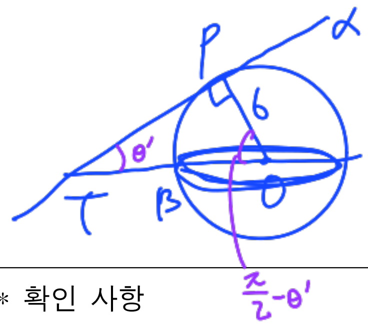
$\therefore \overline{BF} = \overline{FP} = \overline{PA} = 2\sqrt3$

$\overline{PQ} : \overline{BC} = 1:3 \quad\therefore \overline{PQ} = 2\sqrt3$

$\triangle PQR = \frac{\sqrt3}{4}\times(2\sqrt3)^2 = 3\sqrt3$

$\triangle PQR$ & $\alpha \Rightarrow \triangle BCD$ & α





$\angle POT = \frac{\pi}{2}-\theta'$

$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta') = \frac{36+36-48}{2\cdot6\cdot6} = \frac{1}{3}$

$\sin\theta' = \frac{1}{3}$, $\cos\theta' = \frac{2\sqrt2}{3}$ $\quad\therefore k = 3\sqrt3\cdot\frac{2\sqrt2}{3} = 2\sqrt6$

$k^2 = 24$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.