2004년 03월 교육청 수리(가형) 17번

sol)

직관적으로 봐도 $\mathrm{P}(3,2)$일 때 $\mathrm{H}(8,2), \mathrm{K}(3,7)$가 되어
$\overline{\mathrm{PH}}+\overline{\mathrm{PK}}=5+5=10$로 답일 것 같지만, 이것은 어디까지나 추측이고 푸는 사람의 희망사항일 뿐이니 한 번 정확하게 수식으로 풀어보자. 그렇다고 이러한 직관이 독이 되는 것이 결코 아니라, 어느 정도 답을 예상하고 푸는 것이니 무조건적으로 배제하는 것도 바람직하다고 볼 수 없다.

우선 직선 HK의 방정식은 $x+y=5$이므로

$$\mathrm{P}(t, 5-t) \quad (2 \le t \le 4)$$

라 둘 수 있고, 이에 따라 $\mathrm{H}(2^{6-t}, 5-t), \mathrm{K}(t, 2^t-1)$라 정리할 수 있고,

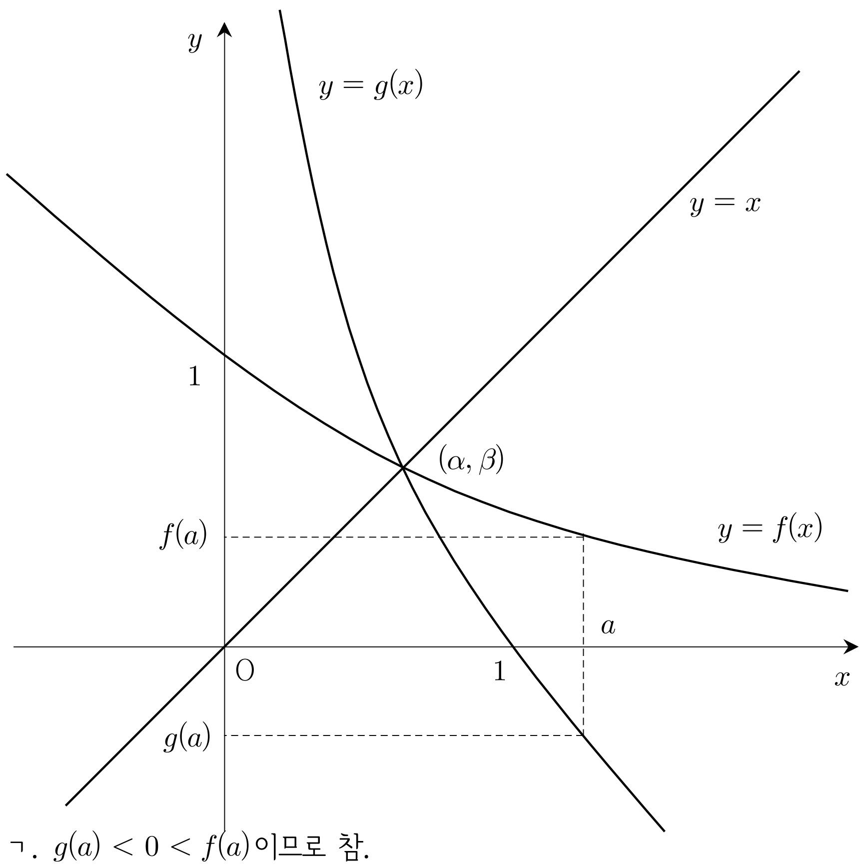
$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PH}}+\overline{\mathrm{PK}} &= (2^{6-t}-t)+\{2^t-1-(5-t)\} \\ &= 2^t+\frac{2^6}{2^t}-6 \ge 2\sqrt{2^6}-6=10\end{aligned}$$

으로 산술기하를 적용하여 답을 얻을 수 있다.

2005년 03월 교육청 수리(가형) 29번

sol)

역함수 관계임에 주의하여 두 그래프를 그려보자.



ㄱ. $g(a)<0<f(a)$이므로 참.

ㄴ. 두 그래프가 역함수 관계이고, 오직 하나의 교점을 갖기 때문에 참.

ㄷ. $b<f(a) \Leftrightarrow b<\left(\frac{1}{2}\right)^a$이면 $2a<g(b^2) \Leftrightarrow 2a<\log_{\frac{1}{2}} b^2$인지 있는데, $b<\left(\frac{1}{2}\right)^a$의 양변에 밑을 $\frac{1}{2}$로 하는 로그를 취한 곱하면 $2a<\log_{\frac{1}{2}} b^2$을 얻을 수 있다.

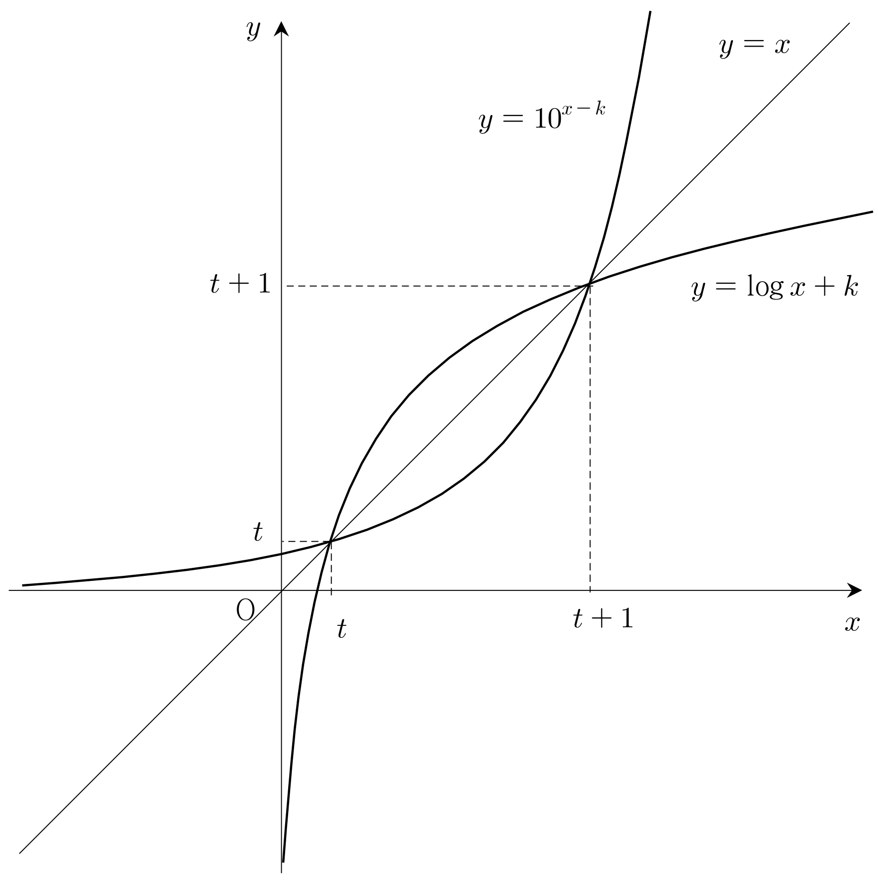
고로 답은 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

※ 밑이 0과 1사이인 경우, 지수함수 $y=a^x$와 로그함수 $y=\log_a x$의 교점 개수는 $0<a<\frac{1}{e^e} \fallingdotseq 0.0660$일 때 세 개, $\frac{1}{e^e}<a<1$일 때 하나를 갖고, 지금은 $a=0.5$인 경우에 해당하므로 이러한 논의가 참이다.

2005년 04월 교육청 수리(가형) 14번

sol)

$y=10^x$와 $y=\log x$가 서로 역함수 관계인데, 나아가 지금처럼 적당하게 평행이동한 $y=10^{x-k}$와 $y=\log x+k$ 여전히 역함수 관계임을 이용하자.



그러면 두 개의 교점은 $y=x$에서 발생해야 하고 기울기가 1인 대각선 $y=x$ 상의 두 점간의 거리가 $\sqrt{2}$이므로 교점의 좌표는 $(t,t), (t+1,t+1)$과 같은 꼴이어야 한다.

이때 식을 연립해보면, 답이 로그 꼴이므로 $y=\log x+k$와 $y=x$를 택하여서

$$\begin{cases} t+1=\log(t+1)+k \\ t=\log t+k \end{cases}$$

에서 $1=\log\frac{t+1}{t} \rightarrow t=\frac{1}{9}$를 얻고,

따라서 $k=t-\log t=\frac{1}{9}+2\log 3$이 나온다.

2005년 04월 교육청 수리(가형) 16번

sol)

비록 그래프를 그려보면 자명하게 보이는 해라고 할지라도 정확한 해를 구할 수 없는 경우가 더 많다. 그런데 지금은 출제자가 의도적으로 수치를 맞춰서 제시하였는데, $2^{x+2}<(x+1)^3$에 밑을 2로 하는 로그를 취하면

$$x+2<3\log_2(x+1)$$

이 된다. 그리고 $x+1=t$로 치환해보면

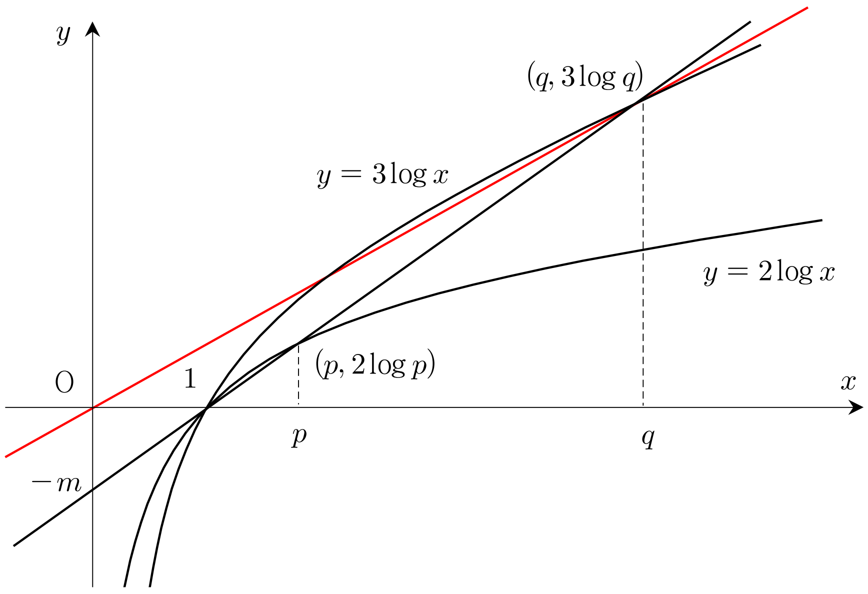
$$t+1<3\log_2 t$$

가 되어 이를 만족하는 해의 범위가 $2<t=x+1<8$이 된다. 따라서 $1<x<7$에서 ③ $\alpha+\beta=8$이 답이 된다.

2005년 06월 평가원 수리(나형) 12번

sol)

상황을 시각적으로 확인하기 위하여 그래프를 그리고 시작하자.



두 로그함수 $y=2\log x, y=3\log x$는 점 $(1,0)$에서 유일한 교점을 가지며 그때 대소 관계가 반전된다.

ㄱ. 그래프만 정확히 그리면 자명하게 나온다. $p<q$로 거짓.

ㄴ. 두 점 $(p,2\log p),(q,3\log q)$를 잇는 직선의 기울기이자 평균변화율로 참이다. 이렇게 곡선 그래프와 직선 그래프를 제시하고서 기울기를 묻지 않을 수가 없다!

ㄷ. $\dfrac{3\log q}{q}$ 역시 그래프의 기울기와 관련지어 해석하자. 즉,

$$\frac{3\log q}{q}=\frac{3\log q-0}{q-0}$$

으로 점 $(q,3\log q)$와 원점 $\mathrm{O}(0,0)$을 잇는 직선의 기울기를 의미한다.

따라서 ④ ㄴ, ㄷ이 참이다.

2005년 08월 사관학교 수리(나형) 23번

sol)

함수에서 변수를 치환 시 그래프 개형 전환 관계를 되새겨 볼 수 있는 문제이다. $f(x)=g(x)$, 즉 $9^x+a=b\cdot 3^x+2$는

$$9^x-b\cdot 3^x+a-2=0$$

이라는 지수방정식으로 볼 수 있으며,

두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만난다는 것은

$$h(x)=f(x)-g(x)=9^x-b\cdot 3^x+a-2$$

가 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다는 것을 의미하기도 하지만 방정식

$$9^x-b\cdot 3^x+a-2=0$$

이 서로 다른 두 근을 갖는다는 것으로도 볼 수 있다. 이때 $3^x=t(>0)$으로 치환해보면

$$t^2-bt+a-2=0$$

이라는 친숙한 이차방정식 꼴로 전환된다.

한편, 두 곡선의 교점의 x좌표인 $\log_3 2, \log_3 k$는 x에 대한 지수방정식의 근으로 볼 수 있기 때문에 t에 대한 이차방정식과 연관지어 생각해보면

$$\begin{cases} x_1=\log_3 2 \rightarrow 3^{x_1}=2=t_1 \\ x_2=\log_3 k \rightarrow 3^{x_2}=k=t_2 \end{cases}$$

이제 보기를 살펴보자.

ㄱ. $t^2-bt+a-2=0$이 서로 다른 두 근을 가지므로

$$D=b^2-4(a-2)>0 \rightarrow b^2>4a-8$$

이므로 거짓.

ㄴ. $t^2-bt+a-2=0$의 한 근이 $t_1=2$이므로 대입해보면

$$4-2b+a-2=0 \rightarrow a=2b-2$$

이므로 참.

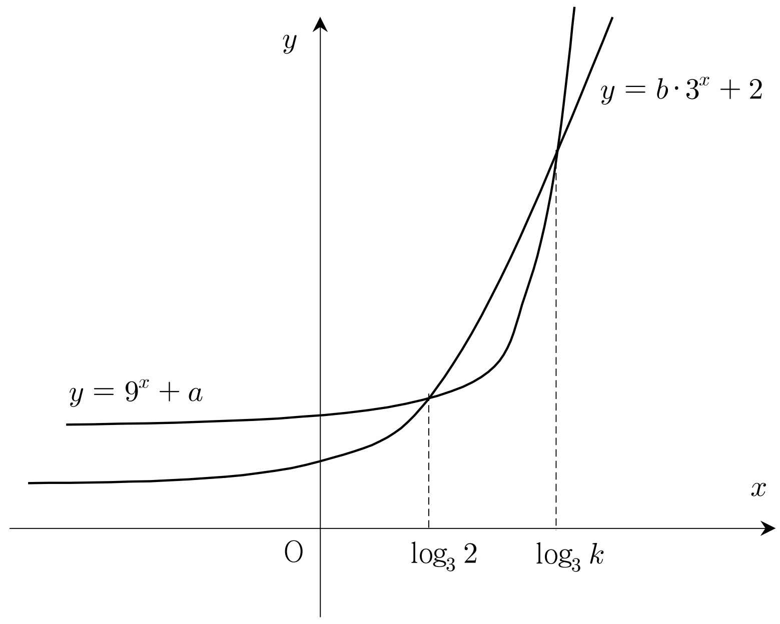
ㄷ. 근과 계수와의 관계를 이용하면, 두 근의 곱이

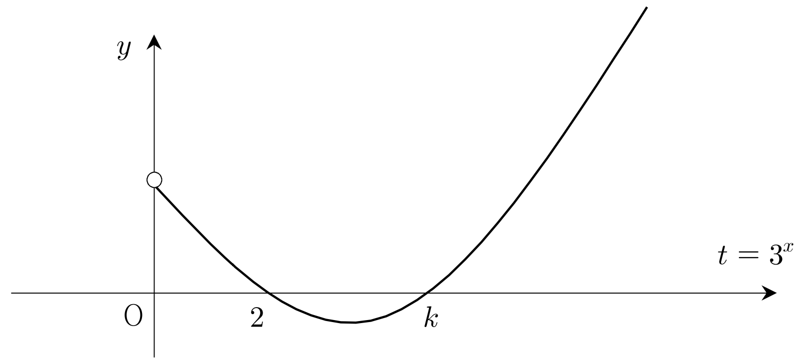
$$t_1t_2=2k=a-2>4$$

가 되어 참.

따라서 답은 ③ ㄴ, ㄷ이다.

※ ㄱ, ㄴ, ㄷ를 참고하여 $a=8, b=5$를 대입해보자. 이때 지수함수의 개형은 다음과 같다. 교점을 강조하려면 그래프 간격의 왜곡이 필연적이다.





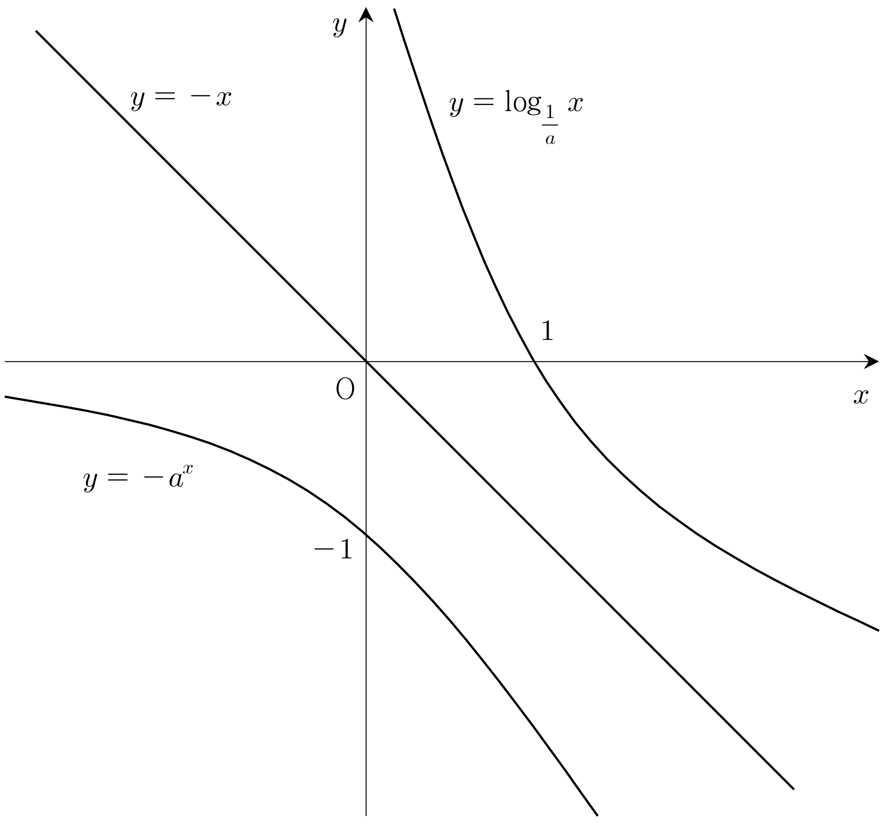
그런데 지수함수를 조절해가며 교점을 갖게 하는 것은 상당히 까다롭기 때문에 간접적으로 우리는 "치환"이라는 개념을 사용하여 이차함수 개형으로 환원한 것이다. 이때의 이차함수는 정의역이 실수 전체의 집합에서 반토막 난 $t>0$이고, xy평면에서 x축이 로그함수적으로 축소되면서 지수함수가 이차함수화 된 것이라 볼 수 있다.

2005년 09월 평가원 수리(가형) 15번

sol)

ㄱ. $y=a^{x-1}$과 $x=a^{y-1}$, 즉 $y=\log_a x+1$은 서로 역함수 관계로서 $y=x$대칭이기에 참이다.

ㄴ. $y=-a^x$의 역함수는 $x=-a^y$, 즉 $y=\log_a(-x)$인데, 이는 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$와 원점 대칭 관계이다. 수식만으로 확인하는 것보다 그래프를 통해 찾는 것이 더 빠르다.



따라서 ㄴ은 거짓.

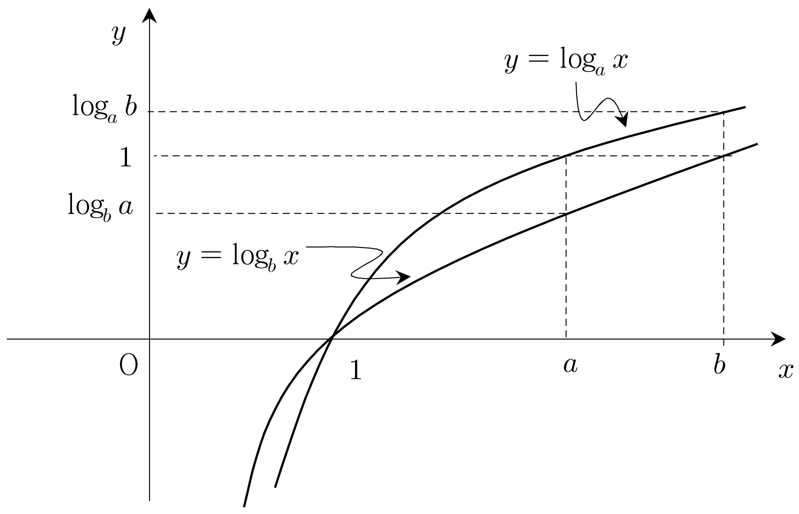
ㄷ. $y=ka^x$에 대하여 k는 곧 x축 방향으로의 평행이동을 의미한다. 왜냐하면 $k=k^1=k^{\log_a a}=a^{\log_a k}$로서 $y=ka^x=a^{x+\log_a x}$이기 때문이다.
설령 $k=1$일지라도 $1<a<e^{\frac{1}{e}} \fallingdotseq 1.44$일 때 두 함수의 그래프는 $y=x$상에서 두 교점을 갖는다. 예를 들어, $k=1, a=\sqrt{2}\left(<e^{\frac{1}{e}}\right)$이면 $a>1$임에도 불구하고 $(2,2), (4,4)$에서 두 교점을 갖는다.

고로, 답은 ③ ㄱ, ㄷ이다.

2006년 03월 교육청 수리(가형) 09번

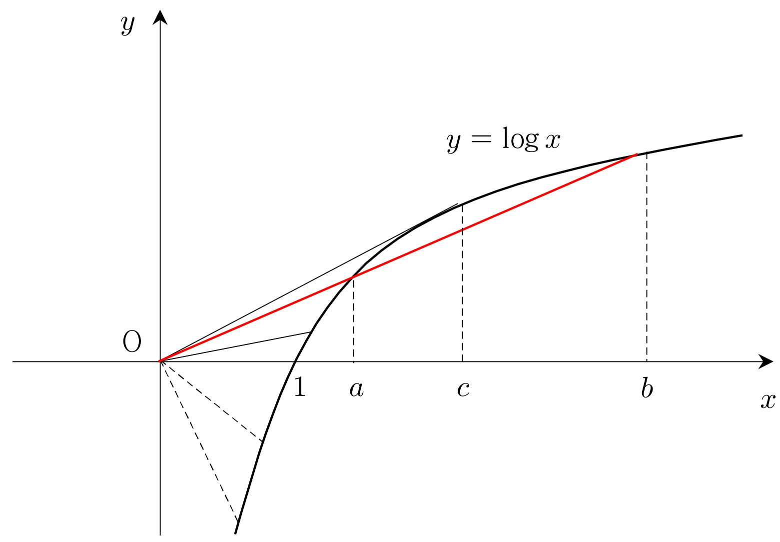
sol)

ㄱ. $a=2, b=4$정도를 대입을 하거나, 간단한 부등식 관계를 이용하여 참, 거짓 여부를 금방 찾을 수도 있지만 기하학적으로 정확하게 포착해보자.



로그함수가 항상 지나는 점인 $(1,0)$과 y값이 1인 순간의 x값으로서 a, b를 x축 상에 나타내어 주면 주어진 로그함수를 비약 없이 논리적으로 나타낼 수 있다. 이때 ㄱ은 참.

ㄴ. $\frac{1}{x}\log x$의 꼴을 파악하고자 새로이 $f(x)=\frac{\log x}{x}$라 두고 미분까지 행할 필요는 없다. 조금만 살펴보면 주어진 형태는 원점과 상용로그함수 위의 점 $(x, \log x)$를 잇는 선분의 기울기로 해석할 수 있다.



다소 어려울 수 있는 문항이다. $y=\log x$ 위의 점 중에서, 접선의 방정식이 원점을 지나는 것의 x좌표를 c라 하였을 때 굳이 미분까지 해가며 계산할 필요는 없다. 그러한 c를 경계로 a, b가 어느 범위에 존재하느냐에 따라 $\frac{1}{a}\log a$와 $\frac{1}{b}\log b$의 대소관계가 바뀐다.
예를 들어 위와 같이 원점을 지나는 직선이 $y=\log x$와 두 개의 교점을 갖는 상황으로 잡으면 $1<a<b$임에도 $\frac{1}{a}\log a=\frac{1}{b}\log b$가 되어 거짓이 된다.

ㄷ. 이는 곧 $(a+b)^2<2(a^2+b^2)$? 인지를 묻는 셈인데, 정리해보면 $(a-b)^2>0$이 되어 참이다.

따라서 답은 ③ ㄱ, ㄷ이다.

2006년 03월 교육청 수리(가형) 27번

sol)

$2^x=t$로 치환해버리면 지수방정식 형태가 이차방정식 꼴로 환원된다. 즉,

$$t^2-2at+a^2-a-6=0$$

으로 바뀌는데, t는 모든 실수가 아니라 $t>0$이기 때문에 결국, 기존 지수방정식에서의 '서로 다른 두 실근' 조건은, 이차방정식에서의 '서로 다른 두 양근' 조건으로 바뀐다.

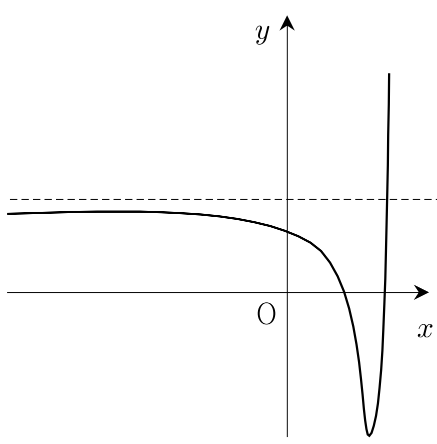
이때 두 양근을 각각 t_1, t_2라 하면

$$\begin{cases} t_1+t_2=2a>0 \\ t_1t_2=a^2-a-6=(a-3)(a+2)>0 \end{cases}$$

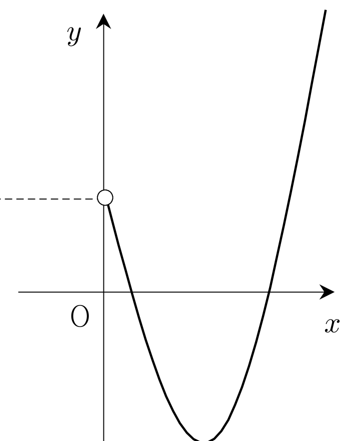
그리고, 판별식 조건까지 추가하여

$$D/4=a^2-(a^2-a-6)=a+6>0$$

이를 종합하면 $a>3$으로 ⑤번이 답이 된다.



$y=4^x-a\cdot 2^{x+1}+a^2-a-6$

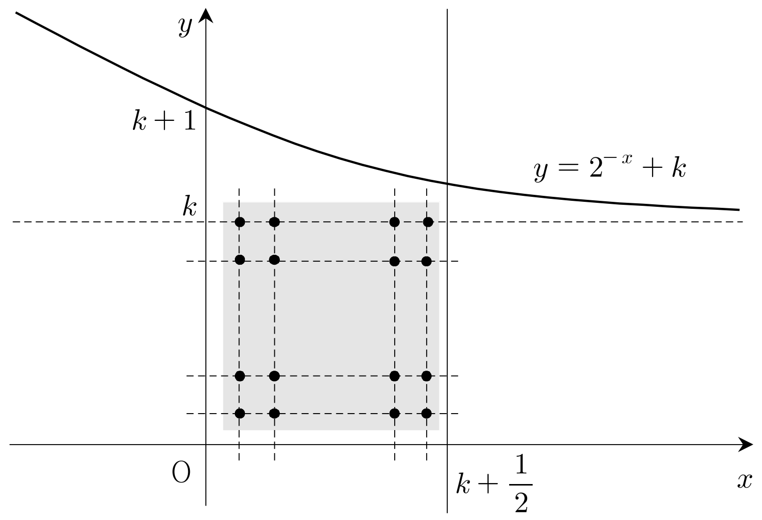


$y=x^2-4ax+a^2-a-6$

2006년 08월 사관학교 수리(나형) 16번

sol)

지수, 로그함수는 점근선과 연관 지어서 생각해야 할 때가 있다. 이 문제는, 지수함수든 로그함수든 점근선 부근에서 급격히 변함을 이용하여 풀면 된다. 이는 2013학년도 대수능 지수로그 킬러문항에도 적용된 아이디어이다.



$0<x<k+\dfrac{1}{2}$에서 위, 아래 경계를 생각할 때,

곡선 $y=2^{-x}+k$와 x축 사이에 존재하는 격자점은 $0<y\le k$에서 존재하는 것만을 따져도 충분하다.

왜냐하면 $y=2^{-x}+k$의 y절편이 $k+1$로서 $x>0$에서 계속 감소하기 때문에 곡선 경계 $y=2^{-x}+k$를 거의 $y=k+0$처럼 여겨도 무방하다는 것이다. 이때 $N(k)=k^2$으로서 답은 ⑤ 385가 된다.

※ 위 그림을 잘 살펴보면 해당 격자점들과 그 밖의 요소들 간의 간격에 왜곡이 있지만 답을 구하는 데에는 혼란을 야기하지만 않는다면 상관없다.

2006년 08월 사관학교 수리(나형) 20번

sol)

a, b, c는 로그함수의 밑으로서 1이 아닌 양수임을 알 수 있다. 그런데, 밑이 서로 같은 경우에 대한 언급이 없으니 아마 ㄱ, ㄴ, ㄷ 중에서 한 번쯤 물어볼 것이라 예상할 수 있다.

ㄱ. 말 끝나기가 무섭게 물어보고 있다. $b^2=ac$이기 때문에,

$$a+c\ge 2\sqrt{ac}=2b\text{에서 등호는 } a=b=c\text{일 때 성립한다.}$$

ㄴ. $\dfrac{1}{f(5)}=\log_5 a,\ \dfrac{1}{g(5)}=\log_5 b,\ \dfrac{1}{h(5)}=\log_5 c$와 $b^2=ac$를 이용하면,

$b^2=ac$에다 밑을 5로 하는 로그를 취해보니

$$\frac{2}{g(5)}=\frac{1}{f(5)}+\frac{1}{h(5)}$$

이 성립하므로 참.

ㄷ. $x_1=a^5, x_2=b^5, x_3=c^5$이면

$$(x_2)^2=b^{10}=(b^2)^5=(ac)^5=a^5c^5=x_1x_3$$

가 성립하므로 참.

따라서 답은 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

2007년 03월 교육청 수리(가형) 10번

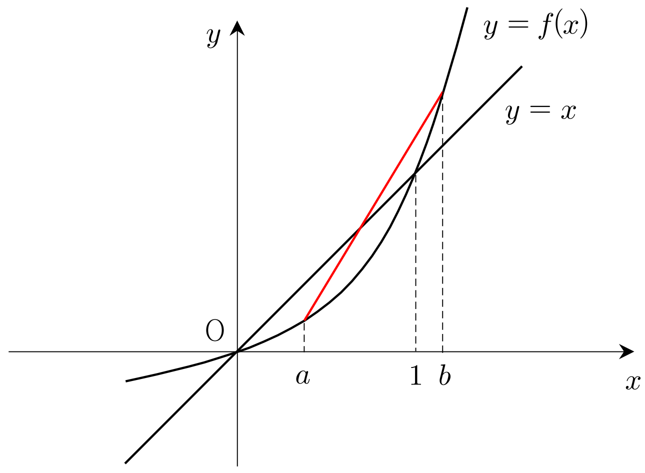
sol)

ㄱ. 그래프를 보면 자명하게 참이다.

ㄴ. $0<a<b$에서 $b-a>0$이므로 약간만 조작을 해보면,

$$\frac{2^b-2^a}{b-a}>1$$

로서, $y=f(x)$상의 두 점을 잡아서 만든 할선의 평균변화율이 항상 1보다 크냐고 묻는 셈임을 알 수 있다. 얼핏 보기에 참인 듯 하다.



하지만 $0<a<b<1$일 때 얼마든지 $0<\dfrac{2^b-2^a}{b-a}<1$일 수도 있고,

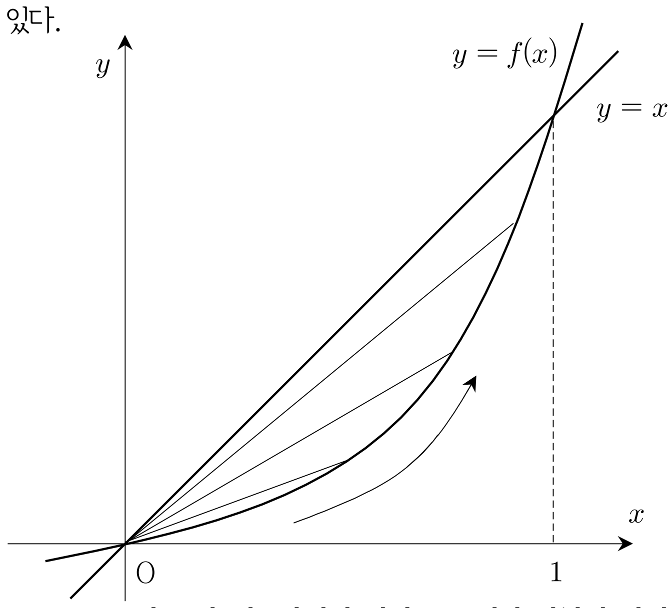
$\dfrac{2^b-2^a}{b-a}=1$일 수도 있으며 $\dfrac{2^b-2^a}{b-a}>1$일 수도 있다. 따라서 거짓.

ㄷ. $0<a<b$이므로 편하게 부등식을 변형하여 기울기로 해석을 해보자.

$\dfrac{2^a-1}{a}<\dfrac{2^b-1}{b}$를 알아보기 쉬운 형태로 조금씩 조작해보면

$$\rightarrow \frac{2^a-1}{a-0}<\frac{2^b-1}{b-0}\ \rightarrow\ \frac{f(a)-f(0)}{a-0}<\frac{f(b)-f(0)}{b-0}$$

가 되어 원점과 곡선 $y=f(x)$위의 점을 이은 할선의 기울기 비교임을 알 수 있다.



이때는 $0<a<b$와 1의 대소관계에 따라 부등식의 방향이 바뀌는 것이 아니라 $0<a<b$이기만 하면 무조건 $\dfrac{2^a-1}{a}<\dfrac{2^b-1}{b}$가 성립한다.

그래프 상 할선을 움직여가며 그 기울기 수치의 증가를 통해 파악하거나, 수식으로 풀어내고자 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{2^x-1}{x}$라는 할선 함수를 미분하여

$g'(x)=\dfrac{(2^x\ln 2)x-(2^x-1)}{x^2}=\dfrac{(x\ln 2-1)2^x+1}{x^2}$에서

$x>0$이면 $g'(x)>0$이므로 $g(a)<g(b)$라 하여도 된다.

2007년 05월 교육청 수리(가형) 10번

sol)

"임의의 함수는 우함수이거나 기함수이다"는 거짓 명제지만,
"임의의 함수는 우함수와 기함수의 합으로 나타낼 수 있다"는 명제는 참이다.
한번, 임의의 함수를 우함수와 기함수의 합으로 분해해보자.
우함수(even function)을 $E(x)$, 기함수(odd function)을 $O(x)$라 하면

$$\begin{cases} f(x) = E(x) + O(x) \\ f(-x) = E(-x) + O(-x) = E(x) - O(x) \end{cases}$$

에서 $E(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $O(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$가 된다. 즉,

$f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 로 나타낼 수 있는 것이다.

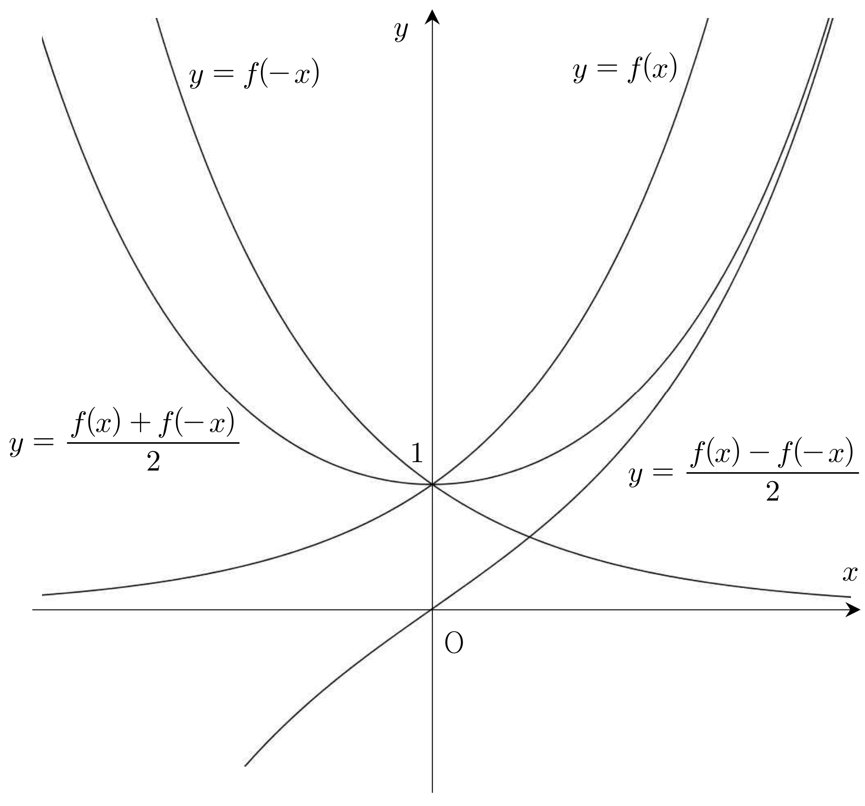
가령, $f(x) = e^x$라 한다면 이는 우함수도 아니고 기함수도 아니지만,

$e^x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ 로 분해할 수 있다.

ㄱ. 참.

※ 물론, 혹자는 어디선가 오일러 항등식 $e^{\pi i} + 1 = 0$를 보았던 기억을 더듬어서 $e^{\pi i} = -1 < 0$ 같은 경우가 반례로 작용할 수 있지 않겠느냐고 우길 수도 있겠지만 고등학교 문제에서 다루는 건 복소함수가 아니라 실함수야 이 양반아.

ㄴ. $a^x + a^{-x} \geq 2$임은 산술기하를 통해서도 금방 보일 수 있겠지만,



그래프를 통해 살펴봐도 $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \geq 1$이 자명함을 알 수 있다.

이때 $y = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$의 그래프는, $f(x) = a^x$와 $f(-x) = a^{-x}$ 그래프의 평균으로서 smooth하게 곡선으로 그려내도 충분하다.

ㄷ. 자명타. 이번에는 수식만으로 해결해보자.

$x \geq 0$이면 $f(|x|) = f(x) = a^x = \dfrac{a^x}{2} + \dfrac{a^x}{2} \geq \dfrac{a^x}{2} + \dfrac{a^{-x}}{2}$

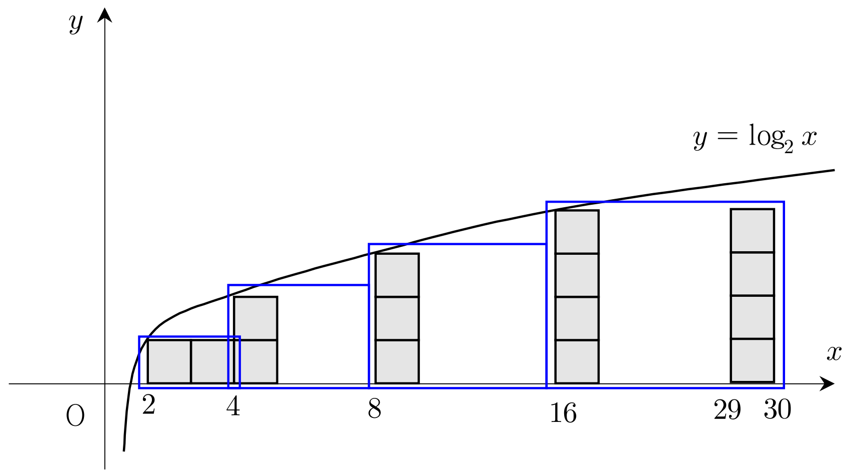
$x < 0$이면 $f(|x|) = f(-x) = a^{-x} = \dfrac{a^{-x}}{2} + \dfrac{a^{-x}}{2} \geq \dfrac{a^x}{2} + \dfrac{a^{-x}}{2}$

고로, 답은 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

2007년 05월 교육청 수리(가형) 25번

sol)

경계 위주로 사고하자.



정사각형 하나하나를 블록으로 생각하자면,

높이가 1층인 것들은 $4-2=2$개
높이가 2층인 것들은 $8-4=4$개
높이가 3층인 것들은 $16-8=8$개
높이가 4층인 것들은 $30-16=14$개

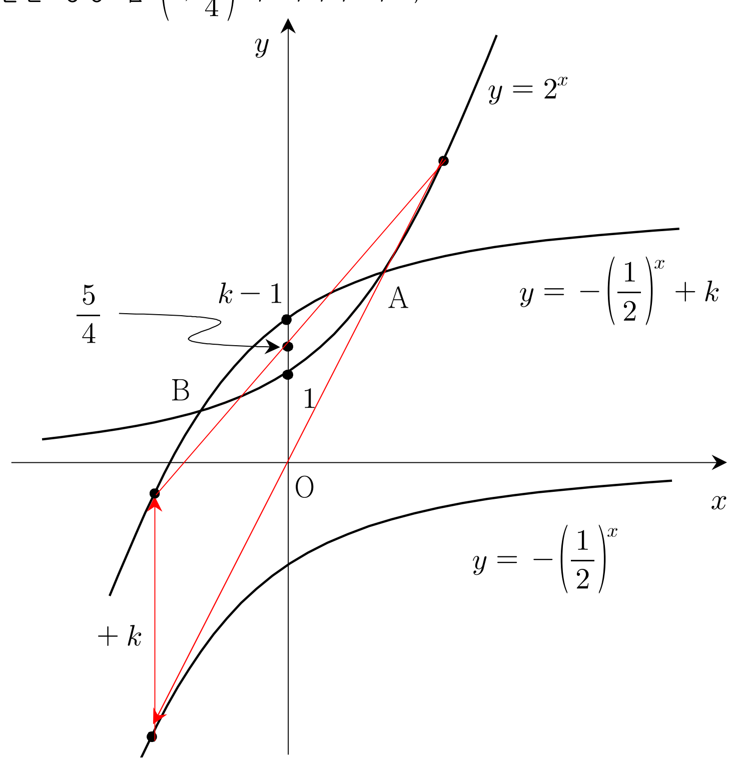
씩 있으므로 $1\cdot2+2\cdot4+3\cdot8+4\cdot14 = 2+8+24+56 = 90$이 답이다.

2007년 06월 평가원 수리(나형) 09번

sol.1)

이 문항을 접하였을 때 단번에 풀어내기가 제법 까다로운 편이다.

가장 빠른 방법은, $y = 2^x$ 의 y절편 1과 $y = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^x + k$의 y절편인 $k-1$의 중점이 $\dfrac{5}{4}$라고 하여서 $\dfrac{1+(k-1)}{2} = \dfrac{5}{4}$에서 $k = \dfrac{5}{2}$라 하는 것이다. 왜냐하면 곡선 $y = 2^x$ 를 원점에 대하여 대칭이동 시킨 후 y축 양의 방향으로 k만큼 평행이동 시킨 것으로 결국엔 $y = 2^x$ 위의 각 점들이 $y = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^x + k$ 위의 점들로 일대일 대응되기 때문에, 대응 관계의 중점들은 항상 점 $\left(0, \dfrac{5}{4}\right)$가 되어야 하고,



$y=2^x$ 를 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+k$로 원점 대칭(회전 이동)과 평행이동이라는 두 번의 조작을 통해 옮길 수도 있지만, 점 $\left(0,\frac{5}{4}\right)$에 대한 단 한 번의 점 대칭을 통해서도 완벽하게 두 곡선을 포갤 수 있다. 하지만 곡선 전체를 옮기는 것보다 딱 하나의 점, 그 중에서도 가장 만만한 $(0,1)$만을 추적하여

$$(0,1)\ \to\ (0,-1)\ \to\ (0,k-1)$$

임을 통해 $\frac{1+(k-1)}{2}=\frac{5}{4}\ \to\ k=\frac{5}{2}$라는 사고가 가능하다.

***sol*.2)**

두 점 A,B는 곡선 $y=2^x$ 위의 점이기도 하면서 동시에 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+k$ 위의 점이기도 하다. 따라서 $\mathrm{A}(\alpha,2^\alpha),\mathrm{B}(\beta,2^\beta)$라 두고서

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=0,\ \frac{2^\alpha+2^\beta}{2}=\frac{5}{4}$$

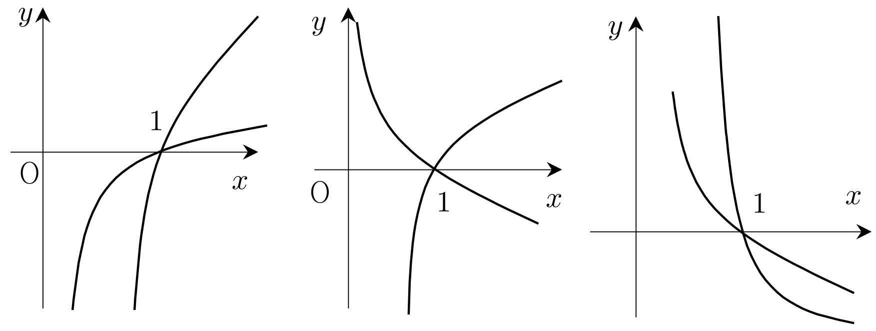
이라는 관계를 통하여 $\alpha=1,\beta=-1$를 얻고, 이를 곡선 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+k$에 대입해서 $2=-\left(\frac{1}{2}\right)^1+k\ \to\ k=\frac{5}{2}$임을 알 수도 있다. 따라서 답은 ⑤ $\frac{5}{2}$이다.

2007년 07월 교육청 수리(가형) 10번

***sol*)**

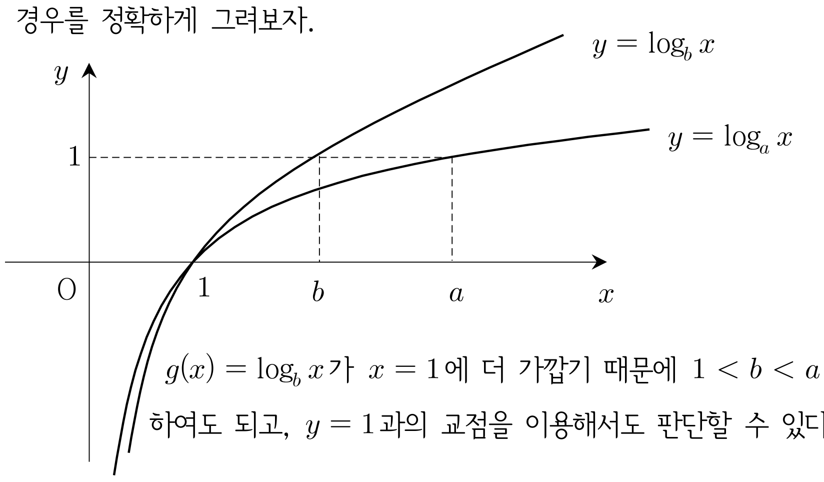
일단 답은 ③ ㄱ, ㄷ이다.

로그함수 $y=\log_a x$에서 밑이 1에 다가갈수록 로그함수는 $x=1$에 다가간다는 사실을 염두에 두고서, 로그함수 $y=\log_\triangle x$가 항상 지나는 두 개의 점 $(1,0),(\triangle,1)$을 이용하여 두 그래프를 그려서 풀면 된다.

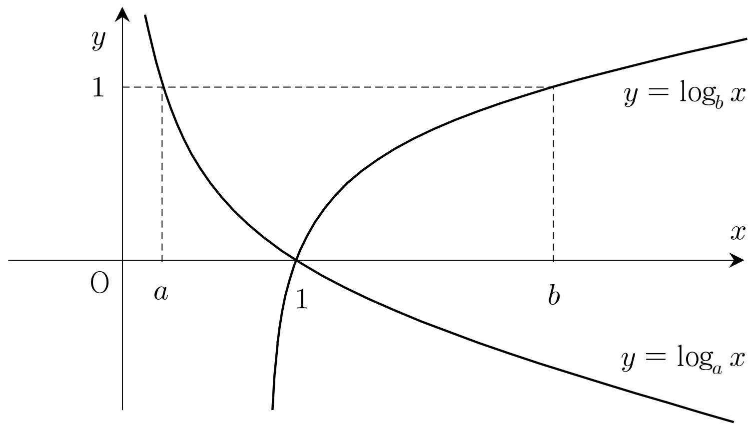


0과 a,b 그리고 1과의 대소관계에 따라 두 로그함수의 개형은 위와 같이 세 종류가 가능하다. 밑이 모두 1보다 크거나, 모두 0과 1 사이거나, 둘 중 하나는 1보다 크고, 다른 하나는 0과 1 사이거나.

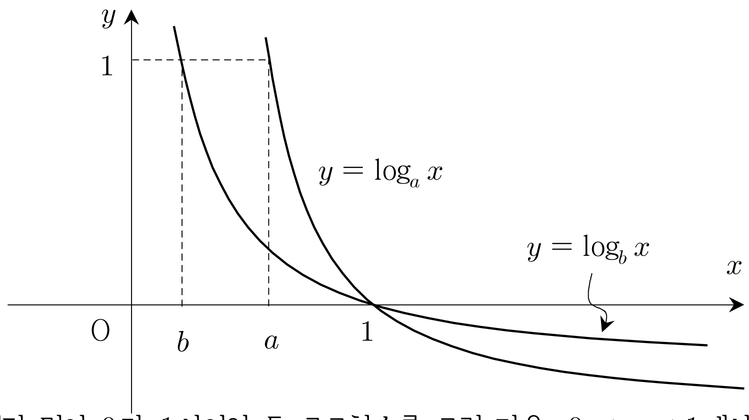
이때 $0<x<1$에서 더 위에 있는 함수가 $y=f(x)$가 된다. 이제 각각의 경우를 정확하게 그려보자.



$g(x)=\log_b x$가 $x=1$에 더 가깝기 때문에 $1<b<a$라 하여도 되고, $y=1$과의 교점을 이용해서도 판단할 수 있다.



위 경우는 $0<a<1<b$라는 대소관계가 바로 드러난다.



일단 밑이 0과 1사이인 두 로그함수를 그린 다음, $0<x<1$에서 더 위에 있는 것을 $f(x)=\log_a x$로 택한 다음 $x=1$에 가까운 것이 $\log_a x$이므로 $0<b<a<1$이라 할 수도 있고, 혹은 가까워진다는 개념을 대신하여 두 곡선을 $f(x),g(x)$로 구분한 다음 $y=1$과의 교점을 이용하여 x축 상에 a,b의 위치를 찾아서 풀 수도 있다.

이를 종합하면 주어진 조건을 만족하는 가능한 a,b의 대소관계들은

$$1<b<a,\qquad 0<a<1<b,\qquad 0<b<a<1$$

세 가지 뿐이다.

※ 문제가 이 즈음 되면 그래프를 끝까지 그리지 않고 a,b에 적당한 수치만 대입하여 풀다보면 반드시 막다른 길에 도달하게 될 것이다.

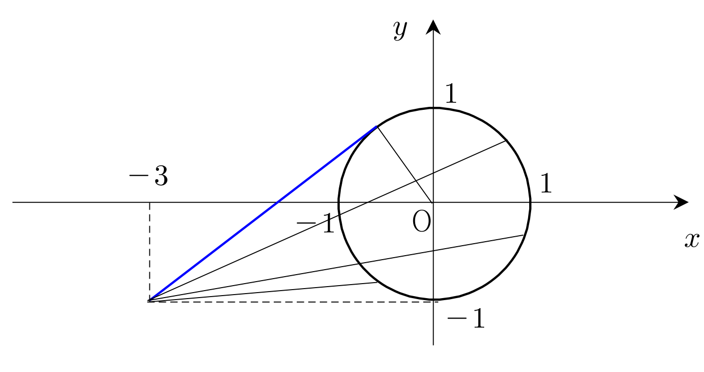
2007년 08월 사관학교 수리(나형) 09번

***sol*)**

겉 포장지는 로그함수처럼 생겼으나 뜯어보면 원의 방정식 문제이다. 최대한 기울기 모양이 드러나도록 수식을 변형해보면

$$\log_{\frac{1}{2}}(y+1)-\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{y+1}{x+3}\geq m$$

에서 $\frac{y+1}{x+3}\leq 2^{-m}$이 되고, $\frac{y+1}{x+3}=\frac{y-(-1)}{x-(-3)}$은 단위원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 (x,y)와 점 $(-3,-1)$을 이은 선분의 기울기로 해석할 수 있다.



점 $(-3,-1)$을 지나는 직선의 방정식을 $y=k(x+3)-1$로 잡고

단위원과 연립하여 중근을 갖는다고 풀어도 되지만 풀이가 불필요하게 복잡해지는 경향이 있으므로, 직선 $y = k(x+3)-1$, 즉 $kx - y + 3k - 1 = 0$과 원점에 이르는 거리가 단위원의 반지름인 1과 일치한다고 식을 세워보면

$$\frac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

이 되어 $9k^2 - 6k + 1 = k^2 + 1 \rightarrow 4k^2 - 3k = 0$으로 이중에서

$k = \frac{3}{4}$만이 유의미한 근이 된다. 왜냐하면 괄호 조건으로서 문제의

끝자락에 $y \neq -1$이라고 한 것이 $k = 0$과 직결되기 때문이다.

그러므로 $0 < k \le 2^{-m}$에서 $2^{-m} = \frac{3}{4} \rightarrow 2^m = \frac{4}{3}$이므로 ④가

답이다.

혹은 삼각함수 덧셈정리에 익숙한 이과생들은 $\tan\theta = \frac{1}{3}$일 때

$$\tan 2\theta = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4} = 2^{-m}$$

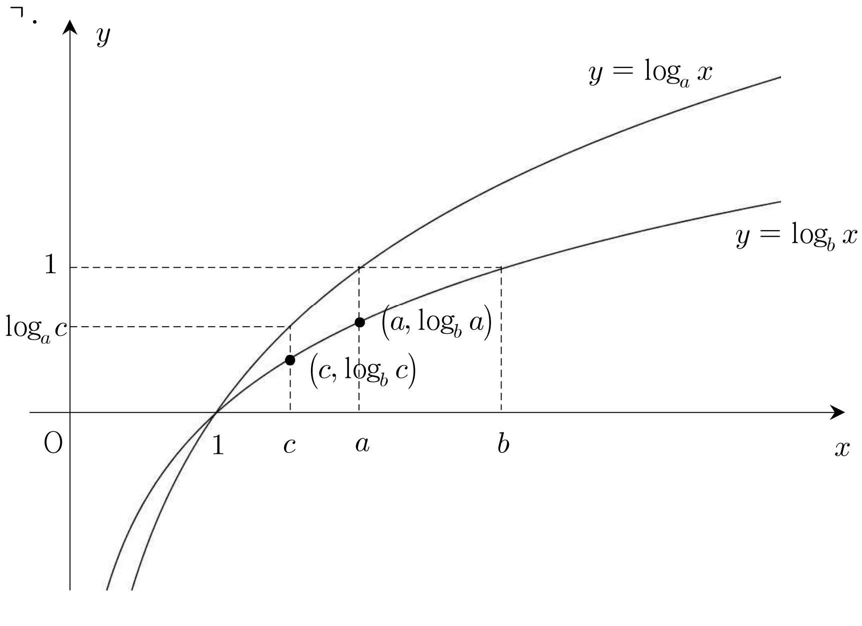
을 통해 $2^m = \frac{4}{3}$임을 이끌어 낼 수도 있다.

2007년 08월 사관학교 수리(나형) 12번

***sol*)**

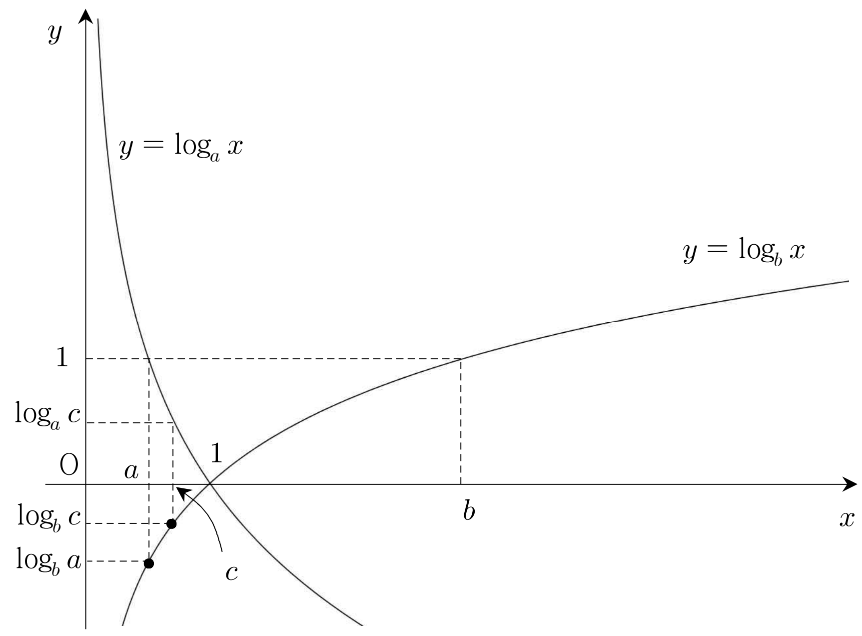
로그함수 $y = \log_a x$에서 밑이 1에 가까워질수록 로그함수도 직선 $x = 1$에 가까워짐을 이용하자. 또, 로그함수가 항상 지나는 두 점 $(1,0), (a,1)$도 로그함수 판별에 도움을 줄 수 있다.

ㄱ.



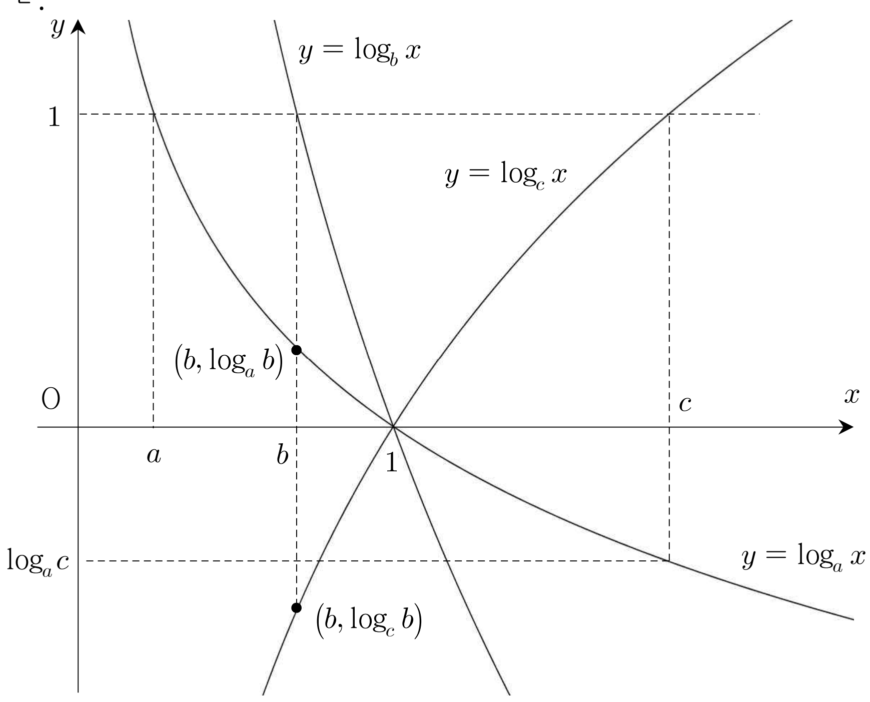
예컨대 이러한 물음에 답하기 위한 사고과정을 찬찬히 살펴보면 다음과 같다. 밑이 1보다 큰 로그함수 두 개를 그리자. 이때 $y = 1$과의 교점의 x좌표가 a, b가 되는데, $1 < a < b$임을 이용하면 두 로그함수의 밑을 짝지어 줄 수 있다. 혹은 a가 1에 더 가까우므로 $x = 1$에 더 가까운 로그함수의 밑을 a라 판별해도 된다. 다음으로 $0 < \log_a c < 1$이 되도록 x축에 c를 잡아줄 수 있고, $\log_b a$와 $\log_b c$의 위치를 파악해보면 밑이 b인 로그함수 위에 놓인 두 점의 높이 비교 문제가 되어 $\log_b c < \log_b a$로서 거짓임을 알 수 있다.

ㄴ.



위 그래프에서 보다시피 참이다.

ㄷ.



$\log_a c < 0 \rightarrow c > 1$을 이용해 $y = \log_c x$를 또 그려줘야 한다는 점이 조금 특이하다. 이때 $\log_a b$와 $\log_c b$를 로그함수 $y = \log_a x$와 $y = \log_c x$에서 $x = b$일 때 함숫값으로 생각해보면 참임을 알 수 있다.

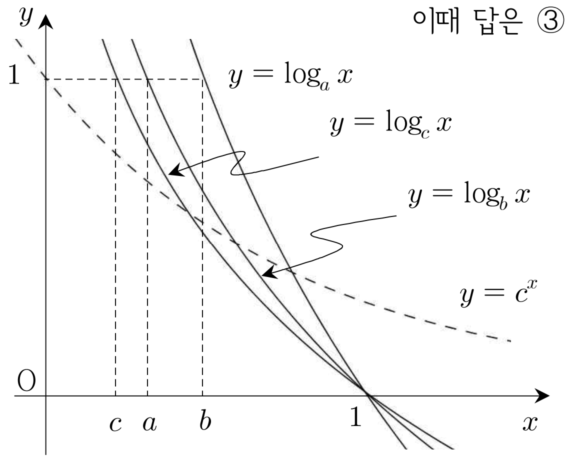
고로 답은 ④ ㄴ, ㄷ이다.

2007년 09월 평가원 수리(나형) 08번

***sol*)**

$y = c^x$만 지수함수 꼴이므로 역함수를 취해주자. 그러면 로그함수 세 개가 그려지고 $y = 1$과의 교점의 x좌표가 a, b, c가 되어야 할 것이다.

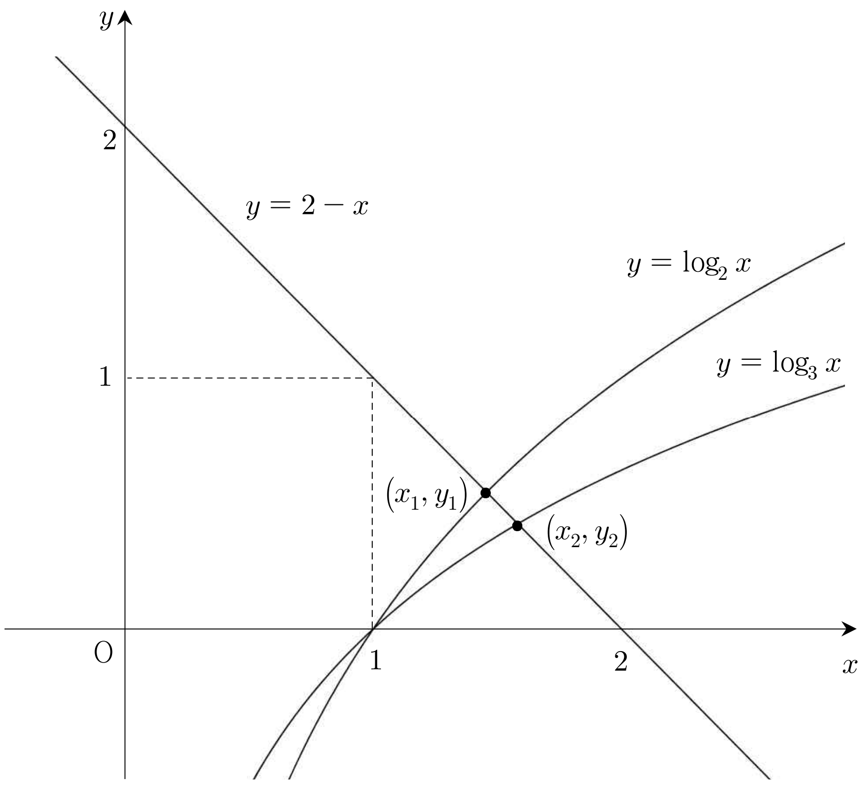
이때 답은 ③ $b > a > c$이다.



2007년 11월 대수능 수리(나형) 16번

sol)

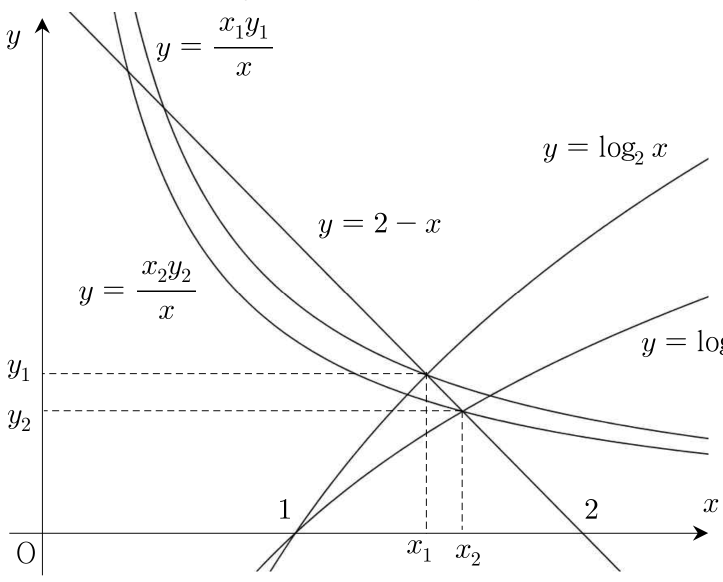
옛 속담에 로그함수 그래프만 잘 그려도 자다가 떡이 생긴다는 말도 있듯(?), 그리고 시작하자. $y=\log_2 x$와 $y=\log_3 x$의 그래프를 판별하고자, 모두 점 $(1,0)$은 지나되 $y=1$과의 교점의 x좌표가 각각 $2, 3$ 이어야 함을 이용하든가, $1<2<3$에서 밑이 2인 로그함수가 직선 $x=1$에 더 가까워야 함을 이용하든지 해서 그래프를 정확하게 그려야 한다.



ㄱ. $0<y_2<y_1<1<x_1<x_2$이므로 참.

ㄴ. 점 (x_1, y_1)은 로그함수 $y=\log_2 x$ 위의 점이기도 하면서 직선 $y=2-x$ 위의 점이기도 하다. 또한, 점 (x_2, y_2)는 로그함수 $y=\log_3 x$ 위의 점이기도 하면서 직선 $y=2-x$이기도 하다. 즉, 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)는 모두 직선 $y=2-x$ 위의 점이기도 하고, 따라서 두 점의 평균변화율에 해당하는 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$이라 할 수 있다. 그런데, 이렇게 물어보면 기울기로 생각해보라는 출제의도가 너무 티가 나니까 $y_2-y_1=-(x_2-x_1)=x_1-x_2$의 꼴로 바꾸어 묻고 있는 것이다. 이를 변형해보면 $x_2-x_1=y_2-y_1$도 나오기에 참이다.

ㄷ. 직관적으로 $xy=k \rightarrow y=\dfrac{k}{x}$를 떠올려서 x_1y_1과 x_2y_2를 넓이로 취하는 직사각형을 이용하여 판단할 수도 있다.



그러면 $xy=k$에서 k가 클수록 유리함수(혹은 쌍곡선)가 x, y축으로부터 떨어져야 하므로 $x_1y_1>x_2y_2$가 되어 참이 된다.

따라서 답은 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

※ ㄷ을 해결하는 또 다른 방법으로, 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)는 로그함수와 직선의 교점으로서 로그함수 식에 넣어도 $y_1=\log_2 x_1$과 $y_2=\log_3 x_2$로 성립하고, 직선 식에 넣어도 $y_1=2-x_1$과 $y_2=2-x_2$가 성립한다. 이때 가급적 다루기 쉬운 직선 식을 이용하자면 $x_1y_1=x_1(2-x_1)$과 $x_2y_2=x_2(2-x_2)$ 로부터 $x_1y_1>x_2y_2 \Leftrightarrow x_1(2-x_1)>x_2(2-x_2)$?가 되는데, 이는 이차함수 $y=x(2-x)$가 대칭축 $x=1$ 상에서 최댓값을 갖는다는 사실과 $1<x_1<x_2$를 이용해서 $x_1y_1>x_2y_2$가 참이 됨을 알 수 있다.

2008년 03월 교육청 수리(가형) 08번

sol)

결코 로그함수 그래프를 그리기가 귀찮아서 이러는 것은 아니지만, 지금은 문제가 간단하므로 $0<a<1<b$와 $ab<1$를 만족하는 a, b를 대입하여 풀어보자. 가령 $a=\dfrac{1}{4}, b=2$를 대입하면

ㄱ. $A=\log_a \sqrt{b}=\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2}=-\dfrac{1}{4}\log_2 2=-\dfrac{1}{4}<0$으로 참.

ㄴ. $B=\log_{\sqrt{b}} a=\dfrac{1}{A}=-4<A$로 역시 참.

ㄷ. $|A||B|=|AB|=1$이므로 참.

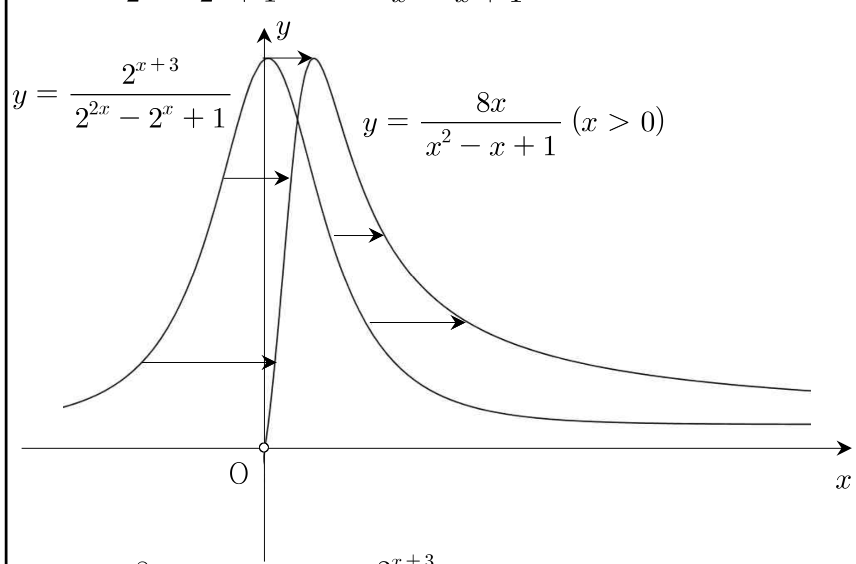
따라서 답은 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

2008년 05월 교육청 수리(가형) 14번

sol)

$y=\dfrac{2^{x+3}}{2^{2x}-2^x+1}=\dfrac{8}{2^x-1+2^{-x}}\le\dfrac{8}{2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}-1}=8$로 답은 ⑤번이다 .

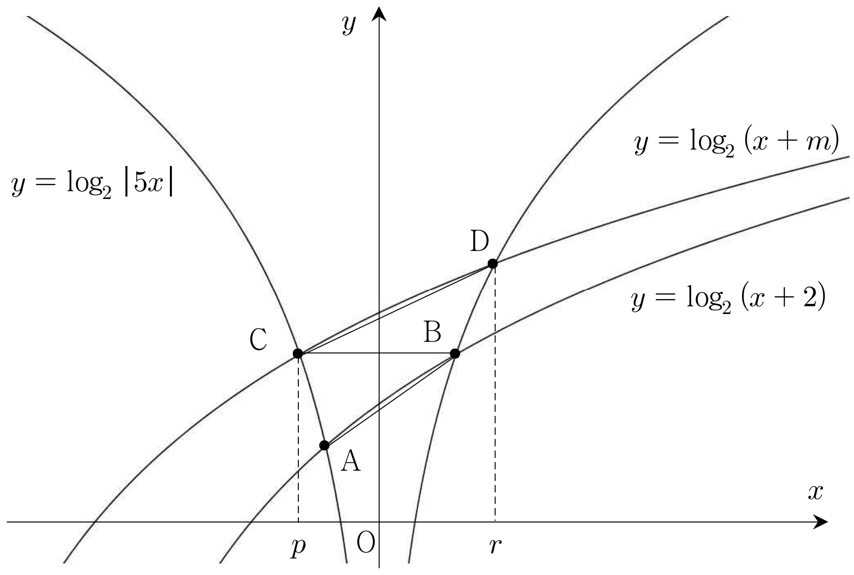
※ $y=\dfrac{2^{x+3}}{2^{2x}-2^x+1}$와 $y=\dfrac{8x}{x^2-x+1}$의 그래프를 비교해보자.



$y=\dfrac{8x}{x^2-x+1}$는 $y=\dfrac{2^{x+3}}{2^{2x}-2^x+1}$에서 $2^x=t(>0)$로 치환한 것에 해당하는 그래프로서 x축을 로그적으로 축소한 것이다.

2008년 06월 평가원 수리(가형) 17번

sol)



$\log_2|5x| = \log_2(x+2)$에서 $\mathrm{A}\left(-\frac{1}{3}, \log_2\frac{5}{3}\right), \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \log_2\frac{5}{2}\right)$이고,

$\log_2|5x| = \log_2(x+m)$에서 $\mathrm{C}\left(-\frac{m}{6}, \log_2\frac{5m}{6}\right), \mathrm{D}\left(\frac{m}{4}, \log_2\frac{5m}{4}\right)$ 이니

ㄱ. 참.

ㄴ. 직선 CD의 기울기가 $\dfrac{\log_2\frac{5m}{4} - \log_2\frac{5m}{6}}{\frac{m}{4} - \left(-\frac{m}{6}\right)} = \dfrac{12}{5m}\log_2\dfrac{3}{2}$이고,

m값이 바뀜에 따라 기울기가 바뀌므로 거짓.

ㄷ. 두 점 B, C의 y좌표가 같으므로 두 삼각형 CAB, CBD는 한 변을 공유한다. 따라서 공유하는 변 CB를 밑변으로 보고, 각각의 높이가 같은지를 확인해주면 충분하다.

두 점 A, B의 높이차로 $\log_2\frac{5}{2} - \log_2\frac{5}{3} = \log_2\frac{3}{2}$이고,

두 점 C, D의 높이차로 $\log_2\frac{5m}{4} - \log_2\frac{5m}{6} = \log_2\frac{3}{2}$로서 두 삼각형의 높이가 같으므로 넓이도 같으니 참.

따라서 답은 ④ ㄱ, ㄷ이다.

※ 가뜩이나 킬러문항들이 많이 나왔던 시험에서, 지수로그함수의 그래프를 정확히 그릴 줄 아는 능력과 복잡한 수식들마저도 칼같이 계산해낼 수 있는지를 요구하는 문항이라고 본다. 그나마 이 문제를 빠르게 풀기 위한 아이디어가 있다면, $y=\log_2(x+m)$의 그래프는 $y=\log_2(x+2)$를 왼쪽으로 평행이동한 것인데, 평행이동 수치에 관계없이 두 점 A, B간의 높이 차이와 두 점 C, D간의 높이 차이는 유지되는 반면, x값의 차이는 m값이 증가함에 따라 점점 커지고 있다는 것이다.

2008년 07월 교육청 수리(가형) 13번

sol)

1과 양수 a, b간의 대소관계로서 다음과 같은 세 가지가 가능하다.

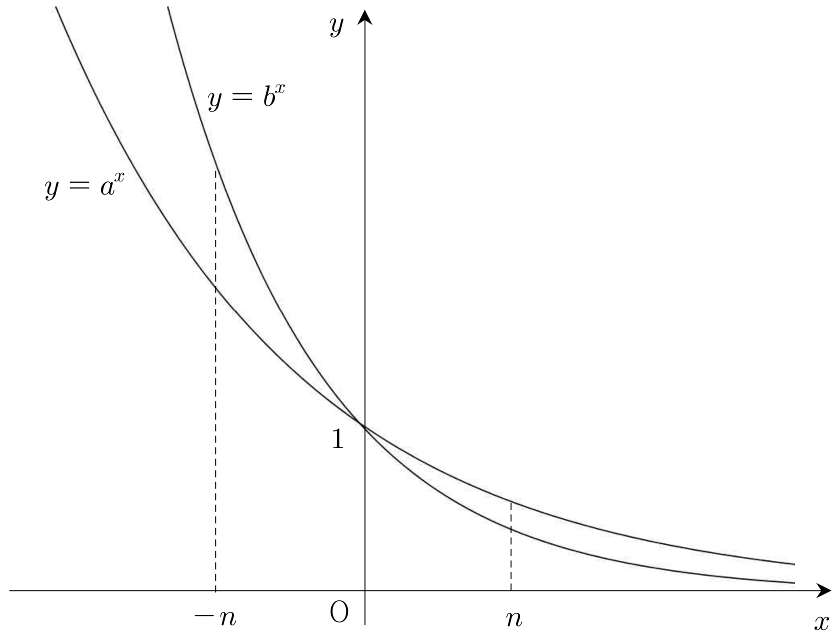
(i) $0<b<a<1$

(ii) $0<b<1<a$

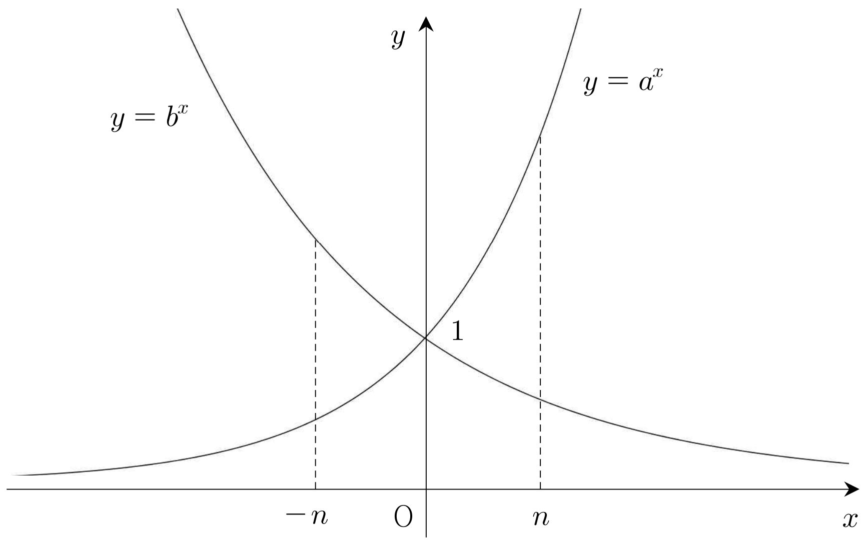
(iii) $1<b<a$

이때 ㄱ, ㄴ, ㄷ 각각의 명제들은 세 경우 모두에 대하여 일관적으로 참이어야만 참이라 여길 수 있는 상황인지, 아니면 세 경우 중에서 특정한 경우를 한정하여 묻고 있는 것인지 주의하여 풀어보자.

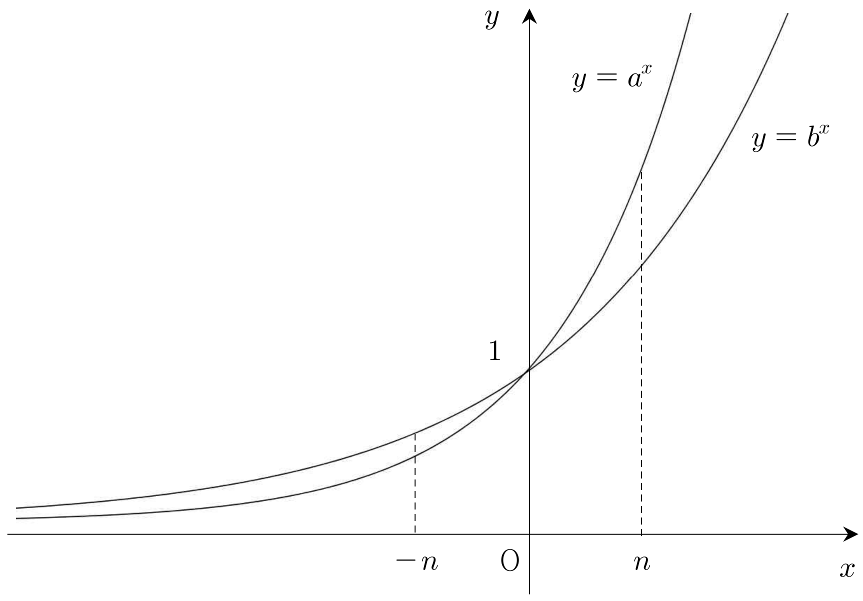
(i) $0<b<a<1$



(ii) $0<b<1<a$



(iii) $1<b<a$



ㄱ. 세 경우 모두 $f(n) > g(n)$이므로 참.

ㄴ. $f(n) < g(-n)$가 되려면 $a>1$인지 묻고 있으니 반례를 찾고자 $0<a<1$인 (i) $0<b<a<1$의 경우에서 따져보자.

$f(n) = a^n < 1$이지만 $g(-n) = b^{-n} = \left(\frac{1}{b}\right)^n > 1$로서 $a<1$임에도 $f(n) < g(-n)$를 만족하므로 반례가 존재한다. 따라서 거짓.

ㄷ. $f(n) = g(-n) \rightarrow a^n = b^{-n} \rightarrow a = b^{-1} = \frac{1}{b}$에서

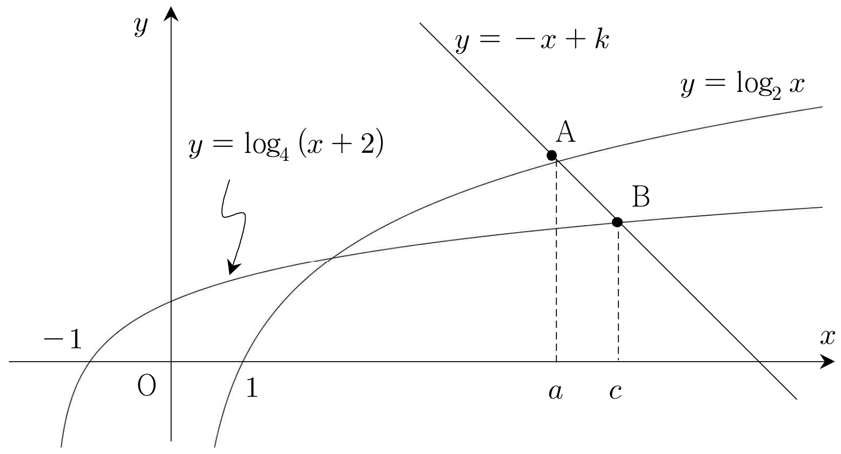
$f\left(\dfrac{1}{n}\right) = g\left(-\dfrac{1}{n}\right) \rightarrow a^{\frac{1}{n}} = b^{-\frac{1}{n}}$ 는 참이다.

고로, 답은 ③ ㄱ, ㄷ이다.

2008년 08월 경찰대 수리 19번

sol)

힌트는 기울기가 -1인 직선 상에 두 점간의 거리가 $\sqrt{2}$ 라는 것이다.



괜히 직선 $y = -x + k$에 관하여 두 로그함수와 교점을 찾으려 하다간 시간을 까먹을 수 있다. 여기서 점 A를 x축 양의 방향으로 1만큼, y축 양의 방향으로 -1만큼 이동한 점이 B이므로 $(c, d) = (a+1, b-1)$라 둘 수 있다. 따라서 a, b를 두 로그함수와 관련지어 식을 세우길

$$\begin{cases} b = \log_2 a \\ b - 1 = \log_4 (a+3) \end{cases}$$

에서 서로 연립해보면

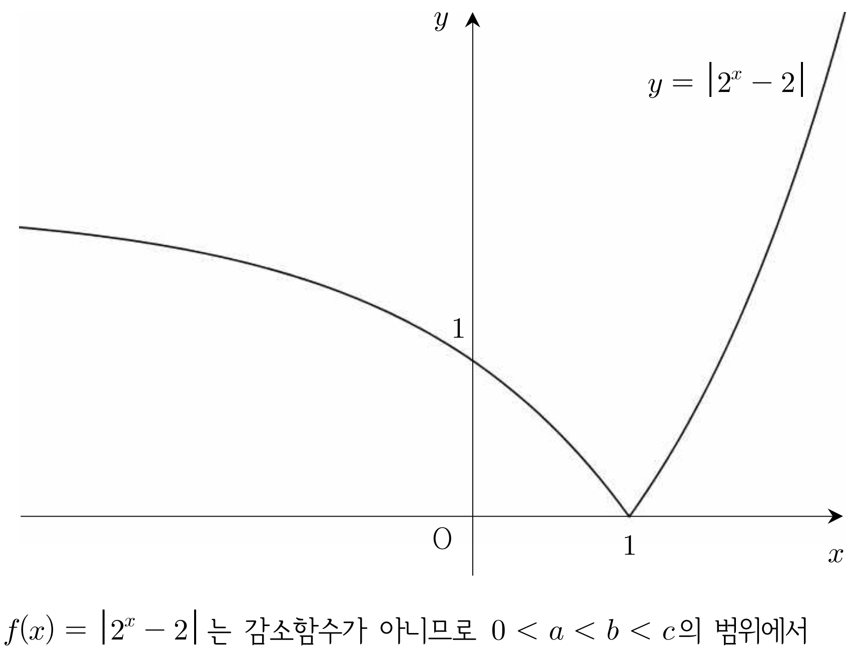
$$1 = \log_4 \frac{a^2}{a+3} \rightarrow 4(a+3) = a^2$$

$$\rightarrow a^2 - 4a - 12 = 0 \rightarrow a = 6$$

이 되어 $a = 6, c = a + 1 = 7$이 된다. 따라서 답은 ⑤ 13이다.

2008년 08월 사관학교 수리(나형) 18번

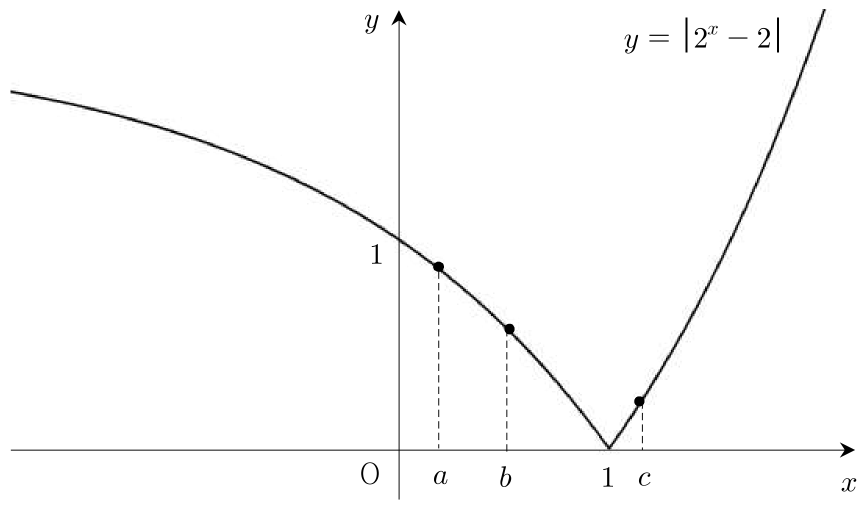
sol)



$f(x) = |2^x - 2|$ 는 감소함수가 아니므로 $0 < a < b < c$의 범위에서 $f(a) > f(b) > f(c)$가 성립하게 하고자 $0 < a < b < c < 1$ 뿐만 아니라 $0 < a < b < 1 < c$의 경우까지도 생각할 수 있다.

$0 < a < 1 < b < c$나 $1 < a < b < c$과 같이 a, b, c중 적어도 두 수가 1보다 커지면 $x > 1$에서 $f(x)$는 증가함수이기 때문에 주어진 관계를 만족시키지 못한다.

ㄱ. (반례)



이때 c의 올바른 범위는 $|2^x - 2| = 1$로부터 $0 < c < \log_2 3$임을 알 수 있다. 그리고 $0 < a < b < 1$이긴 하지만 다른 문자의 범위에 따라 취할 수 있는 범위 또한 바뀐다.

가령 $c = 10^{-9}$이면 $0 < a < b < 10^{-9}$가 되겠지만 $c = \log_2 \sqrt{7}$이면 $0 < a < b < 1$가 되는 식이다.

ㄴ. $f(a), f(b), f(c)$ 중에서 가장 큰 값이 $f(a)$인데 $0 < f(a) < 1$이므로 $0 < f(a) + f(b) + f(c) < f(a) + f(a) + f(a) = 3f(a) < 3$가 되어 참.

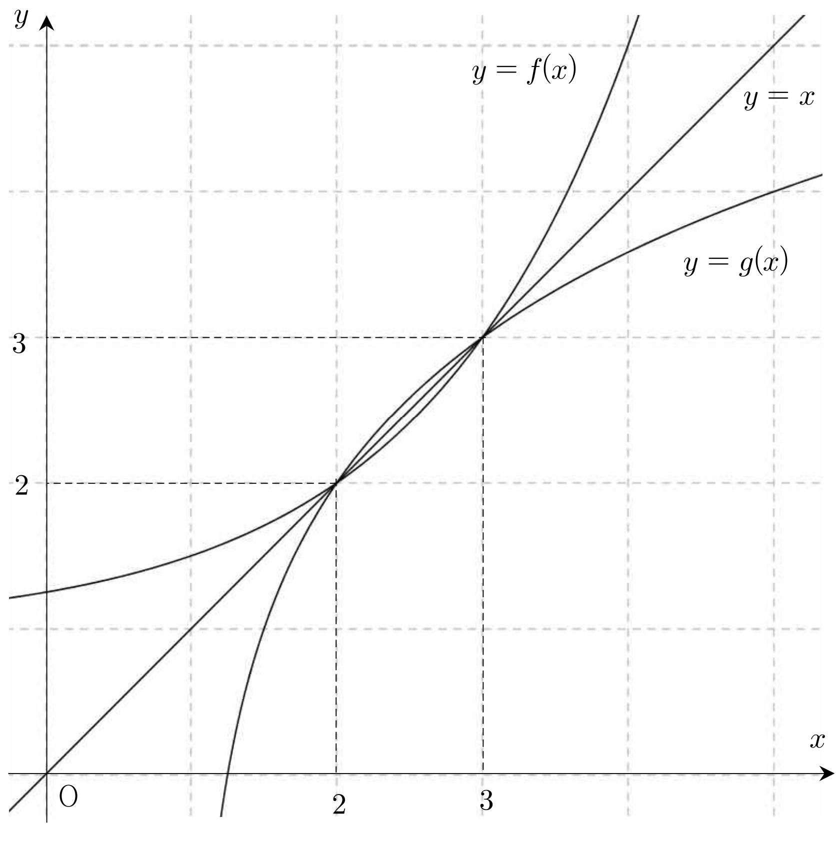
ㄷ. $0 < a < 1$이므로 참이다.

고로, 답은 ⑤ ㄴ, ㄷ이다.

2008년 09월 평가원 수리(가형) 15번

sol)

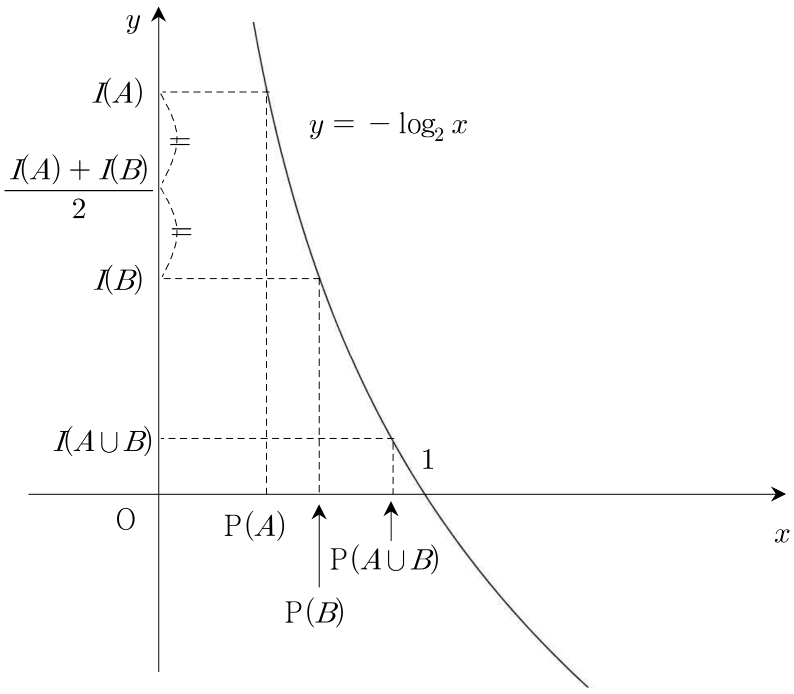
이 문제도 그래프만 잘 그리면 되는 문제이다!



그러면 ㄱ, ㄴ은 참이고 ㄷ은 거짓이므로 ③ ㄱ, ㄴ이 답이다.

2008년 11월 대수능 수리(가형) 17번

sol)



ㄱ. $\mathrm{P}(E)=\frac{1}{2}$이므로 $I(E)=-\log_2 \mathrm{P}(E)=1$로 참.

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이다.
또, $\mathrm{P}(A\cap B)>0$으로 로그의 진수조건 역시 만족시킨다. 이때,

$$\begin{aligned} I(A\cap B) &= -\log_2 \mathrm{P}(A\cap B) \\ &= -\log_2 \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = -\log_2 \mathrm{P}(A) - \log_2 \mathrm{P}(B) \\ &= I(A)+I(B) \end{aligned}$$

이 되어 참이다.

ㄷ. 위 그래프에서와 같이 $0<\mathrm{P}(A)<\mathrm{P}(B)\le 1$이라 하여도 일반성을 잃지 않으며, $\mathrm{P}(A\cup B)$ 역시 하나의 확률값으로서

$$\mathrm{P}(B)\le \mathrm{P}(A\cup B)\le 1$$

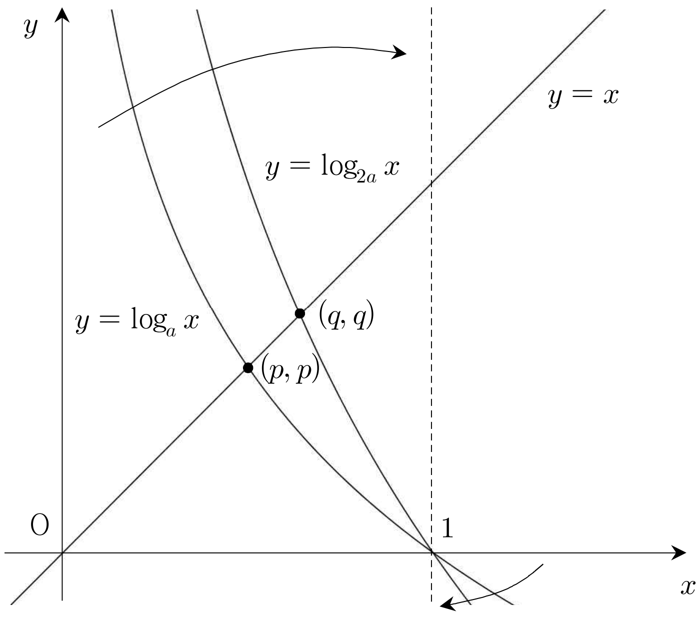
가 성립한다. 이때 $I(A\cup B)\le \frac{I(A)+I(B)}{2}$가 성립하므로 참이다.

고로 답은 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

2008년 11월 대수능 수리(나형) 11번

sol)

$0<a<2a<1$이고, 로그함수 $y=\log_\triangle x$의 밑 △가 1에 가까워질수록 로그함수는 직선 $x=1$에 가까워짐을 이용해보자.



ㄱ. $\frac{1}{2}=\log_a \frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{a}=\frac{1}{2}$이므로 $a=\frac{1}{4}$이다. 따라서 참.

ㄴ. 그래프를 그려보면 $p<q$가 되어 자명하게 참이다.

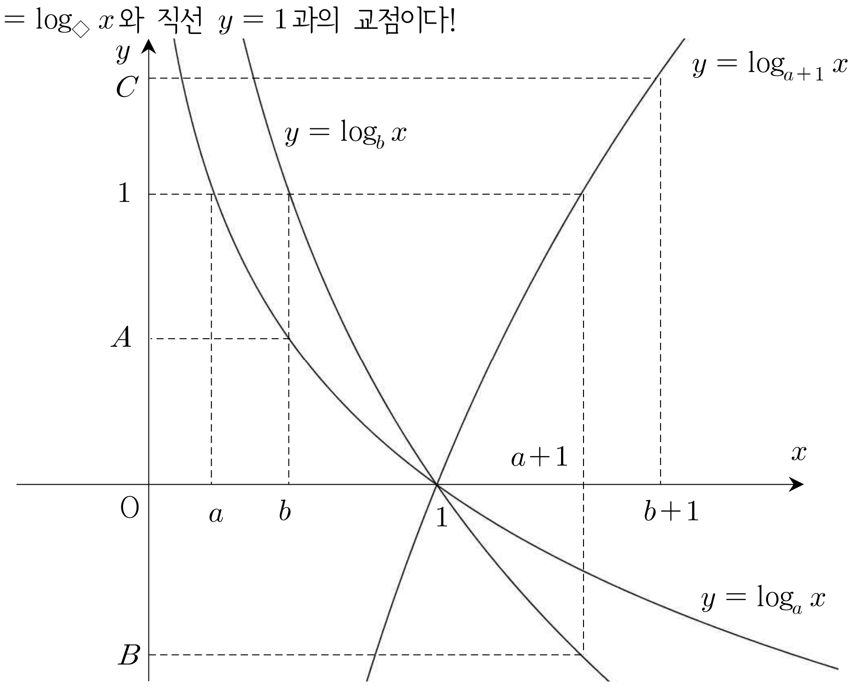
ㄷ. 두 교점은 직선 $y=x$ 위의 점이기도 하면서 동시에 로그함수 위의 점이기도 하다. 이를 이용하면 $p=\log_a p,\ q=\log_{2a} q$이고, 지수 형태로 전환하면 $a^p=p,\ (2a)^q=q$가 되어 $2^q a^{p+q}=pq$로 역시 참이다.

고로, 답은 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

2009년 03월 교육청 수리(가형) 26번

sol)

$0<a<b<1<a+1<b+1$에 대하여 밑이 a, b 그리고 $a+1$인 로그함수를 그려줘야 한다. 이때, 로그함수 $y=\log_\diamond x$가 항상 지나는 두 점 $(1,0)$과 $(\diamond,1)$을 이용할 수 있다. 특히 점 $(\diamond,1)$는 로그함수 $y=\log_\diamond x$와 직선 $y=1$과의 교점이다!

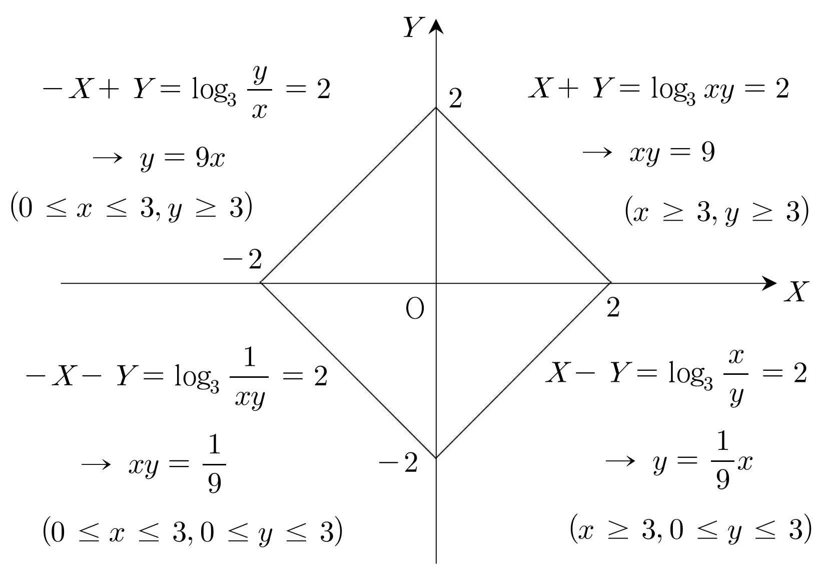


따라서 답은 ③ $B<A<C$이다.

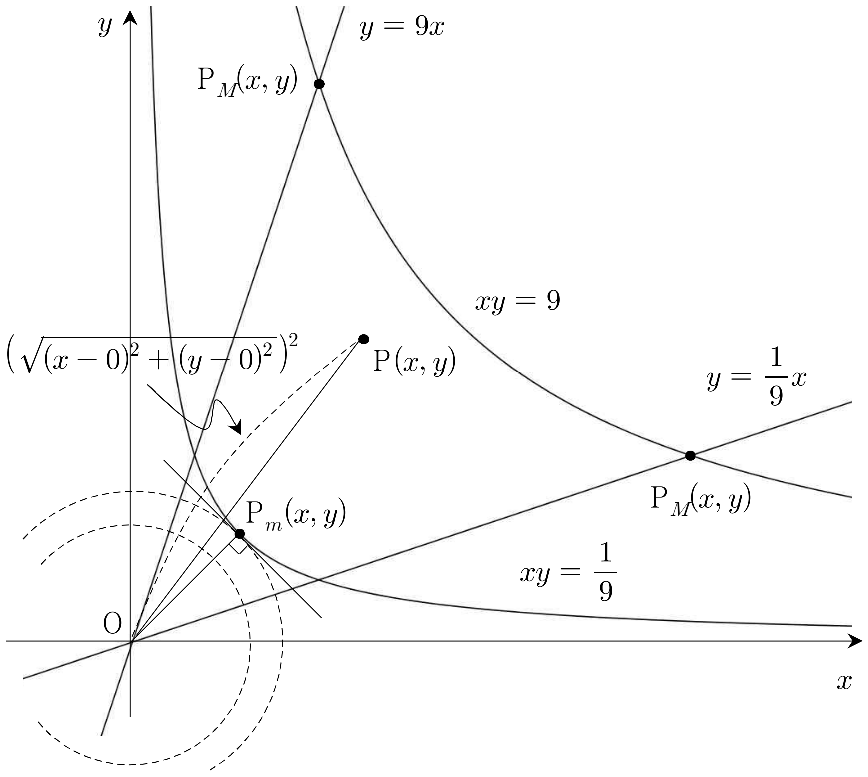
2009년 04월 교육청 수리(가형) 21번

sol)

$\log_3 x=X, \log_3 y=Y$라 치환하면 $|X|+|Y|\le 2$로 경계는 다음과 같은 마름모 개형이 나온다. 그리고 각 변에 해당하는 선분을 고쳐보면



다시 x, y에 관한 식으로 정리가 되는데, 여기서 $x=3^X, y=3^Y$에 관한 그래프를 그리는 것은 좌표계를 지수적으로 팽창시켜 마름모를 변형하는 것에 해당하며 아래와 같은 개형이 나오게 된다.



이때 x^2+y^2은 원점에서 해당 영역 내부 및 경계에 존재하는 점 P에 이르는 거리의 제곱으로서 직관적으로 최댓값은 $y=\frac{9}{x}$ $(1 \le x \le 9)$상에 존재할 것이고, 최솟값은 $y=\frac{1}{9x}$ $\left(\frac{1}{9} \le x \le 1\right)$상에 존재할 것임을 짐작할 수 있다. 하지만 계산을 거침없이 행하기에 앞서 의식하고 있어야 할 점으로 최댓값을 구하기 위해 $x^2+y^2=x^2+\frac{81}{x^2}$ 라고 고친 후 산술기하를 적용해버리면 $\mathrm{P}(3,3)$일 때의 값이 나오는데, 이는 최댓값이 될 수 없다는 것이다! 왜냐하면 $x^2+y^2=x^2+\frac{81}{x^2}$ $(1 \le x \le 9)$는 $x=3$에서 최솟값을 갖고 $x=1$과 $x=9$에서 최댓값을 갖는데, 우리가 구해야 하는 것은 최솟값이 아니라 최댓값이기 때문이다. 따라서 점 P가 점 $(1,9)$나 점 $(9,1)$에 올 때 x^2+y^2는 최댓값 $M=82$를 갖는다.

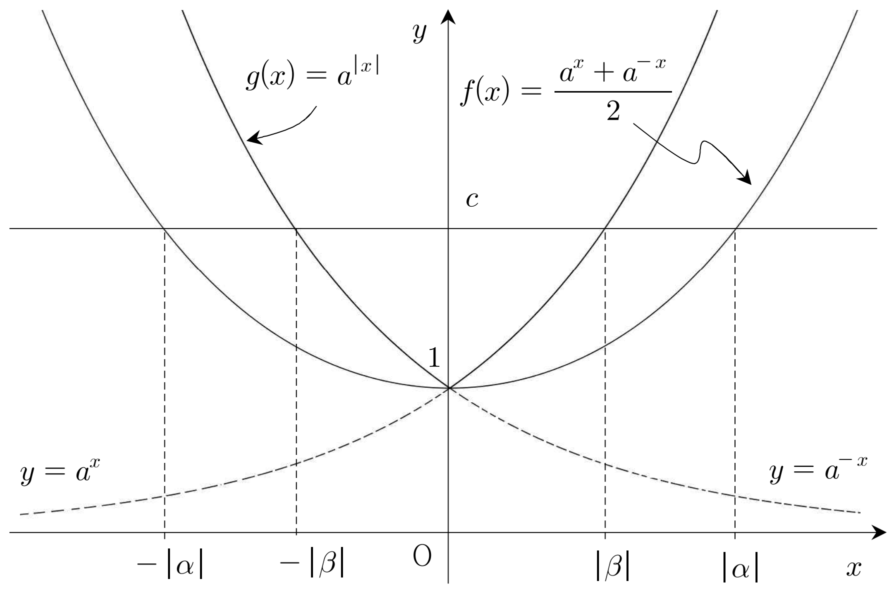
한편, 최솟값은 $x^2+y^2=x^2+\frac{1}{81x^2} \ge \frac{2}{9}=m$으로서 산술기하 적용이 가능하며 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$일 때 발생한다.

고로, $M+9m=82+2=84$가 답이 된다.

2009년 05월 교육청 수리(가형) 12번

sol)

그래프만 정확하게 그릴 수 있어도 여간해선 틀리기 어렵다. $f(x), g(x)$가 파생된 과정을 살펴보자면, 지수함수 $y=a^x$ $(a>1)$에 대하여 $f(x)$는 $y=a^x$와 그것을 y축 대칭시킨 $y=a^{-x}$의 평균을 의미하기도 하지만, 사실 지수함수 $y=a^x$ 우함수 성분을 의미한다. 기우함수 분리는 앞에서 다루었으므로 간략하게 언급만 하겠다. 그리고 $g(x)$는 지수함수 $y=a^x$의 제1사분면 부분만 그린 후 제2사분면 쪽에는 y축 대칭시킨, 즉 데칼코마니한 것이다. 그래프를 살펴보면 다음과 같다.



ㄱ. $f(-x)=\frac{a^{-x}+a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^{-x}+a^x}{2}=\frac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$이니 참.

ㄴ. $a>1$일 때, $x \ge 0$이면 $a^x \ge a^{-x}$이므로

$$f(x)-g(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}-a^x=\frac{-a^x+a^{-x}}{2} \le 0$$

$x \le 0$이면 $a^x \le a^{-x}$이므로

$$f(x)-g(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}-a^{-x}=\frac{a^x-a^{-x}}{2} \le 0$$

가 되어 어느 경우든지 부등식이 성립하므로 참이다.

ㄷ. 기하학적으로 보아도 자명하다. 하지만 엄밀하게 따져보자.

$$f(x)=c \rightarrow \frac{a^x+a^{-x}}{2}=c \rightarrow a^{2x}-2ca^x+1=0$$

에서 $a^x=c \pm \sqrt{c^2-1}$이므로 $\pm|\alpha|=\log_a\left(c \pm \sqrt{c^2-1}\right)$

그리고 $g(x)=c \rightarrow a^{|x|}=c \rightarrow \pm|\beta|=\pm\log_a c$

(단, 복부호 동순이다.)

따라서 $|\alpha|=\log_a\left(c+\sqrt{c^2-1}\right)>\log_a c=|\beta|$로 참이다.

이때 답은 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

2009년 06월 평가원 수리(가형) 16번

sol)

넓이를 나타내야 하는 사각형은 사다리꼴이므로, 평행한 한 쌍의 변들의 길이와 높이에 해당하는 길이를 구해야 하고, 그것을 $f(x)=2^x$꼴의 합성으로 표현하여야 한다. 그래프를 거꾸로 따라가보면

$$\begin{cases} \log_2 d=c \rightarrow d=2^c=f(c) \\ \log_2 c=b \rightarrow c=2^b=f(b) \\ \log_2 b=a \rightarrow b=2^a=f(a) \end{cases}$$

에서 사다리꼴의 넓이 $\frac{1}{2}(b+c)(d-c)$를 최대한 a, b에 관해 변형해보면

$$\frac{1}{2}(b+c)(d-c)=\frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\}\{f(c)-f(b)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\}\{f(f(b))-f(f(a))\}$$

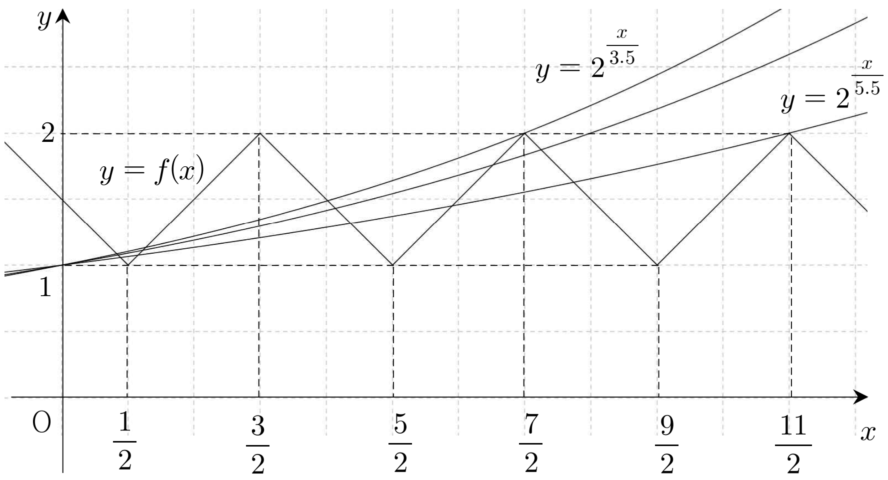
$$=\frac{1}{2}\{f(b)+f(a)\}\{(f \circ f)(b)-(f \circ f)(a)\}$$

로 ①번이 답이다.

2009년 06월 평가원 수리(나형) 09번

sol)

$f(x)$는 주기함수로서 뾰족뾰족한 모양인데, 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}=\left(2^{\frac{1}{n}}\right)^x$는 n이 커짐에 따라 $2^1>2^{\frac{1}{2}}>2^{\frac{1}{3}}>2^{\frac{1}{4}}>\cdots(>1)$로서 점점 $y=1$에 가까워진다. 이때 두 가지 접근이 가능한데, 지수함수의 관점에서 n을 하나씩 키워가면서 $f(x)$와 교점을 5개 갖는 순간을 포착하는 관점이 있고, 아니면 $f(x)$와 교점을 5개 갖도록 지수함수의 밑을 조절할 수도 있다. 여기선 후자로 접근해 보겠다. 이때, 그래프는 다음과 같다.



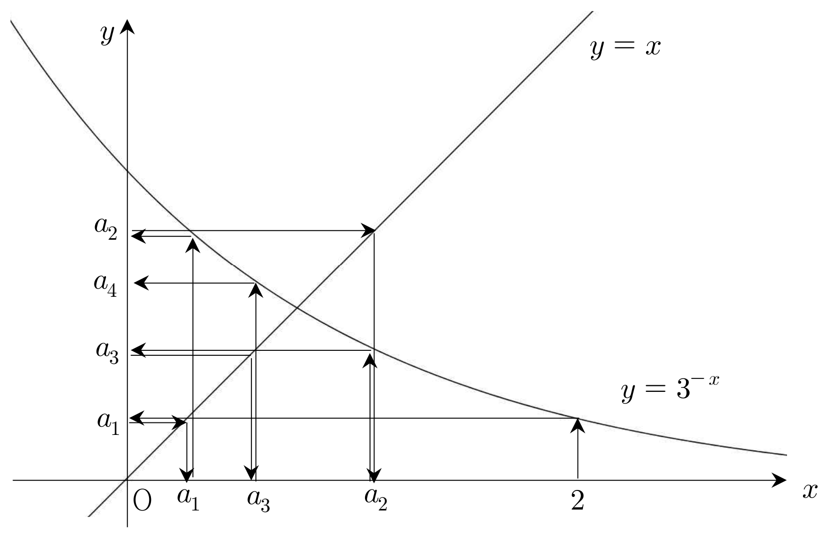
제2사분면에서는 $0<2^{\frac{x}{n}}<1\le f(x)\le 2$이므로 교점이 발생할 수 없으니 제1사분면에서만 관찰해도 충분하다.

또한, 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$은 점 $(0,1)$ 뿐만 아니라 점 $(n,2)$도 지나고, 하필이면 $f(x)$의 첨점이자 최댓값의 y좌표가 항상 2임을 이용하면, 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$와 $f(x)$의 교점이 5개 존재하는 n의 범위가 $3.5<n<5.5$가 된다. 이 중에 자연수 n값의 합은 $4+5=9$가 된다. 그러니 답은 ②번이다.

2009년 06월 평가원 수리(나형) 27번

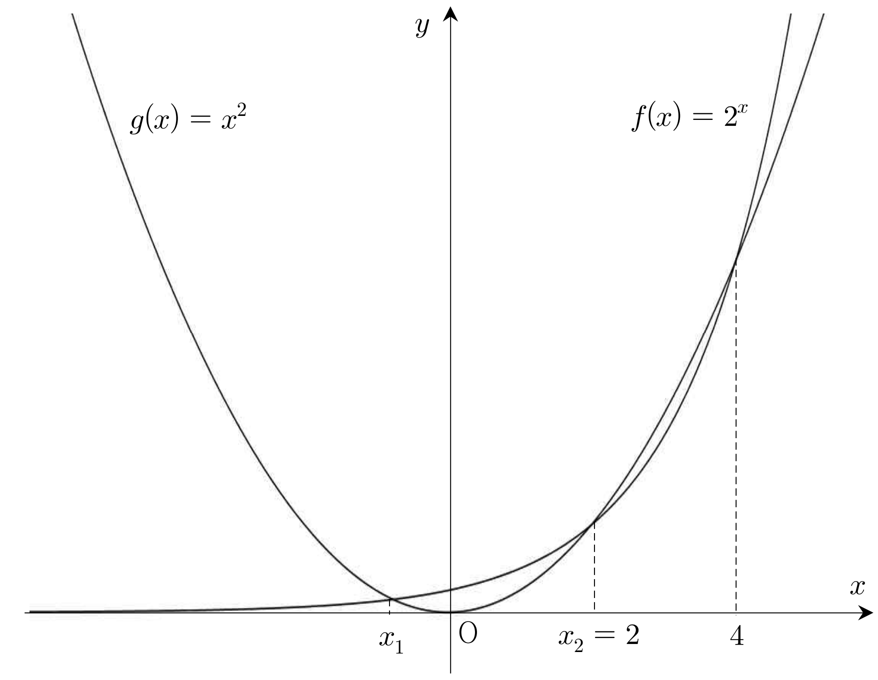
sol)

합성함수를 그릴 때는 $y=x$ 그래프를 이용한다. 가령, 함수 f를 x라는 동전을 투입구에 넣었을 때 $f(x)$라는 동전이 나오게 하는 자판기라고 하였을 때, 합성함수 $f\circ f$는 $f(x)$로 이미 나온 동전을 꺼내어 다시 자판기 f에 넣는 것으로 볼 수 있으며, 이때 동전을 꺼내어 다시 투입구에 넣는 과정이 $y=x$를 이용하여 대칭시키는 것으로 볼 수 있다. 그래프를 보고 살펴보면 답은 ⑤ $a_3<a_4<a_2$이다.



2009년 07월 교육청 수리(가형) 13번

sol)



평소에 이런 생각을 하지 않았다면 뜬금없는 문제로 다가올 수도 있다. 우선 $y=2^x$와 $y=x^2$는 총 세 개의 교점을 갖는데, $x=2,4$는 $2^2=2^2$과 $2^4=4^2$라는 관계로부터 그냥 알아채야 하는 부분이다. 왜냐하면 임의의 양수 a,b간에 $a^b=b^a$라는 관계가 성립하지 않지만 특이하게도 $a^b=b^a$꼴이 성립하는 상황이기 때문이다. $10^3\neq 3^{10}$

반면에 제2사분면에서 발생하는 교점은 대수적으로, 그러니까 각종 치환을 이용하든 근의 공식을 적용하든 고등학교 수학까지 배운 것을 전부 동원하여도 구할 수가 없다. 이는 수치 해석적으로 원하는 오차 범위 이내에서 근삿값을 구해내거나, mathematica 와 같은 컴퓨터 프로그램의 힘을 빌려야 구할 수 있는 부분이다.

또한, 특히 폐구간 $[2,4]$ 부근에서 두 함수의 대소관계 반전을 손으로 그려내기가 정말 까다롭다. 따라서, 푸는 사람이 센스 있게 좌표평면의 가로, 세로 비율을 왜곡해서 그려내어 찾아야 한다.

하지만 출제자는, 구할 수 없는 것은 당연히 묻지 않는다. 구할 수 없는 것들이 많은 와중에 구할 수 있는 것들만 골라서 묻는 것이다!

ㄱ. 이건 무슨 낫 놓고 ㄱ자를 묻는 것도 아니고, 당연히 참! 하고 넘어가도 상관은 없지만 그래도 엄밀하게 따져보자. x_1은 정확한 값을 모르지만 $x_2=2$임을 알 수 있다. 이때 $-2<x_1<0$임을 보이기만 하면 $x_1+x_2>0$이라 할 수 있다. 이때 사용할 수 있는 것이 바로 연속함수에 대한 중간값(사잇값) 정리이다. 새로이 함수를 정의하길

$$h(x)=f(x)-g(x)=2^x-x^2$$

라 하면 $h(x)$는 폐구간 $[-2,0]$에서 연속이다. 그리고

$$h(-2)=\frac{1}{4}-4<0,\ h(0)=1-0>0$$

이므로 연속함수에 대한 중간값 정리에 의하여 $h(x)$는 개구간 $(-2,0)$에서 적어도 하나의 실근 c를 갖는다.

한편, $h(x)=f(x)-g(x)=2^x-x^2$는 $x<4$에서 두 근 x_1,x_2만을 갖고, $x_2=2$는 자명한 해이므로 $c=x_1$이 되어야 한다.

따라서 $-2<x_1<0$가 되어 $x_1+x_2>0$이 성립한다.

ㄴ. 언젠가 앞에서 다루었던 아이디어이기도 한데, 두 점 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$는 지수함수 $y=2^x$ 위의 점이기도 하면서 이차함수 $y=x^2$ 위의 점이기도

함을 이용하자. 즉, 최대한 이차함수 꼴로 고쳐서 생각하면

ㄴ. $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2) > 0$

이므로 거짓이다. 왜냐하면 $x_1 + x_2 > 0$임은 ㄱ에 의해 보장이 되고,

$$x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 > 0$$

이기 때문이다.

ㄷ. $|x_1 \cdot y_2| - |x_2 \cdot y_1| = |x_1 \cdot x_2^2| - |x_2 \cdot x_1^2|$

$$= |x_1 \cdot x_2|(|x_2| - |x_1|) = -x_1 x_2 (x_2 + x_1) > 0$$

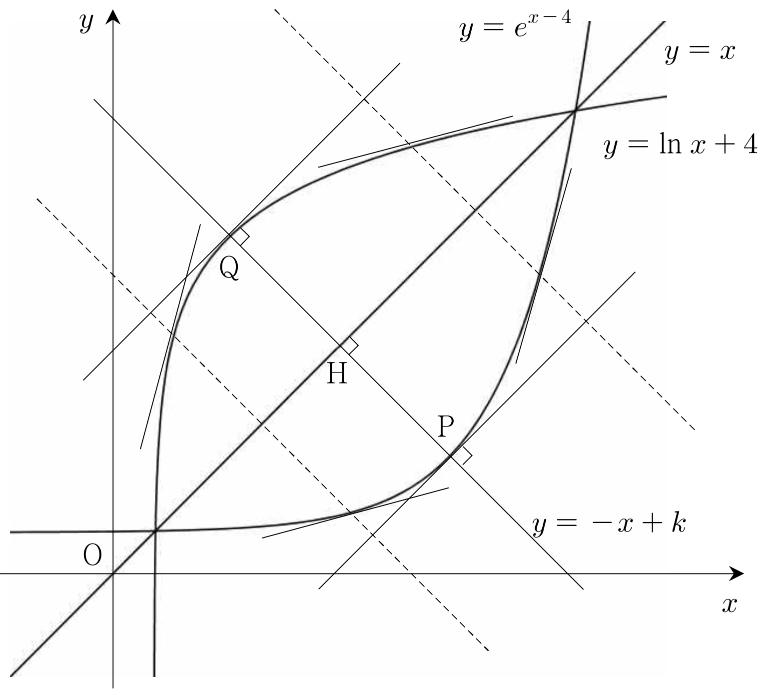
이므로 참.

고로, 답은 ③ ㄱ, ㄷ이다.

2009년 07월 교육청 수리(가형) 29번

sol)

$y = e^{x-4}$와 $y = \ln x + 4$는 서로 역함수 관계이고, 두 교점의 x좌표는 각각 a, b이다. 이때 보조선으로서 대칭축에 해당하는 $y = x$를 그려보면 하필 $y = -x + k$와 수직임을 알 수 있다. 이것은 우연이 아니라, 출제자가 의도적으로 조작해 놓은 것이다! 정답은 이미 정해져 있고, 우린 답하기만 하면 될 것 같은 느낌으로(?) 풀어보자.



$y = e^{x-4}, y = x, y = \ln x + 4$에 대하여 $y = -x + k$와 만나는 교점을 순서대로 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$이라 하면 $\overline{\mathrm{PH}} = \overline{\mathrm{QH}}$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최댓값을 구하기 위해 $\overline{\mathrm{PH}}$의 최댓값에 두 배를 하여도 된다. 물론, 점 P에서의 미분계수가 1인 상황을 찾아 k값을 구해도 된다는 것이 보이는 사람들도 있을테지만, 최대한 직관을 걷어내고 수식을 이용하여 엄밀하게 풀어보자.

지수함수 위의 점 $\mathrm{P}(t, e^{t-4})$에 대하여 이는 다시 직선 $y = -x + k$ 위의 점이기도 하므로 $e^{t-4} = -t + k$에서 $k = t + e^{t-4}$라 둘 수 있다. 그리고 점 H는 직선 $y = -x + k$와 $y = x$의 교점으로서 $\mathrm{H}\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)$가 된다.

그러면 $\overline{\mathrm{PH}}$의 최댓값을 구하고자 점과 점사이의 거리 공식을 이용하면

$$\overline{\mathrm{PH}}^2 = \left(t - \frac{k}{2}\right)^2 + \left(e^{t-4} - \frac{k}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{t}{2} - \frac{e^{t-4}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{t-4}}{2} - \frac{t}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(e^{t-4} - t)^2$$

가 되고, $e^{t-4} - t = f(t)$라 하면 $f'(t) = e^{t-4} - 1 = 0$에서 $t = 4$일 때 $f(t)$는 극솟값이자 최솟값 -3을 갖고, 이에 대응하는 하는 $\overline{\mathrm{PH}}$와 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 또한 최소가 된다. 그리고 이때 $k = t + e^{t-4} = 4 + 1 = 5$가 된다.

혹은, 지수함수 위의 점 $\mathrm{P}(t, e^{t-4})$에서 직선 $y = x$에 이르는 거리

$$d = \frac{|t - e^{t-4}|}{\sqrt{2}} = \frac{t - e^{t-4}}{\sqrt{2}}$$

의 최댓값이 $t = 4$일 때 발생하고, 그에 대응하는 k값이 5가 된다고 구해도 된다. 어쨌든 답은 ④ 5이다.

※ 만약 주어진 곡선은 보존한 채 직선의 기울기만, 가령 $y = -2x + k$로 바꾼다면 상당히 복잡해질 것이다.

2009년 08월 사관학교 수리(나형) 20번

sol)

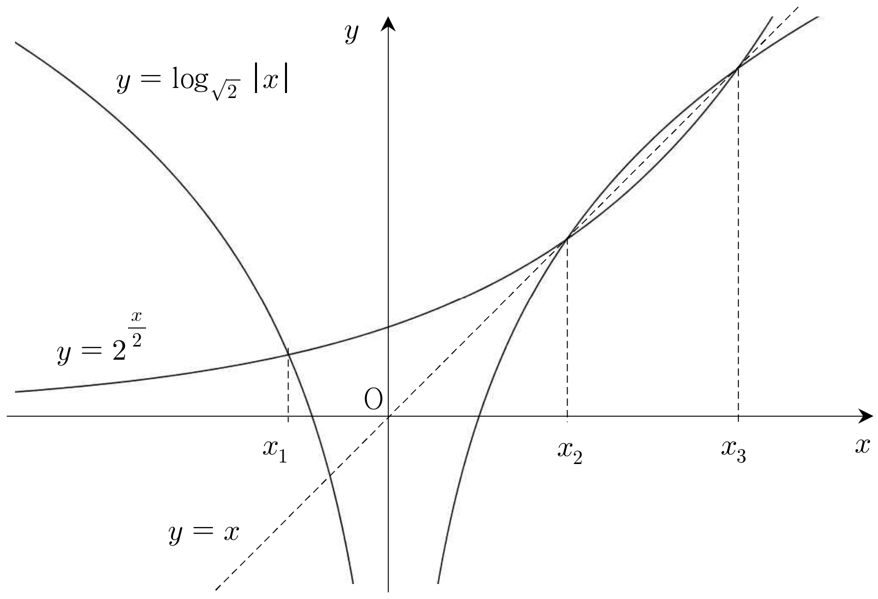
서로 역함수 관계인 지수함수와 로그함수 $y = a^x, y = \log_a x$의 밑이 $1 < a < e^{\frac{1}{e}} \fallingdotseq 1.44$의 범위일 때는 $y = x$ 상에서 두 교점을 갖기도 한다는 사실을 알고 있어야 쉬이 풀 수 있는 문제이다. 그런데, 흥미로운(?) 점은 문이과 공통문제란 것이다! 이과생은 그렇다 쳐도, 문과생은 자연상수인 $e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718\cdots$ 를 안 배우는데도 불구하고 버젓이 등장하였다. 추측컨대 출제자가 이 문제를 내면서 고려하길, 문이과 수험생을 막론하고 $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \fallingdotseq 1.41$로서 $1 < a < e^{\frac{1}{e}} \fallingdotseq 1.44$의 범위에 속한다는 것을 모르더라도

$$(\sqrt{2})^2 = 2, (\sqrt{2})^4 = 4$$

로서 $y = (\sqrt{2})^x$가 $y = x$와 교점을 두 개나 갖는다는 점은 중학교 때 루트를 배운 이후의 어느 시점에 알아 챘을거라 여겼기 때문이다.

하지만 안타깝게도 실제 시험에선 밑이 1보다 크기 때문에 제1사분면에서는 교점을 갖지 않고, 우함수 $y = \log_a |x|$의 대칭성으로 인해 그려지는 제2사분면에서의 교점만을 카운팅하여 ①번이라 답한 학생들이 많았다.

실제 그래프는 다음과 같고, 따라서 답은 ③ 3이다.



이때 $2^{\frac{x}{2}} = \log_{\sqrt{2}} |x|$의 실근을 작은 것부터 x_1, x_2, x_3라 하면 x_1은 정확한 값을 구할 수가 없고, $x_2 = 2, x_3 = 4$임을 알 수 있다.

2009년 08월 사관학교 수리(나형) 24번

sol)

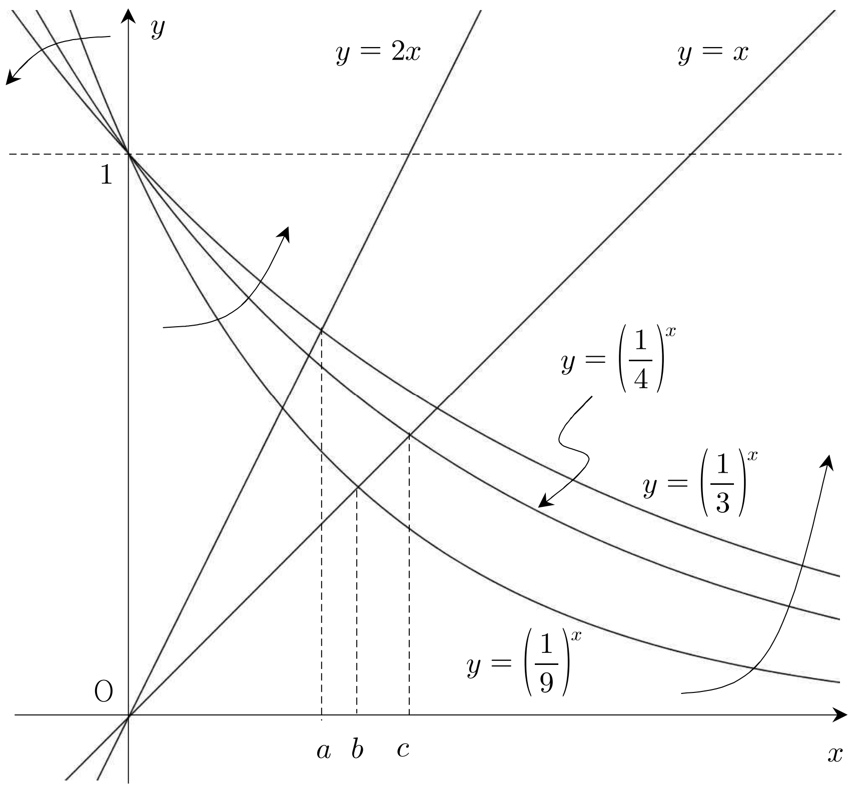
$f(k) = g(k)$와 같은 형태는 두 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 교점의 x좌표가 k임을 의미하는 것이다. 이에 따라 기하학적으로 해석을 해보면

$\left(\frac{1}{3}\right)^a = 2a$는 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$와 $y = 2x$의 교점의 x좌표이고,

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2b} = b$는 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$와 $y = x$의 교점의 x좌표이며,

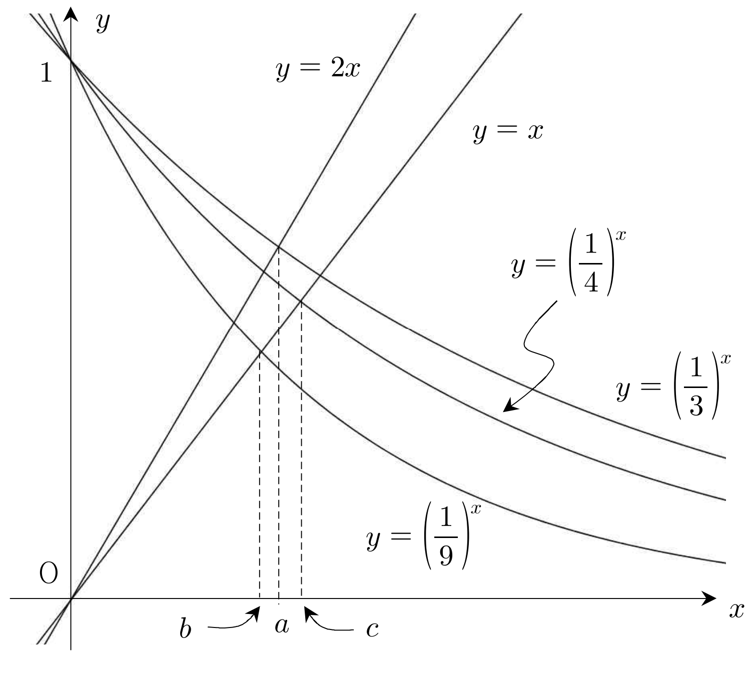
$\left(\frac{1}{2}\right)^{2c} = c$는 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$와 $y = x$의 교점의 x좌표이므로, 그려야 하는 것은 세 종류의 지수함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, y = y = \left(\frac{1}{9}\right)^x, y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$와 두 직선 $y = x, y = 2x$이다.

그리고, 밑이 $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{4}$인 지수함수들을 구분하여 그려야 하는데, 지수함수는 밑이 1에 가까울수록 직선 $y = 1$에 가까워짐을 이용하면 된다.



그러면 ① $a < b < c$가 답인 것이 자명하다.

※ 하지만 사람은 기계가 아니기에 늘 정교하게 그려내지 못하는 때도 있다. 특히 아래와 같이 a와 b의 대소 관계를 헷갈리는 경우를 보자.

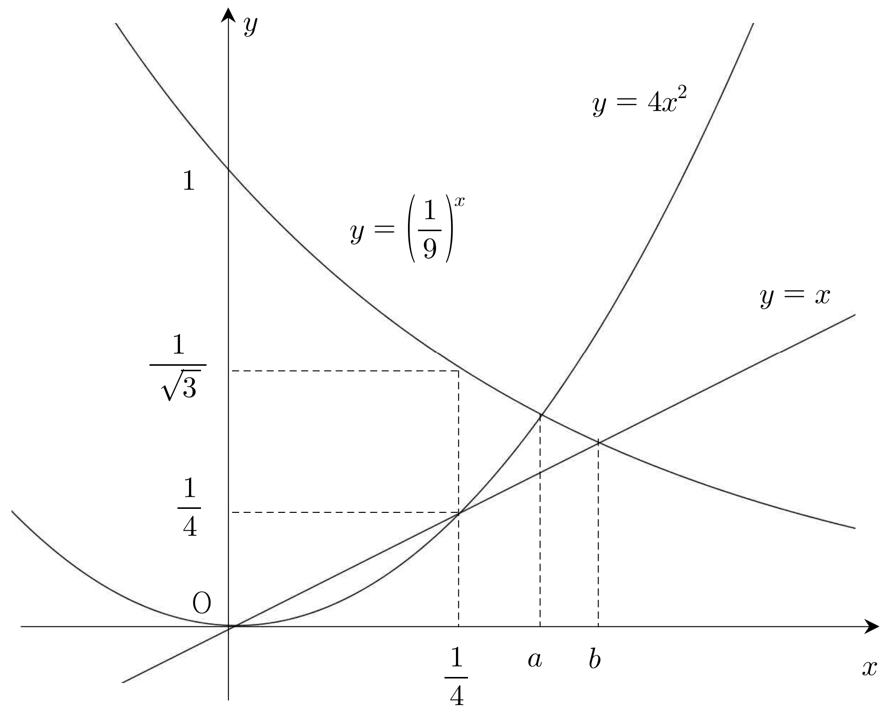


적어도 b, c간의 대소관계는 주어진 그래프를 통해 확실하게 알 수 있지만, a, b간의 대소관계를 구하려면 약간의 추가 조작이 필요하다. 바로, 비교 가능한 개형이 되게끔 한쪽(지금은 좌변)의 꼴을 맞춰주는 것이다!

$\left(\frac{1}{3}\right)^a = 2a \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2a} = (2a)^2 = 4a^2$로 본다면

$\left(\frac{1}{9}\right)^a = 4a^2$과 $\left(\frac{1}{9}\right)^b = b$가 되고, a, b는 각각 동일한 지수함수인

$y = \left(\frac{1}{9}\right)^x$에 대하여 $y = 4x^2$과 $y = x$와 제1사분면에서 만나는 교점이다.

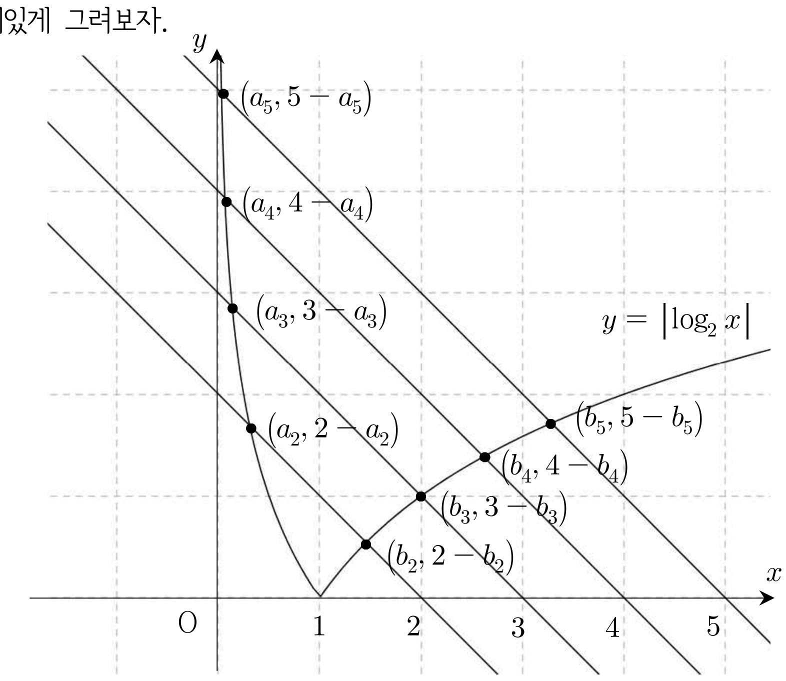


두 함수 $y = 4x^2, y = x$의 교점인 $x = \frac{1}{4}$에서 $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$으로서 $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{4}$을 만족하고, $x > \frac{1}{4}$에서 지수함수는 감소하는 반면 나머지 두 함수는 증가하므로 위와 같은 그래프를 그려줄 수 있다. 따라서 $a < b$임을 알 수 있다.

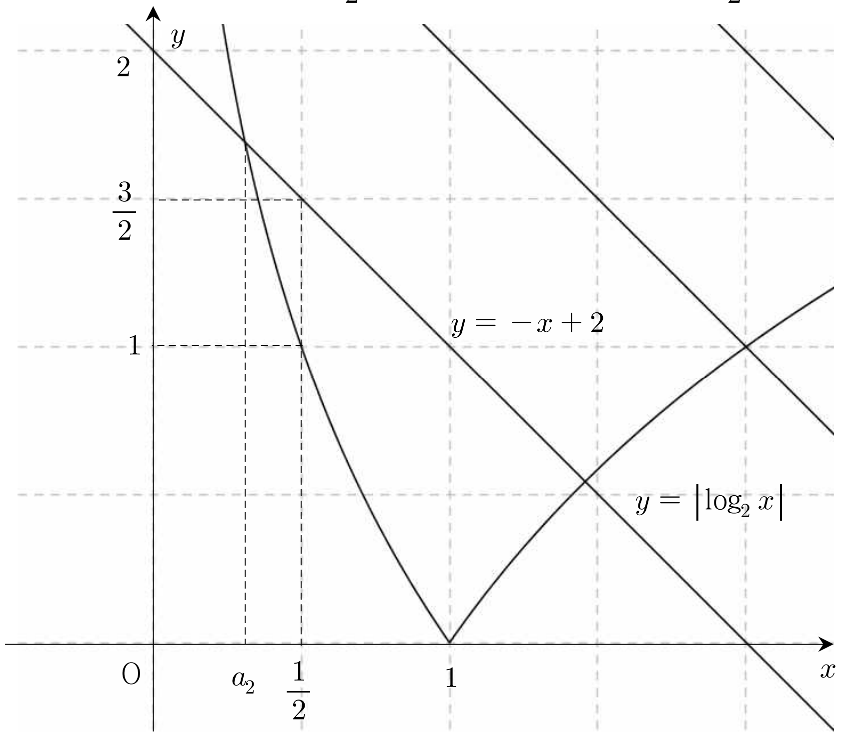
2009년 11월 대수능 수리(나형) 16번

sol)

우리는 a_n과 b_n의 정확한 값을 구해낼 수는 없다. 대신에 그 와중에 구할 수 있는 요소들과 성질들에 관해서 출제자는 물어볼 수 있다. 우선 그래프를 성의있게 그려보자.



ㄱ. $n=2$인 경우 $x=\frac{1}{2}$일 때 $y=|\log_2 x|$보다 $y=-x+2$가 더 위에 존재한다. 교점은 $x=\frac{1}{2}$의 왼쪽에서 발생하므로 $a_2<\frac{1}{2}$이다.



ㄴ. $0<\cdots<a_5<a_4<a_3<a_2<1$, 즉 $0<a_n<1$이고 수열 $\{a_n\}$은 감소하므로 $0<a_{n+1}<a_n$이라 할 수 있다. 이때 부등식 각 변을 a_n으로 나누어도 방향은 바뀌지 않으며 $0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$을 만족한다.

ㄷ. 앞선 두 보기에서 수열 $\{a_n\}$에 관하여 실컷 물어봤으니 이쯤에서 수열 $\{b_n\}$에 관하여 묻는 것도 이상하지 않다. 마찬가지로 b_n의 정확한 값은 구할 수 없지만 직선 $y=-x+n$의 x절편 n보다는 작다는 것은 알 수 있다. 즉, $b_n<n$이므로 $\frac{b_n}{n}<1$ 부분은 성립하고, $1-\frac{\log_2 n}{n}<\frac{b_n}{n}$임을 마저 보이면 된다.
한편, b_n은 로그함수 위의 점이자 직선 위의 점으로서 $n-b_n=\log_2 b_n$을 만족하는데, 다음과 같이 변형하고

$$n-b_n=\log_2 b_n \rightarrow n-\log_2 b_n=b_n$$

양변을 n으로 나누면 $1-\frac{\log_2 b_n}{n}=\frac{b_n}{n}$을 얻는다. 따라서 주어진 부등식의 $\frac{b_n}{n}$ 자리에 $1-\frac{\log_2 b_n}{n}$을 대입하고 양변에 n을 곱하여 정리해보면 $b_n<n$인지 묻는 것이 된다. 이렇게 상황은 모두 분석하였으니 다시 종합하여 증명다운 증명을 해보자!

$y=-x+n$의 x절편 n보다 b_n이 작으므로 $b_n<n \rightarrow \boxed{\frac{b_n}{n}<1}$이고,

$$\begin{aligned} b_n<n &\rightarrow \log_2 b_n<\log_2 n \\ &\rightarrow n-\log_2 n<n-\log_2 b_n \\ &\rightarrow \boxed{1-\frac{\log_2 n}{n}<1-\frac{\log_2 b_n}{n}} \end{aligned}$$

이 성립한다. 한편, $n-b_n=\log_2 b_n \rightarrow 1-\frac{\log_2 b_n}{n}=\frac{b_n}{n}$이므로

$$\boxed{1-\frac{\log_2 n}{n}<1-\frac{\log_2 b_n}{n}}=\boxed{\frac{b_n}{n}<1}$$

고로, 답은 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

2010년 07월 교육청 수리(나형) 12번

sol)

사각형 ABCD가 등변사다리꼴이므로 두 삼각형 OAC와 OBD는 닮음비가 $1:2$가 된다. 이때 $\mathrm{A}(t, mt)$라 하면 $\mathrm{B}(2t, 2mt)$라 둘 수 있고, 두 점 A, B는 직선 $y=mx$ 위의 점이면서 동시에 로그함수 $y=\log_2 x$ 위의 점이므로

$$\begin{cases} 2mt=\log_2 2t \\ mt=\log_2 t \end{cases}$$

를 연립해보면 $mt=\log_2 \frac{2t}{t}=1$이 되어 $t=2, m=\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.

비슷한 방식으로 $\mathrm{C}(s, ns), \mathrm{D}(2s, 2ns)$라 두고 풀어도 되고, 혹은 과감히 직관에 기대어서 두 곡선 함수가 역함수 관계로 $y=x$ 대칭이듯, 두 직선 $y=mx, y=nx$도 $y=x$ 대칭일거라 여기고 $n=2$라 할 수 있다. 이때 답은 ② $\frac{5}{2}$이다.

2010년 08월 경찰대 수리 19번

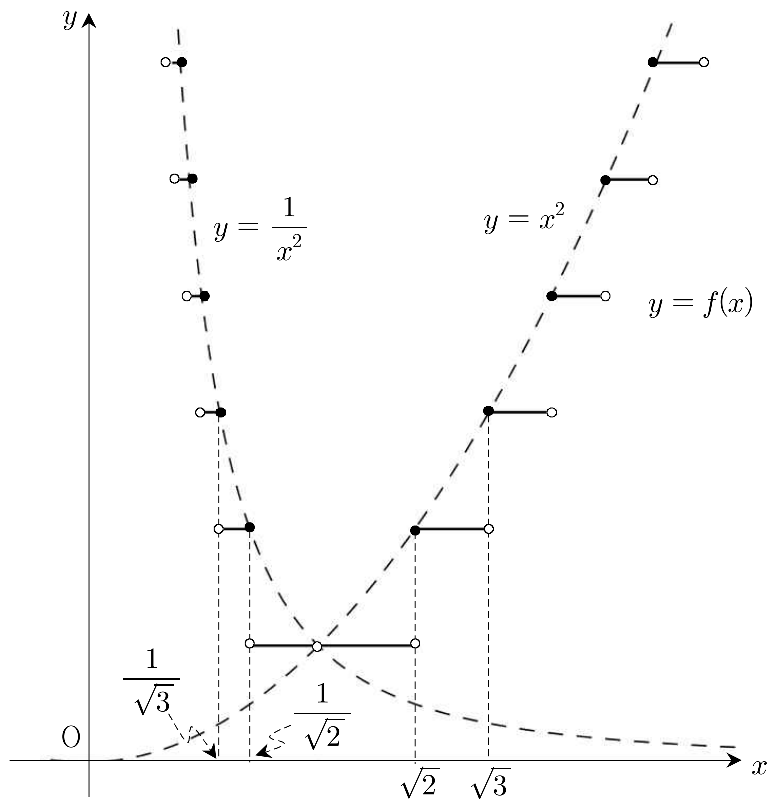
sol)

우선 $|\log_x n|\le 2$에서 등호가 성립하는 순간의 n은 x^2과 $\frac{1}{x^2}$이다.

$x>1$이면 $-2\le \log_x n\le 2 \rightarrow \frac{1}{x^2}\le n\le x^2$의 범위에서 가장 큰 자연수 n값을 찾아야 하기에 $f(x)=[x^2]$로 나타낼 수 있다.

또 $0<x<1$이면 $-2\le \log_x n\le 2 \rightarrow x^2\le n\le \frac{1}{x^2}$의 범위에서 가장 큰 자연수 n 값을 찾아야 하므로 $f(x)=\left[\frac{1}{x^2}\right]$이다.

이때 가우스 함수 [ ]의 효과는, 어떠한 곡선 $y=g(x)$에 대하여 $[g(x)]$는 $y=n$이라는 칼들로 곡선을 잘라서 위, 아래로 평행이동하여 구간 $0\le y<1$로 옮기는 것을 염두에 두고 $f(x)$의 개형을 그려보자.
시간이 촉박한 실전에서 개형이 상상되고, 논리에 확신할 수 있다면 굳이 안 그려도 된다.



ㄱ. $f(2)=[2^2]=4$이므로 참.

ㄴ. (반례) $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\, y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이면 $x<y$이지만 $f(x)=3>2=f(y)$

ㄷ. 자연수 x에 대하여 $0<\dfrac{1}{x}<1$이므로 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\left[\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}\right]=[x^2]$

으로 $[x^2]\le 30$을 만족하는 자연수 x는 $2,3,4,5$이 가능하다. 따라서 거짓. 혹은 그래프 개형을 이용하자면 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=30$일 때

$$\frac{1}{6}<\frac{1}{\sqrt{31}}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{\sqrt{30}}<\frac{1}{5}$$

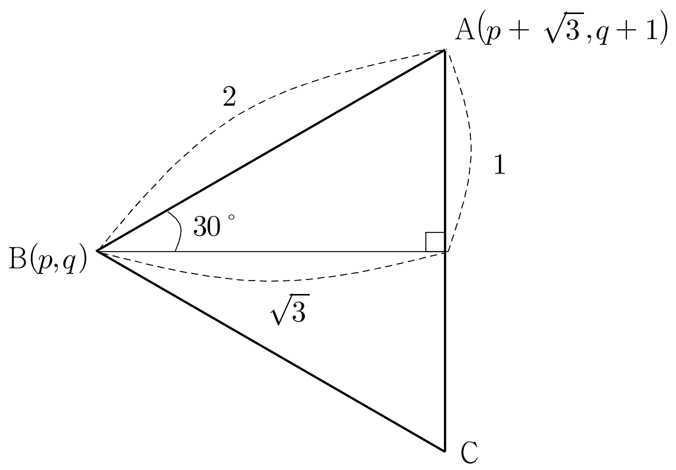
이므로 $1<x<\sqrt{31}$을 만족하는 자연수는 역시 $2,3,4,5$로 4개 존재함을 알 수 있다.

고로, 답은 ① ㄱ이다.

2010년 09월 평가원 수리(나형) 15번

sol)

평행이동 관계의 두 로그함수로부터 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC임을 알 수 있다. 또, 한 변이 y축에 평행하고, 변 AB는 이때 기울기가 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$인 직선 위에 놓여 있으므로



한 점 B의 좌표와 비교하여 점 A의 좌표를 $(p+\sqrt{3},q+1)$라 둘 수 있다. 이때 두 점 A, B 모두 로그함수 $y=\log_2 4x$ 위의 점이므로

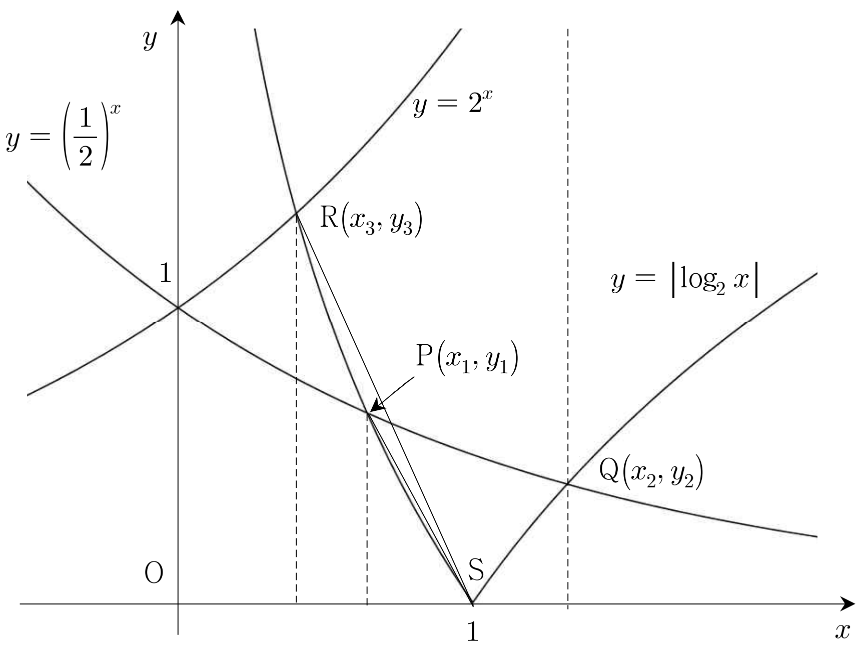
$$\begin{cases} q+1=\log_2 4(p+\sqrt{3}) \\ q=\log_2 4p \end{cases}$$

가 되어 이를 연립해보면 $1=\log_2\dfrac{p+\sqrt{3}}{p}\ \rightarrow\ p=\sqrt{3},\, 2^q=4\sqrt{3}$ 임을 알 수 있다. 따라서 $p^2\times 2^q=3\times 4\sqrt{3}=12\sqrt{3}$으로 답은 ③번이다.

2010년 11월 대수능 수리(가형) 16번

sol)

지수, 로그함수간의 교점은 눈에 빤히 보여도 그림의 떡처럼 정확한 수치를 구할 수가 없다. 수능에서 꾸준히 이러한 문항이 나오다 보니 각종 모의고사와 문제집에 자주 나오는 유형인데, 변함없는 주어진 그래프로부터 구할 수 있는 부분만을 문제화 한다는 것이다! 그리고 이때 기울기에 관한 보기가 아주 아주 자주 나온다는 것도 알아두자.



ㄱ. 세 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$와 $y=2^x$에 대하여 $x=\dfrac{1}{2}$에서의 함숫값이 차례대로 $1,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}$로서 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}<\left|\log_2\dfrac{1}{2}\right|<2^{\frac{1}{2}}$의 관계를 만족한다. 즉, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x<|\log_2 x|<2^x$를 만족하는 구간은 개구간 (x_3,x_1)와 (x_2,∞)인데 $0<x_1<1$이므로

$$0<x_3<\frac{1}{2}<x_1<1<x_2$$

를 만족한다. 따라서 ㄱ은 참.

ㄴ. 두 점 (x_2,y_2)와 (x_3,y_3)는 서로 $y=x$ 대칭으로 $x_2=y_3, y_2=x_3$ 이다. 이때 $x_2y_2-x_3y_3=x_2y_2-y_2x_2=0$이 성립하므로 참이다.

ㄷ. 보자마자 기울기에 관한 물음임을 인지해야 하고서 자동적으로 기울기에 관한 식으로 바꾸어야 한다.

$$x_2(x_1-1)>y_1(y_2-1)\ \rightarrow\ \frac{x_2}{y_2-1}>\frac{y_1}{x_1-1}$$

한편, $x_2=y_3, y_2=x_3$을 이용하면

$$\frac{y_3}{x_3-1}>\frac{y_1}{x_1-1}$$

로 바뀌고 이는 점 $(1,0)$을 S라 했을 때 직선 RS의 기울기가 직선 PS의 기울기보다 큰지 묻는 셈이 되고, 음수임을 고려하면 거짓이 된다.

고로, 답은 ③ ㄱ, ㄴ이다.

2011년 03월 교육청 수리(가형) 14번

sol)

$x=k=2$일 때 $a^4=2\ \rightarrow\ a=\sqrt[4]{2}$는 확인할 수 있다.

ㄱ. $a^8=4$?인지 묻고 있는데 $a^8=(a^4)^2=2^2=4$가 성립하므로 참이다.

ㄴ. $a^{2k}-a^k=a^k(a^k-1)=12\ \rightarrow\ a^k=4\ \rightarrow\ k=8$이면 $a^{2k}-k=16-8=8$로 참이다.

ㄷ. $\overline{\mathrm{PQ}}=a^{2k}-a^k=\dfrac{1}{8}$가 성립하는 실수 k가 2개 존재하냐고 묻는 셈인데, $a^{2k}-a^k-\dfrac{1}{8}=0\ \rightarrow\ a^k=\dfrac{1\pm\sqrt{1+\frac{1}{2}}}{2}$이지만

$a^k > 0$이므로 유의미한 경우는 $a^k = \dfrac{1+\sqrt{1+\frac{1}{2}}}{2}$일 때 뿐이다.

따라서 답은 ② ㄱ, ㄴ이다.

2011년 03월 교육청 수리(나형) 08번

sol)

우선 $\log_a \dfrac{x+1}{x} > \log_b \dfrac{x+1}{x} > 0$으로 고칠 수 있고, 모든 양의 실수 x에 대하여 진수는 $\dfrac{x+1}{x} = 1+\dfrac{1}{x} > 1$을 만족한다. 이때 부등식의 $\log_b \dfrac{x+1}{x} > 0$ 부분에서 $b > 1$이면 $\dfrac{x+1}{x} > b^0 = 1$로 성립하지만 $0 < b < 1$이면 $\dfrac{x+1}{x} = b^0 < 1$로 모순이다. 따라서 $b > 1$이고, 비슷한 방법으로 $a > 1$임을 이끌어 낼 수 있다.

또, $\log_a \dfrac{x+1}{x} > \log_b \dfrac{x+1}{x}$를 변형하면

$$\frac{\log(x+1)-\log x}{\log a} > \frac{\log(x+1)-\log x}{\log b}$$

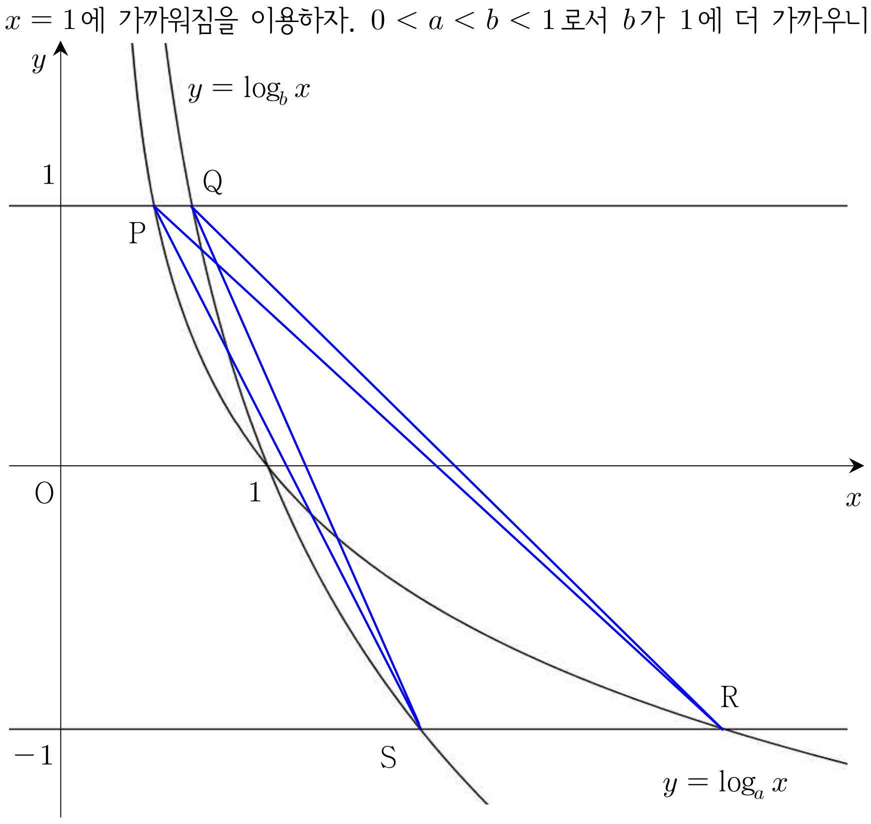
가 되고, 분자가 $\log(x+1)-\log x > 0$이므로 분모는 대소관계가 바뀌어서 $\log a < \log b$, 즉 $a < b$가 되어야 한다.

고로, 답은 ① $1 < a < b$이다.

2011년 08월 사관학교 수리(가형) 23번

sol)

로그함수 $y = \log_{\triangle} x$에서 밑인 $\triangle$가 1에 가까울수록 로그함수는 직선 $x = 1$에 가까워짐을 이용하자. $0 < a < b < 1$로서 b가 1에 더 가까우니

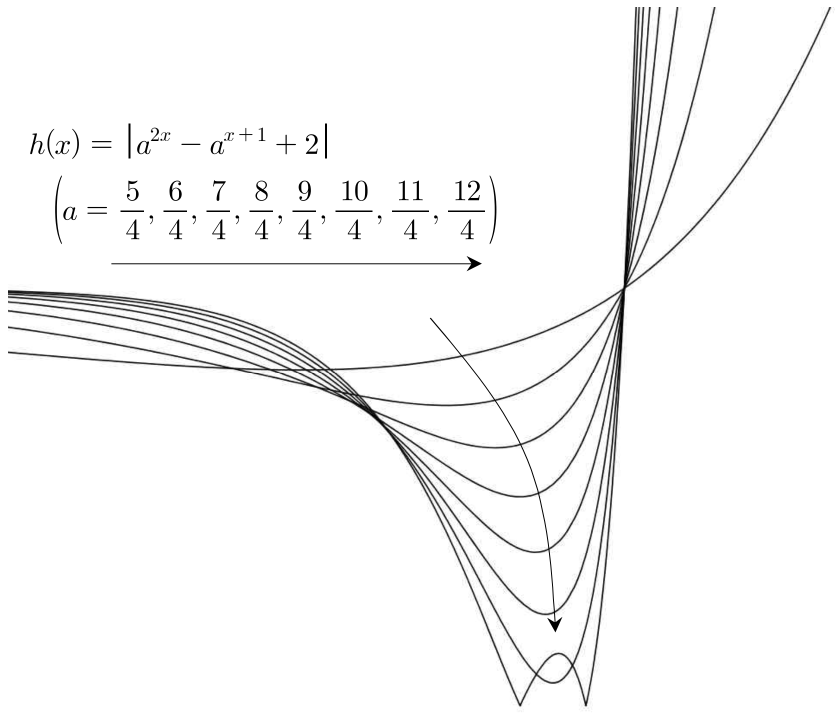


이때 머릿속으로 시계의 분침을 반시계방향으로 돌려 가면서 네 직선의 기울기를 한 번에 비교해보면 ② $\gamma < \alpha < \delta < \beta$가 답이 된다.

2011년 08월 사관학교 수리(가형) 24번

sol)

$h(x) = |f(x) - g(x)| = |a^{2x} - a^{x+1} + 2|$를 먼저 관찰해보자. 아래와 같이 지수함수 자체로 개형을 주무를 수가 없으니



편의상 $a^x = t$로 치환하여 이차함수에 절댓값을 씌운 형태로 생각하면 $h(x) = |t^2 - at + 2|$가 된다. 즉, x축의 로그적 축소이다.

이때 $a > 1$이고 x는 임의의 실수를 취하므로 $a^x = t > 0$이다.

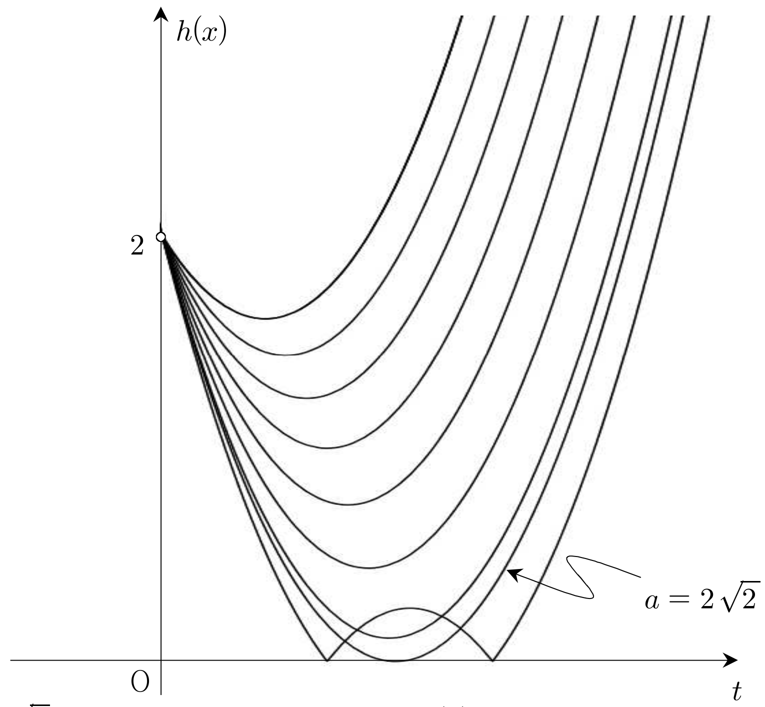
그러면 양의 실근만을 가질 수 있는 이차방정식 $t^2 - at + 2 = 0$에서 근과 계수와의 관계에 의하여 $t_1 + t_2 = a > 0$와 $t_1 t_2 = 2 > 0$는 항상 성립하므로 음의 실근은 무시한채 판별식 조건만 따져주면 된다.

$D = a^2 - 8 > 0$이면, 즉 $a > 2\sqrt{2}$이면 서로 다른 두 양근을 갖고,

$D = a^2 - 8 = 0$이면, 즉 $a = 2\sqrt{2}$이면 중근을 갖고,

$D = a^2 - 8 < 0$이면, 즉 $0 < a < 2\sqrt{2}$이면 실근을 갖지 않는다.

그리고 $h(x) = |t^2 - at + 2|$와 연관지어보면 이차함수 $y = t^2 - at + 2$가



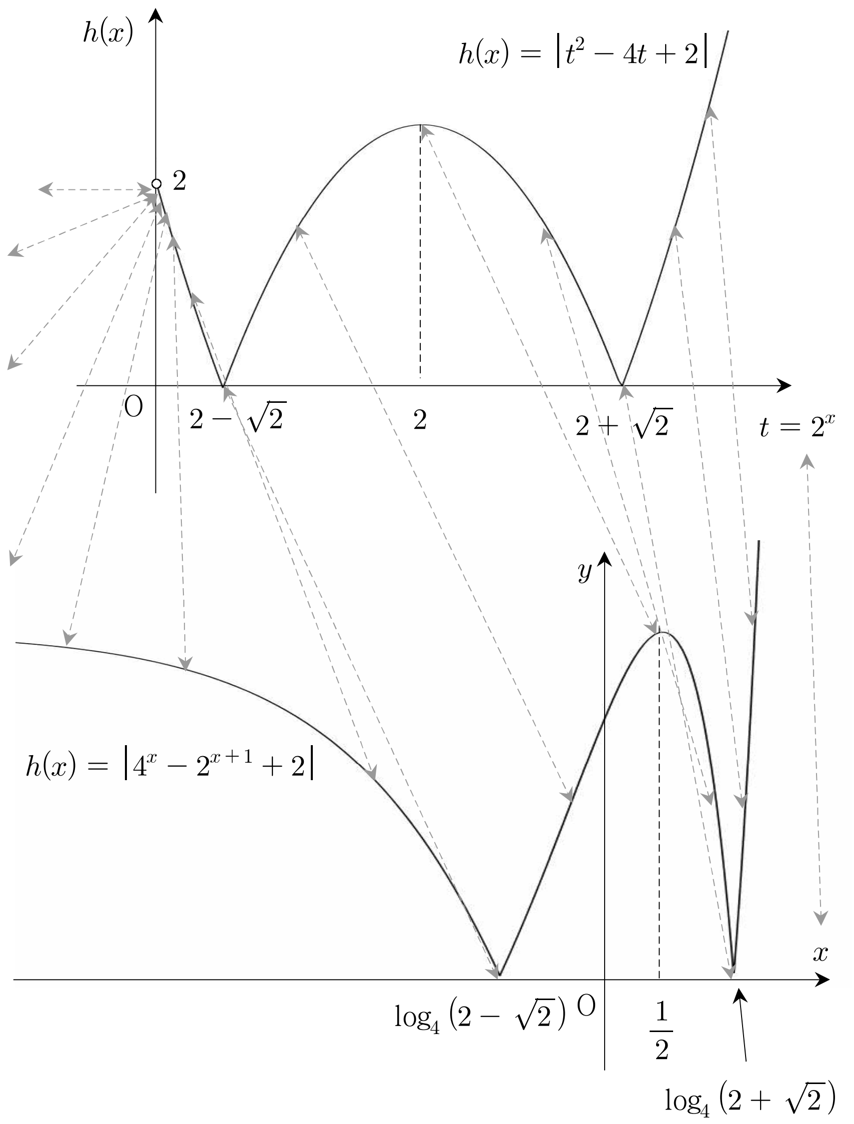
$a > 2\sqrt{2}$일 때 t축과 두 교점을 갖기에 $h(x)$는 접혀 올려야 하고,

$a = 2\sqrt{2}$일 때 t축에 접하며,

$0 < a < 2\sqrt{2}$일 때 t축 위로 떠 있는 모습이다.

ㄱ. True.

ㄴ. $a=4$이면 접어올린 $h(x)$로 만들기 전의 이차함수 $y=t^2-at+2$의 대칭축이 $t=2$이다. 따라서 $t<2$이면 이차함수는 감소하해야 하는데, t축 아랫부분을 접어올린 $h(x)=\left|t^2-at+2\right|$의 개형 상에서는 $t<2$일 때, 즉 $x<\dfrac{1}{2}$에서 절댓값 씌우기 전과 반대로 증가하므로 거짓.

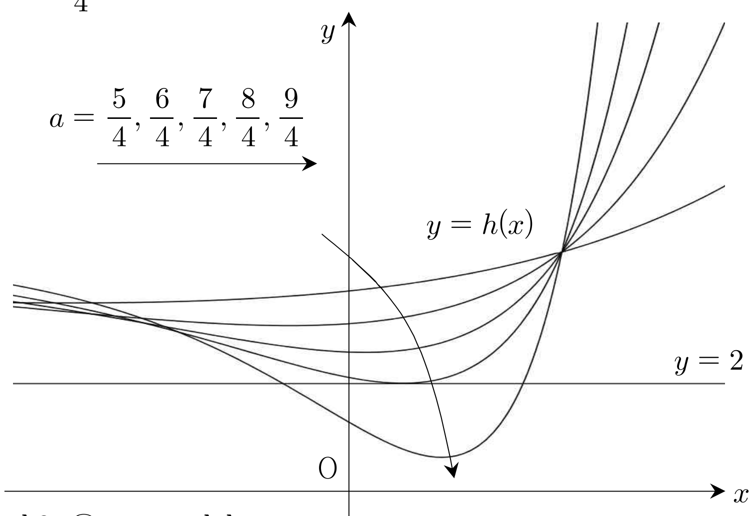


ㄷ. $h(x)=\left|f(x)-g(x)\right|=\left|a^{2x}-a^{x+1}+2\right|$에서 $a\ge 2\sqrt{2}$이면 $h(x)=0$을 만족하는 x가 존재하고, $\lim_{x\to-\infty}h(x)=2, \lim_{x\to\infty}h(x)=\infty$

이므로 $y=1$와 적어도 두 점에서 만난다. 따라서 $0<a<2\sqrt{2}$의 범위에서 생각해야 마땅하다. 이때는 $h(x)=a^{2x}-a^{x+1}+2$가 되므로 최솟값이 1로서 $y=1$에서 접하는 상황이면 조건을 만족하는 a가 된다.

$$h(x)=a^{2x}-a^{x+1}+2=\left(a^x-\frac{a}{2}\right)^2+2-\frac{a^2}{4}$$

에서 $2-\dfrac{a^2}{4}=1$을 만족하는 값은 $a=2$이다.



따라서 답은 ③ ㄱ, ㄷ이다.

2011년 11월 대수능 수리(가형) 30번

sol)

주어진 조건에 의해 가능한 (a,b)의 순서쌍의 개수는 $9\times 9=81$이다. 물론, 출제자는 그 많은 경우에 대한 그래프를 그리길 요구하지는 않았을 것이다! 가급적 혼자서 할 수 있는 고민은 다 해본 다음에 풀이를 보았으면 한다.

이때 유용한 문제 해결의 전략중 하나로 적절한 기준을 세우는 것을 생각할 수 있는데, 가령 a가 $2,3,\cdots,10$ 값을 취할 때마다 만족하는 b를 찾는 방식은, 너무 헤아려야 할 것들이 많다.

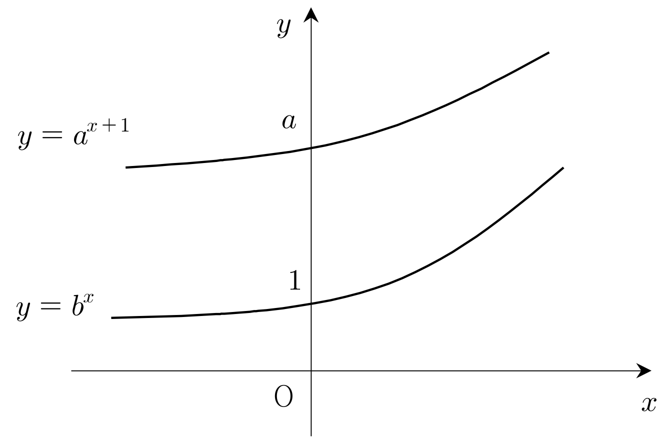
a \ b	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									

그래서 생각하길, a,b의 대소 관계에 따라

(i) $a>b$ (ii) $a=b$ (iii) $a<b$

로 나누어 헤아려 줄 수 있다.

한편, 두 지수함수 $y=a^{x+1}$과 $y=b^x$의 y절편은 각각 a와 1로서 a,b의 대소관계에 상관없이 $x=0$ 근처에서는 $y=a^{x+1}$가 $y=b^x$보다 위에 있다.



다음으로 a,b의 대소관계에 따라 제1사분면에서 교점이 존재하느냐, 존재하지 않느냐를 생각하는 것이다.

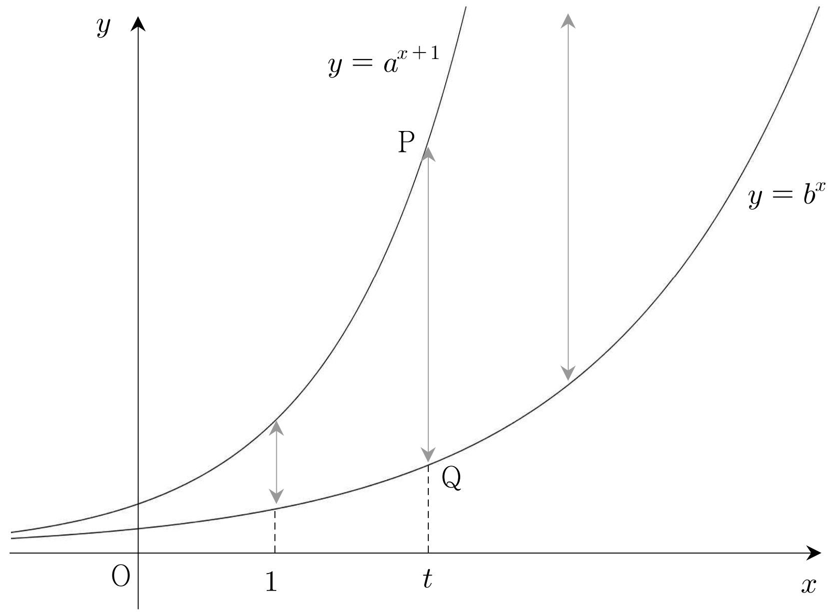
(i) $a>b$이면 $x=0$일 때 $a^{x+1}-b^x=a-1$이고 $x=1$일 때 $a^{x+1}-b^x=a^2-b$이다. 그리고 $x=t\ge 1$일 때는 $a^{x+1}-b^x$가 점점 커진다. 왜냐하면 밑이 크니까 당연하지! 하고 넘어가도 결과적으론 상관없지만 $f(x)=a^{x+1}-b^x$라 하면

$$a^{x+1}-b^x>a^{x+1}-a^x=(a-1)a^x>0$$

가 성립하고, 다시 $f(x)$를 미분 해보면

$$f'(x)=a^{x+1}\ln a-b^x\ln b$$
$$>a^{x+1}\ln a-b^x\ln a=(\ln a)f(a)>0$$

이므로 $f(x)$는 증가하기 때문이다. 이는 $x=t\ge 1$일 때 차이가 점점 벌어진다는 것을 의미한다. 따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}\le 10$이기 위해서는 초깃값에 해당하는 $f(1)=a^2-b$가 10 이하면 충분하다. 이를 기하학적으로 따져보면 다음과 같다.



따라서 $a > b$의 범위에서 $a^2 - b \le 10$을 만족하는 경우만 표에서 O 해주자. 은근히 안 되는게 많다.

a \ b	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2									
3	O								
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									

(ii) $a = b$이면 $f(x) = a^{x+1} - b^x = a^{x+1} - a^x = (a-1)a^x > 0$로 여전히 증가함수이다. 즉, $t = 1$일 때 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이가 최소이므로 $t > 1$이면 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이는 $f(1) = a^2 - a$일 때보다 증가했으면 했지 감소하지는 않는다는 얘기다. 이때도 (i)에서와 마찬가지로 $a^2 - a \le 10$인 경우만 헤아려 주면 되는데, 되는 것만 표에 O 표시 해주자.

a \ b	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	O								
3	O	O							
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									

(iii) $a < b$이면 $f(x) = a^{x+1} - b^x$는 적당한 양의 실수 k가 존재해서 $x \ge k$에서는 감소함수가 된다. 이것도 밑이 b가 더 크니까 당연하다고 여기면 좋겠지만, 엄밀하게 보여 보자.

연속함수 $f(x) = a^{x+1} - b^x$에 대하여 $f(0) = a - 1 > 0$이지만

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(a^{x+1} - b^x\right) = \lim_{x\to\infty} a\cdot b^x\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^x - \frac{1}{a}\right\} = -\infty$$

이므로 연속함수의 중간값의 정리에 의하여 $f(k) = 0$인 k가 개구간 $(0, \infty)$에 적어도 하나 존재하고, $a^{k+1} - b^k = 0$이 성립한다. 그런데

$$a^{x+1} - b^x = a\cdot b^x\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^x - \frac{1}{a}\right\} = 0$$

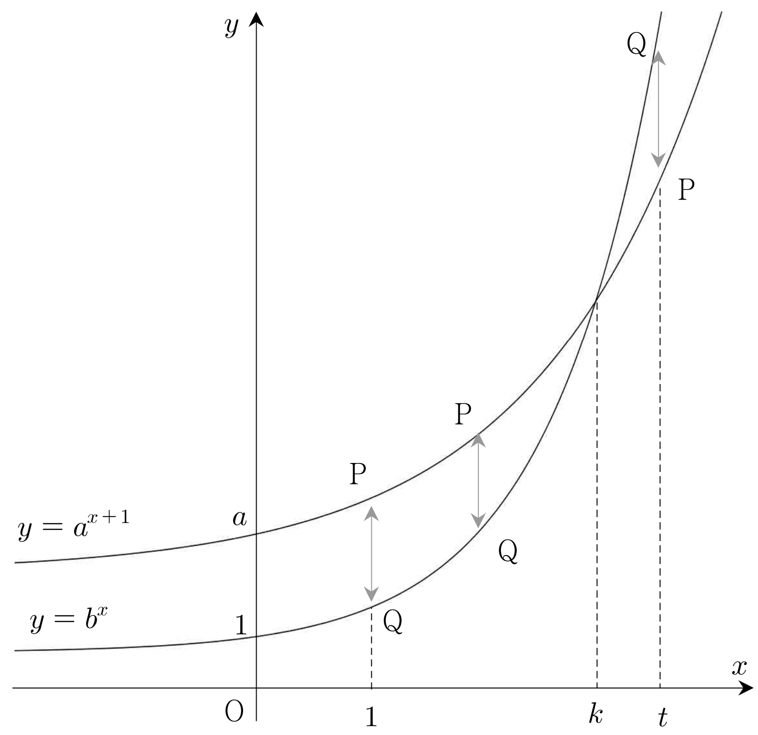
는 곧 $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{1}{a}$에서 $k = \log_{\frac{a}{b}}\frac{1}{a} = \dfrac{\log\frac{1}{a}}{\log\frac{a}{b}} = -\dfrac{\log a}{\log a - \log b}$가 되어 $f(x) = 0$의 근은 k가 유일함을 알 수 있다.

한편, $f(x) = a^{x+1} - b^x$를 미분해보면

$$\begin{aligned} f'(x) &= a^{x+1}\ln a - b^x \ln b \\ &< a^{x+1}\ln a - b^x \ln a \\ &= (\ln a)\left(a^{x+1} - b^x\right) = (\ln a) f(x) \end{aligned}$$

에서 $x \ge k$이면 $f'(x) \le 0$으로 감소함수가 된다.

따라서 $f(0) = a - 1 > 0$과 $f(k) = 0$과 $x > k$에 대하여 $f(x) < 0$를 만족하므로, $x = k$를 분기점으로 두 점 P, Q의 y좌표의 대소관계가 바뀐다. 이 경우는 어떠한 a, b를 택하더라도 $x = k$ 근방의 값들에 대하여 $|f(x)| \le 10$, 즉 $\overline{\mathrm{PQ}} \le 10$을 만족할 것이다.



그러니 이 경우도 굳이 표에 O 표시 하자면 다음과 같을 것이다.

a \ b	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	O	O	O	O	O	O	O	O	O
3	O	O	O	O	O	O	O	O	O
4				O	O	O	O	O	O
5					O	O	O	O	O
6						O	O	O	O
7							O	O	O
8								O	O
9									O
10									

고로, 세 경우를 종합하면 주어진 조건을 만족하는 순서쌍 (a, b)의 개수는 $1 + 2 + \dfrac{8\cdot 9}{2} = 39$가 답이다.

2012년 05월 평가원 수학(A형) 09번

sol)

ㄱ. 직선 $x=-1$과 두 함수 $f(x), g(x)$의 교점의 좌표와 점 $\mathrm{P}(a,-a)$의 위치를 보면 $-1<a<0$이 되어 거짓임을 알 수 있다.

ㄴ. $|f(-t)-g(-t)|=|2^{-t}-t|=t-\dfrac{1}{2^t}$이고

$|f(t)-g(t)|=|2^t-(-t)|=2^t+t$인데,

$t-\dfrac{1}{2^t}<t<2^t+t$이므로 참이다.

ㄷ. 점 $\mathrm{P}(a,-a)$는 두 함수의 유일한 교점으로서 $2^a=-a$를 만족하고, $a=-\log_2 a$ 관계 또한 만족한다.

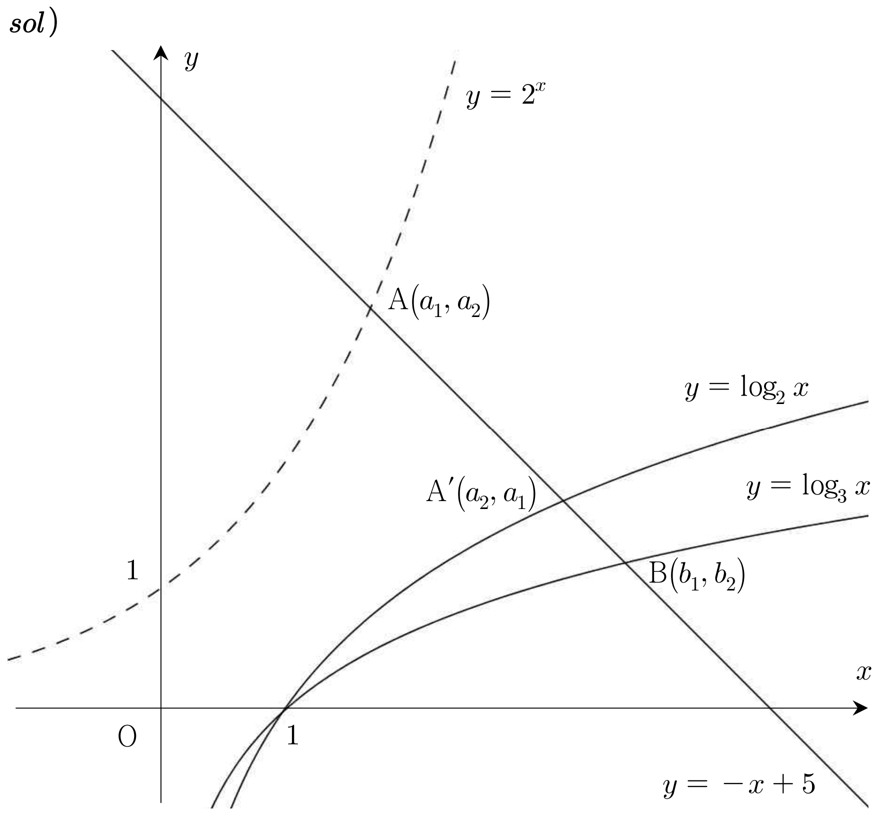
한편 $f^{-1}(x)=\log_2 x$이고 $g^{-1}(x)=-x=g(x)$인데,

$y=f^{-1}(x), y=g^{-1}(x)$의 교점은 오직 하나 존재하며 $\log_2 b=-b$ 관계를 만족한다. 그런데 이러한 관계를 만족하는 교점은 유일하므로 $a=-b$가 되어야 한다. 따라서 해당하는 점의 좌표는 $(b,-b)=(-a,a)$으로 참이다.

고로, 답은 ⑤ ㄴ, ㄷ이다.

2012년 07월 교육청 수리(나형) 15번

sol)



ㄱ. $y=2^x$의 역함수가 $y=-x+5$와 만나는 교점을 $\mathrm{A}'(a_2,a_1)$이라고 그려보면 두 점 A'과 B의 y좌표 비교로서 $a_1>b_2$임을 알 수 있다. 따라서 참.

ㄴ. 두 점 A,B는 모두 직선 $y=-x+5$ 위의 점으로서 $a_1+a_2=5=b_1+b_2$가 되어 참이다.

ㄷ. 두 직선 OA'와 OB의 기울기 비교로서 부등호 방향이 바뀌었다. 따라서 거짓.

이때 답은 ③ ㄱ, ㄴ이다.

2012년 08월 사관학교 수리(가형) 07번

sol)

두 점 A,C의 높이가 서로 같으므로 $a^{\frac{b}{4}}=b^b \rightarrow a=b^4$

또, 두 점 B,D의 높이가 서로 같으므로 $a^a=b^1 \rightarrow a^{4a}=b^4$

따라서 $a=b^4=a^{4a} \rightarrow a=\dfrac{1}{4}, b=a^a=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이고,

이때 $a^2+b^2=\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{16}$으로 답은 ③번이다.

2012년 10월 교육청 수리(가형) 16번

sol)

두 사각형 OAPB와 PCQD가 합동이면서 세 점 $\mathrm{O},\mathrm{P},\mathrm{Q}$가 모두 $y=x$ 상에 존재하므로 $\mathrm{P}(t,t), \mathrm{Q}(2t,2t)$라 할 수 있다. 이 두 점은 로그함수 $y=\log_a x$ 위의 점이기도 하므로 $2t=\log_a 2t$와 $t=\log_a t$를 연립해보면

$2t-t=\log_a \dfrac{2t}{t} \rightarrow t=\log_a 2$로 $t=2, a=\sqrt{2}$임을 알 수 있다.

※ 지수함수 $y=a^x$가 $a=\sqrt{2}$이면 두 점 $(2,2),(4,4)$를 지나기에 그 역함수인 로그함수 $y=\log_a x$와도 두 개의 교점을 갖는다는 사실을, 지금에 와서 신기방기 동방신기하면 ㄴㄴ해.

2013년 10월 교육청 수학 영역(A형) 13번

sol)

점 D가 $(2,1)$에 위치하는 경우로 $k=3$이다. 그래서 답은 ④ 3이다.

2014년 03월 교육청 수학 영역(A형) 10번

sol)

$h(2)=2$이므로 $\mathrm{R}(2,2)$이고, $\mathrm{P}(-2,2), \mathrm{Q}\left(\dfrac{2}{3},2\right)$로 좌표를 찾을 수 있다.

그러면 $g\left(\dfrac{2}{3}\right)=b^{\frac{2}{3}}=2$이고, $g(4)=b^4=\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^6=2^6=64$가 나온다.

따라서, 답은 ⑤번!

2014년 03월 교육청 수학 영역(A형) 28번

sol)

$\overline{\mathrm{PQ}}=\log_{\frac{1}{9}} a-\log_3 a=-3\log_3 a$이고,

$\overline{\mathrm{SR}}=\log_3 b-\log_{\frac{1}{9}} b=3\log_3 b$이므로 (가) 조건에 의하여

$2:1=-3\log_3 a:3\log_3 b \rightarrow a=\dfrac{1}{b^2}$임을 알 수 있다.

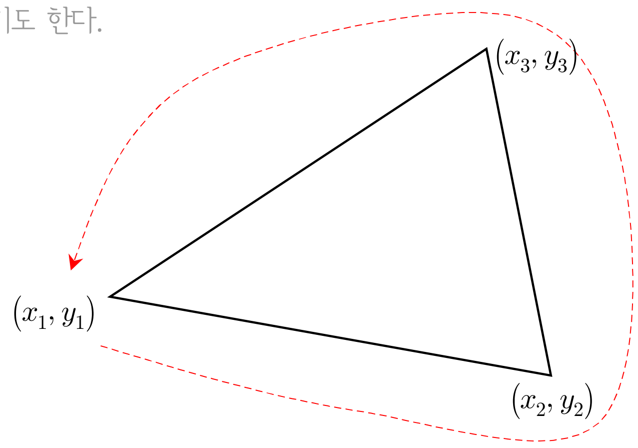
그리고, (나) 조건에 의하여 $\dfrac{9}{8}=\dfrac{a+b}{2} \rightarrow \dfrac{1}{b^2}+b=\dfrac{9}{4}=\dfrac{1}{2^2}+2$에서

$b=2, a=\dfrac{1}{4}$가 나온다. 정리하여 b에 관한 삼차식을 인수분해 하여도 상관

없지만 숫자가 너무 뻔하므로 바로 찾은 것이다. 시간도 아껴야 하니까!
따라서 $40(b-a)=80-10=70$이 답이다.

2014년 04월 교육청 수학 영역(A형) 19번

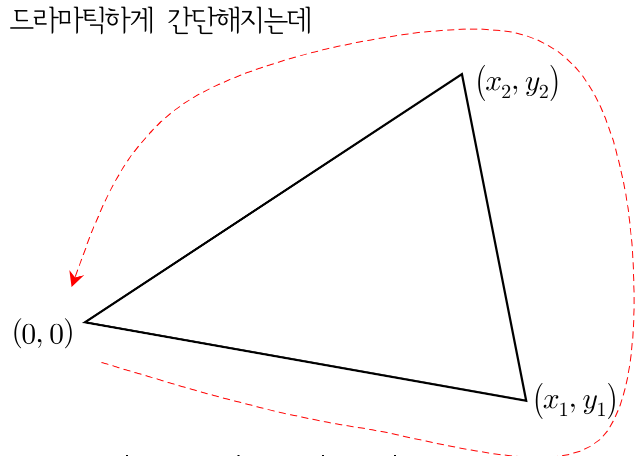
sol)
이 문제는 이 해 문과 수능 킬러문항을 예고하였다고 보아도 과언이 아니다. 삼각형의 넓이를 구하는 공식이 여러 가지가 있는데, 이 문제에서는 그 중에서 평면 위 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표만을 알 때 넓이를 구하는 방법인 사선식을 사용하도록 유도하고 있다. 종종 운동화 끈 묶는 식, 고도리(?) 공식으로 불리기도 한다.



가령, 위와 같이 삼각형의 꼭짓점들의 좌표를 모두 안다고 하자. 물론, 세 점이 삼각형을 이룬다는 전제 하에! 이때 좌표를 고도리 패 돌리듯이 반시계 방향으로 돌아가며 좌표를 써준다. 그리고 시작하는 점은 마지막에 한 번 더 써주고, 앞에 $\frac{1}{2}$배도 해준다.

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & x_2 \end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3x_2-x_2y_1-x_3y_2-x_1y_3)$$

마치 행렬에서 판별식(행렬식)을 계산할 때 ↘ 방향 곱들은 더해주고, ↙ 방향 곱들은 빼주면 된다. 특히, 삼각형의 세 꼭짓점 중에서 하나가 원점이면 계산이 드라마틱하게 간단해지는데



$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & y_1 & y_2 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$$

가 된다. 지금의 문제의 경우 사선식을 적용하면 점 Q의 좌표가 $(2^n, n)$이니

$$S_n=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2^n & n \\ n & 2^n \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(4^n-n^2)$$

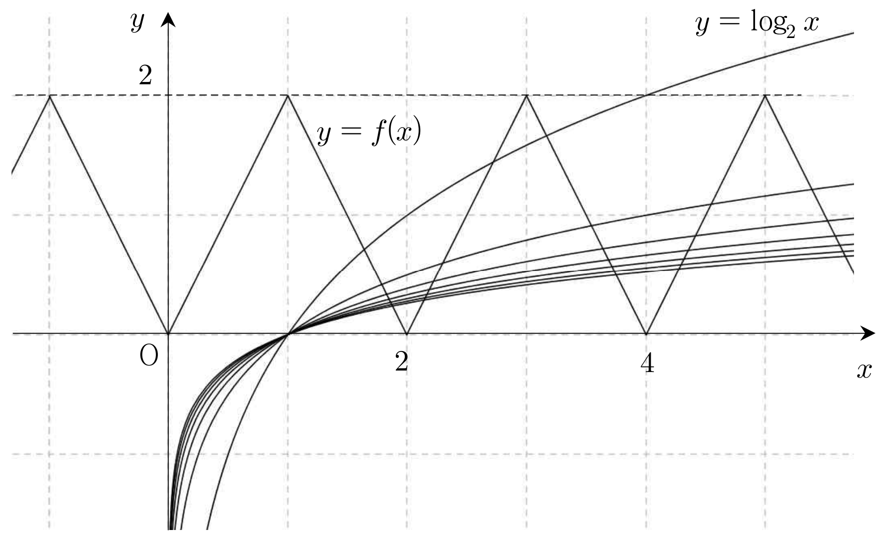
가 되어, 이후로는 단순 계산 문제가 되어 버린다. 답을 구해보면

$$\sum_{n=1}^{5}(4^n-n^2)=\frac{4(4^5-1)}{4-1}-\frac{5\cdot6\cdot11}{6}=1309$$

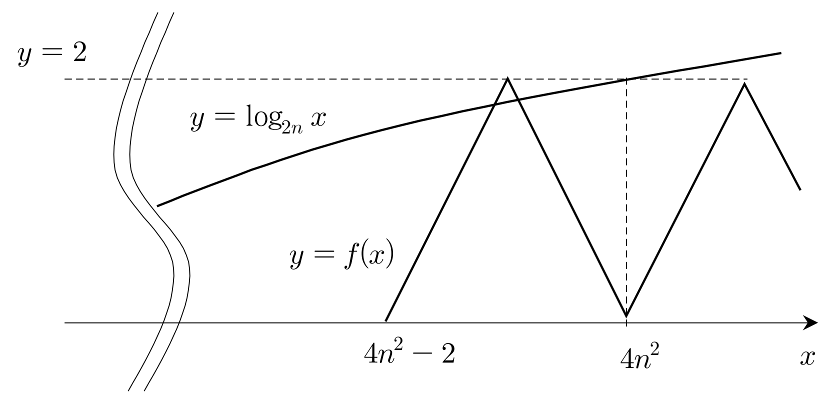
로 ①번이 나온다.

2014년 04월 교육청 수학 영역(A형) 29번

sol)



혹여나 이 문제를 어려워한다면, 기출문제 풀 때 좋았구나! 변화하는 로그함수 $y=\log_{2n}x$를 기준으로 n을 키워감에 따라 교점을 카운팅 하려 했기 때문이다. 세기에는 세어야 할 것들이 너무 많다.
하지만 발상을 바꾸어서 $y=\log_{2n}x$의 최댓값이자 첨점인 $y=2$을 지나는 순간의 n을 기준으로 경계를 나누어 본다면 조금 더 빠르게 잘 풀릴 것이다.
즉, $2=\log_{2n}x$에서 로그함수는 점 $(4n^2, 2)$를 지나고 $f(4n^2)=0$임을 이용하자.



그러면 로그함수 $y=\log_{2n}x$는

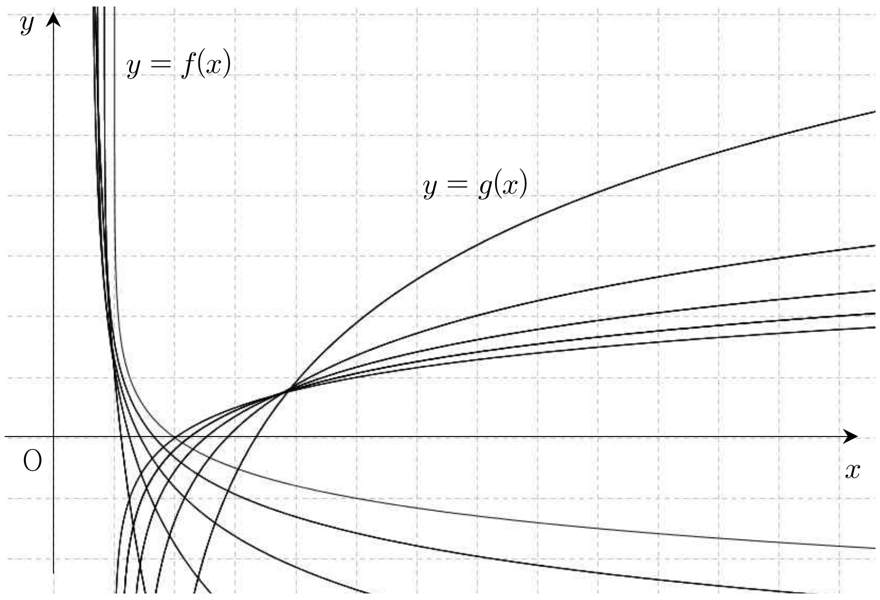
$0<x<2$에서 교점을 한 개 갖고,
$2\le x<4$에서 교점을 두 개 갖고,
$4\le x<6$에서 교점을 두 개 갖고,
⋮ ⋮
$4n^2-2\le x<4n^2$에서 교점을 두 개 갖는다.

따라서 $a_n=1+2(2n^2-1)=4n^2-1$이 된다. 확인 차 $n=1$ 정도는 넣어보는 것도 좋다. 고로, $\sum_{n=1}^{7}a_n=4\cdot\frac{7\cdot8\cdot15}{6}-7=553$이 답이다.

2014년 06월 평가원 수학 영역(A형) 20번

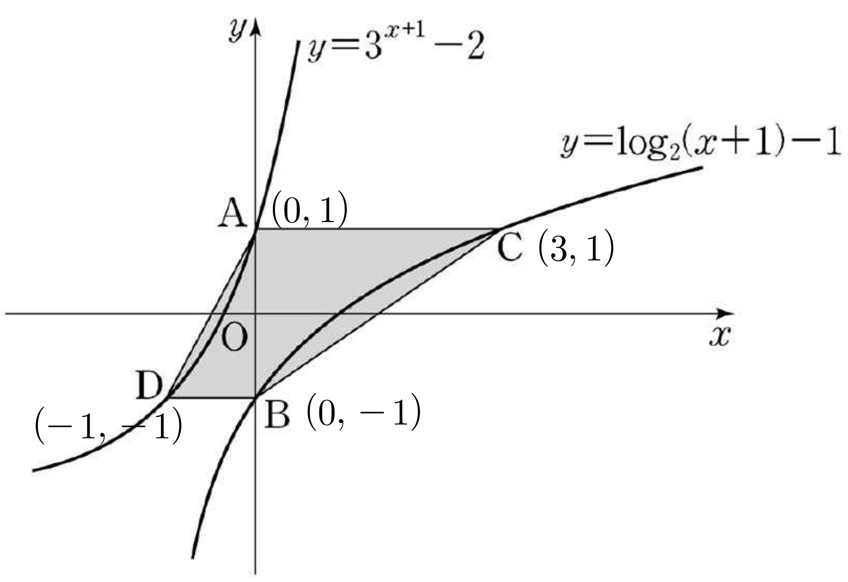
sol)
곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점은 $bx-1=1\to\left(\frac{2}{b}, 0\right)$이고, 곡선 $g(x)$의 점근선은 $ax-1=0$, 즉 $x=\frac{1}{a}$로 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}\to b=2a$이다. 그런데, $0<a<1<b$이므로 $a<1<2a$로부터 $\frac{1}{2}<a<1$인 ③번이 답이다.

※ 그래프 그리는 프로그램을 이용하여 두 곡선의 자취를 확인해 보았더니 다음과 같았다.



2014년 09월 평가원 수학 영역(A형) 11번

sol)



위와 같이 네 꼭짓점의 좌표를 모두 찾은 다음 평행한 한 쌍의 변을 $\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 로 보고 사다리꼴 ABCD 의 넓이를 구하자. 그러면 답은 $\frac{1}{2}(3+1)\{1-(-1)\}=4$ 로 ⑤번이 나온다.

2014년 09월 평가원 수학 영역(A형) 30번

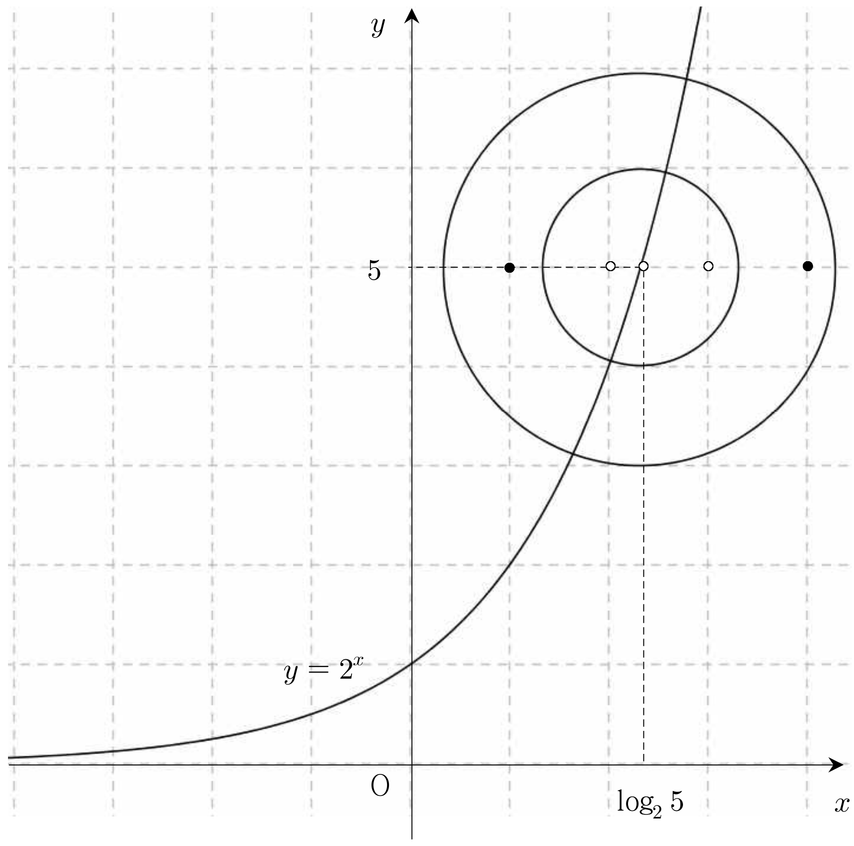
sol)

있는 그대로 해석을 하자면, 곡선 $y=2^x$ 에서 너무 멀리 떨어져 있는 점들은 (다) 조건을 만족하지 못할 것이고, 곡선에 너무 붙어 있는 점들 또한 (나) 조건을 만족하지 못할 것이다.

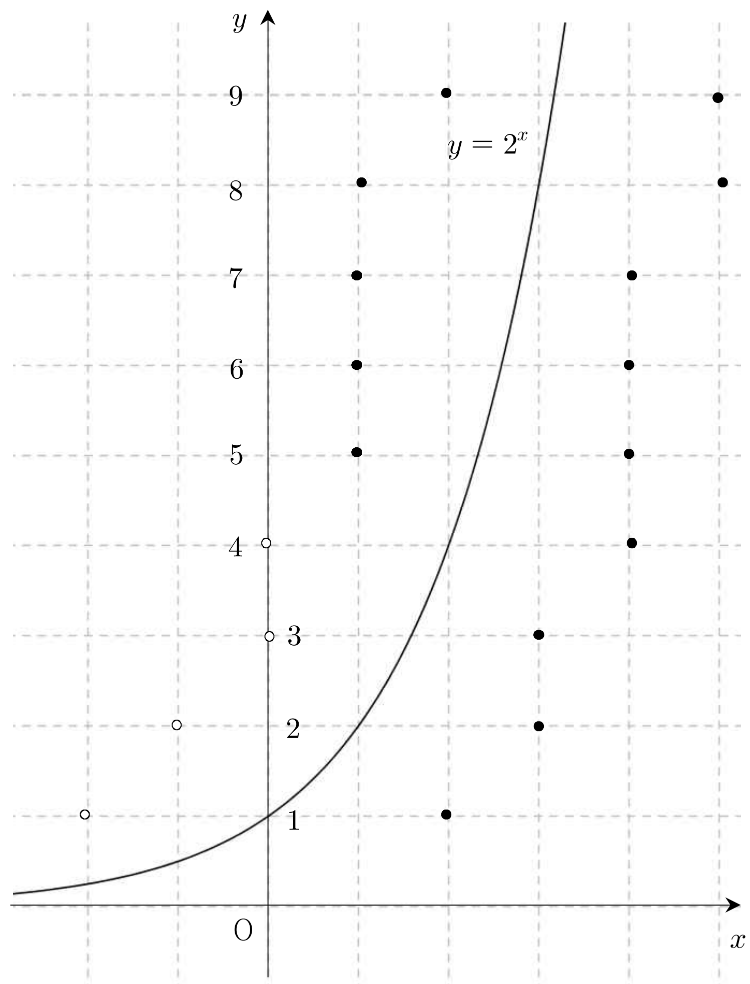
…

그.래.서?

사실 이 문제는 어떻게 생각하느냐에 따라 쉽게 풀리기도 하고 복잡하게 풀리기도 한다. 발상이 중요한 문제이다. 그러니 간단 명료한 풀이를 살펴보자.



비록 a보다 b가 더 많지만 b를 기준 삼아 $b=k$라 두고서 $k=1, 2, 3, \cdots, 100$까지 변화시켜 가면서 해당하는 격자점의 개수를 세다 보면 규칙을 발견할 수 있다. 이때, 예를 들어 위와 같이 $b=5$인 경우 조건을 만족하는 a값을 찾아보면 2개 존재함을 알 수 있다. 즉, 점 $(\log_2 k, k)$를 기준으로 해당 점과 바로 양 옆의 격자점들은 반지름이 1인 원 이내에 들어오기 때문에 (나) 조건에 의하여 비포함 하여야 하고, 해당 점에서 한 칸 더 떨어진 양옆의 격자점들은 (나), (다) 조건 모두 만족하게 된다. 이러한 패턴이 계속 반복되는데 해당하는 점들만을 표시하면 다음과 같다.



그러면 $b=1, 2, 3, 4$일 때 (가)의 a 조건을 만족하지 못하는 점들을 제외하고 $2\times 100-4=196$이 답이 된다.

2014년 10월 교육청 수학 영역(A형) 26번

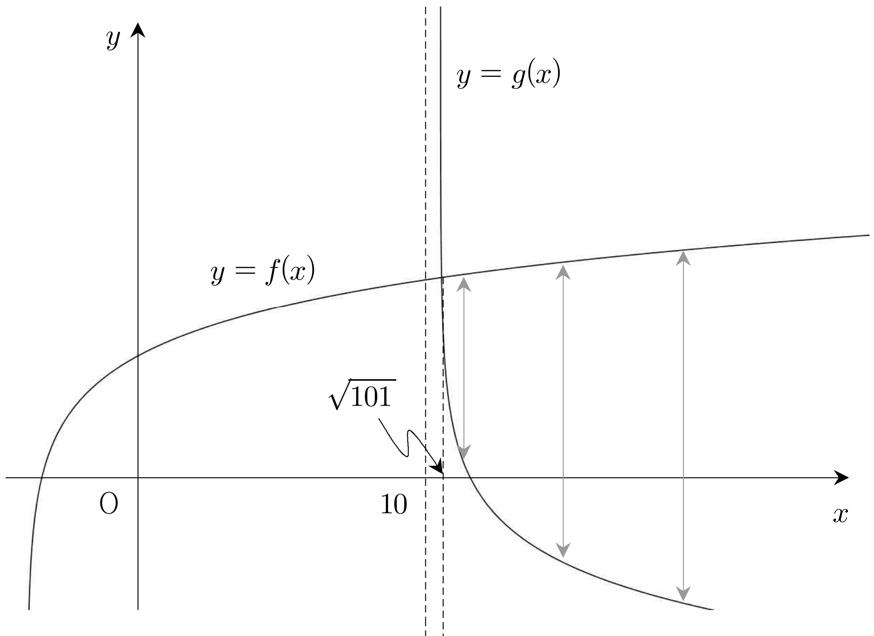
sol)

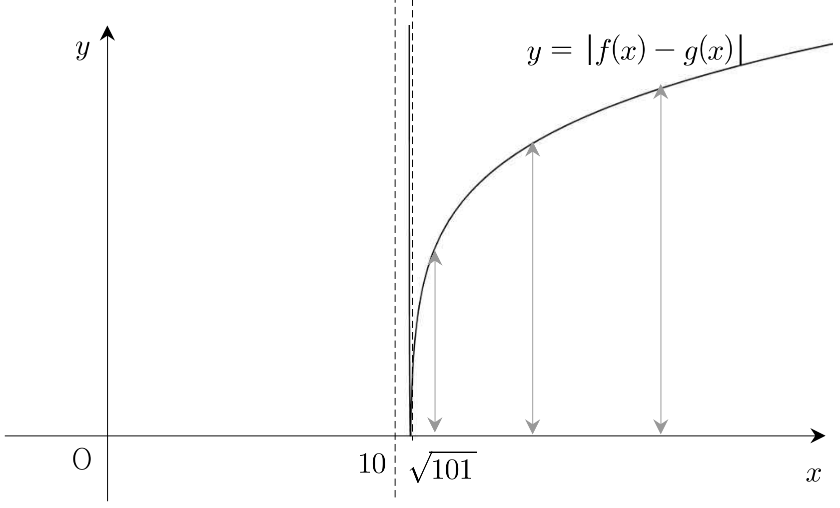
두 함수의 교점의 좌표를 구해보자.

$$\log_2(x+10) = \log_{\frac{1}{2}}(x-10) \;\rightarrow\; \log_2(x+10)(x-10) = 0$$

에서 $x^2 - 100 = 2^0$, 즉 $x = \sqrt{101}$ 일 때 최소가 된다.

한편, $y = |f(x) - g(x)|$의 기하학적 의미는 두 함수값의 차를 다시 함숫값으로 취하는 함수로서 차이만을 위, 아래 방향으로 평행이동





위와 같이 $y = |f(x) - g(x)|$는 $x = \sqrt{101}$ 에서 최솟값 0을 갖는다는 것을 알 수 있다. 따라서 $p = \sqrt{101} \;\rightarrow\; p^2 = 101$이 답이다.

< PART.B 신세계 정답표 >

(예비평가)	2004년	2005년	2006년	2007년	2008년	2009년	2010년	2011년	2012년	2013년	2014년
3월 교육청	①	⑤	③/⑤	③	⑤	③		②/①			⑤/70
4월 교육청		①/③				84					①/553
5월 교육청				⑤/90	⑤	⑤			(예비평가) ⑤		
6월 평가원		④		⑤	④	①/②/⑤					③
7월 교육청				③	③	③/④	②		③		

8월 사관학교		③	⑤/⑤	④/④	⑤	③/①		②/③	③		
8월 경찰대					⑤		①				

9월 평가원		③		③	③		③				⑤/196
10월 교육청									①	④	101
11월 수능				⑤	⑤/⑤	⑤	③	39			