

2003년 12월 평가원 수리(나형) 06번

sol)

일종의 합성 함수로서 다음과 같은 대응 관계를 생각할 수 있다.

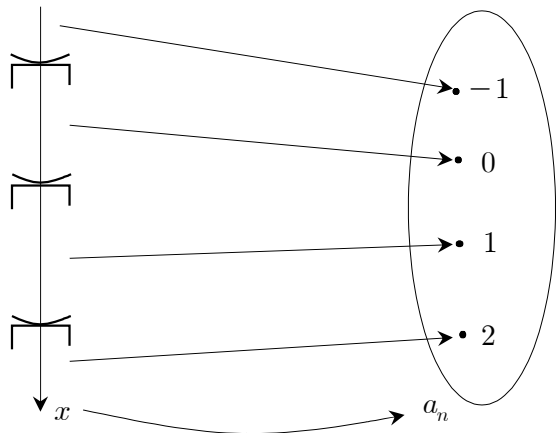
여러분의 머릿속에서 차곡차곡 정리되거나, 혹은 정리되지 않았을 그 관계!

n	$\log_{10} n$	a_n
1	$\log_{10} 1 = 0$	0
2	$\log_{10} 2 = 0.3010 \dots$	0
3	$\log_{10} 3 = 0.4771 \dots$	0
4	$\log_{10} 4 = 0.6020 \dots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20	$\log_{10} 20 = 1.3010 \dots$	1

a_n 을 “ $\log_{10} n$ 의 값을 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 수”로서 정의하고 있는데, 반올림 한다는 부분에 초점을 맞춰보자. 물론 숫자를 몇 개 대입해보면서 규칙을 찾아서 풀어내어도 좋다.

우선 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 수의 결과는 항상 정수가 될 수 밖에 없다. 여기서는 양의 정수 내지는 0만이 결과값인 a_n 으로 가능하다.

그런데, 일일이 n 에 1부터 20까지 대입해보기엔 따져야 할 것들이 많기에 다른 전략을 택할 필요가 있다. 출제자도 고작 6번 문제에서 그런 무리수를 요구하진 않았을 것이다. 즉, 초기에 대입하는 값들을 하나씩 넣어보고 확인하기 보다는, 결과값으로 나오는 $\log_{10} x = 0.5, 1.5, 2.5, \dots$ 로서 경계인 x 값을 찾는 것이다.



$-0.5 \leq \log_{10} x < 0.5$ 가 되는 x 값들에 대해서는 $a_x = 0$ 가 될 것이고,

$0.5 \leq \log_{10} x < 1.5$ 가 되는 x 값들에 대해서는 $a_x = 1$ 이 될 것이다.

이 과정에서 정의역에 해당하는 $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ 을 확장해서 적어도 $\{x \mid 1 \leq x \leq 20\}$ 가 되도록 생각해야 한다. 어차피 이 중에서 유의미한 자연수값 x 만을 취해주면 되기 때문이다.

또, 마지막 값인 a_{20} 은 $\log_{10} 20 = 1 + \log_{10} 2 = 1.3010 \dots$ 의 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 수로서 기껏해야 $a_{20} = 1$ 밖에 안 되므로

$\log_{10} x \geq 1.5$ 인 것들에 대해서 생각해 줄 필요는 없다.

그러면 $-0.5 \leq \log_{10} x < 0.5$ 인 자연수 x 값으로 $x = 1, 2, 3$ 이 가능하고,

$0.5 \leq \log_{10} x < 1.5$ 인 자연수 x 값으로 $x = 4, 5, \dots, 20, \dots$ 가 가능하나,

해당 범위에 속하는 $x = 20$ 까지만 생각해주자. 그러면 답은 일단

$$\sum_{n=1}^{20} a_n = 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + \dots + 1 = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 17 = 17 \text{이 된다.}$$

※ $\log_{10} x = 0.5$ 인 x 값을 찾는 과정에서, $x = 10^{0.5} = \sqrt{10} = 3.1 \dots$

임을 이용해서 구해도 되지만 기본적인 상용로그 값은 소수점 아래 넷째

자리까지의 값을 외우고 있는 것이 좋다. 문제에서 가르쳐 줄 때도 있지만,

지금과 같이 제시해주지 않을 경우에, 미리 값들을 외워두고 있으면 사용할 수 있는 수식들의 범위가 늘어나고 관계도 더 뚜렷하게 보이기 때문이다.

실질적으로 2, 3, 7에 해당하는 값만 외우고 있어도 나머지는 유도할 수 있다.

$\log 2$	0.3010
$\log 3$	0.4771
$\log 4 = 2 \log 2$	0.6020
$\log 5 = 1 - \log 2$	0.6990
$\log 6 = \log 2 + \log 3$	0.7781
$\log 7$	0.8451
$\log 8 = 3 \log 2$	0.9030
$\log 9 = 2 \log 3$	0.9542

또, n 에서 a_n 으로 곧바로 가는 함수 관계를 생각해보자. 어떤 수 x 에

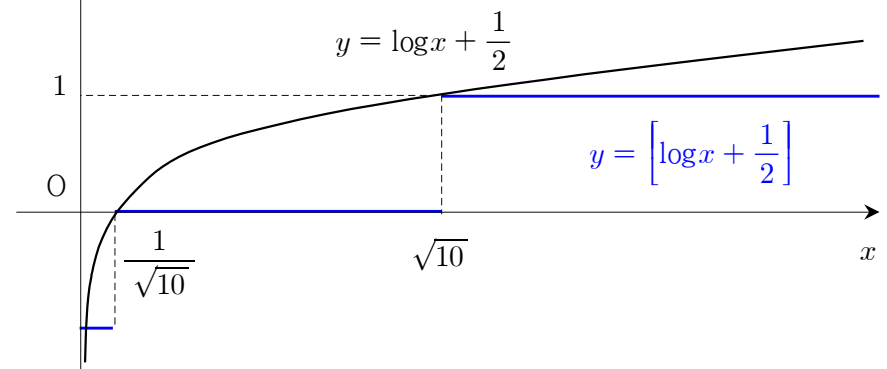
대하여 반올림을 하려면, $\frac{1}{2}$ 을 더해서 가우스 기호를 취하면 된다는 것을

이용하자. 즉, 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 를 $f(x) = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ 이라 정의한다면 f 는

반올림 함수가 된다. 여기서 상용로그 함수를 적당히 합성해보면

$f(\log x) = \left\lfloor \log x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ 가 되고, 그래프는 다음과 같다.

물론 $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수를 의미한다.



2003년 12월 평가원 수리(나형) 22번

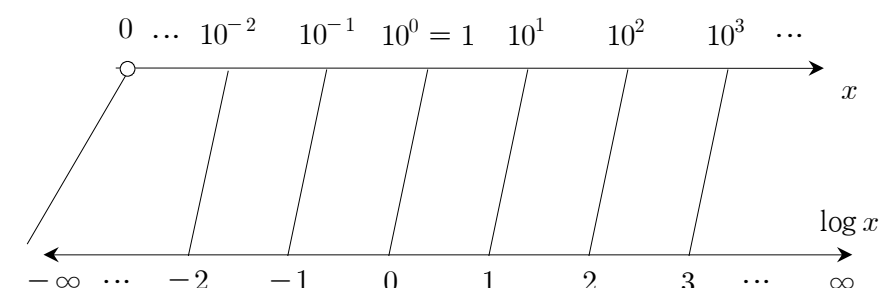
sol)

로그를 이용하면 계산이 획기적으로 쉬워진다. 가령

$10^7 = 10,000,000$ 같은 큰 숫자나, $10^{-9} = 0.000000001$ 같은 작은

숫자들도 상용로그를 취하면 각각 $\log_{10} 10^7 = 7, \log_{10} 10^{-9} = -9$ 로서

훨씬 작은 숫자로 바뀌어서 다루기 쉽게 된다. 우선 양의 실수를 로그적으로 확대/축소해보자.



이때 연산이 바뀌는데, $2 \times 3 \rightarrow \log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3$ 과 같이

로그를 취하기 전의 곱셈 연산이 로그를 취한 후의 덧셈 연산으로 대응된다.

이를 통해 실수 간의 복잡한 계산을(특히 곱셈적으로 연결된) 로그를 취해서

덧셈적으로 해결한 후, 다시 본래의 실수값으로 환원해주려는 아이디어이다.

하지만 이 방법을 이용하지 않고 3^{30} 을 십진법으로서의 거듭제곱을 다 계산하여 나타내고자, 패기있게 주어진 시험 시간 내에

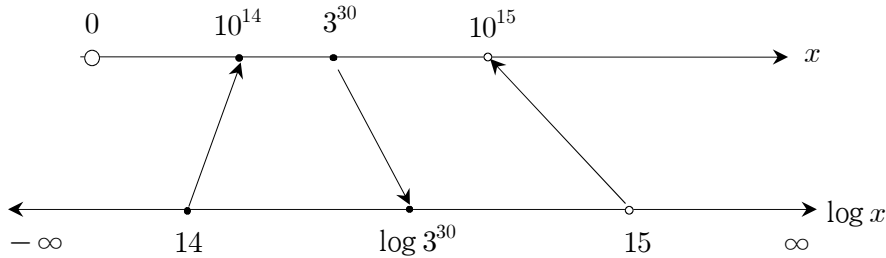
$$3^{10} = (3^5)^2 = 243^2 = 59049$$

$$3^{30} = (3^{10})^3 = 59049^3$$

를 계산해서 몇 자리 수인지 헤아릴 수 없다. 물론 똑똑한 몇몇 학생들은 59049^3 과 60000^3 의 자릿수가 크게 다르지 않을 것이라 추측하고서

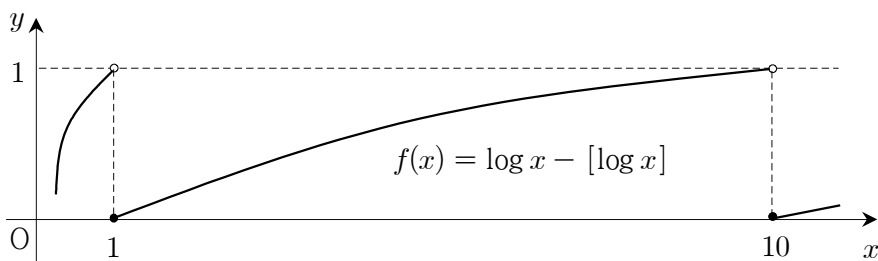
$$60000^3 = 216,000,000,000,000$$

이기에 $3^{30} = 59049^3$ 역시 15자리 자연수일 것이라 판단할 수도 있을 것이지만 이는 항상 올바른 결과를 가져다 주는 것이 아니므로 훨씬 정확하고 안정적인 풀이가 필요하다. 그러니, 상용로그를 이용 해보자.



그러면 $30 \log 3 = 30 \times 0.4771 = 14.313$ 은 로그값으로서 14와 15 사이에 있는 수이고, 이때의 14 이상이고 15 미만인 수들은 로그를 취하기 전의 값으로서 10^{14} 이상이고 10^{15} 미만인 수들에 속한다. 그리고 3^{30} 도 이에 속하므로 $15 = n$ 자리 수가 된다. $\log 3^{30} = 14.313$ 에서 지표에 해당하는 14는 자릿수로서 그대로 쓰인 것이 아니라 +1을 해야 하는데, 위 대응 관계를 나타낸 그림을 보면 자명하다. 지표가 음수인 경우는 나중에 관련 문제가 나오면 생각하자.

한편, 문제에서 주어진 $\log 2 = 0.3010$ 이 괜히 주어진 값이 아닐텐데, 이는 3^{30} 의 가장 큰 자리의 수를 추론하기 위해 쓰인다. 이를 위해 이제 상용로그의 가수의 의미를 파악해보자. $\log 3^{30} = 14.313$ 의 가수에 해당하는 0.313은 로그를 취하기 전의 숫자 배열과 관련된 것이다. 상용로그의 가수를 나타내는 함수는, 양의 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}^+$ 라 할 때, $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log x - [\log x]$ 이다. 물론 $[\]$ 는 가우스 기호이다.



그러면 3^{30} 의 상용로그의 가수는

$$f(3^{30}) = \log 3^{30} - [\log 3^{30}] = 14.313 - 14 = 0.313$$

과 같이 잘 대응된다. 이때, $f(2) = 0.3010$ 뿐만 아니라

$$f(20) = f(200) = \dots = f(2 \times 10^k) = 0.3010 \text{ 처럼 (단, } k \text{는 자연수)}$$

동일한 가수를 갖는 수들이 무수히 많음을 알 수 있다.

만약 $f(x)$ 그래프를 자연수 k 에 대하여

$$1 \leq x < 10 \text{까지의 곡선 } L_1 \text{ 과,}$$

$$10 \leq x < 10^2 \text{까지의 곡선 } L_2 \text{ 와,}$$

$\vdots$

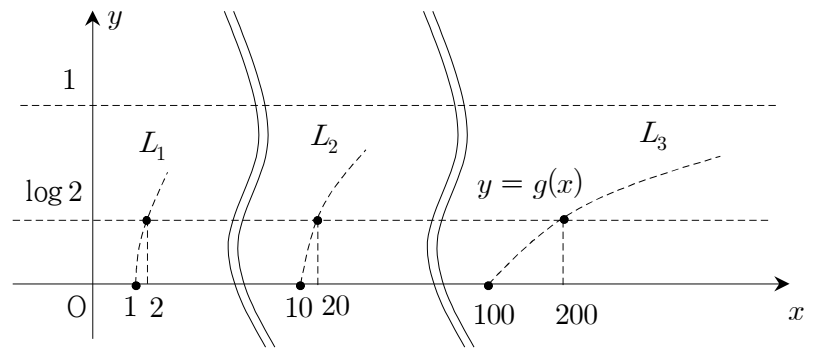
$$10^{k-1} \leq x < 10^k \text{까지의 곡선 } L_k$$

로 생각한다면 L_1 에서는 x 값이 $10 - 1 = 9$ 만큼 증가하는 동안 y 값이 1만큼 증가하고, L_2 에서는 x 값이 $10^2 - 10 = 90$ 만큼 증가하는 동안

y 값이 1만큼 증가하며, $\dots$, 같은 방식으로 하면 L_k 에서는 x 값이

$10^k - 10^{k-1} = 9 \cdot 10^{k-1}$ 만큼 증가하는 동안 y 값이 1만큼 증가한다. 곡선 $L_1, L_2, \dots, L_k$ 들이 마치 고무줄처럼 늘어나서 어찌 됐든 y 값은 $[0, 1)$ 의 값을 취하는 셈이다. 이는 실수의 완비성에 기인한 것이며, 입시 수학 수준에서는 직관적으로 받아들이고 있어도 충분하다.

그런데 정의역을 양의 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}^+$ 에서 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$ 으로 축소한다면 이야기가 달라진다. 만약 $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \log x - [\log x]$ 라고 정의역을 축소한다면 그래프는 기존 $y = f(x)$ 상의 몇몇 점들로서 정의된다. 마치 $f(x) = x^2$ 에서 x 가 실수 전체의 집합일 때의 개형과 x 가 정수일 때 개형은 유사하지만 연속이나 불연속적인 점들이나로 바뀌듯이.



y 값이 취할 수 있는 구간 0과 $\log 2$ 을 생각해보자.

L_1 상에선 두 점 $(1, 0), (2, \log 2)$ 만 존재하지만

L_2 상에선 $(10, 0), (20, \log 2)$ 뿐만 아니라

$$\left(11, \log \frac{11}{10}\right), \left(12, \log \frac{12}{10}\right), \dots, \left(19, \log \frac{19}{10}\right)$$

의 9개 점이 더 존재한다.

마찬가지로 L_3 상에선 $(100, 0), (200, \log 2)$ 뿐만 아니라

$$\left(101, \log \frac{101}{10}\right), \left(102, \log \frac{102}{10}\right), \dots, \left(199, \log \frac{199}{10}\right)$$

의 99개 점이 더 존재한다. 이런 식으로 x 가 커질수록 L_k 상에는 점들이 더 빼곡하게(단, 등간격이 아니라 로그적 간격으로) 놓이는 것이다.

이때, 예를 들어 $\left(19, \log \frac{19}{10}\right)$ 이나 $\left(190, \log \frac{190}{100}\right)$ 이나

$\left(1900, \log \frac{1900}{1000}\right)$ 이나 y 값이 같은데, 역으로 y 값이 같아지는 x 값들인

$\overrightarrow{19}, \overrightarrow{190}, \overrightarrow{1900}$ 은 숫자 배열이 같다고 볼 수 있다. 0의 개수, 혹은 소수점

“.”의 위치와는 무관하게 숫자 배열만 같다면 상용로그의 가수 값이 같다고 볼 수 있는 셈이다. 상용로그의 지표는 원래 수에서 소수점 위치, 상용로그의 가수는 원래의 숫자 배열과 관련 있다!

또 다른 예로, $\overrightarrow{12345}$ 라는 숫자 배열이 있다고 하자. 그렇다면 0의 개수 혹은 소수점의 위치에 변화를 준 $\overrightarrow{1234500}$ 이라든가 $\overrightarrow{12.345}$ 나 0.012345 같은 수들은 상용로그 취했을 때 지표는 다를지언정 가수는 모두 같다.

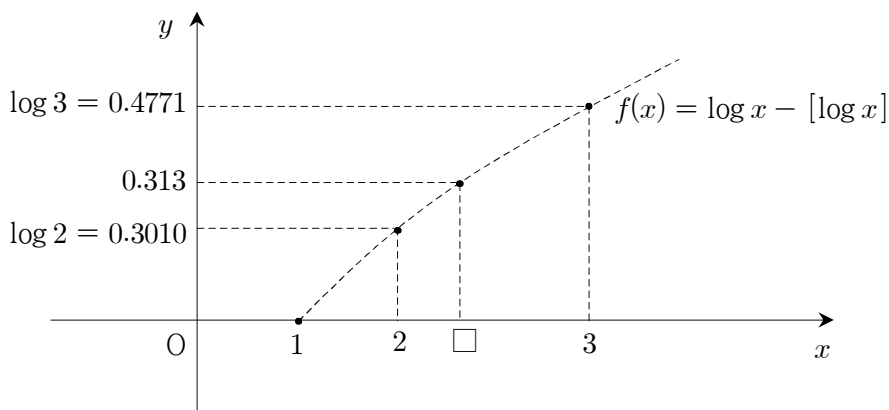
고로, 점 $(x, \log x - [\log x])$ 들의 y 좌표가 곧 x 값의 상용로그의 가수에 해당하는데, 지금까지의 사고 과정들을 통해서, 상용로그의 가수가 기존 수 x 의 배열과 관계있다고 말할 수 있다.

그리고 가수가 같은 수들의 대푯값으로서 L_1 상에 해당하는 1과 10사이의 수로서 생각해주자. 즉, 임의의 숫자 배열이 있다고 하면 적당히 10의 거듭제곱을 곱하거나 나누어서 1과 10 이내에 오도록 조절하자.

$$12345 \rightarrow 1.2345 \quad 987.65 \rightarrow 9.8765$$

이때 소수점은 아직 상용로그를 취하기 전에 등장한 것으로서 기존 숫자 배열과 관련된 것임에 주의하자.

이제 $\log 3^{30} - [\log 3^{30}] = 0.313$ 을 분석해보자.



□ = 3^{30} 라는 의미가 아니라, 3^{30} 이 15자리 자연수로서 L_{15} 상에 존재하는 값이나 $\log \frac{3^{30}}{10^{14}} = \log \square$ 인 1과 10사이 값인 □로서 대신 생각하자.

어차피 □와 3^{30} 은 숫자 배열이 같기 때문이다. 그러면 위 그래프에서처럼 상용로그의 가수가 $0.3010 < 0.313 < 0.4771$ 이므로 상용로그를 취하기 전에는 $2 < \square < 3$ 이 된다. ($\because L_1$ 부분은 증가함수)

따라서 □ = 2... 이다. 그러므로 이와 동일한 숫자 배열을 갖는 3^{30} 역시 2... 와 같은 형태이며, $a = 2$ 가 된다. 실제로 계산기를 돌려봐도

$3^{30} = 205,891,132,094,649$ 로서 15자리 자연수로 최고자리 수는 2이다.

그래서 최종 답은 $n + a = 15 + 2 = 17$ 이다.

※ 이러한 원리를 확실히 알고 있다는 전제 하에,

$\log 3^{30} = 14.313 \rightarrow n + a = 15 + 2 = 17$ 이라고 한 줄 만에도 풀 수 있는 문제였으나, 나중에 등장할 어려운 문제에서도 지금과 다르지 않는 논리로 접근했음을 보이기 위해 일부러 자세하게 살펴보았다. 만약 3^{30} 의 최고자리 그 다음 수를 추정한다면 상당히 까다로운 문제가 될 것이다.

2004년 04월 교육청 수리(가형) 23번

sol)

Ⅲ. 조건에서 $x, \frac{1}{y}$ 의 상용로그의 가수가 같으므로 서로 빼면 가수가 0이

됨을 이용하자. 즉, $\log x - \log \frac{1}{y} = \log xy = (\text{정수})$ 이다.

그리고 Ⅱ. 조건을 덧붙이면 $\log xy = n + n = 2n$ 꼴이라 둘 수 있고, (단, n 은 정수) 다시 Ⅰ. 조건에 적용하면

$2(\log xy) + \log y = 4n + \log y = 5n + (\log y - n) = 12.5$ 가 되므로 유의미한 n 값은 2가 된다.

그러면 $\log y = 2.5$ 이고 $\log x = 2.5$ 가 되어 $\frac{x}{y} = 1$ 이 답이 된다.

2004년 05월 교육청 수리(가형) 11번

sol)

세 자리의 자연수 N 에 대하여 $[\log 2N] = [\log N] + 1$ 이 성립함은 두 배 해서 자릿수가 하나 늘어나는 세 자리 자연수 N 을 의미한다!

즉, $500 \leq N \leq 999$ 가 되는데, 계산의 편의상 $500 \leq N < 1000$ 이라 하자.

ㄱ. $2.5 \times 10^5 \leq N^2 < 10^6$ 이므로 N^2 은 항상 6자리 수.

ㄴ. $1.25 \times 10^8 \leq N^3 < 10^9$ 이므로 N^3 은 항상 9자리 수.

ㄷ. $6.25 \times 10^{10} \leq N^4 < 10^{12}$ 이므로 N^4 은 11 또는 12자리 수.

따라서 ㉓ ㄱ, ㄴ이 답이다.

2005년 03월 교육청 수리(가형) 27번

sol)

변수들이 많이 등장하는데 변화하는 양만 계산해내면 된다. 철수의 표면적을

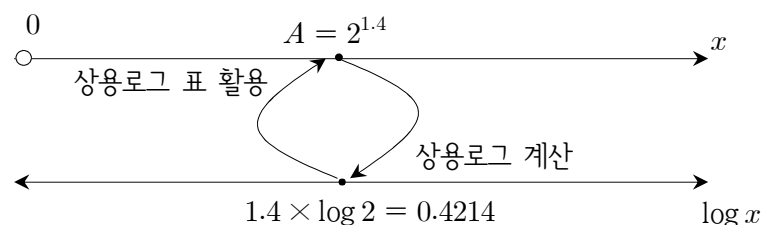
S_1 이라 하고, 철수 아빠의 표면적을 S_2 라 했을 때, $\frac{S_2}{S_1}$ 의 값을 구하면 된다.

그런데 a, b, c 는 정해진 상수이고, 철수의 키에 비해 아빠의 키가 두 배이고, 몸무게는 철수에 비해 아빠가 네 배임을 적당히 이용하자. 만약 철수의 키를 H 라 하고 몸무게를 W 라 한다면

$$\begin{cases} S_1 = aH^b W^c \\ S_2 = a(2H)^b (4W)^c = S_1 \times (2^b \cdot 4^c) \end{cases}$$

가 되어 답은 2^{b+2c} 가 된다. 그리고 $b = 0.4, c = 0.5$ 가 되어

$2^{b+2c} = 2^{1.4}$ 를 주어진 상용로그표를 보고 구해야 한다. $2^{1.4} = A$ 라 하자.



그러면 A 의 상용로그 값은 0.4214가 되고 상용로그표를 보면 2.64에 대한 상용로그 값이 0.4216으로 가장 가까운 값을 알 수 있다.

2005년 04월 교육청 수리(가형) 24번

sol)

약간 상식을 벗어난 문제이기도 한데, 이 문제에서는 “거리”와 “위치의 차이”를 구분하는 것이 관건이다. 여기서 정의되는 거리는 로그적으로 생각해야 하고, 로그자 위에 적혀진 수치들은 실제 거리를 의미하는 위치가 아닌 로그적 거리이다. 따라서 $x - 3 = 20 - y$ 와 같이 식을 세울 수가 없고,

$\log x - \log 3 = \log 20 - \log y$ 라 해야 의미가 있다. 그러면

$$\begin{cases} \log 18 - \log 3 = \log 12 - \log y \rightarrow \frac{18}{3} = \frac{12}{y} \\ \log x - \log 18 = \log 20 - \log 12 \rightarrow \frac{x}{18} = \frac{20}{12} \end{cases}$$

에서 $x - y = 30 - 2 = 28$ 이 답이 된다.

2005년 07월 교육청 수리(가형) 09번

sol)

$\log_a b = n + \alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$)로부터 n, α 를 각각 $\log_a b$ 의 지표와

가수라고 하고 싶지만, 엄밀하게 말하자면 a 가 10이라는 보장이 없으므로

“정수 부분과 소수 부분”쯤으로 말하는 것이 옳다. 다소 복잡한 문자 관계부터 먼저 익히고 보기를 살펴보자.

$$\begin{aligned} f(a, b) \\ \parallel \\ \textcircled{n} \leq \log_a b < n + 1 \end{aligned}$$

X 를 1이 아닌 양의 실수라 할 때, $f: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 에서 $f(a, b) = n$ 이라 둔 것이다. 엄밀히 말하자면 다변수 함수 관계이므로 고교 수준을 벗어나지만 그래도 직관적으로 그려져서 풀어낼 수는 있다.

ㄱ. $\log_2 9 > \log_2 8 = 3$ 에서 $f(2, 9) = 3$.

ㄴ. $2 \leq \log_a b < 3$ 에서 $\frac{1}{3} < \log_b a \leq \frac{1}{2}$ 이므로 $f(b, a) = 0$.

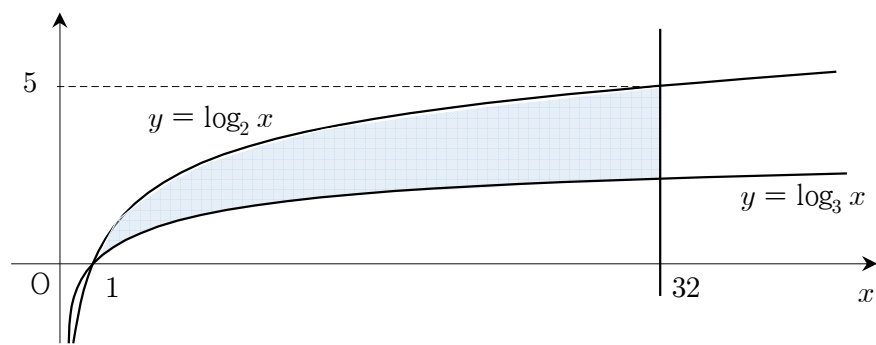
ㄷ. $-2 \leq \log_a b < -3$ 에서 $-\frac{1}{3} < \log_b a \leq -\frac{1}{2}$ 이므로

$$f(b, a) = -1.$$

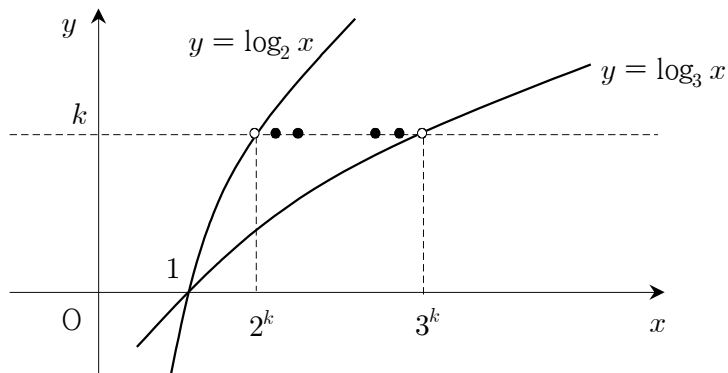
따라서 ④ ㄴ, ㄷ이 답이다.

2005년 08월 경찰대 수리 18번

sol)



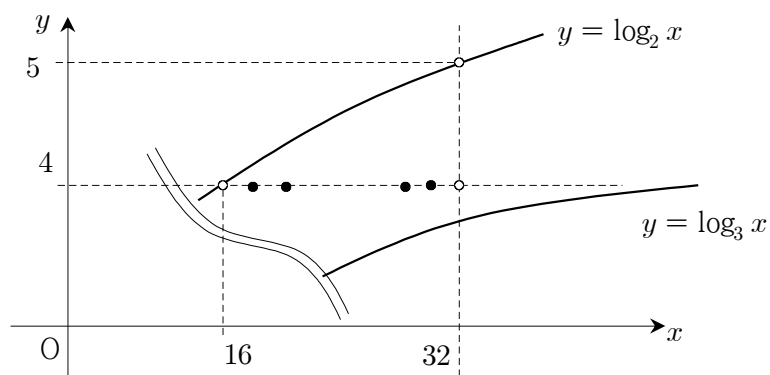
위와 같은 영역 내부의 격자점을 헤아리는 문제이다. 이때는 x 값이 1, 2, 3, ..., 31, 32가 후보로 될 수 있는 반면에, y 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5가 후보로 될 수 있으므로 $y = k$ 에서 k 를 변화시켜가며 구하는 것이 효율적이다. 경계 위의 점은 모두 제외한다는 점에 착안해서 $k = 1, 2, 3, 4$ 의 값만 유효하며, 아래 그림에서와 같이



에서 $y = k$ 일 때 유효한 정수 x 값은 $2^k < x < 3^k$ 로서 총 $3^k - 2^k - 1$ 개라 하여 구하고 싶지만 $x = 32$ 도 엄연한 경계이므로

$\sum_{k=1}^4 (3^k - 2^k - 1)$ 를 곧바로 계산 해버리는 것은 2% 부족하다.

대신에, $3^3 < 32 < 3^4$ 임을 이용해서 $k = 4$ 일 때만 경계가 바뀔에 주의하여



$\sum_{k=1}^3 (3^k - 2^k - 1) + (32 - 2^4 - 1) = 39 - 14 - 3 + 15 = 37$ 을 얻을 수 있다.

※ 이렇게 사고를 칼같이 하는 연습을 하기 위해서 이런 문제를 푸는 것이라 하여도 과언이 아니다. 후에 이보다 훨씬 어려운 수능 킬러 문제가 등장할 것이다.

2005년 08월 사관학교 수리(나형) 27번

sol)

$\frac{10^{68}}{10^7 + 10^4} = \alpha \times 10^n$ 에서 α 는 1 이상이고 10 미만인 수로서 좌변의

숫자 배열을 의미하며, n 은 좌변의 상용로그의 지표를 의미한다.

$\frac{10^{68}}{10^7 + 10^4} = \frac{10^{64}}{10^3 + 1}$ 에서 분모의 +1이 거슬리는데, 딱히 주어진

상용로그 값도 없고, $10^3 + 1 = (10 + 1)(10^2 - 10 + 1)$ 로 인수분해 한다 한들 그다지 유용하지 않아 보인다. 대신에, 분모의 아슬아슬한 +1을 부등식으로서 해결할 수 있다. 즉,

$$10^{60} = \frac{10^{64}}{10^3 + (10^4 - 10^3)} < \frac{10^{64}}{10^3 + 1} < \frac{10^{64}}{10^3} = 10^{61}$$

로부터 $n = 60$ 이 답이다.

나아가 $\frac{10^{64}}{10^3 + 1}$ 는 10^{61} 보다 조금 작은 수로서 9... 꼴의 숫자 배열을 가질

것이라는 것도 알 수 있다.

비슷한 예로, $\frac{10^2}{10 + 1}$ 꼴의 수는 $\frac{10^2}{10 + 1} < \frac{10^2}{10} = 10$ 에서 10보다 약간

작은 수로 $\frac{100}{11} = 9.9...$ 가 되고,

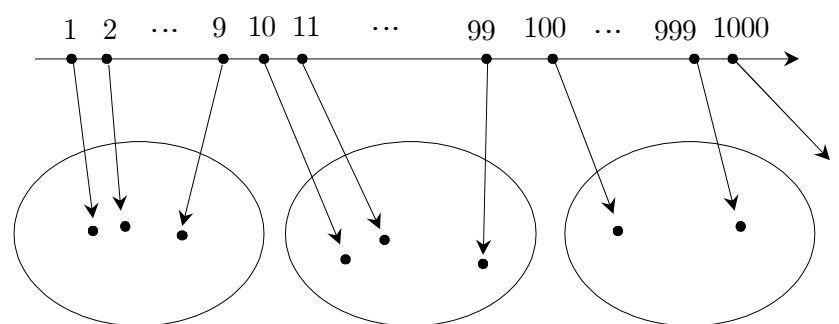
$\frac{10^3}{10^2 - 1}$ 꼴의 수는 $\frac{10^3}{10^2 - 1} > \frac{10^3}{10^2} = 10$ 에서 10보다 약간 큰 수로

$\frac{1000}{99} = 10....$ 이 되는 것도 생각할 수 있다.

2006년 06월 평가원 수리(가형) 13번

sol)

A_k 를 좀 더 와 닿는 말로 표현하자면 “상용로그 취했을 때 지표가 같은 자연수들의 모임”이므로 결국 “자릿수가 같은 자연수들의 모임”이 된다. 이때 A_k 에서의 k 는 집합을 대표하는 것 중의 하나로 마치 대유법처럼 해당 집합에 속하는 원소 중에서 아무거나 취해도 상관없다.



이렇듯 잘 존재하고 있는 자연수 집합에 “자릿수가 같은 것들의 모임”이라는 관계를 제시함으로써 집합을 재구성하는 것이다. 이 과정에서 각 원소들은

$$\begin{cases} A_1 = A_2 = \dots = A_9 \\ A_{10} = A_{11} = \dots = A_{99} \\ A_{100} = A_{101} = \dots = A_{999} \end{cases}$$

등과 같이 분할된다. 따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이 되어 ⑤가 답이다.

※사실은 동치관계(equivalence relation)와 분할(partition)이 서로를

유도한다는 것으로서 Set Theory의 중요한 내용인데, 출제자가 슬그머니 대학 개념을 집어 넣은 것이라 처음엔 이해하기에 어려울 수도 있다.

2006년 06월 평가원 수리(나형) 23번

sol)

상용로그의 가수가 0이라 함은 정수로 나타낼 수 있다는 것이다.

$1 < a < 10$ 에서 $0 < \log a < 1$ 이므로 $0 < \log a^3 < 3$ 범위 내에 가장 큰 정수는 2이므로 $\log a^3 = 2 \rightarrow \log a = \frac{2}{3}$ 이고, 마찬가지로

$1 < b < 10$ 에서 $0 < \log b < 1$ 이므로 $0 < \log b^5 < 5$ 범위 내에 가장 큰 정수는 4이므로 $\log b^5 = 4 \rightarrow \log b = \frac{4}{5}$ 가 된다. 따라서 $\log ab$ 의

최대값은 $\log ab \leq \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{22}{15}$ 가 되고 $\frac{q}{p} = \frac{22}{15} \rightarrow p + q = 37$ 이

답이 된다.

※ $\log a$ 가 취할 수 있는 값은 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ 이고, $\log b$ 가 취할 수 있는 값은

$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ 로서 $\log ab$ 가 취할 수 있는 값은 총 8가지가 가능하다.

2006년 11월 대수능 수리(나형) 13번

sol)

 $A(n), B(n)$ 을 조금 더 알아보기 쉬운 꼴로 바꿔보자. 그러면

$$\begin{cases} A(n) = \{x \mid 0 < x \leq 2^n\} \\ B(n) = \{x \mid 0 < x \leq 4^n\} \end{cases}$$

에서 $\supset$ 은 거짓, $\subset$ 은 참임을 쉽게 알 수 있다. 한편 $\subset$ 은 $A(n) \subset B(n)$ 이 곧 $2^n \leq 4^n$ 임을 뜻하므로 $n \geq 0$ 이고, 이때 $B(-n) \subset A(-n)$ 은 $4^{-n} \leq 2^{-n}$ 을 의미하는데 이 역시 $2^n \leq 4^n$ 에 역수를 취해준 것으로서 참이다. 따라서 ⑤ $\subset, \supset$ 이 답이다.

2006년 11월 대수능 수리(나형) 27번

sol)

 $0 < a < 1$ 이므로 $1 < 10^a < 10$ 이 된다. 이때 3으로 나누어 몫이

정수이고 나머지가 2인 10^a 는 $10^a = 2, 5, 8$ 이 가능하고, 이에 대응하는 a 값들의 합은 $\log 2 + \log 5 + \log 8 = 1 + 3\log 2$ 이 된다. 따라서 ③번이 답이다.

2007년 03월 교육청 수리(가형) 11번

sol)

한 마디로 말해서 “ $\log 2^{200}$ 의 지표를 구하시오”라고 할 수 있으나, 숨겨진 수학적 의미에 초점을 맞추어 보자.

$\log 2^n$	a_n	b_n
$\log 2 = 0.3010$	0	0
$\log 2^2 = 0.6020$	0	0
$\log 2^3 = 0.9030$	0	1
$\log 2^4 = 1.2040$	1	0
$\log 2^5 = 1.5050$	1	0
$\log 2^6 = 1.8060$	1	1
$\log 2^7 = 2.1070$	2	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

즉, n 이 증가함에 따라 $\log 2^n$ 역시 차곡차곡 증가할 것이고 지표 a_n 이 a_{n+1} 로 값이 증가할 때마다 빠짐없이 b_n 도 1의 값을 갖게 된다. 이러한 과정은 $n = 200$ 까지 반복하게 되고, $\log 2^{200} = 60.2$ 가 되어 지표는 $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow 59 \rightarrow 60$

으로 총 60번 증가하게 된다. 따라서 $\sum_{n=1}^{200} b_n = 60$ 이 되어 ⑤가 정답이다.

2007년 03월 교육청 수리(가형) 20번

sol)

조건에 따라 n 에 숫자를 대입해보자.

$$\begin{cases} f_2(x) = f_1(x^2) + f_1(x) = \log_2 x^2 + \log_2 x = 3 \cdot \log_2 x \\ f_3(x) = f_2(x^2) + f_2(x) = 3\log_2 x^2 + 3\log_2 x = 3^2 \cdot \log_2 x \\ f_4(x) = f_3(x^2) + f_3(x) = 3^2\log_2 x^2 + 3^2\log_2 x = 3^3 \cdot \log_2 x \\ \vdots \\ f_n(x) = 3^{n-1} \cdot \log_2 x \end{cases}$$

에서 $f_{2007}(8) = a = 3^{2006} \cdot \log_2 8 = 3^{2007}$ 이다. 따라서

$$\log_{27} a = \log_{3^3} 3^{2007} = \frac{2007}{3} = 669 \text{가 답이다.}$$

2007년 04월 교육청 수리(가형) 23번

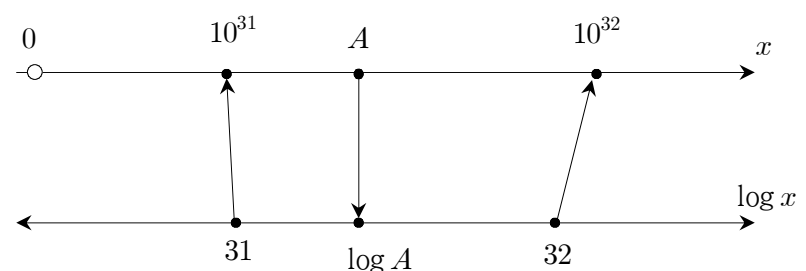
sol)

$$\begin{cases} \log_{10} 243 = 2.3856 \rightarrow \log_{10} 2.43 = 0.3856 \\ \log_{10} 0.0541 = -1.2668 \rightarrow \log_{10} 0.0541 = -1.2668 + 2 = 0.7332 \end{cases}$$

라고 고치고 시작하자. 가수는 어디까지나 0 이상이고, 1 미만의 값을 취하므로 $\log_{10} 0.0541 = -1.2668$ 의 가수가 0.2668이라 착각하면 안 된다.

가수를 해당 범위 내로 만들어주기 위하여

$$\log_{10} 0.0541 = -1 - 0.2668 = -2 + (1 - 0.2668) = \bar{2}.7332 \text{ 라고 하여야 한다.}$$

그리고 $2430^{10} \div 541 = A$ 라 하고 상용로그를 이용하여 다시 연산해보면

$$\begin{aligned} \log A &= 10(\log 2.43 + 3) - (\log 5.41 + 2) \\ &= 28 + 10\log 2.43 - \log 5.41 = 31.1228 \end{aligned}$$

가 되어 $10^{31} < A < 10^{32}$ 임을 알 수 있다.

따라서 A 의 정수 부분이 32자리가 된다. 즉, $n = 32$ 이다.

2007년 08월 사관학교 수리(나형) 04번

sol)

$\log x = n + \alpha$ ($0 < \alpha < 1$)이라 하자. 그러면 x 가 1보다 크기 때문에 지표는 $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ 가 된다. 한편, $(n + \alpha)^2 + \alpha^2 = 8$ 을 정리해보면 $\log x = n + \alpha$ 가 이미 실근임을 의미하기에 n 혹은 α 에 대한 이차방정식인

$$n^2 + 2n\alpha + 2\alpha^2 - 8 = 0$$

또한 실근을 가져야 한다. α 의 관점에서

$$2\alpha^2 - 2n\alpha + n^2 - 8 = 0$$

이 실근을 갖기 위해서 판별식 $D/4 = n^2 - 2n^2 + 16 \geq 0$ 로부터 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ 가 가능하고, $n = 0, 1, 2, 3, 4$ 일 때를 아래와 같이 표를 통해 하나씩 확인 해보면(문제가 잘못되지 않은 이상 답은 유일하기에 나오면 바로 스톱하면 된다.)

n	$n^2 + 2n\alpha + 2\alpha^2 - 8 = 0$	α
0	$\alpha^2 - 4 = 0$	± 2
1	$2\alpha^2 + 2\alpha - 7 = 0$	$\frac{-1 \pm \sqrt{15}}{2}$
2	$\alpha^2 + 2\alpha - 2 = 0$	$-1 \pm \sqrt{3}$
3		

이 중에서 가수 α 역시 유의미한 값은 $n = 2, \alpha = -1 + \sqrt{3}$ 이 유일하며, 따라서 $\log x = n + \alpha = 1 + \sqrt{3}$ 으로 ③번이 답이다.

2007년 08월 사관학교 수리(나형) 30번

sol)

문제 도중에 '예를 들어'라는 말이 나오면 출제자의 배려를 인식해야 할 필요가 있다. 2.52^{10n} 과 a_n 을 잇는 한 번에 이어주는 함수식을 생각하기가 상당히 까다롭고, 그래서 부분적으로 구해야 한다.

우선 $\log 2.52^{10n} = 10n \times \log 2.52 = (4.014)n$ 이고, 최고자리 숫자는 상용로그의 지표가 아닌 가수와 연관된 것이므로($\therefore$ 상용로그의 가수에 대응하는 숫자 배열이 유일하게 존재) 지표는 무시한 채 $(0.014)n$ 위주로 관찰해도 충분하다.

n	$(0.014)n$	a_n
1	0.014	1
2	0.028	1
3	0.042	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
21	0.294	1
	0.3010	
22	0.308	2

따라서 숫자 배열의 맨 첫 자리가 2인, 즉 최고자리 수가 2가 되는 수의 상용로그 가수는 0.3010보다 커야하므로 $n = 22$ 가 최소의 값이다.

2007년 10월 교육청 수리(가형) 12번

sol)

특히 ㄷ 보기가 인상적인 낯시 문항이다. ㄱ, ㄴ에 정신 팔려서 ㄷ에서 실수하기 쉽다.

ㄱ. (반례) $\log a = \frac{2}{3}$ 라 하면 $f(a^2) = 1$ 이지만 $2f(a) = 0$ 이다.

ㄴ. $\log a^2 = f(a^2) + g(a^2)$ 이고 $2\log a = 2f(a) + 2g(a)$ 에서 $\log a^2 = 2\log a$ 이므로 참이다.

ㄷ. 가수의 합이 1이더라도 지표가 음의 정수이면 반례가 된다.

(반례) $\log a = \log b = -1 + \frac{1}{2}$ 라 하면 $\log ab = -1$ 이다.

따라서 답은 ① ㄴ이다.

2008년 03월 교육청 수리(가형) 12번

sol)

상용로그 $\log N_n$ 에서 지표 $p(n)$ 는 N_n 의 소수점 위치를, 가수 $q(n)$ 은 N_n 의 숫자 배열을 의미한다는 것을 이용하자.

ㄱ. $N_{15} = 1515 \dots 15$ 는 30자리의 자연수이므로 $p(15) = 29$ 가 되어 거짓.

ㄴ. 가수 0에 해당하는 숫자 배열은 10의 정수 거듭제곱꼴 뿐이고,

$N_{10} = 1010 \dots 10, N_{10^2} = 100100 \dots 100$ 에서처럼 N_{10^k} 에서 k 가

자연수이면 상용로그 취했을 때 가수 부분이 0이 될 수 없다.

이를 만족하는 수는 $10^0 = 1$ 로서 $N_1 = 1$ 이고 이에 해당하는 상용로그의 가수는 $q(1) = 0$ 이다. 따라서 참.

ㄷ. $n = 10^k$ 일 때 $p(n)$ 은 $\boxed{10 \dots 0} \boxed{10 \dots 0} \dots \boxed{10 \dots 0}$ 의 지표로서 $(k+1)n - 1$ 이다.

그리고 $p(n-1)$ 은 $\boxed{9 \dots 9} \boxed{9 \dots 9} \dots \boxed{9 \dots 9}$ 의 지표로서 $k(n-1) - 1$ 이다.

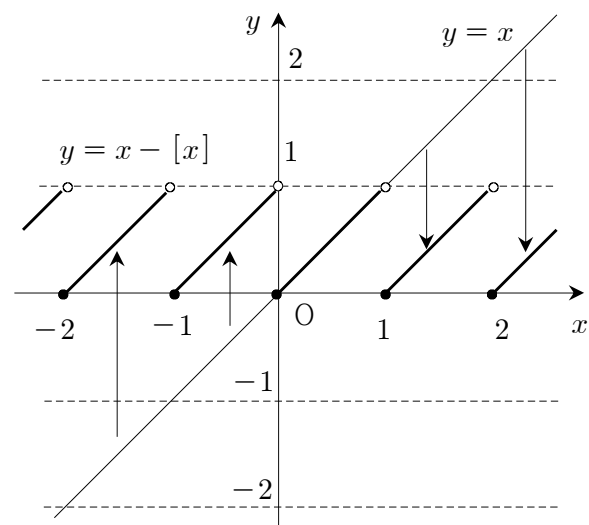
따라서 $p(n) - p(n-1) = kn + n - kn + k = n + k$ 가 되어 참.

고로, 답은 ⑤ ㄴ, ㄷ이다.

2008년 06월 평가원 수리(가형) 22번

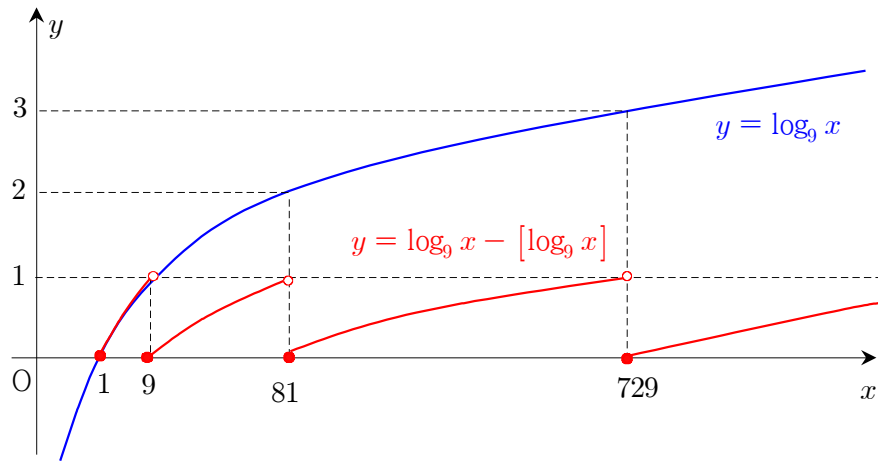
sol)

우선 $y = x - [x]$ 그래프의 효과를 살펴보자.

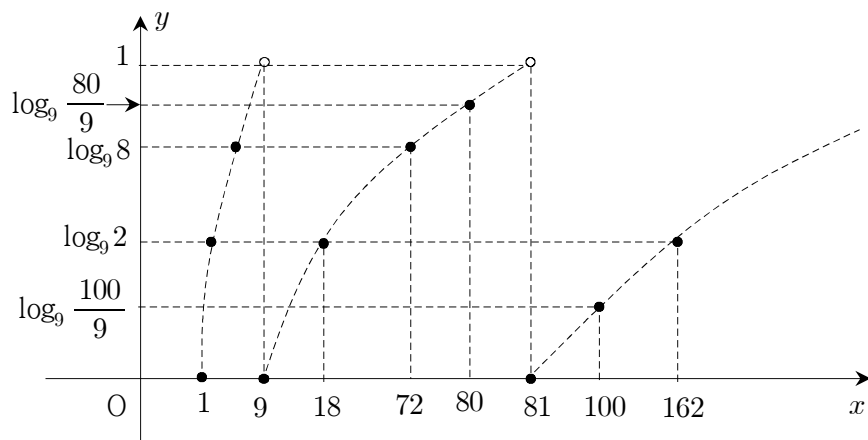


$y = x$ 라는 그래프를 $y = n$ 이라는 칼들로 잘라내어서 $0 \leq y < 1$ 인 구간으로 수직 평행이동시킨 것이다. 따라서 $y = \log_9 x - [\log_9 x]$ 의 그래프를 기하학적으로 살펴보자면, $y = \log_9 x$ 라는 다소 평범한 로그함수를, $y = n$ 이라는 칼들로 잘라내어서 $0 \leq y < 1$ 인 구간으로 수직 평행이동시킨

것으로 볼 수 있다. $0 < x < 1$ 인 구간은 지금 무시해도 된다.



이때 다시 $\log_9 n - [\log_9 n]$ 은 $y = \log_9 x - [\log_9 x]$ 에 두 자리 자연수 n 을 대입한 값들로 함수 $y = \log_9 x - [\log_9 x]$ 위의 점들로 나타난다. 그리고 그 의미는 $\log_9 n$ 의 소수부분이 된다.



따라서 주어진 값이 최대가 되는 n 값은 80이 된다.

※ 정말로 정확하게 비율을 유지해서 그리자면 가로 길이 100이라 하였을 때 세로 길이 1만큼의 모습으로 될 것이지만 사실상 그렇게 그려낼 수 없기에 위치를 왜곡을 피할 수가 없다. 하지만 상상력으로 메워서 이 문제를 제대로 이해하였다면, $\log_9 n - [\log_9 n]$ 의 값이 증가하도록 $n = 10, 11, 12, \dots, 98, 99$ 의 값을 순서대로 재배열할 수 있을 것이다!

2008년 06월 평가원 수리(나형) 24번

sol)

$\left(\log \frac{x}{y}\right) \left(\log \frac{y}{x}\right) = -(\log x - \log y)^2$ 로 정리할 수 있고, $4 \leq \log x < 5$ 와 $1 \leq \log y < 2 \rightarrow -2 < -\log y \leq -1$ 에서 $2 < \log x - \log y < 4$ 가 되어 $-16 < -(\log x - \log y)^2 < -4$ 가 된다.

따라서 $\left(\log \frac{x}{y}\right) \left(\log \frac{y}{x}\right) = -(\log x - \log y)^2$ 가 취할 수 있는 정수의 개수는 $-4 - (-16) - 1 = 11$ 이 된다.

※ $a \leq b$ 이고 a, b 가 모두 정수일 때 다음을 만족하는 자연수 x 의 개수는

$$a \leq x \leq b ; b - a + 1$$

$$a \leq x < b ; b - a$$

$$a < x \leq b ; b - a$$

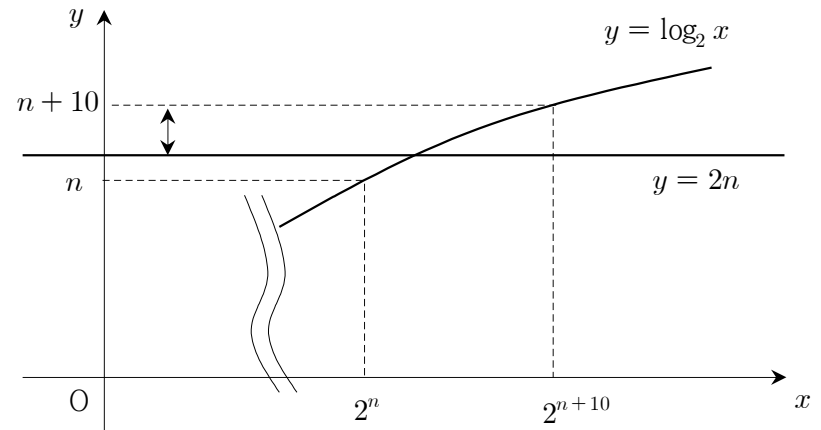
$$a < x < b ; b - a - 1$$

이다. 자주 나오니 익혀두자.

2008년 08월 사관학교 수리(나형) 30번

sol)

$n \leq \log_2 x \leq n + 10$ 에서 $\log_2 x$ 와 $2n$ 의 차의 최댓값을 구하기 위해 있는 그대로 기하학적 해석을 해보자.



그러면 a_n 에서 어차피 $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ 의 값만 취하기 때문에

$n < 2n \leq n + 10$ 가 되고, n 이 변함에 따라 $2n$ 에서 n 혹은 $n + 10$ 까지의 최대 거리는

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ 일 때 $a_n = 10 - n$ 이고,

$n = 6, 7, 8, 9, 10$ 일 때 $a_n = n$ 이 된다.

$n + 10$	11	12	13	14	15
$2n$	2	4	6	8	10
n	1	2	3	4	5
a_n	9	8	7	6	5

$n + 10$	16	17	18	19	20
$2n$	12	14	16	18	20
n	6	7	8	9	10
a_n	6	7	8	9	10

따라서 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 75$ 가

답이다.

2008년 11월 대수능 수리(나형) 21번

sol)

가비의 리를 이용하면

$$\frac{3a}{\log_a b} = \frac{b}{2\log_b a} = \frac{3a + b}{\log_a b + 2\log_b a} = \frac{3a + b}{3}$$

이고, $0 < 1 < a < b$ 이므로 $3a + b \neq 0$ 이기에 $\log_a b + 2\log_b a = 3$ 이

성립한다. 이때 $\log_a b = t$ 라 두면 $t + \frac{2}{t} = 3$, 즉 $t^2 - 3t + 2 = 0$ 에서

$t = 1$ 또는 $t = 2$ 인데, $a \neq b$ 이므로 유의미한 t 값은 2이다. 따라서

$10\log_a b = 10t = 20$ 이 답이다.

2009년 03월 교육청 수리(나형) 23번

sol)

3의 거듭제곱들은 3, 9, 27, 81, 243, ... 이고,

4의 거듭제곱들은 4, 16, 64, 256, ... 들이므로

각각 로그 상태에서 지표가 같은 가장 큰 두 자리 자연수는 80이다. 표를 통해 살펴보면 다음과 같다.

n	...			...	80	81	...
$\lceil \log_3 n \rceil$	...	3	3	3	3	4	4
$\lceil \log_4 n \rceil$	...	2	3	3	3	3	3
n	...	63	64	...			...

2009년 04월 교육청 수리(가형) 08번

sol)

상용로그 값을 외우고 있으면 쉬운 문제이다.

$$A = \log_2 3 = \frac{0.4771}{0.3010} = 1.5 \dots$$

$$B = \log_3 5 = \frac{0.6990}{0.4771} = 1.4 \dots$$

$$C = \log_7 27 = \frac{3 \times 0.4771}{0.8452} = 1.6 \dots$$

비순환 무한소수를 끝까지 구할 필요는 없고 적당한 선에서 소수점 아래 첫째 자리까지 비교해보고 그래도 답이 안 나오면 둘째 자리까지 비교해보고, 이런 식으로 하면 효율적으로 구할 수 있다. 따라서 ③ $B < A < C$ 가 최종 답이다.

※ 출제 의도대로 풀어보자.

 $8^A = 27 = 7^C$ 에서 $A < C$ 를 확인할 수 있고,

 $9^B = 25 < 7^C = 27$ 에서 설령 $9^B = 25 = 7^{C'}$ 이어도 $B < C' < C$ 가 되므로 $A, B < C$ 임을 알 수 있다.
그리고 $8^A = 27 > 9^B = 25$ 에서 설령 $8^{A'} = 25 = 9^B$ 라 하여도 $A > A' > B$ 가 성립하므로 $B < A < C$ 가 성립한다.

2009년 06월 평가원 수리(나형) 10번

sol)

 $\log a, \log b$ 의 가수의 합이 1이므로 $\log a, \log b$ 의 합은 정수가 된다. $1 < a < b < 100$ 에서 $0 < \log a < \log b < 2$ 이므로 $0 < \log a + \log b < 4$ 이고, 이를 만족하는 가능한 정수는 $\log a + \log b = 1, 2, 3$ 뿐이다.(i) $\log a + \log b = 1 \Leftrightarrow ab = 10$ 인 경우 $a = 2$ 의 값만 취할 수 있다. 이때 b 는 a 에 의해 자동으로 결정된다.(ii) $\log a + \log b = 2 \Leftrightarrow ab = 100$ 인 경우 $a = 10 = b$ 이면 조건에 위배되므로 $a = 2, 4, 5$ 의 값만 취할 수 있다.(iii) $\log a + \log b = 3 \Leftrightarrow ab = 1000$ 인 경우 $a, b < 100$ 이므로 $a = 20, 25$ 의 값만 취할 수 있다.따라서, (i), (ii), (iii)을 종합하면 가능한 순서쌍 (a, b) 는 총 $1 + 3 + 2 = 6$ 개이고, 답은 ③번이다.

※ 풀이의 곳곳에 생략된 부분이 제법 존재한다.

a	1	2	5	10
b	10	5	2	1

a	1	2	4	5	10	20	25	50	100
b	100	50	25	20	10	5	4	2	1

a	...	10	20	25	40	50	100	...
b	...	100	50	40	25	20	10	...

 $1 < a < b < 100$ 임을 이용하면 10, 100, 1000의 몇몇 인수들만 고려하면 된다.

2009년 06월 평가원 수리(나형) 24번

sol)

$\log n$ 의 지표와 가수 $f(n), g(n)$ 에 대하여 $f(n) - g(n)$ 의 값이 최소가 되려면 $f(n)$ 은 작을수록 좋고, $g(n)$ 은 클수록 좋다. 그런데 $f(n)$ 은 정수 단위로 변화는 반면에 $g(n)$ 은 고작 1 이내에서의 변화만 있으므로 $f(n)$ 이 최소가 되도록, 즉 $f(n) = 0$ 으로서 최소가 되게 해 줄 필요가 있다. 그러면 $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 이고 $g(n)$ 이 최대가 되려면 $n = 9$ 를 택하면 된다.

따라서 $f(n) - g(n) \geq 0 - \log 9 = \log \frac{1}{9}$ 가 되고 $a + b = 9 + 1 = 10$ 이 답이 된다.

※ $f(n) = \lceil \log n \rceil$ 이고 $g(n) = \log n - \lceil \log n \rceil$ 이므로 한 번에 함수식을 잡으면 $f(n) - g(n) = 2\lceil \log n \rceil - \log n$ 이 된다.

 $1 \leq n < 10$ 일 때 $f(n) - g(n) = -\log n$ $10 \leq n < 100$ 일 때 $f(n) - g(n) = 2 - \log n$ $100 \leq n < 1000$ 일 때 $f(n) - g(n) = 4 - \log n$ $\vdots$ 이므로 $f(n) - g(n)$ 의 최솟값은 $1 \leq n < 10$ 일 때 존재하며 $-\log n$ 이감소하므로 $n = 9$ 일 때 최솟값 $\log \frac{1}{9}$ 을 갖는다는 것을 알 수 있다.

2009년 07월 교육청 수리(나형) 08번

sol)

$\log x$ 의 지표와 가수로서 각각 $f(x), g(x)$ 라 하고 $\log x = f(x) + g(x)$ 가 된다고 하자. $f(x^m)$ 이 등장하도록 $\log x^m = f(x^m) + g(x^m)$ 을 생각해줄 수 있고, $\log x^m = m \log x = m\{f(x) + g(x)\}$ 는 자명하나

$$f(x^m) + g(x^m) = m\{f(x) + g(x)\}$$

라 해서 선불리 $f(x^m) = mf(x), g(x^m) = mg(x)$ 라 할 수 없다. $g(x)$ 가
 $0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}, 1$ 중 어디에 있느냐에 따라 $mg(x)$ 의 정수 부분이
0을 넘어서게 되기도 하므로 온전히 $g(x^m)$ 이라 할 수 없다.

ㄱ. (반례) $\log x = \frac{1}{3}, m = n = 2$ 이라 하면 $\log x^{m+n} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$

에서 $f(x^{m+n}) = 1$ 이지만, $f(x^m) = f(x^n) = 0$ 이므로 거짓.

ㄴ. 상용로그의 가수가 0이 됨은 상용로그를 취하기 전에 10의 정수

거듭제곱꼴로 표현된다는 말이다. 따라서 $a = 6$ 이라 하면 $a \cdot 5^n$ 은 절대로 10의 정수 거듭제곱꼴로 나타낼 수 없으므로 거짓이다. 이를 참인 명제로 바꾸려면 a 가 임의의 짝수가 아니라 2의 거듭제곱이라고 하면 된다.

ㄷ. $g(x), g(x^2), \dots, g(x^n)$ 에서 만약 $g(x^k) < g(x^{k+1}) > g(x^{k+2})$ 인 k 가 존재한다고 하자. 그러면 $g(x^{k+1})$ 은 가수로서 1에 매우 근접한 값이 되어 $g(x) + g(x^2) + \dots + g(x^n) > 1$ 이 되어버리므로 모순이다. 따라서 $g(x) < g(x^2) < \dots < g(x^n) < 1$ 이 되고 $g(x) = \alpha$ 라 두면

$$\alpha + 2\alpha + \dots + n\alpha = \frac{n(n+1)}{2}\alpha = 1 \text{에서 } \alpha = \frac{2}{n(n+1)} \text{이므로}$$

$$f(x) + f(x^2) + \dots + f(x^n) + 1$$

$$= \{f(x) + f(x^2) + \dots + f(x^n)\} + \{g(x) + g(x^2) + \dots + g(x^n)\}$$

$$= \{f(x) + g(x)\} + \{f(x^2) + g(x^2)\} + \dots + \{f(x^n) + g(x^n)\}$$

$$= \log x + \log x^2 + \dots + \log x^n$$

이 되어 참이다.

따라서 답은 ㉡이다.

2009년 08월 사관학교 수리(가형) 11번
sol)

$\log_2 b - \log_2 a$ 가 정수가 됨을 이용하자.

$$\log_2 10 < \log_2 b < \log_2 50 \\ -\log_2 50 < -\log_2 a < -\log_2 10$$

에서 $-\log_2 5 < \log_2 \frac{b}{a} < \log_2 5$ 이고 $\log_2 5 = 2. \dots$ 이므로

$\log_2 \frac{b}{a} = -2, -1, 0, 1, 2$ 가 가능하다.

여기서 다시 $a < b$ 라 하였으므로 $\frac{b}{a} = 2, 4$ 라 할 수 있다. 상용로그의

가수가 같으면 소수점 위치만 차이 났었는데, 이는 10의 거듭제곱만큼 곱한 차이가 나는 두 수는 가수가 같다는 것을 의미하였다. 마찬가지로 이 문제에서는 로그의 진수가 2이므로 2의 거듭제곱만큼 곱한 차이가 나는 두 수는 로그의 소수가 같다는 것을 의미한다.

$(a, b) = (a, 2a)$ 로 가능한 a 값은 $a = 11, 12, \dots, 24$ 의 14개이고,

$(a, b) = (a, 4a)$ 로 가능한 a 값은 $a = 11, 12$ 로 2개 뿐이다. 따라서 만족하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $14 + 2 = 16$ 이 되어 답은 ㉔번이다.

2009년 08월 사관학교 수리(나형) 30번
sol)

$x = n + \alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$)에서 $n = 1, 2, 3, \dots, 9$ 라 하자. 그러면

$$\frac{x^3}{[x]} = \frac{(n + \alpha)^3}{n} = \frac{x^3}{n}$$

이라 둘 수 있다. 여기서 분자인 x^3 은 1 이상이고 1000 미만인 실수인

반면에, 분모인 $[x]$ 는 1부터 9 사이의 자연수이고, $\frac{x^3}{[x]}$ 가 자연수가

되려면 x^3 역시 자연수가 되어야 한다. 이에 착안하여 $[x]$ 값에 따라 경우를 나누어 생각하면 다음과 같다.

$[x] = 1$ 이면 $1 \leq x < 2$ 이고, $\frac{1}{1} \leq \frac{x^3}{[x]} < \frac{2^3}{1}$ 에서 $\frac{x^3}{[x]}$ 가 취할 수 있는 자연수는 1, 2, 3, $\dots$, 7의 7개.

$[x] = 2$ 이면 $2 \leq x < 3$ 이고, $\frac{2^3}{2} \leq \frac{x^3}{[x]} < \frac{3^3}{2}$ 에서 $\frac{x^3}{[x]}$ 가 취할 수 있는 자연수는 4, 5, 6, $\dots$, 13의 10개.

$[x] = 3$ 이면 $3 \leq x < 4$ 이고, $\frac{3^3}{3} \leq \frac{x^3}{[x]} < \frac{4^3}{3}$ 에서 $\frac{x^3}{[x]}$ 가 취할 수 있는 자연수는 9, 10, 11, $\dots$, 21의 13개.

그래서 $3n + 4$ 라는 규칙을 찾아내서 풀어도 답은 구할 수 있으나, 수학적으로 많이 부실한 풀이기에 조금 더 보충해보자.

이와 같이 하면 일반적인 경우에 대한 일반항을 찾을 수 있다. 즉,

$[x] = n$ 이면 $n \leq x < n + 1$ 이고, $\frac{n^3}{n} \leq \frac{x^3}{[x]} < \frac{(n + 1)^3}{n}$ 가 취할 수

있는 자연수는 $n^2, n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, \left[\frac{(n + 1)^3}{n} \right]$ 이 된다. 그런데

$\frac{(n + 1)^3}{n}$ 이 항상 자연수가 아닌 유리수 값을 취하기에 어떠한 자연수 N 에

대하여 $N < \frac{(n + 1)^3}{n} < N + 1$ 이 성립할테니 N 만 찾을 수 있다면

$[x] = n$ 일 때 $\frac{x^3}{[x]}$ 가 취할 수 있는 자연수의 개수가 $N - n^2 + 1$ 이라고

말할 수 있다. 그러니 $N < \frac{(n + 1)^3}{n} < N + 1$ 를 분석해보자.

$$\frac{(n + 1)^3}{n} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n} = n^2 + 3n + 3 + \frac{1}{n}$$

이고, 정수는 가우스 기호 안팎으로 자유롭게 더하거나 뺄 수 있으므로

$$\left[\frac{(n + 1)^3}{n} \right] = \left[n^2 + 3n + 3 + \frac{1}{n} \right] = n^2 + 3n + 3 + \left[\frac{1}{n} \right]$$

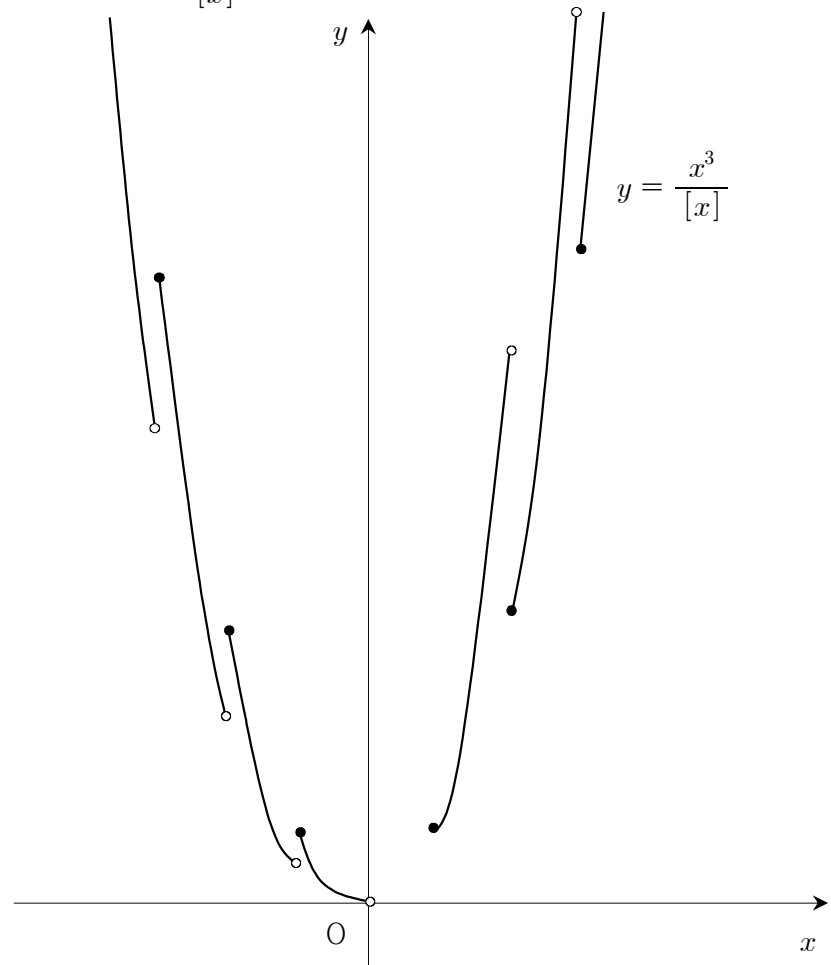
이 되어 $N = \left[\frac{(n + 1)^3}{n} \right] = n^2 + 3n + 3$ 이 된다.

고로 $[x] = n$ 일 때 $\frac{x^3}{[x]}$ 가 취할 수 있는 자연수의 개수는

$$N - n^2 + 1 = 3n + 4$$

가 되므로 $\sum_{n=1}^9 (3n + 4) = 3 \cdot 45 + 36 = 171$ 이 답이 된다.

※ 실제로 $y = \frac{x^3}{[x]}$ 의 그래프는 다음과 같다.



2010년 03월 교육청 수리(가형) 21번
sol)

(나) 조건이 여느 문제들과 달리 가수들 간에 등호 관계가 아니라 부등호 관계가 성립하므로 까다롭다. $1 < n < 10$ 에서 $0 < \log n < 1$ 이고,

$-1 < \log \frac{1}{n} < 0$ 에서 $\log \frac{1}{n} = -1 + \alpha$ ($0 < \alpha < 1$)

$0 < \log n^2 < 2$ 에서 $\log n^2 = \beta$ 혹은 $\log n^2 = 1 + \beta$ ($0 < \beta < 1$)이라 둘 수 있다. 이때 $\alpha > \beta$ 가 되는 것을 찾아야 하는데, 상용로그 $\log N$ 의 가수는 N 자체의 숫자 배열과 관련되어 있음을 이용해서 풀어보자. 우선 다음과 같이 표를 생각해보자.

n	$\frac{1}{n}$	숫자 배열	n^2
2	$\frac{1}{2} = 0.\overrightarrow{5}$	$>$	$\overrightarrow{4}$
3	$\frac{1}{3} = 0.3\overrightarrow{3}\cdots$	$<$	$\overrightarrow{9}$
4	$\frac{1}{4} = 0.2\overrightarrow{5}$	$>$	$\overrightarrow{16}$
5	$\frac{1}{5} = 0.2$	$<$	$\overrightarrow{25}$
6	$\frac{1}{6} = 0.1\overrightarrow{6}\cdots$	$<$	$\overrightarrow{36}$
7	$\frac{1}{7} = 0.1\overrightarrow{4}\cdots$	$<$	$\overrightarrow{49}$
8	$\frac{1}{8} = 0.1\overrightarrow{25}$	$<$	$\overrightarrow{64}$
9	$\frac{1}{9} = 0.1\overrightarrow{1}\cdots$	$<$	$\overrightarrow{81}$

따라서 만족하는 자연수는 2, 4 뿐이므로 $2 + 4 = 6$ 이 답이다. 여기서 $0.2\overrightarrow{5}$ 의 숫자 배열이 $\overrightarrow{16}$ 의 숫자 배열보다 크다는 건, 소수점의 위치를 무시한 채 $0.2\overrightarrow{5}$ 의 유효한 숫자 배열이 25라면 $\overrightarrow{16}$ 의 숫자 배열은 16이므로 처음에 쓰는 수를 사전식으로 접근하였을 때 25가 훨씬 더 크다는 것을 의미한다.

※ 혹은 외워두고 있던 상용로그를 이용해서 풀 수도 있다. 단, $\log \frac{1}{n}$ 은 지표가 음수이므로 가수가 양수가 되도록 보정해주는 작업을 수반한다.

n	$\log \frac{1}{n}$	가수 크기	$\log n^2$
2	$-0.3010 = \overline{1}.6990$	$>$	0.6020
3	$-0.4771 = \overline{1}.5229$	$<$	0.6990
4	$-0.6020 = \overline{1}.3980$	$>$	1.2040
5	$-0.6990 = \overline{1}.3010$	$<$	1.3980
6	$-0.7781 = \overline{1}.2219$	$<$	1.5562
7	$-0.8452 = \overline{1}.1548$	$<$	1.6904
8	$-0.9030 = \overline{1}.0970$	$<$	1.8060
9	$-0.9542 = \overline{1}.0458$	$<$	1.9084

타짜에게 야수성이 필요하듯 프로 수험생에게도 힘으로 밀어 붙이면 일단 답은 얻어낼 수 있게 하는 수학적 배경지식과 탄탄한 계산력이 필요하다!

2010년 03월 교육청 수리(나형) 16번

sol)

상용로그에서의 가수는 상용로그 취하기 전 숫자의 배열을 뜻한다. 그리고 어떠한 숫자 배열마다 유일한 상용로그 가수 값이 대응된다.

- ㄱ. 이 문제에서는 지표는 생략한 채 가수를 처음부터 $f(x)$ 라고 두고 있는데, ㄱ에서 묻고 있는 바는 풀어서 쓰면 “2010의 숫자 배열이 0.201 의 숫자 배열이 같은가?”이다. 당연히 $\overrightarrow{2010}$ 이나 $0.2\overrightarrow{01}$ 이나 $\overrightarrow{201}$ 이라는 동일한 숫자 배열에 소수점 위치만 차이므로, 즉 상용로그 상태에서 지표만

차이하고, 상용로그 상태에서 가수는 같다. 따라서 참.

- ㄴ. (반례)를 떠올리기 전에, 가수가 0과 1사이여야 하므로, 범위를 벗어나는 경우 지표에서 수를 빌려오는 현상을 염두에 두어야 한다. 계중에 찾아보면 (반례) $\log x = 0.1, \log y = 0.2$ 라 하였을 때,

$$\log \frac{x}{y} = -0.1 = \overline{1}.9 \text{에서 } f\left(\frac{x}{y}\right) = 0.9 \text{이지만}$$

$$f(x) - f(y) = 0.1 - 0.2 = -0.1 \text{이 된다. 따라서 거짓.}$$

- ㄷ. 앞서 봤던 2007년 10월 교육청 낚시 문제와는 또 다른 종류의 낚시이다.

$$f(x) + f(y) = 1 \text{이기에 } \log x + \log y \text{는 정수가 되어야 한다. 한편, } \log x > 0, \log y > 0 \text{이므로 } \log x + \log y = 1, 2, 3, \dots \text{가 된다.}$$

(반례) 가령 $xy = 10$ 이라 하더라도 $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{50}$ 이라 두면 x, y 가 모두 무리수임에도 조건을 모두 만족한다. 따라서 거짓.

고로, 답은 ① ㄱ 이다.

2010년 04월 교육청 수리(가형) 09번

sol)

(가) 조건은 365와 x 가 지표가 같다는 것을 의미하므로, 곧 자릿수가 같음을 의미하고 따라서 x 는 정수부분이 세 자리 수로서 편의상

$$100 \leq x < 1000 \text{이라 할 수 있다. 그러면 } 2 \leq \log x < 3 \text{이 된다.}$$

다음으로 (나) 조건을 보자. 수식을 다시 해석해보면 x^3 의 숫자 배열과 $\frac{1}{x}$ 의 숫자 배열이 같음을 의미하는데, 너무 광범위하므로 부등식을 이용해서 풀자.

$$\log x^3 \text{과 } \log \frac{1}{x} \text{의 가수가 같다면 서로 빼도 정수가 되므로}$$

$$-3 < \log \frac{1}{x} \leq -2 \rightarrow \begin{cases} 6 \leq \log x^3 < 9 \\ 2 \leq -\log \frac{1}{x} < 3 \end{cases}$$

에서 $8 \leq \log x^3 - \log \frac{1}{x} < 12$ 가 됨을 알 수 있다. 이때

$$\log x^3 - \log \frac{1}{x} = 8, 9, 10, 11 \text{의 값을 취하고}$$

$$\log x^3 - \log \frac{1}{x} = 4 \log x \text{이므로 결국 } \log x = \frac{8}{4}, \frac{9}{4}, \frac{10}{4}, \frac{11}{4} \text{가 된다.}$$

나중에 또 통분하거나 비교해야 하기 때문에 일부러 약분해주지 않은 것이다. 그래서 이렇게 나온 x 값들이 그대로 답이 되는 것이 아니라, 조건에 부합하는지 확인하면서 답이 아닌 것들은 필터링 해주는 과정이 또 필요하다.

$\log x$	$\frac{8}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{11}{4}$
$\log x^3$	$\frac{24}{4}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{30}{4}$	$\frac{33}{4}$
$\log \frac{1}{x}$	$-\frac{8}{4}$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{10}{4}$	$-\frac{11}{4}$
(나) 만족?	O	O	O	O

따라서 만족하는 모든 양의 실수들의 곱은

$$10^{\frac{8}{4}} \times 10^{\frac{9}{4}} \times 10^{\frac{10}{4}} \times 10^{\frac{11}{4}} = 10^{\frac{19}{2}}$$

이 된다.

※ 숫자 배열이란 말은 교과서에는 등장하지 않으나 문제 풀이 속에서 만들어 낸 개념이고, 벡터도 아닌데 위에도 화살표 표기를 한 것은 이해를 돕기 위함이었다. 이후로는 숫자 배열을 나타낼 때 화살표 표기는 생략하겠다.

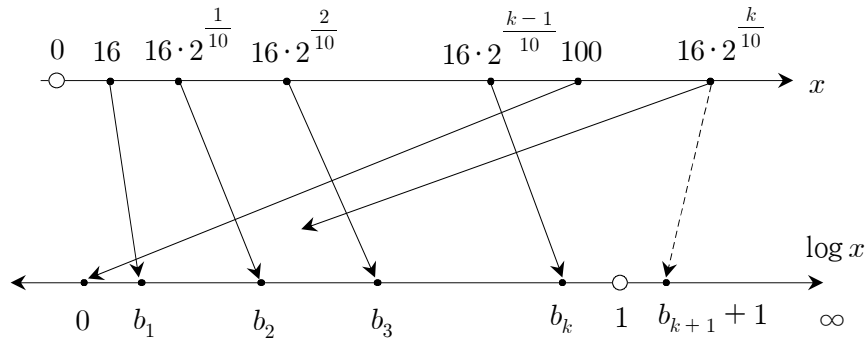
2010년 06월 평가원 수리(가형) 16번

sol)

한 마디로 문제를 요약하자면,

“ $16 \cdot 2^{\frac{k}{10}} \geq 100$ 을 만족하는 최소의 자연수 k 값을 구하시오.”

라 할 수 있다. 하지만 역시 평가원은 여기에 의미를 부여해서 수학적으로 다르게 표현해 내었다.

우선 앞에서도 몇 번 다루었던 기존 수와 상용로그를 이어주는 $x, \log x$ 축 모델을 이용하자. $2^{\frac{1}{10}} > 1$ 이므로 16에 $2^{\frac{1}{10}}$ 을 계속 곱해가다 보면 점점 커질 것이다. 또, $a_n = 16 \cdot 2^{\frac{n-1}{10}}$ 이 된다. 그리고 b_n 은 a_n 의 상용로그에서 가수 부분에 해당하므로 다음과 같이 다소 복잡한 형태로 나타난다.

$$b_n = \log a_n - [\log a_n] = \log 16 \cdot 10^{\frac{n-1}{10}} - \left[16 \cdot 10^{\frac{n-1}{10}} \right]$$

다행히도 이를 통째로 다룰 필요가 없이 상황을 잘 관찰해보면 답을 구할 수 있다.

16에 $2^{\frac{1}{10}}$ 을 차곡차곡 곱해가다 보면 x 축 상에서는 등비수열적으로 증가하고, $\log x$ 축 상에서는 등차수열 적으로 증가하게 된다. 그러다 b_k 에서 b_{k+1} 로 넘어가는 순간에 가수가 1을 넘어서게 되어 b_{k+1} 는 실질적으로 b_k 이후의 항에서 1을 뺀 값이 된다. 이렇게 가수가 1을 초과하는 상황에서 지표가 1이 증가하게 되고, 따라서 a_k 에서 a_{k+1} 로 넘어가는 순간에 자릿수가 하나 증가하게 되어 a_{k+1} 은 세 자리 수가 된다. 따라서,

 $16 \cdot 2^{\frac{k}{10}} \geq 100$ 라 할 수 있고, 양변 상용로그를 취해서 계산해보면

$$4\log 2 + \frac{k}{10}\log 2 \geq 2 \rightarrow k \geq 26. \dots$$

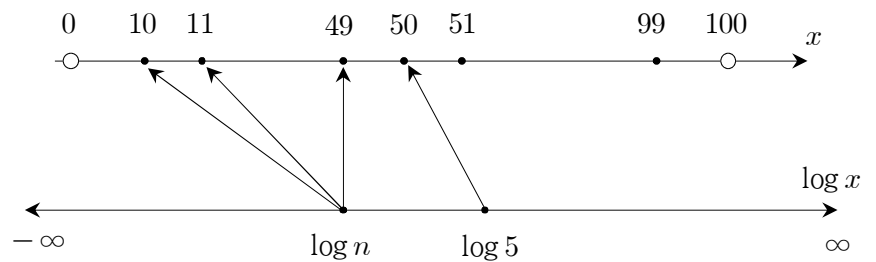
가 되어 주어진 조건을 만족하는 k 값은 27이 된다.

2010년 06월 평가원 수리(나형) 24번

sol)

두 자리 자연수 n 에 대하여 $10 \leq n < 100$ 이라 할 수 있고,“($\log n$ 의 가수) < ($\log \frac{1}{2} = -0.3010 = \bar{1}.6990$ 의 가수) ”는 곧 상용로그 상태에서 n 과 $\frac{1}{2} = 0.5$ 간의 조건이고, 상용로그 취하기 전의 n 과 $\frac{1}{2} = 0.5$ 의 관계로 따지자면“(n 의 숫자 배열) < ($\frac{1}{2} = 0.5$ 의 숫자 배열) ”

에 해당한다.



즉, 숫자 배열만 놓고 보면

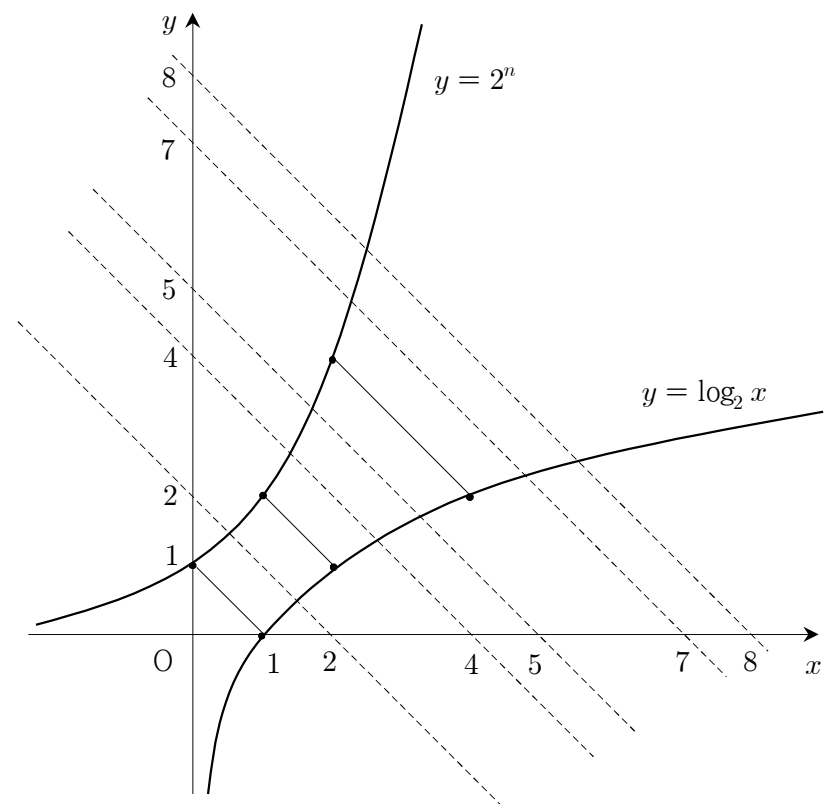
$1 = 10 = 100 = \dots$
 $11 = 110 = 1100 = \dots$
 $12 = 120 = 1200 = \dots$
 $\vdots$
 $2 = 20 = 200 = \dots$
 $21 = 210 = 2100 = \dots$
 $\vdots$
 $49 = 490 = 4900 = \dots$
 $5 = 50 = 500 = \dots$
 $\vdots$

이고, $\frac{1}{2} = 0.5$ 와 5, 50, 500, ...의 숫자 배열이 같으므로 $10 < 11 < 12 < \dots < 49 < 50 < 51 < \dots$

에서 n 이 취할 수 있는 숫자 배열 중에서 $\frac{1}{2} = 0.5$ 의 숫자 배열보다 작은 것은 $n = 10, 11, 12, \dots, 49$ 의 40개가 모두이다. 따라서 답은 40이다.

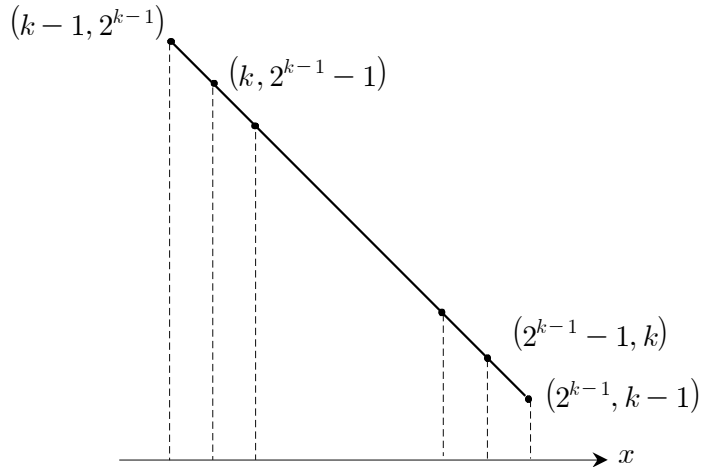
2010년 08월 경찰대 수리 24번

sol)

두 점 $(n, \log_2 n)$ 과 $(\log_2 n, n)$ 은 $y = x$ 선대칭 관계이다.

이때 이 두 점을 잇는 직선의 방정식은 $x + y = n + \log_2 n$ 이고, 두 점을 잇는 선분 위의 점 중에서 x, y 좌표가 모두 정수인 격자점이 존재 하려면 $n + \log_2 n$ 에서 $\log_2 n$ 도 정수가 되어야 한다. 그래서 이를 만족하는 n 값은 $n = 1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{10}$ 으로 11개 뿐이다.

그러므로 $n = 2^{k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, 11$)이라 할 때 두 점 $(n, \log_2 n)$ 과 $(\log_2 n, n)$ 을 잇는 11개의 선분만을 고려해주면 된다.



여기서 선분 위의 격자점마다 빼곡하게 존재하고 있으나 격자점의 x 값 종류만 헤아려 줘도 충분하므로, 각 $n = 2^{k-1}$ 마다 선분 위의 격자점 개수는

$$2^{k-1} - (k-1) + 1 = 2^{k-1} - k + 2$$

가 되어 $n \neq 2^{k-1}$ 인 n 에 대해서는 $a_n = 0$ 인 항들을 제외하면 결국

$$\sum_{n=1}^{2011} a_n = \sum_{k=1}^{11} (2^{k-1} - k + 2) = \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} - 66 + 22 = 2003$$

이 답이 된다.

2010년 08월 사관학교 수리(나형) 14번

sol)

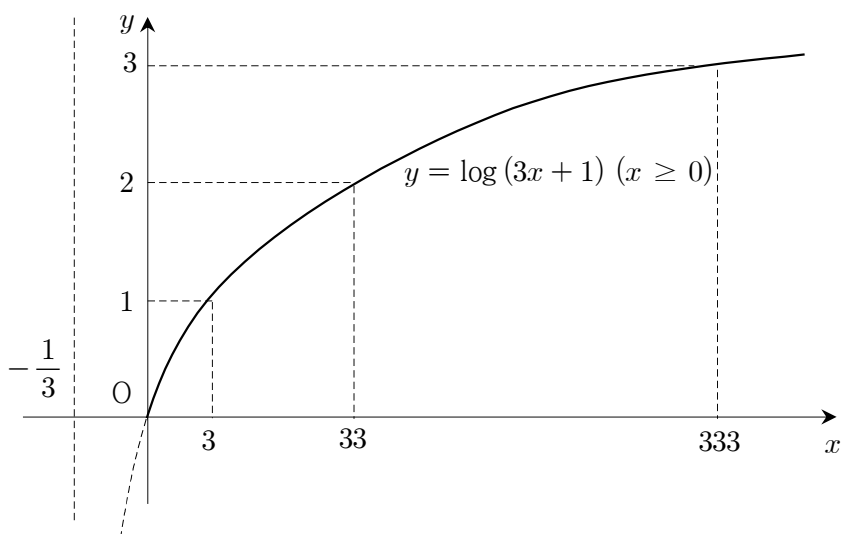
$g(a) = \log a - [\log a]$ 이므로

$$y = g(3|x| + 1) = \log(3|x| + 1) - [\log(3|x| + 1)]$$

가 된다. 그리고 이렇게 그래프가 까다로운 경우는 일단 $y = g(3|x| + 1)$ 만 그려내어도 문제의 절반 이상은 푼 셈이다.

$$y = g(3|x| + 1) = \begin{cases} g(3x + 1) & (x \geq 0) \\ g(-3x + 1) & (x < 0) \end{cases}$$

이고 $y = g(3|x| + 1)$ 는 우함수로서 y 축 대칭이므로 $x > 0$ 인 경우만 그려줘도 나머지는 적절하게 대칭시켜 주면 된다.



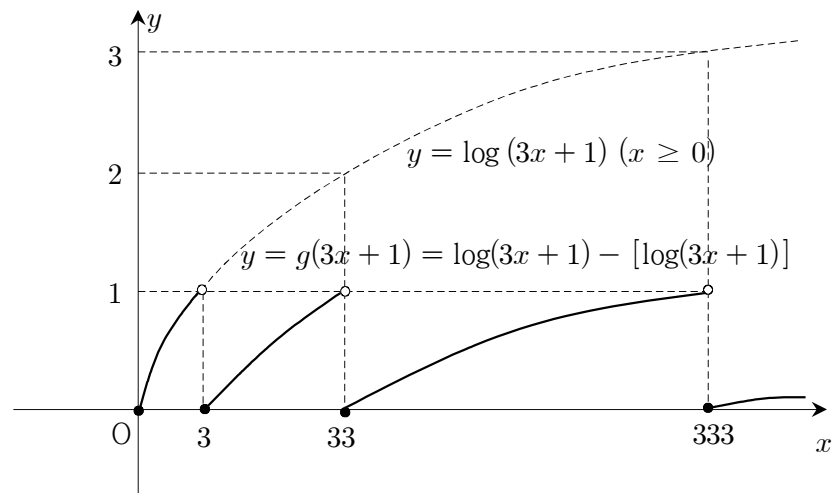
앞선 기출에서도 보았듯 2008년 06월 평가원 수리(가형) 22번

$y = x - [x]$ 라는 함수의 효과는 $y = x$ 라는 그래프를 $y = n$ 이라는 칼들로 잘라내어서 $0 \leq y < 1$ 인 구간으로 수직 평행이동시킨 것이다.

같은 방식으로 $y = g(3x + 1)$ 의 그래프를 기하학적으로 살펴보자면,

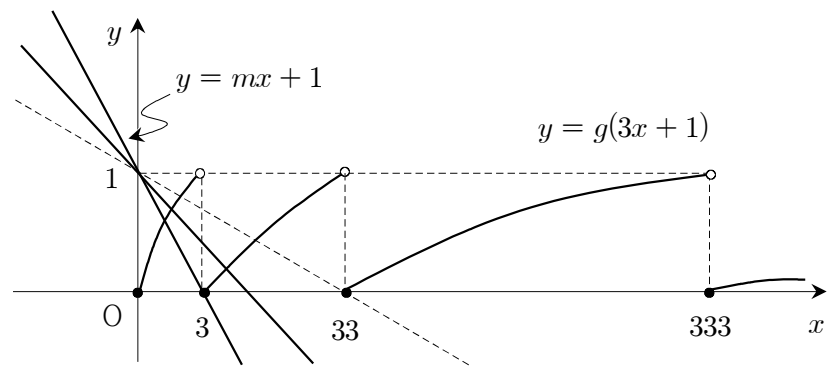
$y = \log(3x + 1)$ 이라는 함수를 $y = n$ 이라는 칼들로 잘라내어서

$0 \leq y < 1$ 인 구간으로 수직 평행이동시킨 것이 된다.



그리고 $x < 0$ 인 부분은 $x > 0$ 인 부분을 y 축 대칭시켜 주면 된다.

이제 $y = mx + 1$ 이 주어진 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나는 실수 m 의 최댓값을 구해야 하는데, 그래프가 대칭이므로 실수 m 의 최솟값을 구해서 부호만 조절해 주어도 상관없다. 그러면 아래와 같이



$y = g(3|x| + 1)$ 과 $y = mx + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 m 값의 범위가 $-\frac{1}{3} \leq m < -\frac{1}{33}, \frac{1}{33} < m \leq \frac{1}{3}$ 이 되어 최댓값은 $\frac{1}{3}$ 이 된다. 따라서 답은 ② $\frac{1}{3}$ 이다.

2010년 08월 사관학교 수리(나형) 26번

sol)

부등식 범위로 접근해보자. $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} < \log_4 n = 1 - \alpha < 1$$

이 되어 다시 $2 < n < 4$ 가 된다. 이를 만족하는 자연수는 $n = 3$ 으로 유일하고 덩달아 α 까지 결정된다. 그러면

$$n + \alpha = 3 + (1 - \log_4 3) = 4 - \log_4 3$$

$$= \log_4 \left(\frac{256}{3} \right) = \log_2 m^2 = \log_4 (m^4)$$

에서 $\frac{256}{3} = m^4$ 이므로 $3m^4 = 256$ 이 최종 답이 된다.

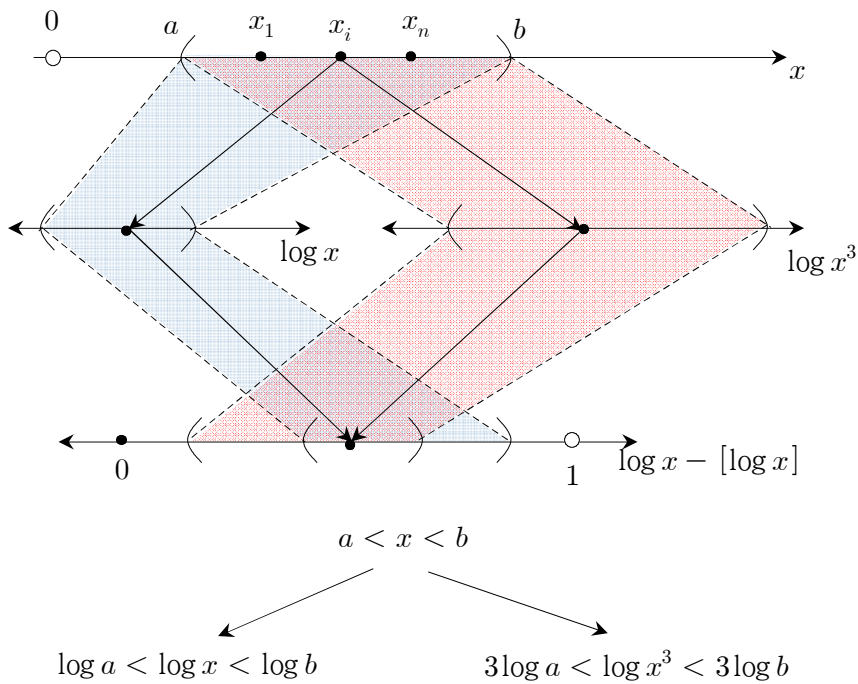
※ $\frac{256}{3}$ 에다 루트를 씌우거나 제곱하면서 불필요한 변형을 지양하고자,

문제에서 하필 묻고 있는 답의 형태가 $3m^4$ 임을 염두에 두고서 최소한의 조작으로 답을 이끌어 내는 연습도 조금씩 같이 하자.

2010년 10월 교육청 수리(가형) 17번

sol)

$N(a, b)$ 를 하나의 함수식으로 세우기가 상당히 까다롭다. 단연코 지금까지 다룬 것 중에 탐인 듯. 우선 그 관계부터 파악해보자.



이때 $\log x$ 와 $\log x^3$ 의 가수가 같다면 서로 뺀을 때 가수 부분이 0이 되어 정수가 된다는 것을 이용하자.

$$3\log a - \log b < \log x^3 - \log x < 3\log b - \log a \quad \dots *$$

이고, 기존 범위인 $a < x < b$ 로부터 파생된

$$\log a^2 < \log x^3 - \log x < \log b^2 \quad \dots **$$

를 종합하면

$$\frac{a^3}{b} < \frac{a^3}{a} = a^2, \quad b^2 = \frac{b^3}{b} < \frac{b^3}{a}$$

이므로 *와 ** 중에서 **의 범위가 더 작으므로(=충분조건이므로)

$$\log a^2 < \log x^3 - \log x < \log b^2 \quad \dots **$$

를 만족하면서 $\log x^3 - \log x = 2\log x$ 가 정수가 된다. 그러면 이제 a, b 값에 따라서 만족하는 x 값을 결정해줄 수 있다.

ㄱ. $a = 10^{\frac{1}{2}}$ 이고 $b = 10^3$ 인데, **에 대입해보면

$$1 < 2\log x < 6 \rightarrow 2\log x = 2, 3, 4, 5$$

가 된다. 하지만 아무리 보기 중에서 ㄱ이 포함된 것이 4개나 있어도, 그대로 만족하는 x 가 4개라고 하기 전에 필터링을 해보자.

$\log x$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$
$\log x^3$	$\frac{6}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{12}{2}$	$\frac{15}{2}$
가수 일치?	O	O	O	O

따라서 $N(a, b) = 4$ 가 되어 ㄱ은 참이다.

ㄴ. $a = 10^p, b = 10^{p+10}$ 을 **에 대입해보면

$$2p < 2\log x < 2p + 20 \rightarrow 2\log x = 2p + 1, 2p + 2, \dots, 2p + 19$$

이므로 $N(a, b) = 19$ 이므로 참이다. 필터링을 해보면 $\log x$ 와 $\log x^3$ 의

가수가 모두 $\frac{1}{2}$ 로 일정하다.

ㄷ. $a = 2^{10}, b = 2^{50}$ 을 **에 대입해보면

$$20\log 2 < 2\log x < 100\log 2$$

인데, $20\log 2 = 6.02$ 이고 $100\log 2 = 30.1$ 이 되어

$$6.02 < 2\log x < 30.1 \rightarrow 2\log x = 7, 8, \dots, 30$$

로써 $N(a, b) = 30 - 7 + 1 = 24$ 가 되어 한곳 차이로 거짓이다.

고로, 답은 ㉡ ㄱ, ㄴ이다.

2010년 11월 대수능 수리(나형) 24번

sol)

상용로그 $\log A$ 의 지표 n 은 자연수 A 의 소수점 위치 혹은 정수 부분의 자릿수를 나타내고, 가수 α 는 자연수 A 의 숫자 배열을 의미한다. 보통은 지표와 가수를 분리해서 물어보는 것이 대세였는데, 이렇게 수능에서 처음으로 n, α 를 연결지어 출제된 것이다. 그렇다고 무지막지한 사고력을 요구하는 문제가 아니라 차분하게 접근하면 얼마든지 풀리는 문제이기도 하다. 다만 평소에 접하지 못하였던 문제였기에 수능 시험장에서 혼란을 가져다 줄 수도 있다는 것이 문제지만. 게다가 이때 수능이 최근 수능 중에서 가장 어려웠기도 했다.

지표 n 은 정수의 값을 취하는 반면에 가수는 0과 1사이의 제한된 범위를 갖기 때문에 유의미한 몇몇 n 값에 대해서 부등식을 정리해서 풀어도 충분하다. 지표 n 으로 가능한 값은 0, 1, 2, 3, ... 인데, $2\alpha < 2$ 이므로 유의미한 n 은 0, 1 뿐이다.

$n = 0$ 이면, 즉 한 자리 자연수 A 에 대해서 $0 \leq 2\alpha \rightarrow 0 \leq \alpha (< 1)$ 이므로 한 자리 자연수 9개 모두 해당한다.

$n = 1$ 이면, 즉 두 자리 자연수 A 에 대해서 $1 \leq 2\alpha \rightarrow \frac{1}{2} \leq \alpha (< 1)$

이므로 두 자리 자연수 중에는 상용로그 취했을 때 가수가 $\frac{1}{2}$ 이상인 것만

해당한다. 그리고 괄호 조건에서 $\log 3.1 < \frac{1}{2} < \log 3.2$ 라고 가수 $\frac{1}{2}$ 에

해당하는 숫자 배열이 31... 라고 힌트를 주고 있다. 그러면 두 자리 자연수 중에서 숫자 배열이 31... 이후에 등장하는 것은 32, 33, 34, ..., 99이므로 이 경우 $100 - 32 = 68$ 개가 존재한다.

고로, 이를 종합하면 총 $9 + 68 = 77$ 이 답이다.

※ 위 풀이 말고도 $n \leq 2\alpha \rightarrow [\log A] \leq 2(\log A - [\log A])$ 를 정리해서 $3[\log A] \leq 2\log A$ 라 해서 풀 수도 있다. 그러면 $[\log A] = 0, 1, 2, \dots$ 중에서 경우를 하나씩 나눠서 접근하면 된다.

$[\log A] = 0$ 이면 $0 \leq \log A (< 1)$ 로 모든 한 자리 자연수 A 가 가능하고,

$[\log A] = 1$ 이면 $\frac{3}{2} \leq \log A (< 2)$ 로 상용로그의 숫자 배열이 $\frac{1}{2}$ 이상인

두 자리 자연수 A 가 모두 가능하나,

$[\log A] = 2$ 이면 $3 \leq \log A (< 3)$ 로 만족하는 세 자리 자연수 A 가 존재하지 않고,

$[\log A] = 3$ 이면 $\frac{9}{2} \leq \log A$ 이면서 동시에 $3 \leq \log A < 4$ 가 되어

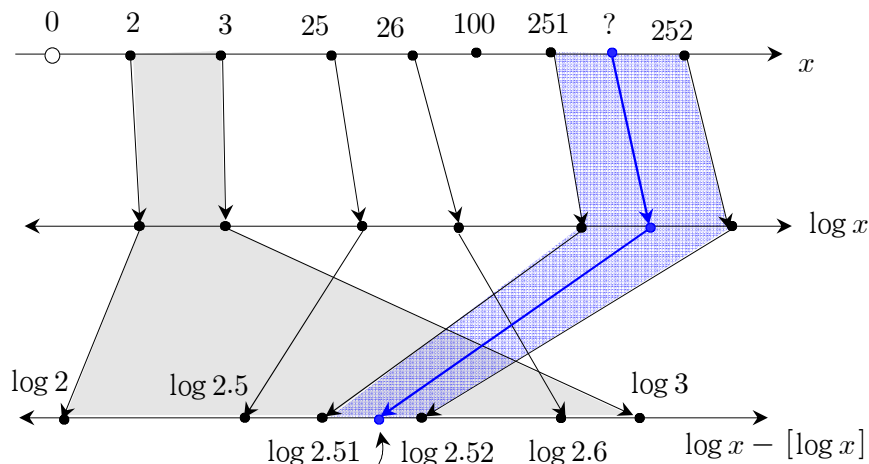
모순이므로 만족하는 네 자리 자연수 A 역시 존재하지 않는다. 같은

방식으로 $[\log A] \geq 2$ 이면 만족하는 자연수가 존재하지 않음을 알 수 있다.

2011년 04월 교육청 수리(가형) 29번

sol)

$f(n)$ 이 의미하는 바는 “ $\log n$ 의 가수의 10배”이다. $\log n$ 의 가수를 α 라 한다면 $0 \leq \alpha < 1$ 에서 $0 \leq 10\alpha < 10$ 이고, $[f(n)] \leq 3$ 은 $[10\alpha] \leq 3$ 이므로 $0 \leq 10\alpha < 4$ 를 의미한다. 즉, $0 \leq \alpha < 0.4$ 로 가수가 0.4에 해당하는 숫자 배열은 문제에서 마지막에 주어진 괄호 조건에서 2.51... 라 알려주고 있다. 숫자 배열의 의미를 파악하는 것이 중요하다.



따라서 세 자리 이하의 자연수 n 에 대하여 상용로그의 가수가 0.4 미만인 것은 $\{2, 1\}$ 과 $\{25, 24, \dots, 11, 10\}$ 과 $\{251, 250, 249, \dots, 100\}$ 으로 총 $2 + 16 + 152 = 170$ 개가 된다.

2011년 06월 평가원 수리(가형) 30번

sol)

최근 평가원 경향이 다단계적 사고를 요한다는 것임을 여실히 보여주는 문제이다. 마음 같아선 서너줄 만에 똑딱 풀이를 쓰고서

‘ㅇㅋㅇㅋ, 이해했쥬 ^^?’

하고 싶지만 그러면 정작 학습자의 입장에서 실력이 눈에 띄게 늘지 않는다. 그러니, 차분하게 문제를 살펴보겠다. 혹자는 이러한 풀이조차 결국엔 주입식이 아니냐고 반감을 가질 수 있으나, 지금은 연습 중이니 유형과 해법의 체화에 초점을 두어야 한다. 본인의 실력을 펼칠 수 있는 기회는 한 해 동안 쏟아지는 모의고사들을 비롯하여 얼마든지 많으니 걱정하지 않아도 된다.

먼저 $S = \{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$ 이라는 집합을 정의하였다.

다음으로 S 의 원소 n 에 대하여 조건 제시법으로 제시된 이름없는 집합

$$\{k \mid k \in S \text{이고 } \log_2 n - \log_2 k \text{는 정수}\}$$

이 등장하는데 편의상 T_n 이라는 이름을 붙여주자. 그리고 이때 집합 T_n 의 원소의 개수를 $f(n)$ 이라 한 것이다. 그 다음 ‘예를 들어’ 이후 부분은 이러한 상황에 대한 이해를 돕기 위한 것으로 어지간하면 직접 확인해보는 것이 좋다. 이를 나타내면 다음과 같다.

$$S = \{1, 2, 3, \dots, \textcircled{10}, \dots, \boxed{99}, 100\}$$

$$T_{\textcircled{10}} = \{k \mid k \in S \text{이고 } \log_2 \frac{\textcircled{10}}{k} \text{는 정수}\} = \{5, 10, 20, 40, 80\}$$

$$T_{\boxed{99}} = \{k \mid k \in S \text{이고 } \log_2 \frac{\boxed{99}}{k} \text{는 정수}\} = \{99\}$$

즉, T_n 에서는 $\log_2 \frac{n}{k}$ 가 정수가 되어야 하고, 그러면 정수 N 에 대하여

$$\frac{n}{k} = 2^N \rightarrow k = \frac{n}{2^N} \in S \text{ 혹은 } n = k \cdot 2^N \text{과 같은 형태여야 한다. 이때}$$

변수가 결정되는 순서는, S 의 원소 n 에 대하여 마치 양의 정수를

소인수분해를 하듯 $n = k \cdot 2^N$ 이 되므로, n 이 하나 결정되면 그에 따른 k, N 이 동시에 결정된다. 그런데 이는 유일한 소인수분해와 달리 몇 종류의 곱으로 나타낼 수 있는가와 관련되어 있다.

또 하나 캐치해야 할 것으로 n, k 가 모두 S 의 원소로서 100 이하 자연수를 의미하므로 $\frac{1}{100} \leq \frac{n}{k} = 2^N \leq \frac{100}{1}$ 라는 관계이다. 그러면 정수 N 이

취할 수 있는 것은 $-6, -5, -4, \dots, 4, 5, 6$ 의 13개 값 중 하나이다. 물론 T_n 이 결정되면 N 의 개수만큼 k 도 결정되므로 $f(n)$ 값은 곧 N 의 개수가 된다. 그리고 다소 암체 같다고 생각할 수 있지만 ‘예를 들어’ 부분에서는 $N = -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$ 인 경우를 다루지 않았고, 꽤 많은 학생들이 이 부분을 놓쳐서 틀렸었다.

문제에서 $f(n) = 1$ 인 n 의 개수를 물어보고 있는데 이에 취할 수 있는 문제 해결전략은 일반적으로,

$n = 1, 2, 3, \dots$ 로 하나씩 대입해가며 규칙 내지는 수학적인 그 무언가를 발견할 때까지 해보는 방법

이 있고, 또는

수학적인 그 무언가를 먼저 발견해서 곧바로 n 을 찾아내는 방법

이 있다. 여기서 첫 번째 방법을 택하자. 그러면 $f(99) = 1$ 에서 힌트를 얻어 $n = 100, 99, 98, 97, 96, \dots$ 의 내림차순으로 파악해보면,

$\log_2 \frac{100}{k}$ 에서 $k = 25, 50, 100$ 의 값을 취할 수 있으므로 $f(100) = 3$ 이고,

$\log_2 \frac{99}{k}$ 는 $k = 99$ 뿐이라 $f(99) = 1$ 임을 이미 확인하였고,

$\log_2 \frac{98}{k}$ 은 $k = 49, 98$ 에서 $f(98) = 2$ 가 된다. 이렇듯 $n = 2m$ 꼴이면

일단 $k = m, 2m$ 을 모두 취할 수 있으므로 $f(2m) > 1$ 이 되기에 짝수인 n 은 모두 배제하여도 된다.

다음으로 $\log_2 \frac{97}{k}$ 는 $k = 97$ 뿐이라 $f(97) = 1$ 이 된다.

그리고 $\log_2 \frac{95}{k}$ 도 $k = 95$ 뿐이라 $f(95) = 1$ 이라 할 수 있다.

그러니 n 은 100 이하 홀수라 해서 50이라 오답을 하면 안 된다.

하지만 이러한 경향성은 $n = 51$ 까지만 이어지며 $n = 49, 47, \dots, 1$ 에 대해서는 드러맞지 않게 된다.

가령 $\log_2 \frac{49}{k}$ 에서 $k = 49, 98$ 이므로 $f(49) = 2$ 가 되고,

$\log_2 \frac{1}{k} = -\log_2 k$ 라 하면 $k = 2, 4, 8, 16, 32, 64$ 로 $f(1) = 6$ 이다.

따라서, $f(n) = 1$ 로 가능한 n 값은 99, 97, 95, $\dots$, 51로 25가 답이다!

※ 문제의 심층적 이해 측면에서 $f(n) = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ 도 분류해보자.

n	$\log_2 \frac{n}{k} \rightarrow k$	$f(n)$
1	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64	7
2	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64	7
3	3, 6, 12, 24, 48, 96	6
4	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64	7
5	5, 10, 20, 40, 80	5
6	3, 6, 12, 24, 48, 96	6
7	7, 14, 28, 56	4
8	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64	7
9	9, 18, 36, 72	4
10	5, 10, 20, 40, 80	5

지금까지 파악한 숫자들은 다음 표와 같다. 연습이니까 머릿속으로 희미하게 파악하고 있던 수치관계를 표를 통해 칼같이 헤아려 보자.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

이제 51 미만의 나머지 25개의 홀수들에 관해서 파악을 해보자.

$$100 \div 2 = 50 \cdots 0 \rightarrow f(27) = f(29) = \cdots = f(49) = 2$$

$$100 \div 4 = 25 \cdots 0 \rightarrow f(13) = f(15) = \cdots = f(25) = 3$$

$$100 \div 8 = 12 \cdots 4 \rightarrow f(7) = f(9) = f(11) = 4$$

$$100 \div 16 = 6 \cdots 4 \rightarrow f(5) = 5$$

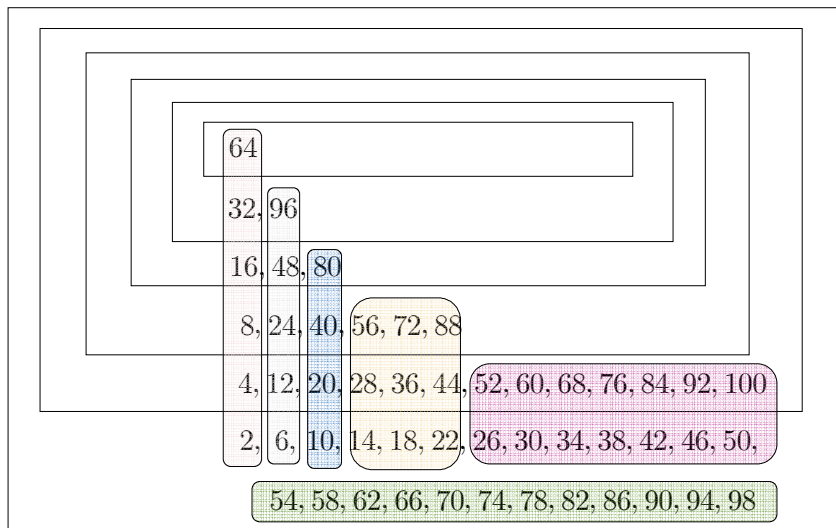
$$100 \div 32 = 3 \cdots 4 \rightarrow f(3) = 6$$

$$100 \div 64 = 1 \cdots 36 \rightarrow f(1) = 7$$

그러면 $f(n) = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 이 바뀌는 n 값들이 100을 2로 나눈 몫들과 관계있음을 알 수 있다. 그리고 100 미만 홀수인 n 값으로 한정하면 $f(n)$ 이 $f(1) \geq f(3) \geq f(5) \geq \cdots \geq f(99)$

와 같이 적어도 증가하지는 않는 감소함수의 모습을 띤다.

다음으로 남아있는 수들은 주로 2, 4, 6, 8, ..., 96, 98, 100과 같은 짝수들인데, 이는 각각이 소인수분해 시 2를 몇 개나 인수로 갖고 있느냐와 관련이 있다.



위 그림과 같이 n 을 소인수분해시 2를 최대 몇 개나 인수로 갖고 있느냐에 따라 껍질로 구분한 다음 다시 묶어보면

$$(f(1) \Rightarrow) f(2) = f(4) = f(8) = f(16) = f(32) = f(64) = 7$$

$$(f(3) \Rightarrow) f(6) = f(12) = f(24) = f(48) = f(96) = 6$$

$$(f(5) \Rightarrow) f(10) = f(20) = f(40) = f(80) = 5$$

$$\begin{cases} (f(7) \Rightarrow) f(14) = f(28) = f(56) = 4 \\ (f(9) \Rightarrow) f(18) = f(36) = f(72) = 4 \\ (f(11) \Rightarrow) f(22) = f(44) = f(88) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (f(13) \Rightarrow) f(26) = f(52) = 3 \\ \vdots \\ (f(25) \Rightarrow) f(50) = f(100) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (f(27) \Rightarrow) f(54) = 2 \\ \vdots \\ (f(49) \Rightarrow) f(98) = 2 \end{cases}$$

끝으로, 남아있는 52, 54, 56, ..., 100과 같은 51 이상의 짝수들에 대해서는

$$f(52) = f(26), f(54) = f(27), f(56) = f(28), \cdots, f(100) = f(50)$$

과 같이 $f(2n) = f(n)$ ($n = 1, 2, 3, \cdots, 25$)가 된다. 최종적으로 정리하자면

$$\{n \mid f(n) = 7\} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$$

$$\{n \mid f(n) = 6\} = \{3, 6, 12, 24, 48, 96\}$$

$$\{n \mid f(n) = 5\} = \{5, 10, 20, 40, 80\}$$

$$\{n \mid f(n) = 4\} = \{7, 14, 28, 56\} \cup \{9, 18, 36, 72\} \cup \{11, 22, 44, 88\}$$

$$\{n \mid f(n) = 3\} = \{13, 26, 52\} \cup \{15, 30, 60\} \cup \cdots \cup \{25, 50, 100\}$$

$$\{n \mid f(n) = 2\} = \{27, 54\} \cup \{29, 58\} \cup \cdots \cup \{49, 98\}$$

$$\{n \mid f(n) = 1\} = \{51\} \cup \{53\} \cup \cdots \cup \{99\}$$

이 되어 각 집합의 원소의 개수는 $n(A) = |A|$ 라 표기할 때,

$$|\{n \mid f(n) = 7\}| = 7$$

$$|\{n \mid f(n) = 6\}| = 6$$

$$|\{n \mid f(n) = 5\}| = 5$$

$$|\{n \mid f(n) = 4\}| = 4 \times 3 = 12$$

$$|\{n \mid f(n) = 3\}| = 3 \times 7 = 21$$

$$|\{n \mid f(n) = 2\}| = 2 \times 12 = 24$$

$$|\{n \mid f(n) = 1\}| = 1 \times 25 = 25$$

가 된다. 물론 $7 + 6 + 5 + 12 + 21 + 24 + 25 = 100$ 이다.

2011년 07월 교육청 수리(가형) 07번

sol)

집합 A_k 는 상용로그의 가수가 $\frac{1}{k} = 0. \cdots$ 인 $1 \leq x \leq 10^5$ 라고

정의되었다. 그럼 곧바로 $\neg$, $\cup$, $\cap$ 을 풀어보자.

$\neg$. A_2 는 상용로그의 가수가 $\frac{1}{2} = 0.5$ 인 $x \in [1, 10^5]$ 들의 모임이고,

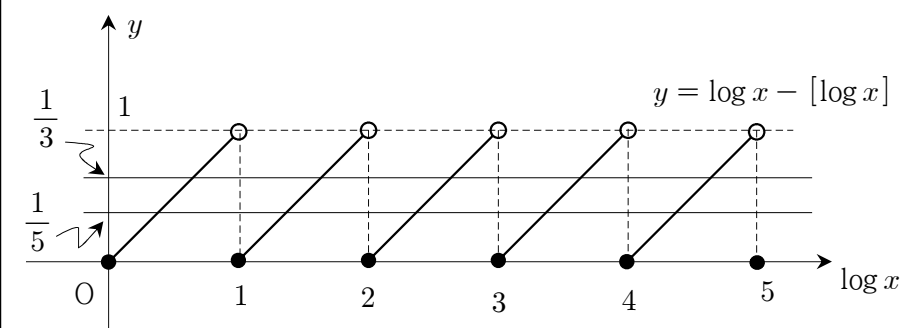
$\sqrt{10}$ 을 상용로그 취하면 가수가 $\frac{1}{2} = 0.5$ 이므로 참이다.

$\cup$. A_3 의 원소들은 $0 \leq \log x \leq 5$ 범위에서 $\log x = \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{13}{3}$

으로 x 가 $10^{\frac{1}{3}}, 10^{\frac{4}{3}}, 10^{\frac{7}{3}}, 10^{\frac{10}{3}}, 10^{\frac{13}{3}}$ 로 총 5개이고, 마찬가지로 A_5 의

원소들은 $0 \leq \log x \leq 5$ 범위에서 $\log x = \frac{1}{5}, \frac{6}{5}, \frac{11}{5}, \frac{16}{5}, \frac{21}{5}$ 로서

5개가 존재하므로 참이다. 이를 그래프로 따져보면 다음과 같다.



그러므로 $n(A_k) = \begin{cases} 0 & (k=1) \\ 5 & (k \geq 2) \end{cases}$ 이라 할 수 있다.

$\cap$. 위 그래프에서도 알 수 있듯 $A_m \cap A_n \neq \emptyset$ 이면 $A_m = A_n$ 일 수 밖에

없고, $m = n$ 이어야만 한다. 따라서, 거짓이다.

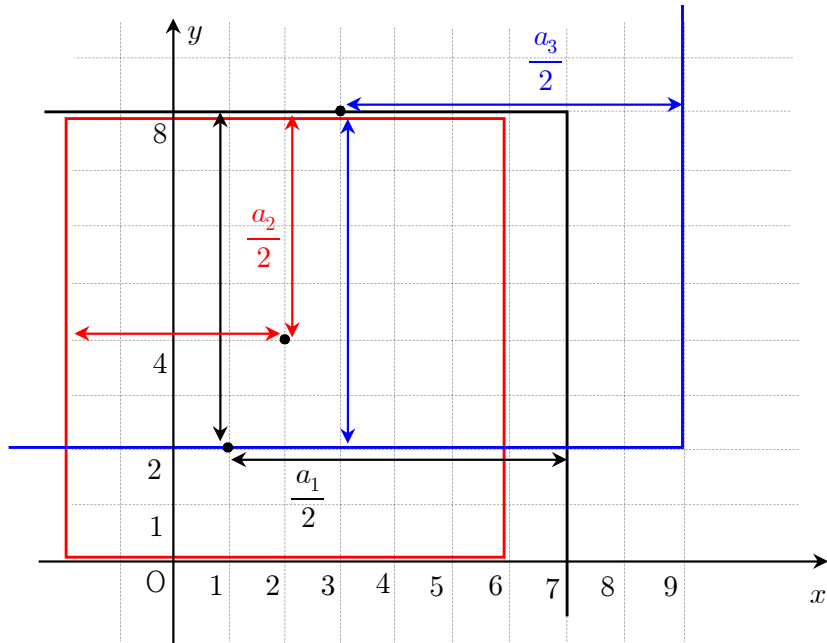
고로, 답은 ③ $\neg$, $\cup$ 이다.

The diagram shows two horizontal lines. The top line is labeled x and has points marked from 0 to 10. The bottom line has points marked 0 and 1. Dashed lines connect points on the top line to points on the bottom line. A red dot on the bottom line is labeled α and a blue dot is labeled 0.5 . A red arrow labeled $1 - \alpha$ points from the red dot to the blue dot.

본 문항은 주어진 조건으로부터 수열의 규칙성을 추론할 수 있는지를 평가하는 문항입니다. 본 문항의 (가) 조건에서 정사각형의 변과 좌표축의 관계에 대한 서술은 좌표평면에서 정사각형의 위치를 정하기 위한 것으로, 수학적으로 오류가 있는 표현이 아닙니다. 따라서 본 문항의 정답과 문제에 이상이 없습니다.

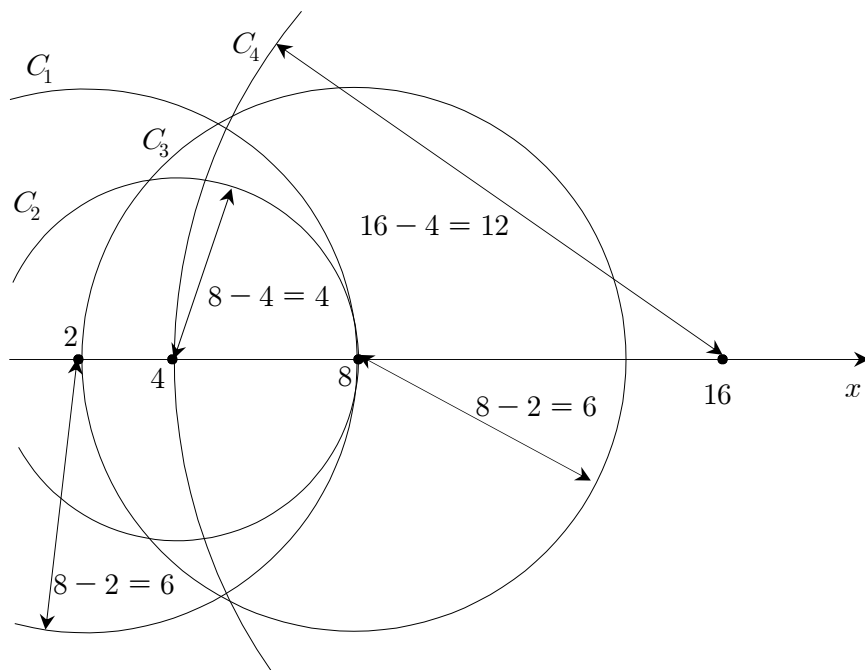
라고 한다. 개인의 수학적 엄밀함의 정도에 따라 아무렇지 않게 넘어가는 사람이 있는가 하면, 당연히 문제가 혹은 답이 잘못된 게 아니냐고 수궁하지 못하는 사람도 있을 것이지만, 일단 평가원의 관점에 따라 문제를 풀어보도록 하자.

이 문제의 표현상 독특한 점이 있다면 x, y 좌표가 모두 정수인 격자점이 아닌, x 좌표만 자연수라 한 것인데, 그러면 $y = 2^x$ 도 자연수라서 별 차이는 없다.



(가) 조건을 만족하는 정사각형의 중심의 좌표가 이미 $(n, 2^n)$ 으로 x 좌표가 자연수이므로 중심을 제외한 나머지 두 점을 더 포함하도록 정사각형의 한 변의 길이를 설정해주어야 한다. 지수함수 $y = 2^x$ 는 오히려 사고를 방해할 수 있으므로 그리지 않았다.

여기서 경향성이 바뀌는 지점만 포착하면 금방 풀 수 있다. 아이디어를 보존한 채 이해하기 쉬운 버전으로 바꾸자면, 중심이 $(2^n, 0)$ 인 원 C_n 이 있을 때,



원 C_n 의 경계를 포함해서 내부에 총 3개의 원 C_n 들의 중심이 존재하기 위한

최소의 반지름을 $\frac{a_n}{2}$ 라 할 때, $\sum_{k=1}^7 a_k$ 를 구하라는 것과 같다. 원 C_1 에

대해서는 중심인 점 $(2, 0)$ 은 그 자신이 가장 왼쪽의 점이므로 어쩔 수 없이 그 오른쪽 두 점 $(4, 0), (8, 0)$ 을 포함해야만 하고, 원 C_2 에 대해서는 중심인 점 $(4, 0)$ 을 포함해서 그 오른쪽 두 점인 $(8, 0), (16, 0)$ 을 모두 포함할 필요 없이 $(8, 0)$ 보다 $(2, 0)$ 에 이르는 거리가 더 가깝기 때문에 점 $(8, 0)$ 까지만 포함할 만큼의 반지름이면 충분하다. 하지만 원 C_3 이후로는 중심점에서 왼쪽 두 점에 이르는 거리가 바로 오른쪽 한 점에 이르는 거리보다 더 짧아진다.

편의상 점 $(n, 2^n)$ 을 C_n 이라 하고, C_n 을 대각선의 교점으로 하면서 (가) 조건을 만족하는 정사각형을 R_n 이라 하자. 그러면 R_n 의 중심이 $y = 2^x$ 를 타고 움직이므로 (나)의 격자점 조건을 만족하려면 x 좌표보다는 y 좌표에 초점을 두어야 한다. 그리고 정사각형 R_n 이 C_n 을 포함하여 남은 두 격자점을 $C_{n-2}, C_{n-1}, C_{n+1}, C_{n+2}$ 중에서 어떻게 택할지를 관찰해보자.

y 좌표를 낮은 순서대로 나열하면 $C_1, C_2, C_3, \dots$ 인데

R_1 은 C_1, C_2, C_3 세 점을 포함하는 가장 작은 정사각형이 되어야 하고,
 R_2 도 C_1, C_2, C_3 세 점을 포함하는 가장 작은 정사각형이 되어야 하고,
 R_3 도 C_1, C_2, C_3 세 점을 포함하는 가장 작은 정사각형이 되어야 하고,
 R_4 는 C_2, C_3, C_4 세 점을 포함하는 가장 작은 정사각형이 되어야 하고,
 R_5 는 C_3, C_4, C_5 세 점을 포함하는 가장 작은 정사각형이 되어야 하고,
 R_6 는 C_4, C_5, C_6 세 점을 포함하는 가장 작은 정사각형이 되어야 하고,
 $\vdots$

R_{n+2} 는 C_n, C_{n+1}, C_{n+2} 세 점을 포함하는 가장 작은 정사각형이어야 한다. 이때 R_{n+2} 의 한 변의 길이의 최솟값은 두 점 C_n, C_{n+2} 의 y 좌표의 차의 두 배를 취해주면 된다.

그러면 R_1 에 대해서는 $\frac{a_1}{2} = 2^3 - 2^1 \rightarrow a_1 = 12$ 이고,

R_2 에 대해서는 $\frac{a_2}{2} = 2^3 - 2^2 \rightarrow a_2 = 8$ 이고,

R_3 에 대해서는 $\frac{a_3}{2} = 2^3 - 2^1 \rightarrow a_3 = 12$ 이고,

R_4 에 대해서는 $\frac{a_4}{2} = 2^4 - 2^2 \rightarrow a_4 = 24$ 이고,

R_5 에 대해서는 $\frac{a_5}{2} = 2^5 - 2^3 \rightarrow a_5 = 48$ 이고,

R_6 에 대해서는 $\frac{a_6}{2} = 2^6 - 2^4 \rightarrow a_6 = 96$ 이고,

R_7 에 대해서는 $\frac{a_7}{2} = 2^7 - 2^5 \rightarrow a_7 = 192$ 이다.

혹은 상쇄를 이용해서 더해도 동일한 답을 이끌어 낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^7 a_k &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7) \\ &= 12 + 8 + \{(2^4 - 2^2) + (2^5 - 2^3) + (2^6 - 2^4) + (2^7 - 2^5) + (2^8 - 2^6)\} \\ &= 20 - 12 + 128 + 256 = 392 \end{aligned}$$

2011년 09월 평가원 수리(나형) 14번

sol)

(가) 조건을 먼저 보자면 $f(x) = [\log x]$ 는 원래 정수이므로 $3g(x)$ 가 정수여야 하고, $g(x)$ 가 $\log x$ 의 가수로서 0 이상, 1 미만의 값을 취하므로 $3g(x) = 0, 1, 2$ 만이 가능하다. 이를 (나) 조건에 적용해보자.

(i) $\log x = n$ 이면 $\log x + \log x^2 = 3n = 6$ 으로 $n = 2$ 이다.

(ii) $\log x = n + \frac{1}{3}$ 이면 $f(x) = n, f(x^2) = 2n$ 이므로 $n + 2n = 6$ 으로

$n = 2$ 이다. 즉, $\log x = 2 + \frac{1}{3}$ 이다.

(iii) $\log x = n + \frac{2}{3}$ 이면 $f(x) = n, f(x^2) = 2n + 1$ 이므로

$n + (2n + 1) = 6$ 을 만족하는 정수 n 은 존재하지 않는다.

이를 종합하면 $\log x = 2, 2 + \frac{1}{3}$ 가 되어 $x = 10^2, 10^{\frac{7}{3}}$ 으로 모든 x 값들의 곱은 $10^{2+\frac{7}{3}}$ 이 된다. 따라서 답은 ② $10^{\frac{13}{3}}$ 이다.

2011년 11월 대수능 수리(나형) 20번

sol)

x 의 상용로그 $\log x$ 에서 지표는 x 에서 소수점 위치를, 가수는 x 의 숫자 배열과 관련이 있음을 상기하자.

그러면 $f(n) \leq f(54)$ 의 의미는 54보다 자릿수가 같거나 작은 자연수이고, $g(n) \leq g(54)$ 의 의미는 54보다 숫자 배열이 작은 수를 말한다.

그러므로 한 자리 자연수 중에는 $n = 1, 2, 3, 4, 5$ 가 있고, 두 자리 자연수 중에는 10, 11, ..., 54가 있다. 따라서 만족하는 자연수 n 은 $5 + 45 = 50$ 개 존재하며, 답은 ⑤ 50이다.

2012년 03월 교육청 수리(나형) 20번

sol)

(가) 조건의 가우스 기호를 풀어보면

$$[\log_3 n] = 3 \Leftrightarrow 3 \leq \log_3 n < 4 \Leftrightarrow 3^3 \leq n < 3^4$$

이 되고, (나) 조건의 의미는 n^2 의 자릿수가 $2n$ 의 자릿수보다 2 더 크다는 것으로 n^2 의 자릿수가 늘어나는 경계는 $n = 31, 32$ 부근이고, $2n$ 의 자릿수가 늘어나는 경계는 $n = 50$ 이므로 다음과 같이 n 값에 따른 n^2 과 $2n$ 의 자릿수를 표로 살펴보면

n	27	...	31	32	...	49	50	51	...	81
n^2	3	...	3	4	...	4	4	4	...	4
$2n$	2	...	2	2	...	2	3	3	...	3
차	1	...	1	2	...	2	1	1	...	1

따라서 만족하는 자연수 $n = 32, 33, \dots, 49$ 로 총 $49 - 32 + 1 = 18$ 개다. 그러므로 답은 ④ 18이다.

2012년 04월 교육청 수리(가형) 29번

sol)

이쯤 되면 수치 감각이 포텐 터진 바람에 $f(x) = 1$ 과 $g(x) = \frac{4}{5}$ 임이 바로 보여서 $m + n = 5 + 9 = 14$ 라 보자마자 정답을 찾아냄 직도 하나, 한 번 차별하게 풀어보도록 하자.

(가) 조건의 $0 \leq g(x^2) + g(x^3) < 2$ 에서 $g(x^2) = g(x^3) = 0$ 라 하면 (나)에 모순이 되므로 $g(x^2) + g(x^3) = 1$ 이 되어야 함을 알 수 있다. 만약

$g(x) = \frac{1}{5}$ 이라면 (가) 조건은 만족할지라도 (나) 조건은 만족시키지 못한다.

즉, 가수가 1을 초과하여 다시 1을 빼서 0과 1사이 값으로 조절해주는 과정을 겨냥하고 만든 문제인 것이다.

$\log x = 1 + \alpha$ ($0 < \alpha < 1$)라 하면 x^n 의 과정에서 가수를 고려하였을 때 $\log x^2 = 2 + 2\alpha, \log x^3 = 3 + 3\alpha$ 로부터

$$5\alpha = 1, 5\alpha = 2, 5\alpha = 3 \text{ 혹은 } 5\alpha = 4$$

가 가능하다. 그리고 이 중에서 (나) 조건을 만족하는 경우는 $5\alpha = 4$

뿐이므로, 즉

$$g(x^2) = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$$

$$g(x^3) = \frac{12}{5} - 2 = \frac{2}{5}$$

$$g(x^4) = \frac{16}{5} - 3 = \frac{1}{5}$$

이 되어 성립하게 된다. 따라서 $\log x = f(x) + g(x) = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$ 가

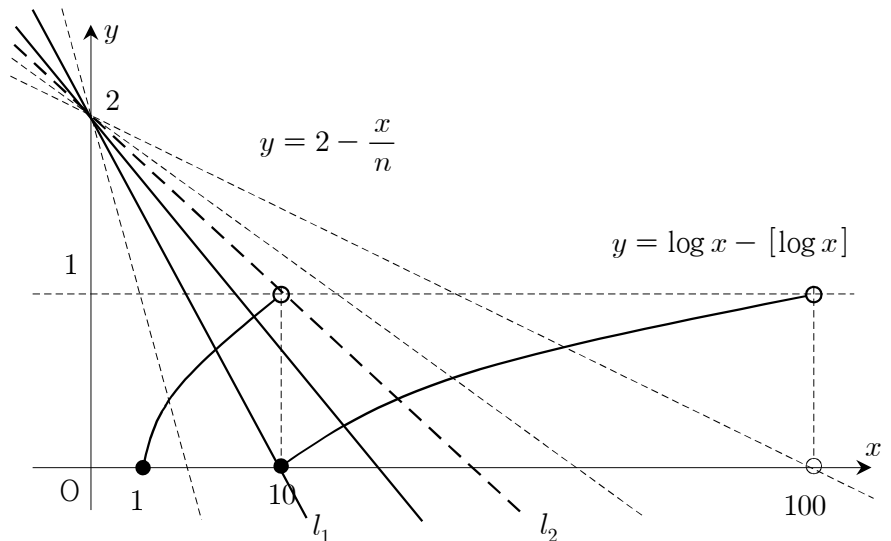
되어 $m + n = 14$ 가 답이다.

2012년 05월 평가원 수학 영역(A형) 20번

sol)

가수인 $f(x) = \log x - [\log x]$ 의 그래프를 그리면 거의 끝나는 문제이다.

이 그래프는 $y = \log x$ 를 $y = n$ 이라는 칼들로 잘라서 y 값을 구간 $[0, 1)$ 로 수직 평행이동 하여 그리면 된다. 직선이야 한 점점과 기울기를 알면 그리는데 지장이 없지만, 로그함수는 특히 아주아주 미칠 듯 느리게 증가하는 함수여서 실제 비율을 고려해서 제한된 영역에 그리려면 알아보기가 힘들다. 따라서 적당히 왜곡된 그래프를 그린 다음 이해하도록 하자.



직선 $y = 2 - \frac{x}{n}$ 이 점 $(10, 0)$ 을 지나는 직선을 l_1 ,

직선 $y = 2 - \frac{x}{n}$ 이 점 $(10, 1)$ 을 지나는 직선을 l_2 라 할 때,

l_1 직선 자체와, l_1, l_2 사이의 기울기의 직선들 모두 가능하다. 즉,

$$0 = 2 - \frac{10}{n} \rightarrow n = 5 \text{ 와 } 1 = 2 - \frac{10}{n} \rightarrow n = 10$$

에서 유효한 직선 $y = 2 - \frac{x}{n}$ 의 기울기는 $-\frac{1}{5} \leq -\frac{1}{n} < -\frac{1}{10}$ 에서

$5 \leq n < 10$ 이므로 만족하는 자연수는 $n = 5, 6, 7, 8, 9$ 이다. 따라서 답은 ⑤ 5이다.

※ 만약 정의역이 $\{x \mid 1 \leq x \leq 100\}$ 였다면 그래프에 점 $(100, 0)$ 이 포함 상태로 추가 되어서 $n = 50$ 도 고려해야 하지만, 출제자가 문제를 너무 암전하게 냈다.

2012년 06월 평가원 수리(가형) 30번

sol)

이때만 하더라도 문이과 할 것 없이 수리 영역 킬러 문제는 주로 지수로그 파트가 도맡았었다. 소위 ‘발견적 추론’이라 해서 실전에서 문제 해결에 적합한

발상을 떠올리면 풀고, 아니면 못 푼다는 식이어서 수험생들에게 상당히 스트레스를 주었던 유형이기도 하다.

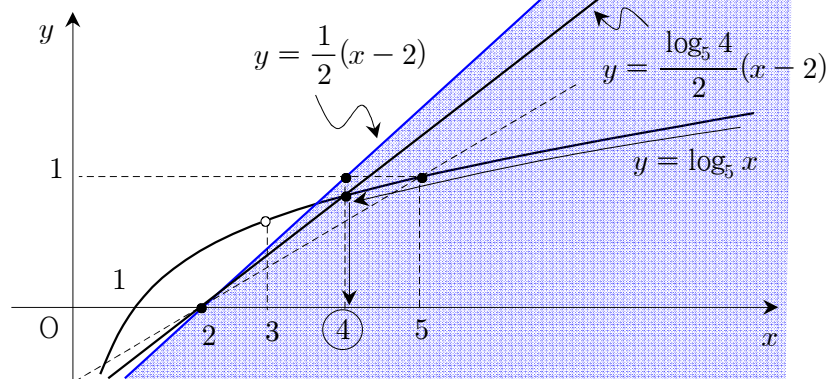
우선 (나) 조건을 있는 그대로 식 세워 보자면

$$\frac{\log_n a - 0}{a - 2} \leq \frac{1}{2}$$

가 되고, ‘예를 들어’ 부분을 확인하자면

$$\frac{\log_5 a - 0}{a - 2} \leq \frac{1}{2}$$

를 만족하는 가장 작은 자연수가



$a = 4$ 임을 알 수 있다. 만약 $a = 5, 6, 7, \dots$ 이면 두 점

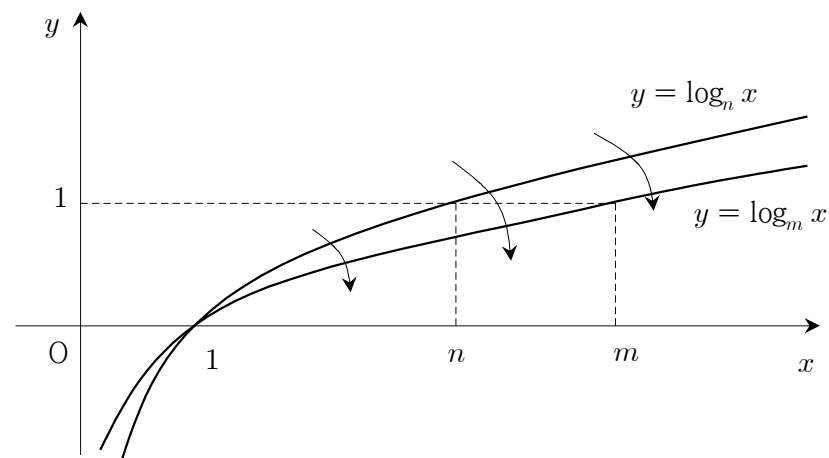
$(2, 0), (a, \log_5 a)$ 을 잇는 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 보다는 작아지기는 하지만 4가

최소의 값이다. 이렇듯 로그함수를 기울기와 연관지어 해석하라는 것이 출제 의도이기에 차라리 PART.B 에서 다루었어야 하는 문제이지만;;

$$\frac{\log_n a - 0}{a - 2} \leq \frac{1}{2} \text{ 내지는 } \log_n a \leq \frac{1}{2}(a - 2)$$

상태에서 추론해야지 $a^2 \leq n^{a-2}$ 와 같은 변형을 통한 해석은 의미가 없다.

이제 $\log_n a \leq \frac{1}{2}(a - 2)$ 를 이용하여 풀어보자.



로그함수 $y = \log_n x$ 은 점 $(1, 0)$ 이외에도 항상 점 $(n, 1)$ 도 지나야 하므로,

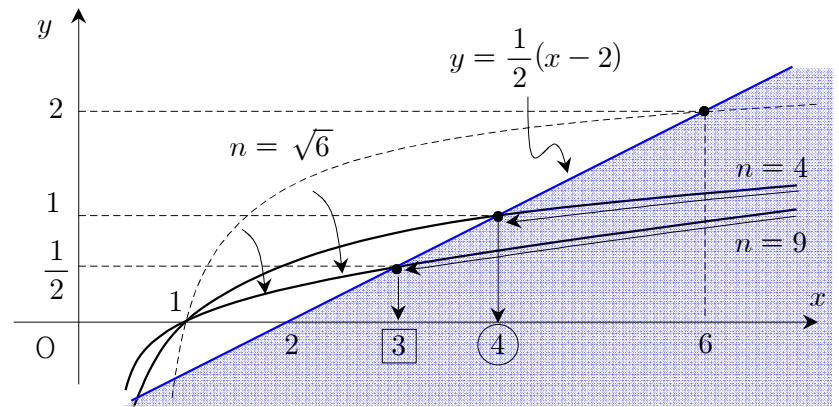
예를 들어 자연수 $n < m$ 에 대하여 $y = \log_n x$ 와 $y = \log_m x$ 라는 두 그래프를 비교해보면 바람부는 들판의 풀잎들 마냥 밑이 커질수록 $x > 1$ 에서 로그함수 그래프가 더 낮게 된다.

그런데 ‘예를 들어’ 부분에서 자연수 밑인 n 을 아무리 변화시켜봤자 직선

$y = \frac{1}{2}(x - 2)$ 와의 교점 좌표가 딱딱 구체적인 값으로 맞아떨어지지

않았기에 발상을 전환해서 $y = \frac{1}{2}(x - 2)$ 위의 예쁜 점들, 가령 점

$(4, 2), (6, 3)$ 등을 지나는 순간의 로그함수의 밑을 조사해보자. 직선은 가만히 고정시켜 둔 채 로그함수의 밑 $n > 3$ 을 변화시켜가자는 아이디어인 셈이다. 그리고 이는 수능 킬러 문항을 예고한 것이다.



점 $(6, 2)$ 를 지나는 로그함수 $y = \log_n x$ 에서 $n = \sqrt{6}$ 이고,

점 $(4, 1)$ 을 지나는 로그함수 $y = \log_n x$ 에서 $n = 4$ 이고,

점 $(3, \frac{1}{2})$ 을 지나는 로그함수 $y = \log_n x$ 에서 $n = 9$ 이다.

이때, $n > 3$ 인 자연수이므로 $n = 4, 5, 6, \dots$ 중에서 생각하면 되고,

밑인 n 이 커질수록 x 축에 가까이 놓게 되므로

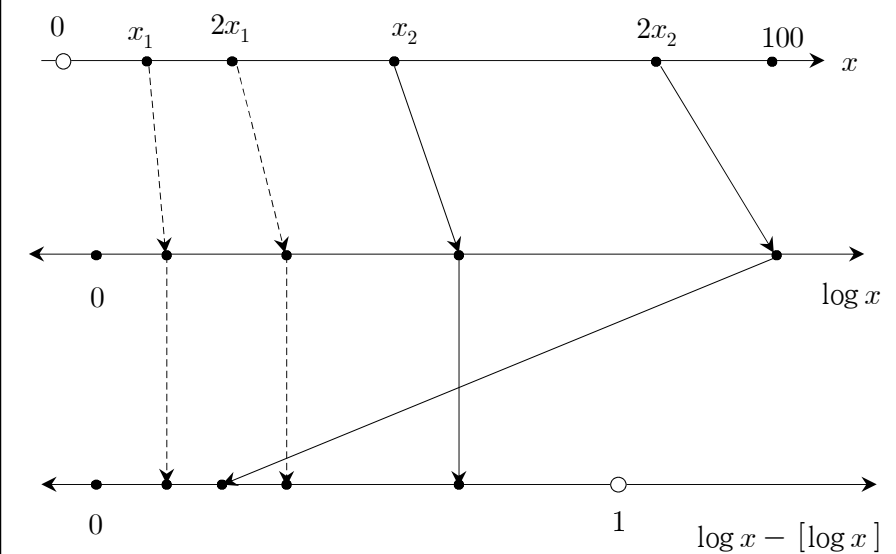
$4 \leq n < 9$ 일 때는 $f(n) = 4$ 이고, $n \geq 9$ 일 때는 $f(n) = 3$ 이 된다.

따라서 $\sum_{n=4}^{30} f(n) = 5 \times 4 + 22 \times 3 = 86$ 이 답이다.

2012년 06월 평가원 수리(나형) 21번

sol)

$f(x)$ 가 상용로그 $\log x$ 의 가수라 하였고, 100 미만 자연수 x 에 대하여 $f(2x) \leq f(x)$ 라는 것은 곧 $2x$ 의 숫자 배열이 x 의 숫자 배열보다 작거나 같아란 의미가 된다. 아마도 두 배 하면서 자릿수가 늘어나는 경우일 것이다.



$f(2x) \leq f(x)$ 를 $\log 2x - [\log 2x] \leq \log x - [\log x]$ 로 풀어도 되는데, 그러면 $[\log x]$ 와 $[\log 2x]$ 가 정수가 되는 지점 $x = 1, 5, 10, 50, 100$ 로서 경계로 잡아야 해서 4개의 구간을 잡아

(i) $1 \leq x < 5$

(ii) $5 \leq x < 10$

(iii) $10 \leq x < 50$

(iv) $50 \leq x < 100$

범위에서 가우스 기호를 정수로 고쳐서 풀려면 귀찮기도 하거니와 $2x$ 와 x 의 숫자 배열로서 접근하는 것이 더 효율적이다. 그러면 통째로 (i), (iii)의 경우는 성립하지 않고, (ii), (iv)의 경우는 가령 $x = 80$ 의 숫자 배열보다 $2x = 160$ 의 숫자 배열이 작기 때문에 모두 성립하게 된다. 따라서 가능한 자연수 x 는 $(10 - 5) + (100 - 50) = 55$ 개 존재한다. 답은 그러면 ① 55이다.

2012년 07월 교육청 수리(나형) 21번

sol)

$10^3 \leq t < 10^4$ 에서 $3 \leq \log t < 4$ 이고, 등호 포함에 주의할 것!

$$\begin{cases} 6 \leq \log t^2 < 8 \rightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{1}{4}f(t^2) \leq 2 \\ -4 < \log \frac{1}{t} \leq -3 \rightarrow -2 \leq \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{t}\right) \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$$

에서 $f(t^2) = 6, 7$ 의 값을 취할 수 있고, $f\left(\frac{1}{t}\right) = -3, -4$ 의 값을 취할 수 있다. 그리고 t 값의 범위에 따라

$$f(t^2) = [\log t^2] \text{ 이나 } f\left(\frac{1}{t}\right) = \left[\log \frac{1}{t}\right] \dots *$$

모두 정수로서 $\frac{1}{4}f(t^2) - \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{t}\right)$ 역시 고정된 값을 취할 것이기 때문에

$$y = \log x \text{ 와 } y = \frac{1}{4}(\log x^2 - [\log x^2]) - \frac{1}{2}\left(\log \frac{1}{x} - \left[\log \frac{1}{x}\right]\right) \text{의}$$

그래프를 통해 교점을 찾아주는 무모한 짓을 하기 보다는

*의 값이 바뀌는 지점을 경계로 t 값 범위를 나누어 생각하는 것이 바람직하다. 그러면

$$\begin{cases} f(t^2) = [\log t^2] = 6 \Leftrightarrow 3 \leq \log t < \frac{7}{2} \\ f(t^2) = [\log t^2] = 7 \Leftrightarrow \frac{7}{2} \leq \log t < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{t}\right) = \left[\log \frac{1}{t}\right] = -3 \Leftrightarrow \log t = 3 \\ f\left(\frac{1}{t}\right) = \left[\log \frac{1}{t}\right] = -4 \Leftrightarrow 3 < \log t < 4 \end{cases}$$

이 되고 이를 토대로 표를 만들어보면 다음과 같다.

$\log t$	3	...	$\frac{7}{2}$	...	(4)
$f(t^2)$	6	6	7	7	
$f\left(\frac{1}{t}\right)$	-3	-4	-4	-4	
$\log t$	3	$\frac{7}{2}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	
필터링	O	X	O	O	

따라서 만족하는 모든 실수 t 의 곱은 $10^{3 + \frac{15}{4}} = A$ 이고,

$$4 \log A = 4\left(3 + \frac{15}{4}\right) = 12 + 15 = 27 \text{이 답이 된다.}$$

※ 마치 증감표 그리듯 표를 통해 확인하는 것과, 무연근 확인하듯 마지막에 필터링 해주는 과정이 까다로운 편이고, 이 문제가 지금껏 다른 문제 중에서 최초로 필터링(=검산) 시에 걸러지는 것이 발생하는 경우이다.

즉, $\log t = 3$ 으로 잡으면 $f(t^2) = 6, f\left(\frac{1}{t}\right) = -3$ 이 되어

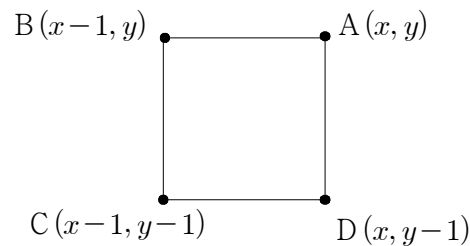
$$\log t = \frac{1}{4}f(t^2) - \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{t}\right) = 3 \text{으로 회귀하는 반면,}$$

$$\log t = \frac{7}{2} \text{로 잡아 버리면 } f(t^2) = 7, f\left(\frac{1}{t}\right) = -4 \text{가 되어 } f(t^2) = 6 \text{에도}$$

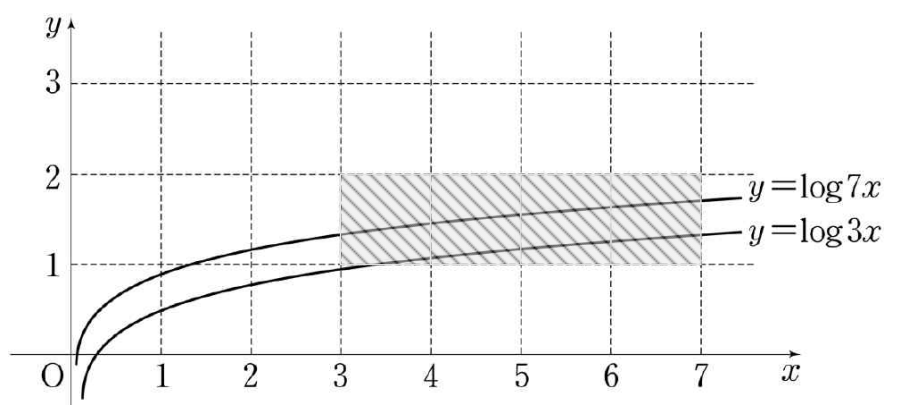
$$\text{모순일 뿐더러, } \log t = \frac{1}{4}f(t^2) - \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{15}{4} \text{로 회귀하지 못한다.}$$

2012년 09월 평가원 수리(가형) 30번

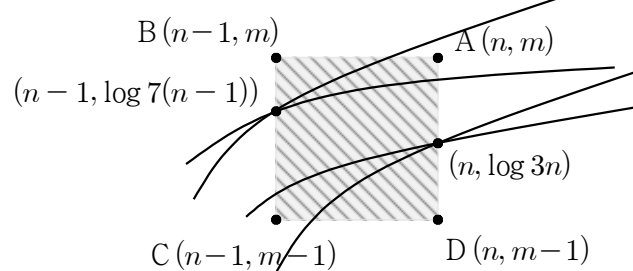
sol)



(가), (나) 조건을 만족하는 정사각형 ABCD에 대하여 편의상 점 A를 기준으로 생각하자. 그러면 모든 조건을 만족하는 정사각형의 개수는 가능한 격자점 A의 개수와 일치한다. 또 주어진 그림 내에서 사각형들을 관찰해보면



두 함수 $y = \log 3x, y = \log 7x$ 와 모두 만나는 사각형들의 특징이, 변 BC 상에 $y = \log 7x$ 와의 교점 $(n-1, \log 7(n-1))$ 과 변 AD 상에 $y = \log 3x$ 와의 교점 $(n, \log 3n)$ 이 존재한다는 것이다.



그리고 $[\log 7(n-1)] = [\log 3n] (= m-1)$ 이 성립한다.

이때 $n \geq 4, m \geq 2$ 에 주의하자.

이제 자연스럽게 $[\log 7x]$ 와 $[\log 3x]$ 의 값이 달라지는 경계인 x 값을 관찰해 볼 필요가 생겼다. (나) 조건을 염두에 두면 $[\log 7x]$ 의 경계로 $7x = 10, 100$ 과 $[\log 3x]$ 의 경계로 $3x = 10, 100$ 이 가능하고 이를 표로 나타내어보면 다음과 같다. $x = n-1$ 과 $x = n$ 의 처리를 하는 것이 관건!

x	1	2	3	4	5	$\dots$	
$\lceil \log 7(x-1) \rceil$		0	1	1	1	1	
$\lceil \log 3x \rceil$	0	0	0	1	1	1	
x	15	16	$\dots$	33	34	$\dots$	100
$\lceil \log 7(x-1) \rceil$	1	2	2	2	2	2	2
$\lceil \log 3x \rceil$	1	1	1	1	2	2	2

따라서 $[\log 7(x-1)] = [\log 3x]$ 가 성립하는 유의미한 x 값은

$x = 4, 5, \dots, 15, 34, 35, \dots, 100$ 으로서 만족하는 정사각형들의 개수는 $(15 - 4 + 1) + (100 - 34 + 1) = 12 + 67 = 79$ 가 된다.

※ 이러한 발견적 추론 문제가 한편으론 숨은 그림 찾기 하듯 그 순간 컨디션의 영향을 많이 받는다. 따라서 이에 대비를 하려거든 뻔한 이야기이지만 만점에 대한 강렬한 목표의식에서 비롯된, 정말 정말 풀고자 하는 의지를 갖고서, 모의고사나 문제집 등을 통해 많이 많이 접해보고, 시도 때도 없이 고민해보고, 수학적 고뇌를 갖는 수 밖에 없다.

2012년 11월 대수능 수리(가형) 30번

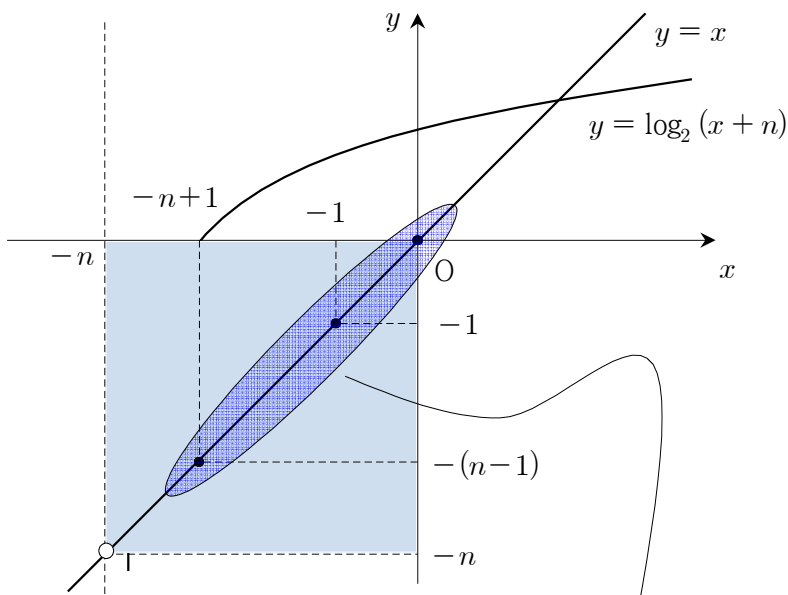
sol)

지수로그함수에 대한 관찰과, 정확한 카운팅 능력 등을 요하는 아주 좋은 문제이다. 어지간한 4점 문항 두 개를 결합한 인상을 많이 받았는데, 제1사분면 쪽에서 발생하는 점들의 패턴과, 제3사분면 쪽에서 발생하는 점들의 패턴이 다르기 때문이다.

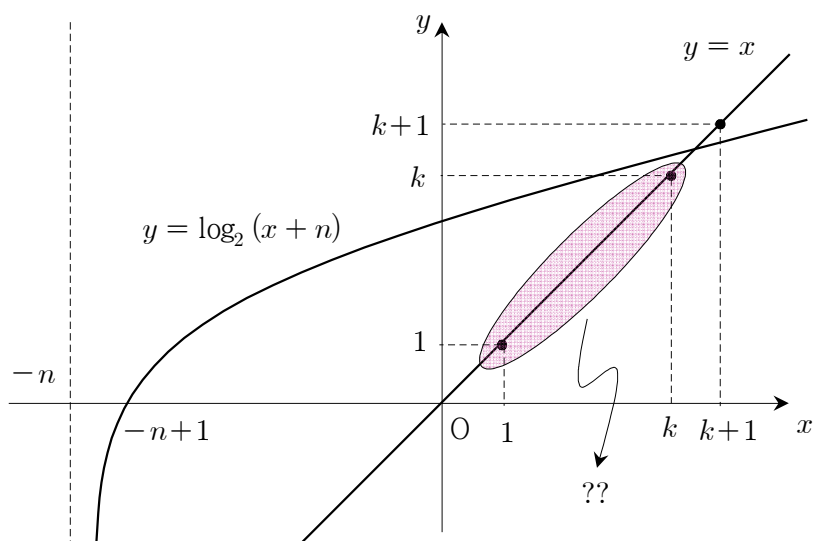
맨 먼저 상황을 간단하게 하기 위해 조작을 하나 하자. 즉, $y = 2^x - n$ 과 $y = \log_2(x + n)$ 이 서로 역함수 관계이며, (가) 조건에 의해 어차피 $y = x$ 상에서 다루어야 하므로, $y = \log_2(x + n)$ 와 $y = x$ 위주로 생각하자.

n 값이 변함에 따라 $y = 2^x - n$ 는 아래로 평행이동 하는 반면에 $y = \log_2(x + n)$ 는 왼쪽으로 평행이동 하고, 대개 우리는 글을 세로로 쓰기 보다는 가로로 쓰는 것에 익숙해져 있기 때문에 손이 가는 대로 $y = \log_2(x + n)$ 를 취했을 뿐이다.

다음으로 원점을 포함하고서, 다루기 쉬운 제3사분면 쪽을 구해보자.



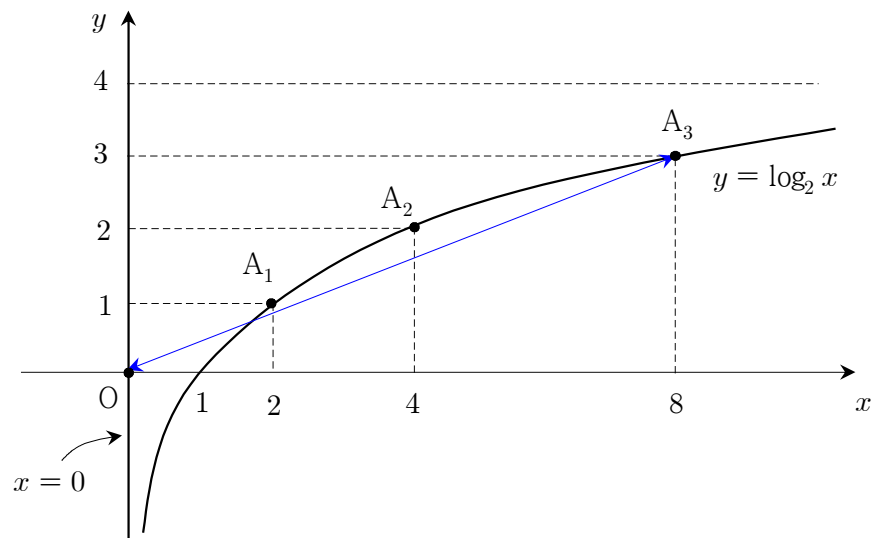
지수함수와 로그함수는 점근선을 갖고 있는데, 지금처럼 평행이동 하더라도 점근선 부근의 $-n < x < -n + 1$ 에서는 함숫값이 아주 빠르게 변한다. 따라서 원점을 포함하여 제3사분면 쪽에서 $y = \log_2(x + n)$ 과 $y = x$ 가 이루는 경계를 포함한 영역 내부에서 $x = y$ 인 점의 개수는 n 개가 된다. 다음으로 제1사분면 쪽에서 발생하는 점들을 마저 헤아려 보자. n 값들을 변화시켜가며 $y = \log_2(x + n)$ 과 $y = x$ 의 교점들을 관찰해보면 격자점이 되기도 하고 안 되기도 한다.



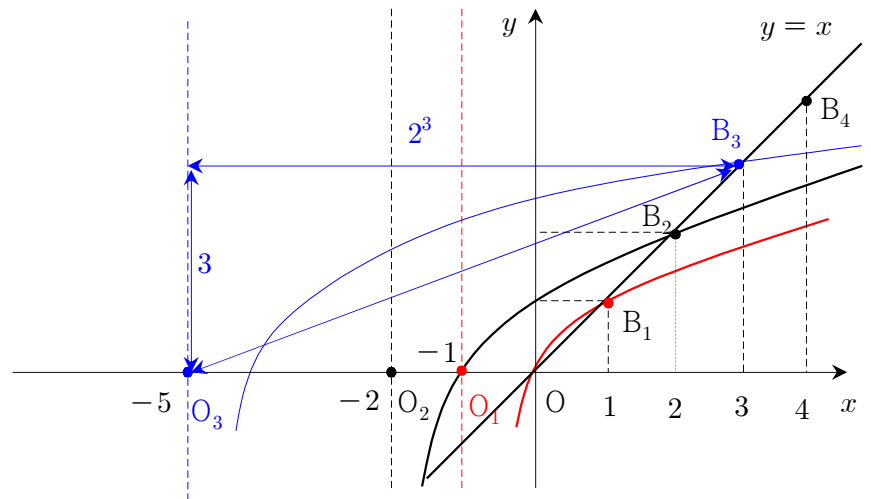
그래서 이번에는 발상을 뒤집어서, 2012년 06월 평가원 수리(가형) 30번에서 처럼, $y = \log_2(x + n)$ 과 $y = x$ 의 교점이 격자점이 되는 n 값을 먼저 찾자.

이를 위해 $y = \log_2 x$ 를 먼저 관찰해보자. 특히 $y = \log_2 x$ 상의 격자점

$A_m(2^m, m)$ 로부터, x 축과 점근선의 교점 $(0, 0)$ 은 y 좌표가 m 만큼 차이날 때, x 좌표는 2^m 만큼 차이가 난다는 것이 a_n 의 n 과 연결해주기 때문에 본래 문제를 해결하기 위한 헤아림의 강력한 도구가 된다.



이제 선분 OA_m 의 x, y 값 변화량 $\Delta x, \Delta y$ 를 $y = \log_2(x + n)$ 과 점근선 $x = -n$ 에 옮긴 선분 O_mB_m 적용해보자.



조금 더 효율적으로 찾기 위해 이번에도 표를 이용해보자.

$B_m(m, m)$	Δy	Δx	$O_m(0, m - 2^m)$	n
$B_1(1, 1)$	1	2	$(0, 1 - 2)$	1
$B_2(2, 2)$	2	4	$(0, 2 - 4)$	2
$B_3(3, 3)$	3	8	$(0, 3 - 8)$	5
$B_4(4, 4)$	4	16	$(0, 4 - 16)$	12
$B_5(5, 5)$	5	32	$(0, 5 - 32)$	27
$B_6(6, 6)$	6	64	$(0, 6 - 64)$	58

따라서 원점을 제외하고 제1사분면 쪽에서 $y = \log_2(x + n)$ 과 $y = x$ 가 이루는 경계를 포함한 영역 내부에서 $x = y$ 인 점의 개수는

$1 \leq n < 2$; $B_1(1, 1)$ 은 포함해도 $B_2(2, 2)$ 부터는 포함하지 않으니 1개
 $2 \leq n < 5$; $B_2(2, 2)$ 까지 포함해도 $B_3(3, 3)$ 부터 포함하지 않으니 2개
 $5 \leq n < 12$; $B_3(3, 3)$ 까지 포함해도 $B_4(4, 4)$ 부터 포함하지 않으니 3개
 $12 \leq n < 27$; $B_4(4, 4)$ 까지 포함해도 $B_5(5, 5)$ 부터 포함하지 않으니 4개
 $n = 27, 28, 29, 30$; $B_5(5, 5)$ 까지 포함해도 $B_6(6, 6)$ 부터 비포함이니 5개
 이므로 제1, 3사분면상의 점과 원점을 따로 취합해서 계산하면

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{30} a_n &= (1 + 2 + \cdots + 30) + (1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 15 \cdot 4 + 4 \cdot 5) \\ &= 465 + 108 = 573 \end{aligned}$$

2013년 03월 교육청 수학 영역(A형) 27번

sol)

$2f(m) - f(2m) = 1$ 이 가수가 아닌 지표에 관한 식이기 때문에 부등식 범위를 이용하여 풀기가 난해하다. 따라서, $f(m), f(2m)$ 이 모두 상용로그의 지표로서 정수이기 때문에 각각의 정수 값이 달라지는 m 값의 경계로 분할해보자. 그러면 $f(m)$ 값이 달라지는 경계는 $m = 10, 100, 1000$ 이고, $f(2m)$ 값이 달라지는 경계는 $m = 5, 50, 500$ 이므로 다음과 같은 표를 이용하여 생각할 수 있다.

m	$2f(m)$	$f(2m)$	$2f(m) - f(2m)$
1	0	0	0
$\vdots$	0	0	0
4	0	0	0
5	0	1	-1
$\vdots$	0	1	-1
9	0	1	-1
10	2	1	1
$\vdots$	2	1	1
49	2	1	1
50	2	2	0
$\vdots$	2	2	0
99	2	2	0
100	4	2	2
$\vdots$	4	2	2
499	4	2	2
500	4	3	1
$\vdots$	4	3	1
999	4	3	1
1000	6	3	3

따라서 만족하는 자연수 m 의 개수는

$$\therefore (49 - 10 + 1) + (999 - 500 + 1) = 540$$

※ 만약 이러한 표를 그리는 것이 너무나도 귀찮고 망설여진다면

$1 \leq m \leq 10^3$ 으로부터 $0 \leq f(m) \leq 3$ 이고 $0 \leq f(2m) \leq 3$ 에서 $2f(m) - f(2m) = 1$ 을 만족하는 순서쌍 $(f(m), f(2m)) = (1, 1), (2, 3)$ 에 대해서만 조사하여도 된다.

2013년 04월 교육청 수학 영역(A형) 28번

sol)

(나) 조건은 세 자연수 x, y, z 의 숫자 배열이 같음을, (가) 조건은 세 수 x, y, z 의 자릿수가 차이남을 의미한다. 그리고 (다) 조건으로부터 $(x, y, z) = (x, 10x, 100x)$ 라 하면 $111x = 15873 \rightarrow x = 143$ 임을 알 수 있고, $f(y) = [\log 1430] = 3, f(z) = [\log 14300] = 4$ 이므로 $x + f(y) + f(z) = 143 + 3 + 7 = 150$ 이 답이 된다.

2013년 06월 평가원 수학 영역(A형) 30번

sol)

$P_k([\log k], \log k - [\log k]) = ([\log k], \alpha_k)$ 라 하자. 그러면

$P_m([\log m], \alpha_m), P_n([\log n], \alpha_n)$ 이라 할 수 있고, α_m, α_n 모두

상용로그의 가수로서 0 이상, 1 미만이다. 그런데 (나) 조건에 의해서

$$1 + (\log 2)^2 = ([\log m] - [\log n])^2 + (\alpha_m - \alpha_n)^2$$

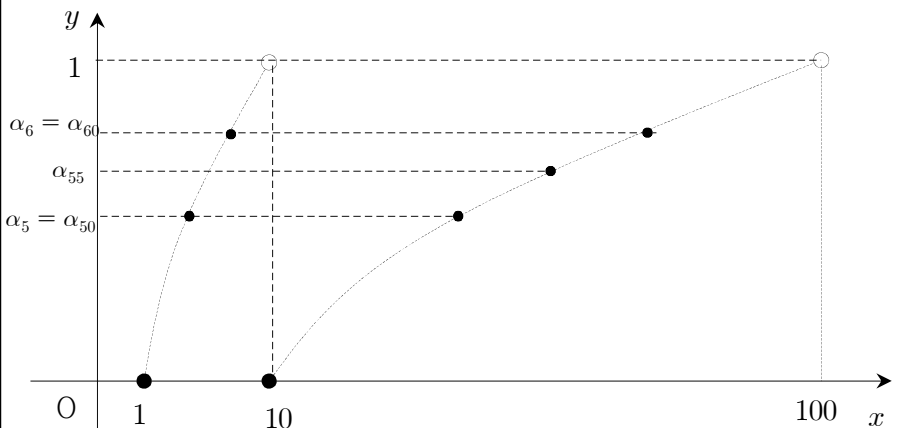
가 되고 $(\alpha_m - \alpha_n)^2 < 1$ 이므로 $([\log m] - [\log n])^2 = 1$ 일 수 밖에 없고

따라서 $(\alpha_m - \alpha_n)^2 = (\log 2)^2$ 가 된다.

그런데, (가) 조건에서 $1 \leq m < n < 100$ 이라 하였으므로

$([\log m] - [\log n])^2 = 1$ 을 성립시키려면 $1 \leq m < 10 \leq n < 100$ 일 수 밖에 없다.

이제 $(\alpha_m - \alpha_n)^2 = (\log 2)^2 \Leftrightarrow \alpha_m - \alpha_n = \pm \log 2$ 를 해석하기 위해 상용로그의 가수 그래프 $y = \log x - [\log x]$ 를 살펴보도록 하자.



그러면 점 $(\log m, \log m - [\log m]), m = 1, 2, 3, \dots, 9$ 는

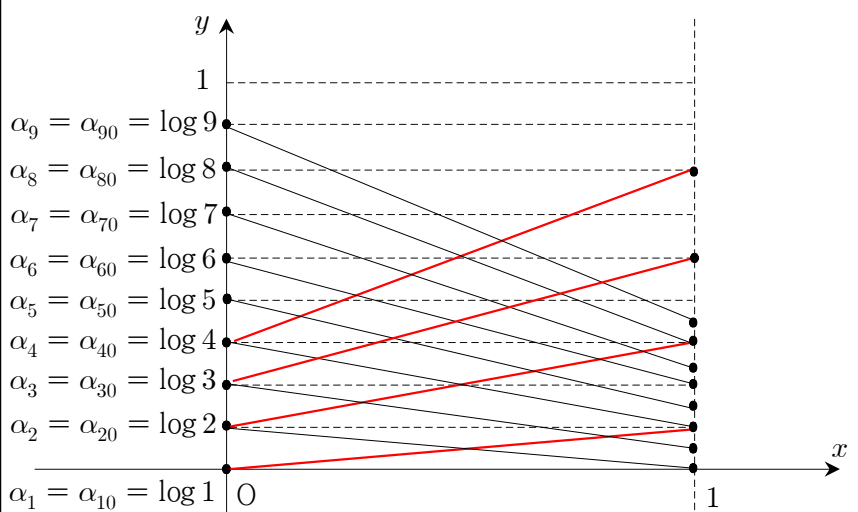
$y = \log x - [\log x]$ 에서 $1 \leq x < 10$ 인 구간 상에 찍히는 9개의 점이고, 그 점들의 y 좌표가 곧 $\alpha_m = \log m - [\log m]$ 에 해당한다.

그리고 점 $(\log n, \log n - [\log n]), n = 10, 11, 12, \dots, 99$ 는

$y = \log x - [\log x]$ 에서 $10 \leq x < 100$ 인 구간 상에 찍히는 90개의 점이고, 그 점들의 y 좌표가 곧 $\alpha_n = \log n - [\log n]$ 에 해당한다.

이때 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_9\} \subset \{\alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{99}\}$ 가 되는데, 이에 주의하여 $\alpha_m - \alpha_n = \pm \log 2$ 을 헤아려 보자.

실제 $P_m([\log m], \alpha_m)$ 을 좌표평면상에 찍어보면 다음과 같이 y 축, 즉 $x = 0$ 상에 9개의 점들로 나타날 것이다.



먼저 P_m 의 y 좌표보다 P_n 의 y 좌표가 $\log 2$ 만큼 더 큰 것으로는 4가지가 가능하다. 그리고 P_m 의 y 좌표보다 P_n 의 y 좌표가 $\log 2$ 만큼 더 작은 것으로는, P_n 이 존재할 수 있는 높이가 P_m 이 존재할 수 있는 높이를 포함하면서 훨씬 촘촘하게, 직선 $x = 1$ 상에 90개의 점으로 존재하므로, 8가지가 가능하다. 이를 표로 나타내면 다음과 같다.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	20	40	60	80					
		10	15	20	25	30	35	40	45

따라서 만족하는 순서쌍 (m, n) 의 개수는 $4 + 8 = 12$ 이다.

2013년 06월 평가원 수학 영역(B형) 17번

sol)

무작정 계산하기 전에 $a \geq 2$ 값에 따라 A, B의 좌우 위치가 반전될 수도 있지는 않은지 체크해보자.

$a = 2$ 일 때 A의 y 좌표는 $2^2 = 4$ 이고, B의 y 좌표는 $15 \cdot 2^{-2} = \frac{15}{4}$

이므로 적어도 $a \geq 2$ 이면 점 A가 점 B의 오른쪽에 위치할 것이다.

따라서 $A(a, 2^a)$ 와 $B(x, 15 \cdot 2^{-x})$ 의 y 좌표가 같다고 مطمئن히 식을 세워보면

$$2^a = \frac{15}{2^x} \rightarrow 2^x = \frac{15}{2^a} \rightarrow x = \log_2 \frac{15}{2^a}$$

가 되고

$$\overline{AB} = a - \log_2 \frac{15}{2^a} = a - (\log_2 15 - a) = 2a - \log_2 15$$

를 $1 < \overline{AB} < 100$ 와 연립해보면

$$1 < 2a - \log_2 15 < 100 \Leftrightarrow 2a - 100 < \log_2 15 < 2a - 1$$

가 된다. 한편, $\log_2 15 < \log_2 16 = 4$ 로부터 $\log_2 15 = 3. \dots$ 임을 대입해서 부등식을 정리해보면

$$2. \dots < a < 51. \dots$$

가 되므로 만족하는 자연수 $a = 3, 4, 5, \dots, 51$ 이므로 총 $51 - 3 + 1 = 49$ 개가 존재한다. 따라서 답은 ④ 49이다.

※ 만약 1 이상의 자연수 a 에 관해 물어 보았다더라면 남시 문항이 되었을 수도 있었지만 아쉽게도 그런 일은 일어나지 않았다.

2013년 06월 평가원 수학 영역(B형) 26번

sol)

특히 (나) 조건에서 $1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} \rightarrow a_{n+1} < a_n$ 을 이용하면 수열 $\{a_n\}$ 은

감소하는 양수들의 수열임을 알 수 있다. 그리고 $\log a_n$ 과 $\log a_{n+1}$ 의 가수가 같다는 말의 의미는 a_n 과 a_{n+1} 의 숫자 배열이 같다는 것을

의미하므로 결국 수열 $\{a_n\}$ 의 공비가 $0.1 = \frac{1}{10}$ 이 되어야 한다. 따라서,

$$\{a_n\} : a_1, \frac{a_1}{10}, \frac{a_1}{10^2}, \dots$$

와 같은 꼴이 되고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 500 = \frac{a_1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}a_1$ 이므로

$$a_1 = 500 \times \frac{9}{10} = 450 \text{이 답이 된다.}$$

※ (가) 조건으로부터 부등식을 이용해서 $\log a_n - \log a_{n+1} = N$ 이고 N 은 정수라 한다면 (나) 조건에서 다시 $0 < N < 2$ 가 되어 $N = 1$ 로 고정된다.

따라서 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 10^N = 10$ 으로 $a_{n+1} = a_1 \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}$ 을 이끌어 낼 수 있다.

2013년 07월 교육청 수학 영역(A형) 29번

sol)

$\log 2x + \log 4x + \log 6x + \log 8x + \log 10x$ 의 지표가 12라는 것이

아니라 $\log 2x, \log 4x, \log 6x, \log 8x, \log 10x$ 각각의 지표의 합이 12, 즉 $[\log 2x] + [\log 4x] + [\log 6x] + [\log 8x] + [\log 10x] = 12$ 라는 것에

주의하자.

생각해보면 지금까지 $\log x = n + \alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$)에서 다시 α 값을 나누어서 푼 적이 없었는데, 지금도 다른 방법을 이용해서 접근해보자.

상용로그의 지표란 곧 상용로그 취하기 전 숫자의 자리수 내지는 소수점 위치와 관련되어 있으므로, $2x, 4x, 6x, 8x, 10x$ 가 각각 지표를 2, 2, 2, 3, 3씩 나누어 가져야 하기에 각각 세 자리, 세 자리, 세 자리, 네 자리, 네 자리 수가 되어야 한다. x 가 만약 n 자리 수라 할 때, $2x$ 와 10의 자리수 차이가 기껏해야 하나밖에 나지 않기 때문이다. 따라서, 각각의 자리수 조건을 만족하도록 부등식을 연립해서 자연수 x 를 찾으면 된다. 그러면

$$\begin{cases} 100 \leq 2x < 1000 \rightarrow x = 50, \dots, 499 \\ 100 \leq 4x < 1000 \rightarrow x = 25, \dots, 249 \\ 100 \leq 6x < 1000 \rightarrow x = 17, \dots, 166 \\ 1000 \leq 8x < 10000 \rightarrow x = 125, \dots, 1249 \\ 1000 \leq 10x < 10000 \rightarrow x = 100, \dots, 999 \end{cases}$$

가 되어 이를 동시에 만족하는 자연수 x 는 $x = 125, \dots, 166$ 이므로 총 $166 - 125 + 1 = 42$ 개 존재한다.

2013년 07월 교육청 수학 영역(B형) 30번

sol)

$$\log \frac{1}{k^n} = -n \times \log k = -n \times (1.08)$$

에서 n 이 모든 자연수를 다 취할 수 있으므로 하나씩 넣어보면서 규칙을 파악해보자. 단, 상용로그의 가수는 0 이상 1 미만이라는 조건을 상기하면서,

$$n = 1 ; -1.08 = \overline{2.92}$$

$$n = 2 ; -2.16 = \overline{3.84}$$

$$n = 3 ; -3.24 = \overline{4.76}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$n = 12 ; -12.96 = \overline{13.04}$$

$$n = 13 ; -14.04 = \overline{15.96}$$

$$n = 14 ; -15.12 = \overline{16.88}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$n = 24 ; -25.92 = \overline{26.08}$$

$$n = 25 ; -27.00 = \overline{27.00}$$

$$n = 26 ; -28.08 = \overline{29.92}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

이런 식으로 25개의 연이은 자연수 값에 대해서 $\log \frac{1}{k^n}$ 의 가수들이 주기를

이룬다. 따라서 답은

$$\begin{aligned} \frac{0 + 4 + 8 + 12 + \dots + 96}{100} &= \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 24}{25} \\ &= \frac{24 \cdot 25}{2} \times \frac{1}{25} = 12 \end{aligned}$$

※ 실제 시험 때는 가수가 0.08씩 줄어드는 상황을 포착은 하였으나 가수가 줄어들다가 리필되는 상황을 고려하지 않아서, 가수가 총 12종류라 생각하고 계산을 쪽 했다가

$$\frac{4 + 12 + \dots + 92}{100} = \left(\frac{4 + 92}{2} \cdot 12 \right) \times \frac{1}{100}$$

가 자연수가 아니라서 문제 잘못된 게 아니냐고 멘붕했던 학생들도 제법 있었다.

2013년 07월 사관학교 수학 영역(A형) 20번

sol)

$$\sum_{k=1}^{10} f(2^k) = \sum_{k=1}^{10} 2^k = \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2^{11} - 2 = 2046 \text{ 으로 금방 구할 수}$$

있으나 문제는 로그의 정수 부분이다. $f(\log_2 k) = [\log_2 k]$ 로서 값이

달라지는 k 값은 $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{10}, 2^{11}$ 이다. 따라서,

$$2^1 \leq k < 2^2 \text{ 일 때, } f(\log_2 k) = [\log_2 k] = 1$$

$$2^2 \leq k < 2^3 \text{ 일 때, } f(\log_2 k) = [\log_2 k] = 2$$

$$2^3 \leq k < 2^4 \text{ 일 때, } f(\log_2 k) = [\log_2 k] = 3$$

$$2^4 \leq k < 2^5 \text{ 일 때, } f(\log_2 k) = [\log_2 k] = 4$$

$$2^5 \leq k < 2^6 \text{ 일 때, } f(\log_2 k) = [\log_2 k] = 5$$

$$2^6 \leq k < 2^7 \text{ 일 때, } f(\log_2 k) = [\log_2 k] = 6$$

$$2^7 \leq k < 2^8 \text{ 일 때, } f(\log_2 k) = [\log_2 k] = 7$$

$$2^8 \leq k < 2^9 \text{ 일 때, } f(\log_2 k) = [\log_2 k] = 8$$

$$2^9 \leq k < 2^{10} \text{ 일 때, } f(\log_2 k) = [\log_2 k] = 9$$

$$k = 2^{10} \text{ 일 때, } f(\log_2 k) = [\log_2 k] = 10$$

이므로 이를 또 취합해보면

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{1024} f(\log_2 k) &= 1 \cdot (2^2 - 2^1) + 2 \cdot (2^3 - 2^2) + 3 \cdot (2^4 - 2^3) \\ &\quad + \dots + 9 \cdot (2^{10} - 2^9) + 10 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \dots + 9 \cdot 2^9 + 10 = S \end{aligned}$$

라는 먹금수 형태가 등장하고, S 에 공비 2를 곱해서 빼주면

$$S = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + 9 \cdot 2^9 + 10$$

$$\begin{array}{r} 2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \dots + 8 \cdot 2^9 + 9 \cdot 2^{10} + 10 \cdot 2 \\ \hline -S = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^9 - 9 \cdot 2^{10} - 10 \end{array}$$

즉, $S = 10 + 9 \cdot 2^{10} - (2^1 + 2^2 + \dots + 2^8 + 2^9)$ 이 된다. 다행히도

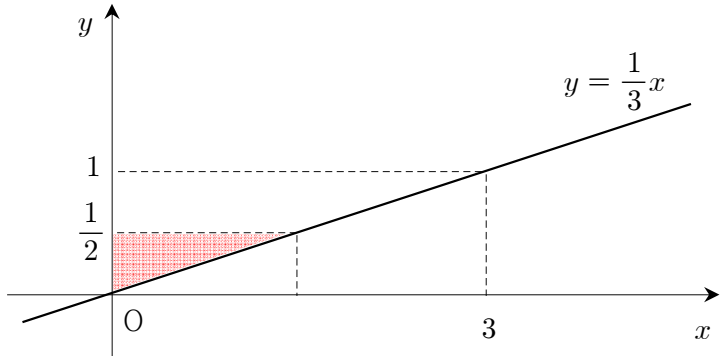
$$2^1 + 2^2 + \dots + 2^{10} = \sum_{k=1}^{10} 2^k \text{ 이므로 구하고자 하는 값은}$$

$$S + (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{10}) = 10 + 9 \cdot 2^{10} + 2^{10} = 10(1 + 2^{10}) = 10250$$

이 된다.

2013년 07월 사관학교 수학 영역(B형) 30번

sol)



해당 범위에서 $f(n) = 0, 1$ 만 가능하다.

$$f(n) = 0 \text{ 이면 } 0 \leq g(n) \leq \frac{1}{2} = 0.5 \text{ 가 되고, 한 자리 자연수 중에서}$$

상용로그의 가수가 0과 0.5 사이인 값은 $n = 1, 2, 3$ 뿐이다.

$$\text{그리고 } f(n) = 1 \text{ 이면 } \frac{1}{3} \leq g(n) \leq \frac{1}{2} \text{ 이 되고, 두 자리 자연수 중에서}$$

상용로그의 가수가 $\frac{1}{3} = 0.33 \dots$ 와 0.5 사이인 것은 22, 23, $\dots$, 31 뿐이다.

따라서 만족하는 자연수 n 의 개수는 $3 + 10 = 13$ 이다.

2013년 09월 평가원 수학 영역(A형) 20번

sol)

$n < \log a < n + 1$ 이고,

$\log a + \log \sqrt[n]{a} = \frac{n+1}{n} \log a$ 가 정수이므로 이를 연립하여

$$n + 1 < \frac{n+1}{n} \log a < \frac{(n+1)^2}{n} = n + 2 + \frac{1}{n^2}$$

로부터

$$\frac{n+1}{n} \log a = n + 2 \rightarrow \log a = \frac{n(n+2)}{n+1}$$

한편, $(n+1) \log a = n^2 + 8$ 이라 하였으므로

$$(n+1) \log a = (n+1) \cdot \frac{n(n+2)}{n+1} = n^2 + 8$$

에서 $n = 4, \log a = \frac{24}{5}$ 가 나온다. 따라서 답은 ④ $\frac{6}{5}$ 이다.

2013년 09월 평가원 수학 영역(A형) 30번

sol)

보자마자 주어진 부등식의 좌변이 인수분해 되는데,

$(2^k - 2^n)(2^k - 4^n) \leq 1$ 이라 정리해봤자 그닥 유용한 관계가 보이질 않는 것처럼 보이나 차분하게 $n = 1, 2, 3, \dots$ 를 대입해보면 규칙이 보인다.

여기서 우변이 0이 아니기 때문에 실마리를 못 잡은 학생들도 제법 있었다.

변수 관계가, 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식을 만족시키는 모든 자연수 k 의 합을 다시 a_n 이라 정의해줬으므로 n 값에 따른 k 값들을

구해야 하는 것이 옳다. 그러면 $4^n = 2^{2n}$ 으로 생각했을 때,

$n = 1$ 이면, $(2^k - 2^1)(2^k - 2^2) \leq 1$ 에서

$k = 1, 2$ 이면 좌변이 0이 되어 항상 성립하지만

$k = 3, 4, 5, \dots$ 들에 대해선 성립하지 않는다.

$n = 2$ 이면, $(2^k - 2^2)(2^k - 2^4) \leq 1$ 에서

$k = 2, 4$ 이면 좌변이 0이 되어 항상 성립하고

그 사이값인 $k = 3$ 에 대해서도 좌변이 음수가 되어 항상 성립하지만

그밖의 $k = 1, 5, 6, \dots$ 들에 대해선 성립하지 않는다.

$n = 3$ 이면, $(2^k - 2^3)(2^k - 2^6) \leq 1$ 에서

$k = 3, 6$ 이면 좌변이 0이 되어 항상 성립하고

그 사이값인 $k = 4, 5$ 에 대해서도 좌변이 음수가 되어 항상 성립하지만

그밖의 $k = 1, 2, 7, 8, \dots$ 들에 대해선 성립하지 않는다.

이로부터 주어진 부등식을 만족시키는 모든 자연수 k 값들의 합인 a_n 은 결국 n 부터 $2n$ 까지의 $(n+1)$ 개 자연수들의 합으로서

$$a_n = n + (n+1) + \dots + (2n-1) + 2n = \frac{3n}{2} \times (n+1)$$

이 된다. 따라서, 부분분수를 계산하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{20} \frac{2}{3n(n+1)} = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{20} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{21} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{40}{63}$$

가 되어 $p + q = 103$ 이 답이 된다.

2013년 10월 교육청 수학 영역(A형) 27번

sol)

$\frac{1}{100} = 0.01 \leq x \leq 100$ 의 범위에서 $f(x) = \log 3$ 이란 말은, x 의 숫자 배열이 3과 같다는 것을 의미하고, 이에 범위 내에서 소수점 위치만을 옮겨준 값으로 $x = 0.03, 0.3, 3, 30$ 의 4가지가 가능하다. 따라서 답은 4이다.

2013년 11월 대수능 수학 영역(A형) 14번

sol)

$f(mn) = f(m) + f(n)$ 은 $f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)이면 항상 성립하는 로그의 성질이다. 따라서 밑이 3으로 일정한 $f(1), f(3), f(5), \dots, f(19)$ 에 대해서 성립하고, 마찬가지로 밑이 2로 일정한 $f(2), f(4), f(6), \dots, f(20)$ 에 대해서도 당연히 성립한다. 그리고 이 때 가능한 순서쌍의 개수는 일단 $_{10}H_2 \times 2 = 10^2 \times 2 = 200$ 이다.

그런데 문제는 밑이 서로 다른 경우에 대해서도 고려해주어야 한다는 것이다.

가령, $(m, n) = (2, 3)$ 이면 $f(mn) = f(6) = \log_2 6$ 이지만,

$f(m) + f(n) = \log_2 2 + \log_3 3 = 2$ 가 되어 성립하지 않는다.

그럼에도 불구하고 이러한 관계식이 성립하기 위해서는,

$f(mn) = f(m) + f(n)$ 에서 m, n 중 적어도 하나가 1이 되는 것이다.

그런데 밑이 3으로 일정한 $f(1), f(3), f(5), \dots, f(19)$ 중에서 적어도 하나의 $f(1)$ 을 뽑는 경우는 앞서 헤아린 200에 포함되어 있으므로, m, n 중에 적어도 하나는 홀수인 1이고, 나머지 하나는 짝수가 되는 경우이다.

그러면 $(m, n) = (1, 2), (1, 4), \dots, (1, 20)$ 들에 대해

$f(m) = f(1) = \log_3 1 = 0$ 이므로

$$f(mn) = f(1n) = f(n)$$

$$f(m) + f(n) = f(1) + f(n) = 0 + f(n) = f(n)$$

로 $f(mn) = f(m) + f(n)$ 가 성립한다.

반대로, $(m, n) = (2, 1), (4, 1), \dots, (20, 1)$ 들에 대해서도 성립하므로

만족하는 순서쌍 (m, n) 의 개수는 $200 + 10 + 10 = 220$ 이 된다. 따라서 답은 ① 220이다.

2013년 11월 대수능 수학 영역(A형) 20번

sol)

문제를 보고서 $f(x), g(x)$ 는 각각 상용로그 $\log x$ 의 지표와 가수로서, $f(x)$ 의 정수 조건, $g(x)$ 의 가수 범위를 활용하겠다고 생각해야 한다. 그러면

$$0 \leq g(x) = \frac{f(x) - n}{n + 1} < 1$$

에서 다시 $f(x)$ 에 대해 정리해보면

$$n \leq f(x) < 2n + 1$$

이 되어 결국 $f(x) = n, n + 1, \dots, 2n$ 의 값을 취할 수 있다. 그때마다

$g(x)$ 는 $0, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{n}{n+1}$ 의 값을 취하므로,

$$\log x = f(x) + g(x) = (n + k) + \frac{k}{n + 1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

임을 알 수 있다. 이때 모든 x 의 값의 곱 a_n 에 대하여, x 가 총 $(n + 1)$ 개의 값이 있다고 했을 때 $a_n = x_0 x_1 x_2 \dots x_n$ 라 하면

$$\begin{aligned} \log a_n &= \log x_0 x_1 \dots x_n = \log x_0 + \log x_1 + \dots + \log x_n \\ &= \left(n + \frac{0}{n + 1} \right) + \left(n + 1 + \frac{1}{n + 1} \right) + \dots + \left(2n + \frac{n}{n + 1} \right) \\ &= n(n + 1) + \frac{n(n + 1)}{2} + \frac{1}{n + 1} \cdot \frac{n(n + 1)}{2} \\ &= \frac{3}{2} n(n + 1) + \frac{n}{2} = \frac{3}{2} n^2 + 2n \end{aligned}$$

이 된다. 따라서 $\frac{\log a_n}{n^2} = \frac{3}{2} + \frac{2}{n}$ 이므로 답은 ② $\frac{3}{2}$ 이다.

2013년 11월 대수능 수학 영역(A형) 30번

sol)

$y = 4^x$ 와 $y = 1$ 의 교점은 $(0, 1)$ 이고,

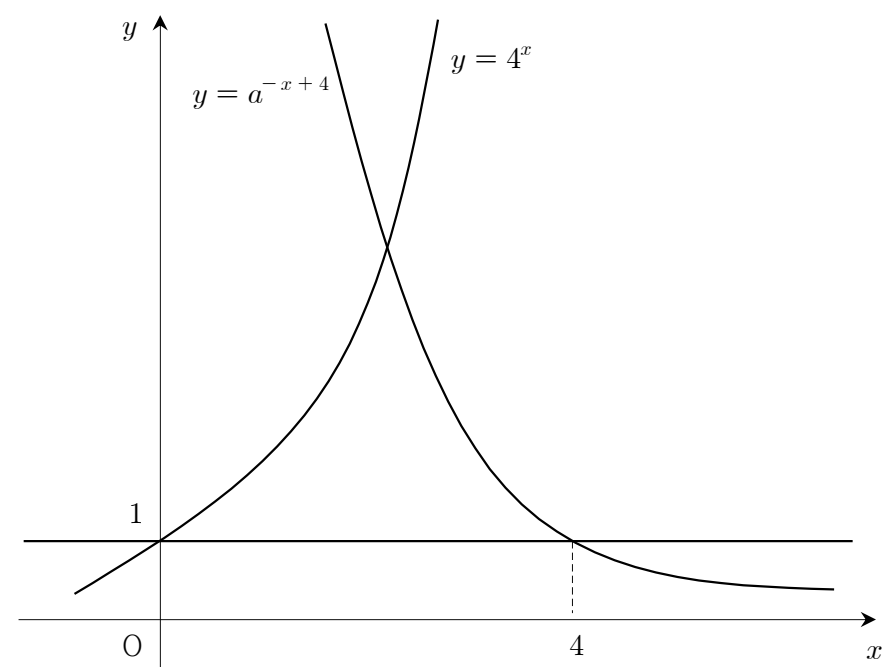
$y = a^{-x+4}$ 와 $y = 1$ 의 교점은 $(4, 1)$ 이다.

그리고, $y = 4^x$ 와 $y = a^{-x+4}$ 의 교점을 살펴보면,

$a = 4$ 일 때 두 곡선이 선대칭이 되어 $x = 2$ 에서 교점을 가지지만

$a = 2, 3$ 이면 $x = 2$ 의 왼쪽에서 교점을 갖고,

$a = 5, 6, 7, \dots$ 이면 $x = 2$ 의 오른쪽에서 교점을 갖게 된다.



이 문제 역시 앞선 기출문제들처럼 $y = a^{-x+4}$ 가 $y = 4^x$ 상의 격자점 $(1, 4), (2, 16), (3, 64)$ 를 지날 때의 a 값들로 분류해보자.

$y = a^{-x+4}$ 는 이미 $(4, 1)$ 을 지나므로 $y = 4^x$ 상의 격자점 중 $(0, 1)$ 이라든가 $(4, 256)$ 등은 고려하지 않고 세 점 $(1, 4), (2, 16), (3, 64)$ 를 지날 때만 따지면 된다.

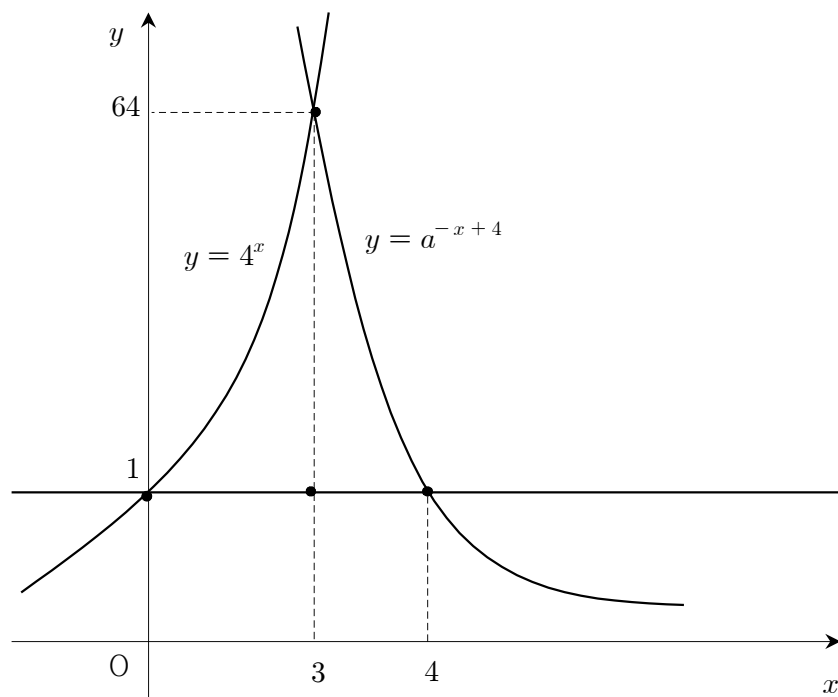
우선 $y = a^{-x+4}$ 가 점 $(3, 64)$ 를 지날 때, $64 = a$ 이고,

점 $(2, 16)$ 를 지날 때, $16 = a^2$ 에서 $a = 4$ 이고,

점 $(1, 4)$ 를 지날 때, $4 = a^3$ 이지만 a 가 자연수라는 조건에 위배된다.

그리고 눈치껏, $a = 64$ 일 때 조건을 만족하는 격자점이 40개가 될 것 같고, $a = 4$ 일 때 조건을 만족하는 격자점이 20개가 되어 $a = 4, 5, 6, \dots, 64$ 일 것이라 짐작할 수 있다. 하지만 이것은 어디까지나 추측에 불과하므로 한 번 확인해 볼 필요가 있다.

첫째로, $a = 64$ 일 때 격자점이 몇 개인지 헤아려 보자.



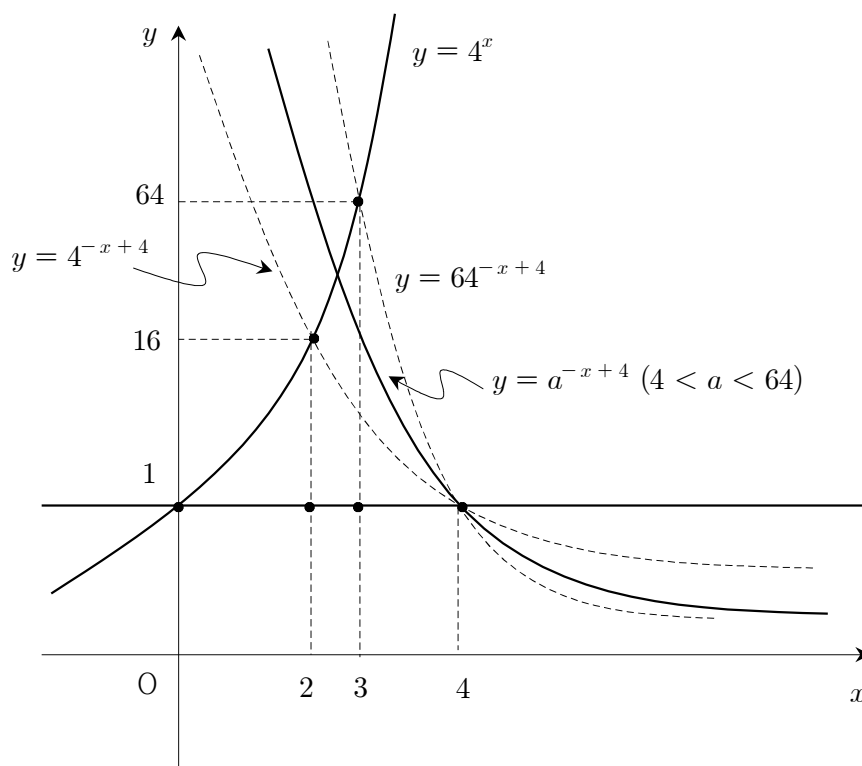
이때 격자점을 $x = k$ 를 따라 세로로 카운팅 하자. 그러면 $k = 0, 1, 2, 3$ 일 때는 $y = 4^x$ 를 보고, $k = 3, 4$ 일 때는 $y = a^{-x+4}$ 를 보고 헤아리면 된다.

- $x = 0$ 일 때 격자점은 $(0, 1)$ 로 1개뿐이고,
- $x = 1$ 일 때 격자점은 $(1, 1), \dots, (1, 4)$ 로 4개,
- $x = 2$ 일 때 격자점은 $(2, 1), \dots, (2, 16)$ 으로 16개,
- $x = 3$ 일 때 두 곡선의 교점이 $(3, 64)$ 이므로 64개,
- $x = 4$ 일 때 격자점은 $(4, 1)$ 로 1개 뿐이다.

하지만 이 경우 격자점의 총 개수가 40개를 훌쩍 넘어가 버리므로 통째로 패스하자. 즉, $a = 64$ 는 너무 크다.

두 번째로 $a = 4$ 일 때를 헤아려 보자. 이 경우 두 곡선 $y = 4^x$ 와 $y = a^{-x+4}$ 가 $x = 2$ 대칭이므로 격자점을 세기 수월하다. 그러면 $x = k$ 에서 $k = 0, 1, 2, 3, 4$ 상의 조건을 만족하는 격자점 개수는 $1 + 4 + 16 + 4 + 1 = 26$ 이 된다.

그래서, 문제를 너무 만만하게 보았다. 하지만 지금까지의 논의가 헛된 것은 아니다. 다시 가다듬고 문제를 생각해 보자. $a = 64$ 면 격자점 수가 턱없이 많아진다. 하지만 a 의 수치를 점점 줄여나가다 보면 40개에 걸리는 순간이 있을 것이고,

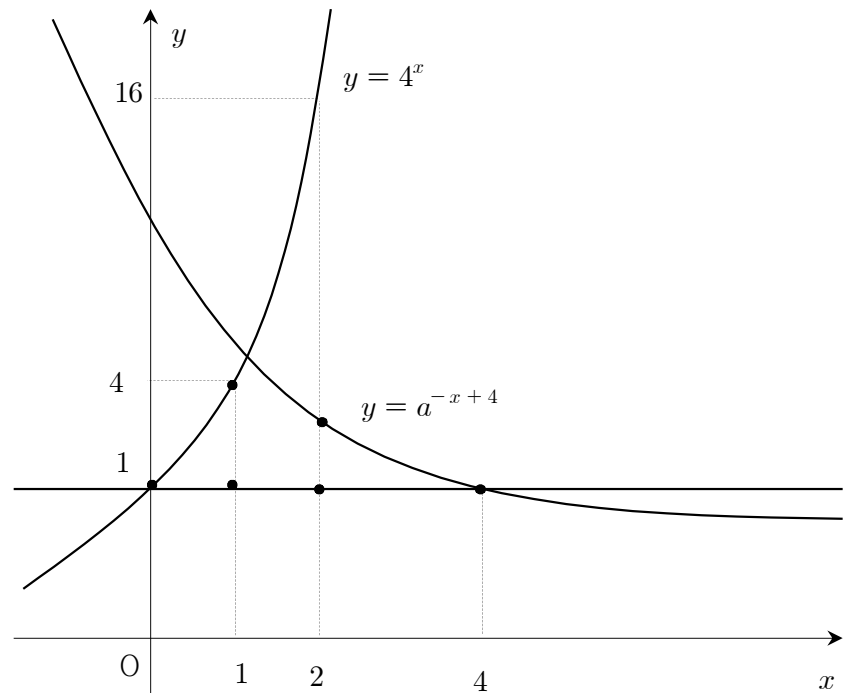


$a = 4$ 까지 떨어져야 비로소 두 곡선이 $(2, 16)$ 에서 만나므로, $4 < a < 64$ 에 대해선 $x = 0, 1, 2$ 상에선 $y = 4^x$ 를 보고 격자점을 세고, $x = 3, 4$ 상에선 $y = a^{-x+4}$ 를 보고 격자점을 세면 된다. 그러면

- $x = 0$ 일 때 격자점은 $(0, 1)$ 로 1개뿐이고,
- $x = 1$ 일 때 격자점은 $(1, 1), \dots, (1, 4)$ 로 4개,
- $x = 2$ 일 때 격자점은 $(2, 1), \dots, (2, 16)$ 으로 16개,
- $x = 3$ 일 때 격자점은 $(3, 1), (3, 2), \dots, (3, a)$ 로 a 개,
- $x = 4$ 일 때 격자점은 $(4, 1)$ 로 1개

존재하므로 취합하면 $(22 + a)$ 개 존재한다. 따라서 $a = 18$ 일 때 40개가 된다. 물론, $a = 4$ 일 때 격자점이 총 26개 나오는 것도 잘 설명된다.

마지막으로 $a = 2, 3$ 인 경우를 보자.



$y = a^{-x+4}$ 가 점 $(1, 4)$ 를 지나기 위해선 $a^3 = 4$ 로 a 의 최솟값인 2를 취해도 성립할 수 없다. 즉, $y = a^{-x+4}$ 는 점 $(1, 4)$ 의 위로 지나가게 된다.

따라서 이때 격자점은 $x = 0, 1$ 상에선 $y = 4^x$ 를 보고 세고, $x = 2, 3, 4$ 일 때는 $y = a^{-x+4}$ 를 보고 세면 된다. 그러면

- $x = 0$ 일 때 격자점은 $(0, 1)$ 로 1개뿐이고,
- $x = 1$ 일 때 격자점은 $(1, 1), \dots, (1, 4)$ 로 4개,
- $x = 2$ 일 때 격자점은 $(2, 1), \dots, (2, a^2)$ 으로 a^2 개,
- $x = 3$ 일 때 격자점은 $(3, 1), (3, 2), \dots, (3, a)$ 로 a 개,
- $x = 4$ 일 때 격자점은 $(4, 1)$ 로 1개

존재하며, 취합해주면 $(a^2 + a + 6)$ 개가 된다. $a = 2$ 이면 14로 턱없이 부족하고, $a = 3$ 이어도 18로서 20에 미치지 못한다.

고로, $a = 4, 5, 6, \dots, 18$ 까지의 값만 가질 수 있으며 답은 $18 - 4 + 1 = 15$ 가 된다.

2013년 11월 대수능 수학 영역(B형) 20번

sol)

$3f(x) + 5g(x)$ 가 10의 배수라는 말은 곧 정수임을 전제하고 있으며, 따라서 $5g(x)$ 가 정수가 되어야 한다. 이를 만족하는 $g(x)$ 는

$$g(x) = 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$$

이고, 각 경우에 $3f(x) + 5g(x)$ 가 취할 수 있는 값은

$$3f(x), 3f(x) + 1, 3f(x) + 2, 3f(x) + 3, 3f(x) + 4$$

의 다섯 종류 뿐인데, 다시 $f(x)$ 도 정수임을 고려하면 적당한 정수가 존재해서 모두가 10의 배수가 될 수 있다. 가령,

$3f(x)$	$3f(x) + 1$	$3f(x) + 2$	$3f(x) + 3$	$3f(x) + 4$
3×10	$3 \times 3 + 1$	$3 \times 6 + 2$	$3 \times 9 + 3$	$3 \times 2 + 4$

이렇게 얼마든지 $3f(x) + 5g(x)$ 가 10의 배수가 되게 할 수 있다.

그런데 여기서 또 나아가, 이를 만족하는 x 의 크기 순으로 나열해서 2번째와 6번째 수를 찾길 요구하고 있다.

따라서, $x > 1$ 이므로 $\log x > 0$ 이고, $f(x) = 0, 1, 2, \dots$ 의 값을 취하므로 먼저 $f(x) = 0$ 인 것부터 순서대로 찾아보아야 한다.

그러면 $3f(x) + 5g(x) = 5g(x)$ 가 10의 배수가 되게 하는 $g(x)$ 는,

$$g(x) = 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$$

중에는 없으므로 패스하자.

다음으로 $f(x) = 1$ 인 것 중에서 찾자. 그러면 $3f(x) + 5g(x) = 3 + 5g(x)$ 가 10의 배수가 되게 하는 $g(x)$ 는 존재하지 않는다.

$f(x) = 2$ 이면 $3f(x) + 5g(x) = 6 + 5g(x)$ 이므로 $g(x) = \frac{4}{5}$ 를 취해주면

되고, 이는 조건을 만족하는 가장 작은 값이지만 답과 직접 연관은 안 된다.

$f(x) = 3$ 이면 $3f(x) + 5g(x) = 9 + 5g(x)$ 이므로 $g(x) = \frac{1}{5}$ 을 취해주면

되므로, $\log a = 3 + \frac{1}{5}$ 가 된다.

$f(x) = 4$ 이면 $3f(x) + 5g(x) = 12 + 5g(x)$ 이므로 적당한 $g(x)$ 가 존재하지 않고,

$f(x) = 5$ 여도 $3f(x) + 5g(x) = 15 + 5g(x)$ 이므로 적당한 $g(x)$ 가 존재하지 않는다.

$f(x) = 6$ 이면 $3f(x) + 5g(x) = 18 + 5g(x)$ 이므로 적당한 $g(x)$ 가 존재,

속도를 내어서 $f(x) = 7, 8$ 이면 적당한 $g(x)$ 가 존재하지 않고,

$f(x) = 9$ 면 적당한 $g(x)$ 가 존재하며 이는 4번째 값과 관련되어 있다.

$f(x) = 10$ 이면 적당한 $g(x)$ 가 존재하며 이는 5번째 값과 관련되어 있다.

$f(x) = 11$ 이면 적당한 $g(x)$ 가 존재하지 않으며,

$f(x) = 12$ 일 때 적당한 $g(x)$ 가 존재하며, 드디어 6번째 값과 관련된 것으로

$3f(x) + 5g(x) = 36 + 5g(x)$ 에서 $g(x) = \frac{4}{5}$ 인 경우로

$\log b = 12 + \frac{4}{5}$ 이다.

따라서, $\log ab = \left(3 + \frac{1}{5}\right) + \left(12 + \frac{4}{5}\right) = 16$ 이 되어 답은 ⑤ 16이다.

※ $3f(x) + 5g(x)$ 가 10의 배수가 되게 하는 정수 $f(x)$ 의 값을 순서대로 나열하자면

$2, 3, 6, 9, 10, 12, 13, 16, 19, 20, 22, 23, 26, 29, 30, \dots$

로서 일의 자리 숫자가 2, 3, 6, 9, 0이 반복되는 패턴이다.

2014년 03월 교육청 수학 영역(B형) 29번

sol)

준 식의 양변에서 n 자리에 $(n-1)$ 을 대입한 식을 생각해보자. 그러면

$$\begin{cases} a_1 \times a_2^2 \times \dots \times a_{n-1}^{n-1} \times a_n^n = 10^{n^2-n} \dots \textcircled{1} \\ a_1 \times a_2^2 \times \dots \times a_{n-1}^{n-1} = 10^{(n-1)^2-(n-1)} = 10^{n^2-3n+2} \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

라 할 수 있고, 식 ①에서 식 ②를 나누면 (단, $n \geq 2$)

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} ; a_n^n = 10^{(n^2-n)-(n^2-3n+2)} = 10^{2n-2} \quad (n \geq 2)$$

가 되어 $a_n = 10^{2-\frac{2}{n}} \quad (n \geq 2)$ 라 할 수 있다.

그리고 식 ①에서 $n = 1$ 을 대입해보면 $a_1 = 10^0 = 1$ 이 된다.

따라서, $\log a_k = 2 - \frac{2}{k} = 1 + \left(1 - \frac{2}{k}\right)$ 에서

$$0.99 = 1 - \frac{1}{100} = 1 - \frac{2}{200} = 1 - \frac{2}{k}$$

가 되므로 $k = 200$ 이 답이다.

2014년 04월 교육청 수학 영역(A형) 15번

sol)

밑 변환 공식을 이용하자.

$$\begin{cases} \frac{\log_c b}{\log_a b} = \log_c b \cdot \log_b a = \log_c a = \frac{1}{2} \rightarrow c = a^2 \\ \frac{\log_b c}{\log_a c} = \log_b c \cdot \log_c a = \log_b a = \frac{1}{3} \rightarrow b = a^3 \end{cases}$$

이고, $(a, b, c) = (a, a^3, a^2)$ 이고, a, b, c 모두 2, 3, 4, ..., 9 중의 값을

취해야 하므로 $a = 2, b = 8, c = 4$ 가 유일하며,

$a + 2b + 3c = 2 + 16 + 12 = 30$ 이다. 따라서 답은 ④ 30이다.

2014년 04월 교육청 수학 영역(A형) 30번

sol)

(가) 조건은 $f(a) = 2, g(b) = \frac{1}{4}$ 임을 알 수 있다. 그리고,

$$\log a = f(a) + g(a) = 2 + \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1)$$

라 두고서 (나)에 적용해보면, $g(a) = \alpha = 0$ 이면 $g\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ 이 되어 모순이

되기에 $0 < \alpha < 1$ 이라 할 수 있으며, 따라서 $g\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - \alpha$ 를 대입시

$$\alpha = (1 - \alpha) + \frac{1}{4} \rightarrow \alpha = g(a) = \frac{5}{8}$$

가 된다. 그러면 $\log a = f(a) + g(a) = 2 + \frac{5}{8}$ 를 얻고,

$$\log a^5 = 10 + \frac{25}{8} = 13 + \frac{1}{8}$$

에서 $f(a^5) = 13$ 이 된다. 끝으로

$$\begin{cases} \log b = f(b) + g(b) = f(b) + \frac{1}{4} \\ \log \frac{1}{b} = -f(b) - \frac{1}{4} = -f(b) - 1 + \left(1 - \frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{b}\right) + g\left(\frac{1}{b}\right) \end{cases}$$

에서 $f\left(\frac{1}{b}\right) = -f(b) - 1$ 을 (다) 조건에 대입했을 때

$$f(b) = -f(b) - 1 + 13 \rightarrow f(b) = 6$$

으로 $\log b = f(b) + g(b) = 6 + \frac{1}{4}$ 임을 알 수 있다. 이때

$$\log ab = \left(2 + \frac{5}{8}\right) + \left(6 + \frac{1}{4}\right) = 8 + \frac{7}{8} = \frac{71}{8}$$

이다. 따라서 $m + n = 79$ 가 답이다.

2014년 04월 교육청 수학 영역(B형) 27번

sol)

(가) 조건에서 a 의 정수 부분이 항상 두 자리이므로 $f(a) = 1$ 이다. 또, (나) 조건에서는 $f(b)$ 가 정수이고, $g(a)$ 는 가수이므로 $g(a) = \frac{1}{2}, f(b) = 0$ 이 된다. 이것으로 $\log a = f(a) + g(a) = 1 + \frac{1}{2}$ 이고,

$\log b = f(b) + g(b) = g(b)$
에서

$\log \frac{1}{b} = -g(b) = -1 + \{1 - g(b)\} = f\left(\frac{1}{b}\right) + g\left(\frac{1}{b}\right)$
가 되어 $g\left(\frac{1}{b}\right) = 1 - g(b)$ 이다. 이를 (다) 조건에 적용하면

$g(b) = 1 - g(b) + \frac{1}{2} \rightarrow g(b) = \frac{3}{4}$
가 되어 $\log b = g(b) = \frac{3}{4}$ 이다. 이때,

$\log ab = \log a + \log b = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$
이므로 답은 $m + n = 13$ 이다.

2014년 06월 평가원 수학 영역(A형) 30번

sol)

10을 기준으로 a, b 가 어디에 위치하느냐에 따라 우선 세 가지로 경우를 나눌 수 있다.

(i) $10 \leq a \leq b \leq 20$
 $f(x) = \log x - [\log x]$ 에서 $[\log x] = 1$ 인 경우로
 $f(a) = \log a - 1, f(b) = \log b - 1$ 이고, (나) 조건에 대입하면
 $\log b - \log a \leq f(a) - f(b)$
 $= \{f(a) + 1\} - \{f(b) + 1\} = \log a - \log b$
가 되어 결국 $a = b$ 일 수 밖에 없다. 이를 만족하는 순서쌍은 11개.

(ii) $1 \leq a < 10 \leq b \leq 20$
 $f(a) = \log a, f(b) = \log b - 1$ 이고, (나) 조건에 대입하면
 $\log b - \log a \leq f(a) - f(b) = \log a - (\log b - 1)$
 $\Leftrightarrow \log b - \log a \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{b}{a} \leq \sqrt{10} \Leftrightarrow b^2 \leq 10a^2$

이를 만족하는 순서쌍은
 $(a, b) = (4, 10), (4, 11), (4, 12), (5, 10), \dots, (5, 15),$
 $(6, 10), \dots, (6, 18), (7, 10), \dots, (20),$
 $(8, 10), \dots, (8, 20), (9, 10), \dots, (20)$
으로 총 $3 + 6 + 9 + 11 + 11 + 11 = 51$ 개.

(iii) $1 \leq a \leq b < 10$
 $\log b - \log a \leq f(a) - f(b) = \log a - \log b$
이므로 이를 만족하려면 $a = b$ 가 되어야 하므로, 순서쌍은 9개 있다.
고로, (i), (ii), (iii)의 결과를 종합하면 $11 + 51 + 9 = 71$ 이 답이다.
※ (ii) $1 \leq a < 10 \leq b \leq 20$ 일 때 헤아림기가 까다로운데,
 $11^2, 12^2, 13^2, 14^2, 15^2, 16^2, 17^2, 18^2$ 정도는 구구단처럼 계산이 되어야 막히지 않고 풀 수 있다.

2014년 07월 교육청 수학 영역(A형) 17번

sol)

우선 $a^{\log_5 16} = a^{4\log_5 2} = (a^{\log_5 2})^4 = (2^{\log_5 a})^4$ 라 고칠 수 있다. 그러면
 $(2^{\log_5 a})^4 = 2^n \ (n = 1, 2, 3, \dots)$ 꼴이 되어야 하므로
 $4\log_5 a = n = 1, 2, 3, \dots$
즉, $a = 5^{\frac{n}{4}} \ (n = 1, 2, 3, \dots)$ 가 되어야 한다. 그러면 $\log_5 a_k = \frac{k}{4}$ 이므로
 $\sum_{k=1}^{40} \frac{k}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{40 \cdot 41}{2} = 205$ 로 ㉔ 205가 답이다.

2014년 07월 교육청 수학 영역(A형) 27번

sol)

우선 $1 < \log x < 2$ 이고, 주어진 가수 조건을 이용하여 정수가 나오도록 조작하면

$\log \sqrt{x} - 5\log \frac{1}{x} = \frac{11}{2} \log x$
 $\frac{11}{2} < \frac{11}{2} \log x < 11 \rightarrow \frac{11}{2} \log x = 6, 7, 8, 9, 10$

이 된다. 여기서 필터링을 해서 유의미한 값을 골라내자.

$\log x$	$\frac{12}{11}$	$\frac{14}{11}$	$\frac{16}{11}$	$\frac{18}{11}$	$\frac{20}{11}$
$\log \sqrt{x}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{10}{11}$
$\log \frac{1}{x}$	$-\frac{12}{11}$	$-\frac{14}{11}$	$-\frac{16}{11}$	$-\frac{18}{11}$	$-\frac{20}{11}$
가수 조건	X	X	X	X	O

그러면 $\log \sqrt{x} = \frac{10}{11}, \log \frac{1}{x} = -\frac{20}{11} = -2 + \frac{2}{11}$ 만 유일하게 조건을 만족한다. 이때 $\log x = \frac{20}{11}$ 이 되어 $p + q = 31$ 이 답이다.

2014년 08월 경찰대 수학 03번

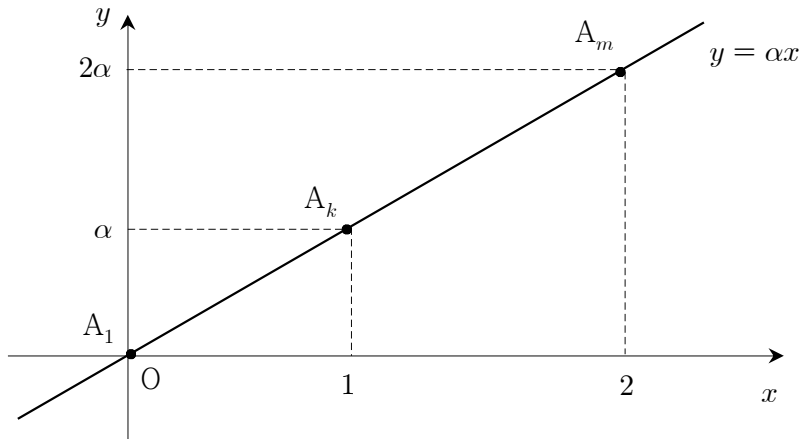
sol)

m 은 상용로그의 지표를 통해, n 은 상용로그의 가수를 통해 각각 구할 수 있다. 그러면 $\log 5^{25} = 25 \times 0.6990 = 17.475$ 으로 $m = 18, n = 2$ 가 되어 답은 ㉔ 20이다.
※ 만약, 어차피 미비한 소수점 차이는 결과에 영향을 주지 않을 것이므로 $\log 5 = 0.7$ 이라 두고 계산 해버리면 $\log 5^{25} = 17.5$ 가 되어, $m = 18, n = 3$ 으로 다른 결과가 나온다. 사실 $\log 2, \log 3, \log 5$ 등은 모두 소수점 아래 다섯째 자리에서 반올림하여 넷째 자리까지 나타낸 엄연한 근삿값이다. 가령, $\log 2 = 0.3010$ 이 한 치의 오차도 없는 참값이라 가정하고서 $A = 2^{1000}$ 를 상용로그 취해보면
 $\log A = \log 2^{1000} = 1000 \log 2 = 301$
이 되고, 이는 다시 $A = 10^{301}$ 으로 $2^{1000} = 10^{301}$ 이라는 모순된 결과를 얻게 된다.

2014년 08월 사관학교 수학 30번

sol)

$A_1(0, 0)$ 이고, $1 \leq f(k) \leq f(m)$ 이므로 세 점 A_1, A_k, A_m 가 모두 직선 $x = 0$ 위에 있을 수는 없다. 그리고 $f(k), f(m)$ 은 정수이므로 $f(k) = 1, f(m) = 2$ 가 되어야 한다.



그러면 $10 < k < 100 < m < 1000$ 이고,

$$A_k([\log k], \log k - [\log k]) = (1, \alpha)$$

$$A_m([\log m], \log m - [\log m]) = (2, 2\alpha)$$

에서 세 점이 원점을 지나는 직선 $y = \alpha x$ 에 놓여 있어야 한다. 그리고

$$\log k = 1 + \alpha, \log m = 2 + 2\alpha \rightarrow 2\log k = \log m$$

으로부터 $k^2 = m$ 이고, 그러면 $k + m = k + k^2$ 의 최댓값은

$$31^2 = 961 < 1000 < 1024 = 32^2$$

임을 이용하여, $k = 31, m = 961$ 일 때 992가 된다.

2014년 09월 평가원 수학 영역(B형) 21번

sol)

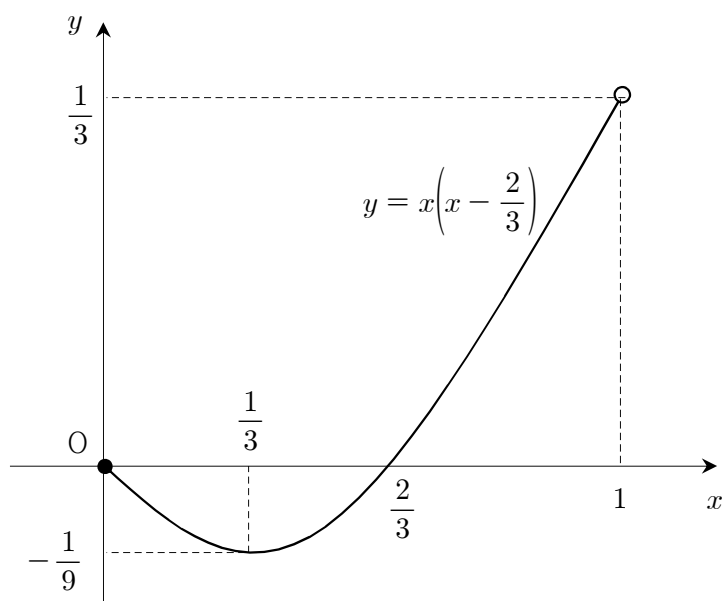
$\log t = f(t) + g(t)$ 에서 t 가 양수라 하였으니 딱히 범위에 제한을 두지는 않았다. 이때 지표 $f(t)$ 는 임의의 정수를 취할 수도 있고, 가수 $g(t)$ 에 대해서는 $0 \leq g(t) < 1$ 이 성립한다.

그러면 $f(t) = 9n\left(g(t) - \frac{1}{3}\right)^2 - n$ 에서 좌변이 확실히 정수이므로 우변도

정수여야 한다. 편의상 $g(t) = \alpha$ 라 하면 준 식의 우변은 다시

$$9n\left(\alpha - \frac{1}{3}\right)^2 - n = 9n\alpha\left(\alpha - \frac{2}{3}\right)$$

로 정리할 수 있다. 그런데 $0 \leq \alpha < 1$ 에서 $\alpha\left(\alpha - \frac{2}{3}\right)$ 이 갖는 값은



$-\frac{1}{9}$ 이상, $\frac{1}{3}$ 미만으로 $-n \leq f(t) < 3n$ 를 만족하는 정수이다. 즉,

$$f(t) = -n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, 3n-2, 3n-1$$

을 취할 수 있다. 그리고 이미 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$ 의 꼴로부터 a_n 이 n 에 대한 이차식일 것이라 예측할 수 있다.

따라서, $a_n = \frac{3n(3n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} - 3n = 4n^2 + \dots$ 이라 두고

계산했을 때 답은 ① 4가 됩니다.

※ 지금까지 쓰인 개념을 보아하니

1. 상용로그의 지표와 가수의 분리
2. 가수의 해석 - 이차함수의 범위
3. 지표 값 연산 - 등차수열의 합
4. 극한값 계산

그리고 그밖에 소소한 계산 테크닉들이 어우러져 있다. 도저히 이 풀이가 와 닿지 않는다면 $n = 1, 2, 3, \dots$ 등을 대입하여 발견적 추론을 통해 풀 수도 있다.

2014년 10월 교육청 수학 영역(A형) 25번

sol)

한 마디로 요약하자면, “2보다 숫자 배열이 작은 99 이하 자연수”이고,

$n = 1, 10, 11, 12, \dots, 19$ 로 집합 A 의 원소의 개수는 11이다.

2014년 11월 대수능 수학 영역(A형) 15번

sol)

$\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x} \leq 5^{x+4}$ 의 양변에 밑이 5인 로그를 취하자. 그래도 부등호 방향은 보존된다.

$$2x - 1 \leq x + 4 \Leftrightarrow x \leq 5$$

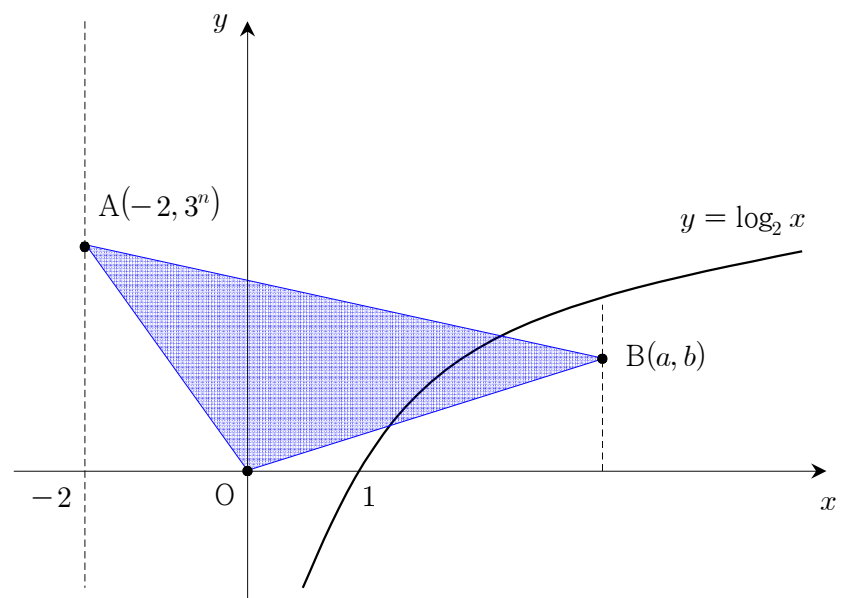
따라서, 이를 만족하는 모든 자연수 x 의 값의 합은

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ 이다. 답은 ⑤ 15이다.

2014년 11월 대수능 수학 영역(A형) 30번

sol)

일단 대략적인 위치를 파악하기 위해 그려보자.



여기서 삼각형 OAB의 넓이를 사선식을 통해 구해보면

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & a-2 & 0 \\ 0 & b & 3^n \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (a \cdot 3^n + 2b) \leq 50$$

에서 $a \cdot 3^n + 2b \leq 100$ 이라 정리할 수 있다. 그리고 (나) 조건의

$$b \leq \log_2 a \Leftrightarrow a \geq 2^b$$

을 고려해서, $f(1)$ 을 구하기 위해 $n = 1$ 부터 대입하면 $3a + 2b \leq 100$ 이 성립한다.

이때 $b = 1$ 이면 $a \geq 2$ 이고, $3a \leq 98$ 을 만족하는 자연수 a 는 $a = 2, 3, \dots, 32$ 로 총 31개의 순서쌍 (a, b) 이자 꼭짓점 B의 위치가 존재하게 된다.

그리고 $b = 2$ 이면 $a \geq 4$ 이고, $3a \leq 96$ 을 만족하는 자연수 a 는 $a = 4, 5, \dots, 32$ 로 총 29개가 있고,

$b = 3$ 이면 $a \geq 8$ 이고, $3a \leq 94$ 를 만족하는 자연수 a 는 $a = 8, 9, \dots, 31$ 로 총 24개가 있다.

$b = 4$ 이면 $a \geq 16$ 이고, $3a \leq 92$ 를 만족하는 자연수 a 는 $a = 16, 17, \dots, 30$ 으로 총 15개가 있다.

$b = 5$ 이면 $a \geq 32$ 이고, $3a \leq 90$ 을 만족하는 자연수 a 는 존재하지 않는다.

같은 방법으로 $b \geq 6$ 인 경우 만족하는 자연수 a 는 존재하지 않는다.

그리고 $f(1) = 31 + 29 + 24 + 15 = 99$ 이다.

이제 $f(2)$ 를 구하기 위해 $n = 2$ 를 대입하면 $9a + 2b \leq 100$ 이 성립한다.

이때 $b = 1$ 이면 $a \geq 2$ 이고, $9a \leq 98$ 을 만족하는 자연수 a 는 $a = 2, 3, \dots, 10$ 으로 총 9개가 있다.

$b = 2$ 이면 $a \geq 4$ 이고, $9a \leq 96$ 을 만족하는 자연수 a 는 $a = 4, 5, \dots, 10$ 으로 총 7개가 있다.

$b = 3$ 이면 $a \geq 8$ 이고, $9a \leq 94$ 를 만족하는 자연수 a 는 $a = 8, 9, 10$ 으로 총 3개가 있다.

$b = 4$ 이면 $a \geq 16$ 이고, $9a \leq 90$ 을 만족하는 자연수 a 는 존재하지 않는다.

같은 방법으로 $b \geq 5$ 인 경우 만족하는 자연수 a 는 존재하지 않는다.

그리고 $f(2) = 9 + 7 + 3 = 19$ 이다.

마지막으로 $f(3)$ 을 구하기 위해 $n = 3$ 을 대입하면 $27a + 2b \leq 100$ 이다.

$b = 1$ 이면 $a \geq 2$ 이고, $27a \leq 98$ 을 만족하는 자연수 a 는 $a = 2, 3$ 뿐이고,

$b = 2$ 이면 $a \geq 4$ 이고, $27a \leq 96$ 을 만족하는 자연수 a 는 존재하지 않는다.

같은 방법으로 $b \geq 3$ 인 경우 만족하는 자연수 a 는 존재하지 않는다.

그리고 $f(3) = 2$ 이다.

고로, 이를 종합하면 $f(1) + f(2) + f(3) = 99 + 19 + 2 = 120$ 이다.

< PART.A 헤어림의 원리 정답표 >

(예 비 평가) ②/17	2004년	2005년	2006년	2007년	2008년	2009년	2010년	2011년	2012년	2013년	2014년
3월 교육청		③/①		⑤/669	⑤	80	6/①		④	540	200
4월 교육청	1	28		32		③	②	170		150	④/79/13
5월 교육청									(예 비 평가) ⑤		
6월 평가원			⑤/37		80/11	③/10	27/40	100	86/①	12/④	71
7월 교육청		④				②		③/④	27	42/12	⑤/31

8월 사관학교		60		③/22	75	②/171	②/256			⑤/13	992
8월 경찰대		⑤					②	②			②

9월 평가원								392/②	79	④/103	①
10월 교육청				①			②			4	11
11월 수능			⑤		20		77	⑤	573	①/②/15/ ⑤	⑤/120